

# METODE NUMERICE: Tema #4

## Ecografie cardiaca. Integrare numerica

Termen de predare: 23 Mai 2014

Titulari curs: *Florin Pop, George Popescu*

Responsabil Tema: **Florin Pop**

### 1 Obiective

Ecografia cardiaca sau *ecocardiografia* a devenit o metoda indispensabila in diagnosticul, aprecierea severitatii si monitorizarea tratamentului pentru majoritatea afectiunilor cardiovasculare. Imagistica medicala realizeaza prelucrarea de imagini ale organelor sau tesuturilor, prin diferite tehnici, cu scopul de a le folosi pentru a diagnostica bolile. Analiza contururilor, a suprafetelor si volumelor (pentru ecografii 2D si 3D) permit analiza cantitativa si comparativa a imaginilor medicale.

Dupa realizarea acestei teme de casa studentul va fi capabil sa utilizeze metodele de integrare numerica pentru functii numerice discrete, sa extinda integrarea prin metode directe din 2D in 3D pentru calculul de volume, sa utilizeze metode noi de integrare numerica prin tehnici de tip Monte-Carlo, sa vizualizeze in 3D datele numerice rezultate in urma unui experiment real (o ecocardiografie).

Cunostintele necesare rezolvarii acestei teme de casa: Programare in MATLAB (programare elementara, citirea datelor de test din fisiere structurate); Metode de integrare numerica; Elemente de geometrice in spatiu si geometrice analitica; Generarea numerelor aleatoare.

## 2 Descrierea problemei

Tehnicile moderne de ecografie computerizata fac posibile investigarea detaliata a corpului uman. Cele mai simple metode se bazeaza pe preluarea de imagini 2D folosind diverse sectiuni si reconstruirea 3D a acestora.

**Modelarea sectiunilor transversale ale inimii.** Informatia primita de la ecograf este reprezentata printr-un numar de fisiere de date preluate din contururile diferitelor sectiuni transversale ale unei inimii. Datele au fost obtinute din analiza ecografica considerand diverse sectiuni ale organului prin fotografierea fiecarei dintre acestea. Contururile au fost apoi determinate prin tehnici de procesare a imaginii [1]. Fiecare sectiune transversala corespunde cu o curba inchisa, avand conturul definit de prin puncte.

Pentru ecografia folosita ca test avem 9 fisiere de date. Astfel `heart1.dat` contine puncte preluate din partea de jos a inimii (avand coordonata  $z$  cu cea mai mica valoare), iar `heart9.dat` contine puncte preluate din partea superioara a inimii (coordonata  $z$  are cea mai mare valoare). Fiecare contur este definit prin puncte de forma  $(x_i, y_i, z_i)_{1 \leq i \leq n}$  unde numarul  $n$  de puncte este diferit pentru fiecare sectiune a inimii iar  $z_i$  este constant pentru fiecare sectiune (pentru un fisier dat). O imagine 3D a celor 9 sectiuni este redada in Figura 1.

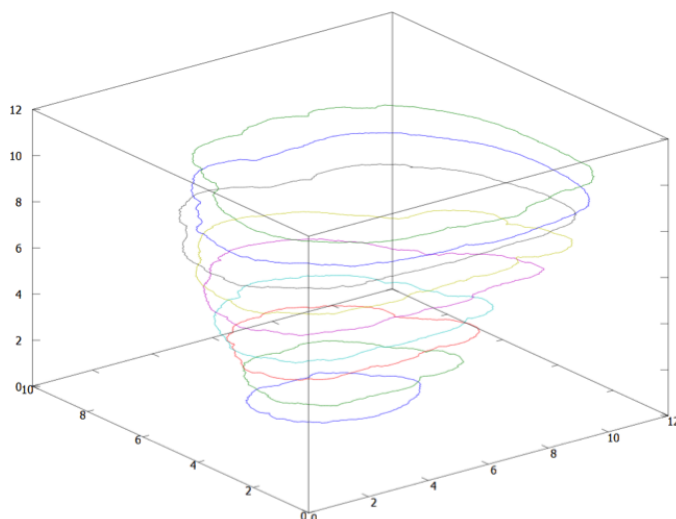


Figure 1: Reprezentarea grafica a datelor pentru o ecocardiografie (pentru cele 9 fisiere de test).

## 3 Puncte aleatoriu si uniform distribuite (30p)

Definiti o metoda pentru generarea unui numar  $N$  de puncte aleatoriu si uniform distribuite in domeniul  $D = [a, b] \times [c, d]$ . Un exemplu de astfel de puncte poate fi observat in Figura 2, pentru  $N = 512$ . Se va explica in fisierul README metoda propusa.

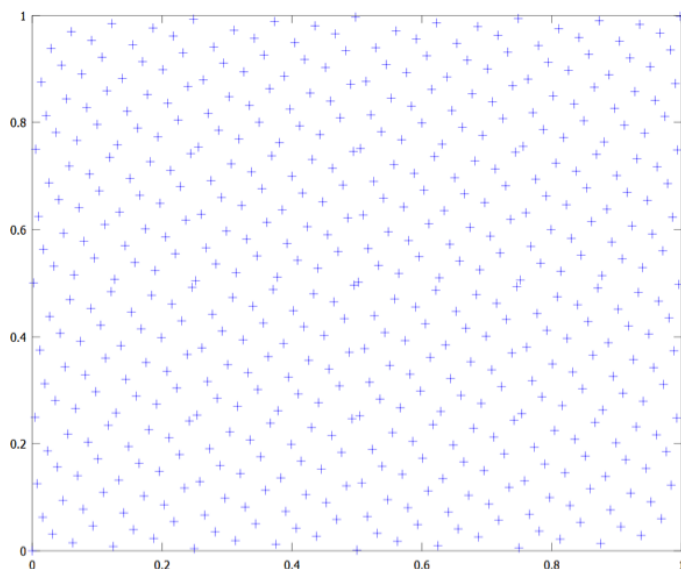


Figure 2: Puncte aleatoriu si uniform distribuite:  $D = [0, 1] \times [0, 1]$ ,  $N = 512$ .

Functia MATLAB va avea semnatura `function [x, y] = Gen2DPoints(N,a,b,c,d)`, avand ca rezultat vectorii  $x$  si  $y$  reprezentant coordonatele celor  $N$  puncte generate.

## 4 Aria unei suprafete inchise (50p)

Ne intereseaza calculul ariei unei sectiuni transversale a inimii (suprafata inchisa). Pentru aceasta se vor defini si implementa doua metode de integrare numerica:

1. Integrare folosind metoda trapezelor, similara cu cea prezentata in cadrul cursului, dar pentru care coordonatele  $x$  nu sunt echi-distante. Functia MATLAB va fi `function I = Trapez(x, y)`.

Atentie! In datele de test este posibil ca doua puncte consecutive sa aiba coordonatele  $x$  egale. Acesta nu este un caz de eroare, ci unul care trebuie considerat in definirea metodei de integrare.  $x$  si  $y$  reprezinta coordonatele punctelor unui contur pentru un fisier considerat din esantionul datelor de test.

2. O metoda de integrare de tip **Monte-Carlo** [2, 3]. Pentru aceasta se va porni de la *Teorema valorii medii pentru integrale*: daca  $f(x)$  este o functie continua pe intervalul  $D = [a, b]$ , atunci exista un numar real  $c$ , cu  $a < b < c$ , astfel incat  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) = f(c)$ .

Daca scriem relatia data de aceasta teorema sub forma  $\int_a^b f(x) = (b-a)f(c)$ , putem trage concluzia ca aria de sub graficul functiei  $f$  in intervalul  $[a, b]$  este egala cu aria unui dreptunghi cu una din laturi  $(b-a)$  si cealalta  $f(c)$  (numita si valoarea medie a functiei pe acel interval). Pentru a estima valoarea integralei folosind o metoda Monte-Carlo vom urma pasii:

- (1) Se aleg  $n$  numere uniform distribuite  $x_1, x_2, \dots, x_n$  in intervalul  $[a, b]$ .
- (2) Se determina valoarea functiei in fiecare punct,  $f(x_i)$ , si se calculeaza valoarea medie a functiei:  $\bar{f} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$ .
- (3) Se calculeaza valoarea aproximativa a integralei ca fiind  $(b - a)\bar{f}$ .

Pentru un domeniu  $D$  considerat in spatiul bidimensional, aria unei curbe inchise se poate calcula astfel:

- (1) Se defineste domeniul  $D$  ca un patrat ce incadreaza cat mai bine curba (avand cat mai multe laturi tangente la curba).
- (2) Se genereaza apoi un numar  $N$  de puncte aleatoriu si uniform distribuite in domeniul  $D$  si se contorizeaza numarul de puncte interioare curbei,  $N_{int}$ .
- (3) Aria curbei este data de produsul dintre aria domeniului si raportul dintre numarul de puncte interioare si numarul total de puncte:  $A(curba) = \frac{N_{int}}{N} A(D)$ .

Fie un contur inchis definit de vectorii de coordonate  $\mathbf{x}$  si  $\mathbf{y}$ . Scrieti o functie `function A = MonteCarlo(x, y, tol)`, unde `tol` reprezinta toleranta acceptata pentru calculul ariei  $A$ . Pentru aceasta se va calcula aria pentru un numar de puncte  $N$  si apoi se va dubla numarul de puncte, procedeul oprindu-se atunci cand  $|A(2N) - A(N)| \leq tol$ . Pentru a calcula  $N_{int}$  se va defini o functie implementata de voi (puteti consulta [5]) si nu se vor folosi functii specifice existente in MATLAB/Octave.

## 5 Volumul inimii (50p)

Propuneti voi o metoda pentru a calcula volumul unei inimii, folosind ariile sectiunilor obtinute in urma unei ecocardiografii. Definiti o functie de test care primeste ca parametru calea catre directorul unde se afla datele de test si care va afisa pe ecran urmatoarele informatii:

- Ariile sectiunilor inimii (numere reale cu 3 zecimale) calculate cu metoda 1., pe o singura linie, separate printr-un spatiu.
- Ariile sectiunilor inimii (numere reale cu 3 zecimale) calculate cu metoda 2., pe o singura linie, separate printr-un spatiu.
- Valorile volumului inimii, calculate cu cele doua metode (numere reale cu 3 zecimale), pe o singura linie, separate printr-un spatiu.

Semnatura functiei va fi: `function HeartModel(path)`. Pentru a lista continutul unui director folositi functia MATLAB `dir` [4]. Un exemplu de rezultat este:

```
octave:florinpop-mac> HeartModel('heart_test')
10.547 15.946 20.978 27.626 35.813 45.500 57.132 64.361 65.002
10.585 15.852 21.038 27.473 35.861 45.499 57.044 64.022 66.810
339.555 339.943
```

Pentru testele date, timpul de executie total poate varia de la 30–90 sec, cu precizia  $\tau_{01}$  variind de la 1–0.001.

## References

- [1] Digital Image Processing, Chapter 5, Part II. Segmentation: Edge-based segmentation, <http://www.engineering.uiowa.edu/~dip/LECTURE/Segmentation2.html#tracing>
- [2] John H. Mathews, Monte Carlo Integration, <http://math.fullerton.edu/mathews/n2003/montecarlomod.html>, 2005
- [3] Richard Fitzpatrick, Monte-Carlo integration, <http://farside.ph.utexas.edu/teaching/329/lectures/node109.html>, 2006
- [4] List folder contents, <http://www.mathworks.com/help/matlab/ref/dir.html>, 2013
- [5] Eric Haines, Point in Polygon Strategies, <http://erich.realtimerendering.com/ptinpoly/>, 2001.