

Коддер

VS

Разработчик

Оценка "хорошести" алгоритма

Бабушкин
компьютер

20.

МФТИ

Q1c

Измерим кол-во "тактов".

RAM - модель:

ВВОДА / ВЫВОДА

↳ 1 такт

СРАВНЕНИЙ

↳ 1 такт.

Асимптотический анализ

\forall - для любого
 \exists - существования
 $\exists!$ - // и единств.

$\forall x > 0$
 $\exists x > 0$
 $\exists! x > 0$

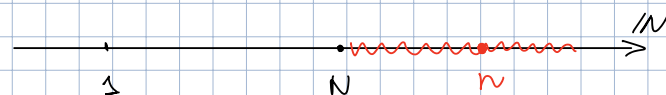
Определения:

$$f = \underline{O}(g)$$

f и g - функции

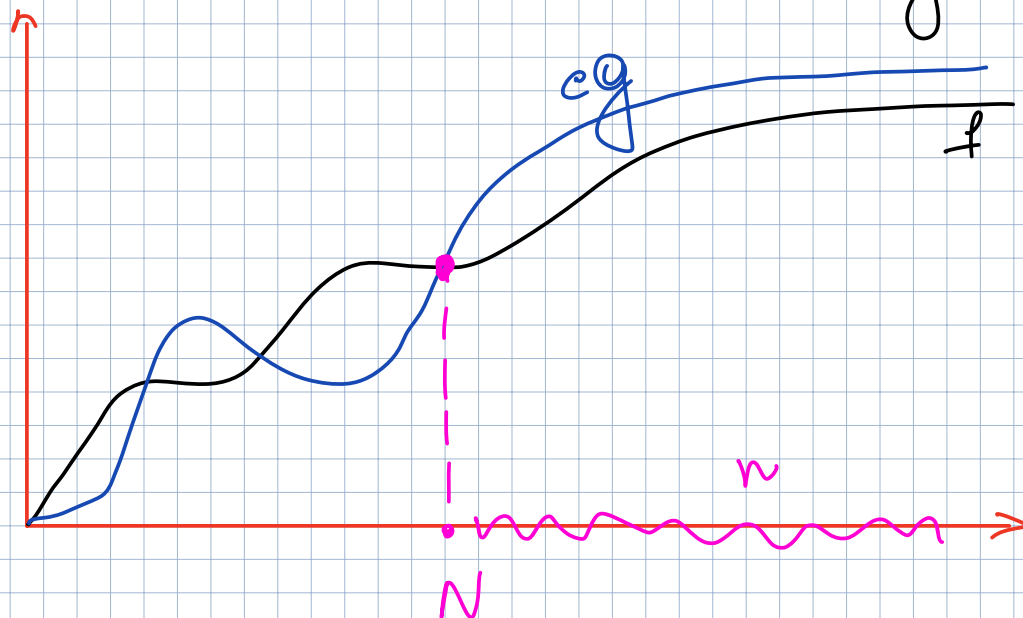
$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$



то есть, что $f = \underline{O}(g)$, если

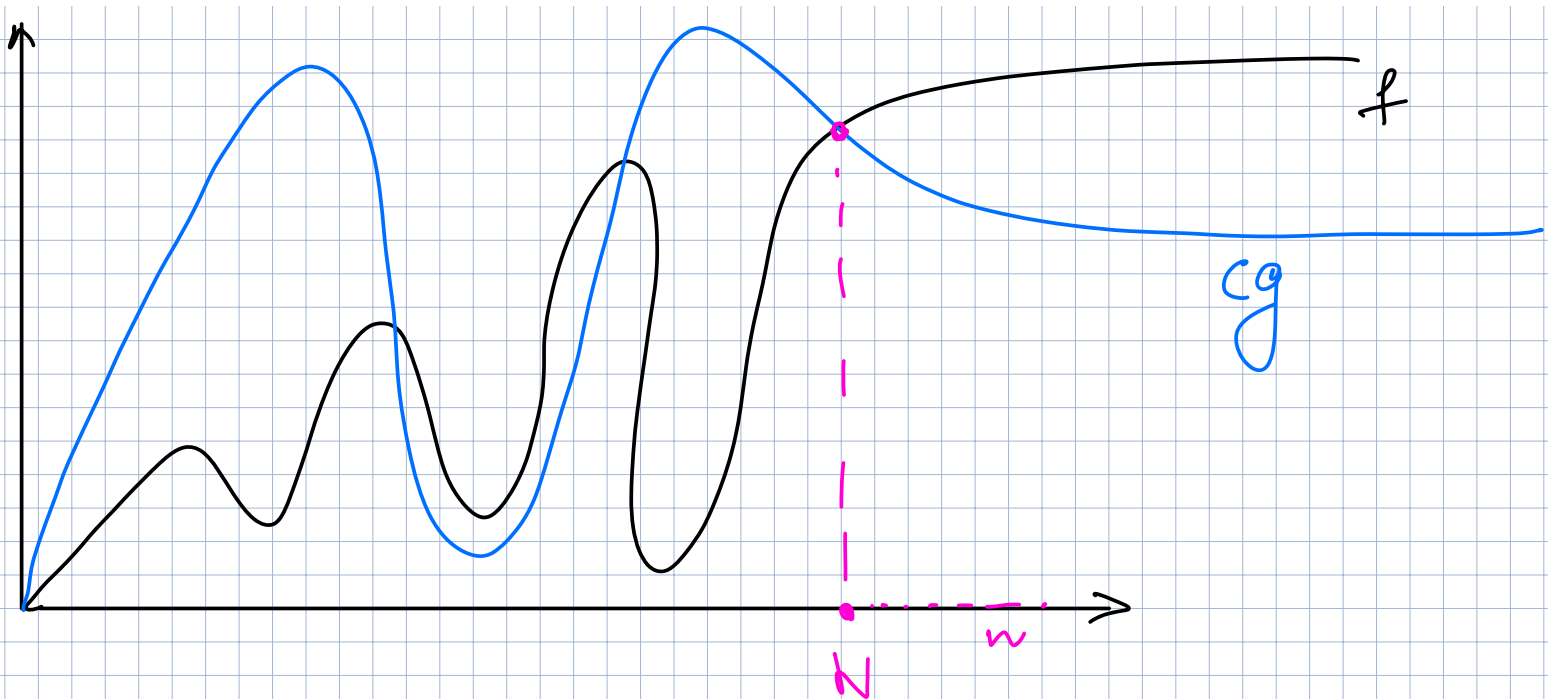
$$\exists c > 0 \quad \exists N > 0 \quad \forall n > N \quad f(n) \leq cg(n)$$



Def (тепловая оценка)

то есть, что $f = \underline{\Omega}(g)$, если

$$\exists c > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad f(n) \geq cg(n)$$



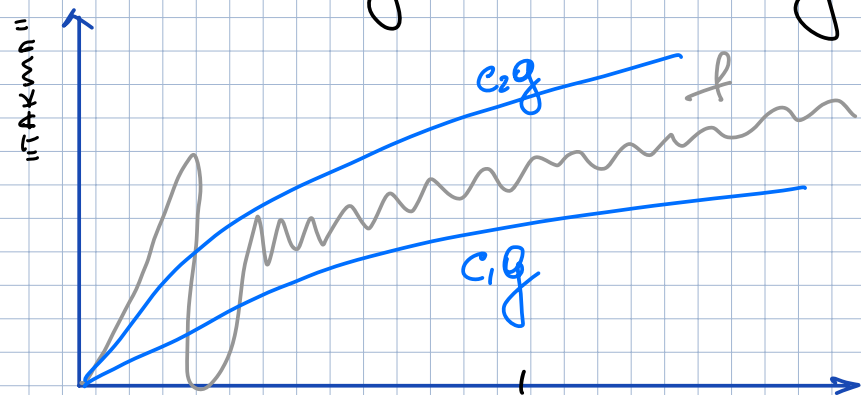
Def (примерно равно)

$$f = \Theta(g), \text{ если}$$

$$\exists c_1 > 0 \exists c_2 > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \quad c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

что это значит:

$$\begin{aligned} f = \underline{O}(g) \\ f = \underline{\Omega}(g) \end{aligned} \Bigg| \Rightarrow f = \Theta(g)$$



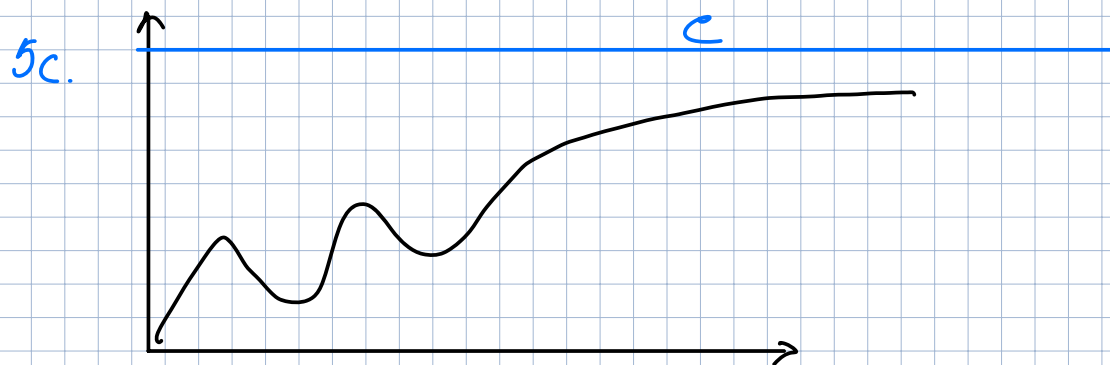
RAM-модель

N кол-во
данных

Ввод и Вывод $\rightarrow O(1)$
сравнение $\rightarrow O(1)$

$O(1)$ - константное время выполнения.

$f = O(1)$, если $\exists c > 0 \exists N \forall n > N$
 $f(n) \leq c \cdot 1 = c$



$O(N)$ - линейное время выполнения.

$O(\sqrt{N})$

Пример: $N = 10^4 \Rightarrow O(\sqrt{N}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sim 10^2$$

$$\Rightarrow \underline{O}(N) \Rightarrow \Rightarrow \sim 10^4$$

$\underline{O}(\log N)$ — логарифмическое в.р. в.

$$\underline{O}(N \log N)$$

$\underline{O}(N^2)$ — квадратичное в.р. в.

Пример: сортировки →

полный
перебор

$$\underline{O}(N!)$$



$$N=5$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$$

$$= 120$$

$$N=100$$

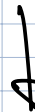
$$100! \sim 100^{100}$$

Merge Sort

$$\underline{O}(N \log N)$$



$$6$$



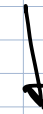
$$220$$

пузырьком (Bubble)

$$\underline{O}(N^2)$$



$$5^2 = 25$$



$$100^2 = 10000$$

Примеры:

1) $f = \underline{O}(10n)$

$$\exists c \exists N \forall n > N$$

$$\exists c, \exists N \forall n > N$$

"
10.c

$$f(n) \leq \underbrace{c \cdot 10n}_{c_1 = c \cdot 10}$$

$$f(n) \leq c_1 n \Leftrightarrow f = \underline{O}(n)$$

2) $f = \underline{O}(n^2 + n)$

$$\exists c \exists N \forall n > N$$

$$f(n) \leq c(n^2 + n) =$$

$$= \underbrace{cn^2 + cn}_{\Leftrightarrow} \leq c_1 n^2$$

\Leftrightarrow

$$c + \frac{c}{n} \leq c_1$$

$n \in \mathbb{N}$

$$n=1$$

$$c + c \leq c_1 \Rightarrow c_1 = 3c$$

$$n=2$$

$$c + \frac{c}{2} \leq c_1 \Rightarrow c_1 = 3c$$

$$\exists c_1 = 3c \quad \exists N \forall n > N \quad f(n) \leq c_1 n^2 \Rightarrow \\ f(n) = \underline{O}(n^2)$$

Beispiel: $\underline{O}(n^2 + n) = \underline{O}(n^2)$

$$\underline{O}(5n^5 + n^7 + 3n + 9n^{10}) = \underline{O}(n^{10})$$

3) $f = \underline{O}(n^2 + \log n)$

$$\exists c \exists N \forall n > N$$

$$f \leq c(n^2 + \log n) \leq$$

$$\leq c(n^2 + n)$$

$$f = \underline{O}(n^2 + n) = \underline{O}(n^2)$$

4) $\underline{O}(\ln(n)) = \underline{O}(\lg(n))$

$$\ln(n) = \log_e n$$

$$\lg(n) = \log_{10} n$$

$$\log_a b = \frac{\log_k b}{\log_k a}$$

$$f = \underline{O}(\ln(n)) \Rightarrow \exists c \exists N \forall n > N$$

$$f(n) \leq c \ln(n) = c \frac{\log_{10} n}{\log_{10} e} = \boxed{\frac{c}{\log_{10} e}} \lg n$$

" c_1

$$\exists c_1 = \frac{c}{\log_{10} e} \exists N \forall n > N \quad f(n) \leq c_1 \lg n$$

\Downarrow

$$f(n) = \underline{O}(\lg(n))$$

Программа

Простое число $\rightarrow \vdots$ на себя
 $\rightarrow \vdots$ на единицу

2; 3; 5; 13

1 - не простое

Алгоритм проверки на простоту.

N - простоту легко проверить

$O(1)$ counter = 0
 for i = 1 ... N :
 {
 $O(N)$ εcu N : i ↳ counter += 1
 }
 }

$O(1)$ εcu counter > 2:

$O(1)$ BAGED u (BcE nnoxo)

$O(1)$ unare

$O(1)$ BAGED u (BcE xpaouo)

$$O(1) + N \cdot O(1) + O(1) \cdot 4 = 5 \cdot O(1) + N \cdot O(1) =$$

$$= O(5) + O(N) = O(5+N) =$$

$$= O(N)$$

counter = 0

for i = 2 ... (N-1):

{

если

$N \div i$

↳

counter += 1

}

если

counter > 0:

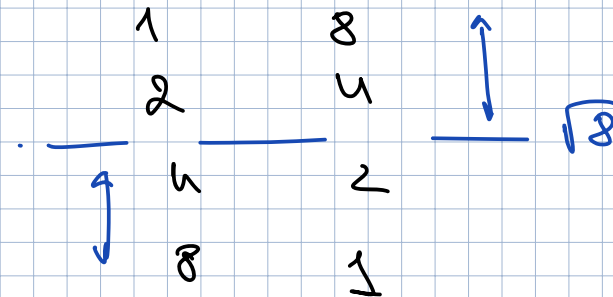
Вывести (все примо)

иначе

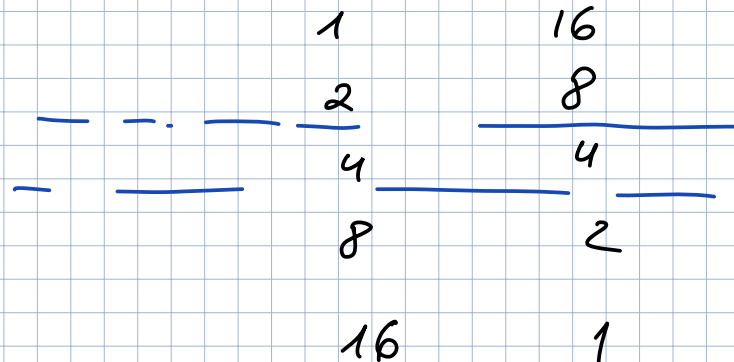
Вывести (все композ)

$$(N-2) \underline{O}(1) = \underline{O}(N-2) = \underline{O}(N)$$

8 →



16 →



$$\sqrt{16}$$

counter = 0

$O(\sqrt{N})$

for i = 2 ... \sqrt{N} :

$\lceil \sqrt{N} \rceil$
 $\lfloor \sqrt{N} \rfloor$

- округлим
вверх.

{

если N : i

↳

counter += 1
break

}

если

counter > 0:

Вывести (Все плохо)

иначе

Вывести (Все хорошо)

$O(\sqrt{N})$