Вычислительная геометрия.

I Точки и вектора (2D)

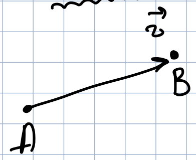
а)

Точка

• (x,y)

```
struct Point{
    int x;
    int y;
}
```

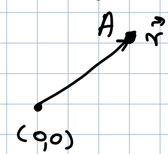
"Луч"
Вектор



$\vec{v} = \vec{AB}$

{B.x - A.x, B.y - A.y}

радиус-вектор

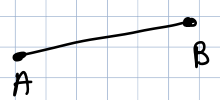


vector ~ точка

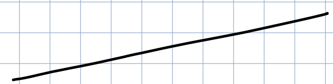
↑
вектор

```
struct Vector{
    int x;
    int y;
}
```

отрезок

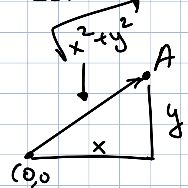


прямая



б) Что есть у векторов:

• Длина




```
функ lenght(Vector v){
    return sqrt(v.x*v.x +
                v.y*v.y)
```

$|\vec{v}|$ - длина вектора

Замечание:

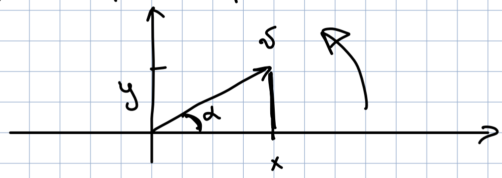
```
lenght2 (Vector v)
    return v.x*v.x + v.y*v.y
```

в) Арифм. операции

```
Vector operator+(Vector v){
    return {x+v.x, y+v.y}
}
Vector operator-(Vector v){
    return {x-v.x, y-v.y}
}
```

```
Vector operator * (int c) {
        return { c*x, c*y }
}
```

② Угол (ориентиров.)



$$\begin{cases} y = \sin\alpha \cdot |v| \\ x = \cos\alpha \cdot |v| \end{cases}$$

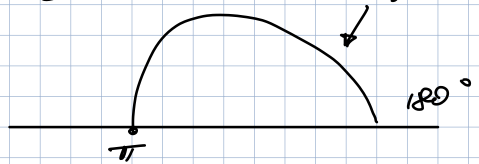
$$\frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

atan2(x, y)

⑨ Радианы ↔ градусы

это полуокружность

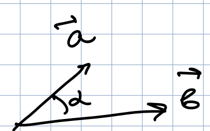


1 радиан $= \frac{180}{\pi}$ градусов

Ⅱ Произведение

ⓐ Скалярное произведение

$\vec{a}$, $\vec{b}$



$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha = $$
$$= a.x \cdot b.x + a.y \cdot b.y$$

Следствие: $\cos\alpha = \dfrac{a.x \cdot b.x + a.y \cdot b.y}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Св-ва:

- $(\vec{a}, \vec{b}) = (\bar{b}, \bar{a})$
- $(\bar{a}, \bar{b}) = 0 \iff \bar{a} \perp \bar{b}$ – ортогональны
- $(\bar{a}, \bar{b}) > 0 \iff \alpha$ – острый
- $(\bar{a}, \bar{b}) < 0 \iff \alpha$ – тупой угол

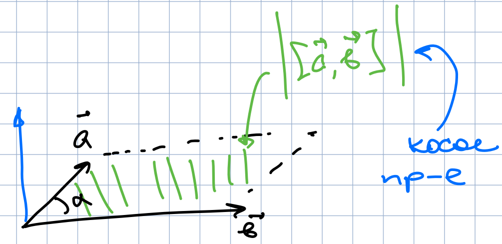
```
int operator*(Vector A, Vector B) {
        return A.x • B.x + A.y • B.y
```

}

(б) Векторное пр-е

$\vec a$, $\vec b$

$[\vec a, \vec b]$



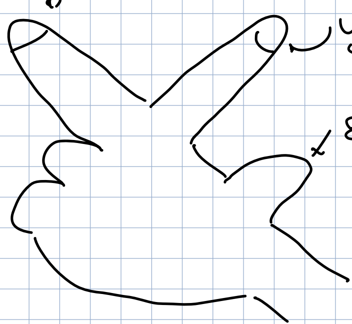
$$[\vec a, \vec b] = \vec a \wedge \vec b = |\vec a|\,|\vec b| \sin\alpha = a.x \cdot b.y - a.y \cdot b.x$$

$$[\vec a, \vec b] = -[\vec b, \vec a]$$

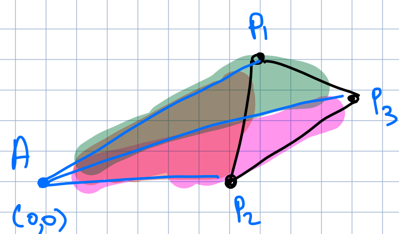
длина век. произв „косое“ пр-е

```
int operator^ (Vector A, Vector B) {
    return A.x * B.y - A.y * B.x
}
```

(в) Применение $[\vec a, \vec b]$ к ориентированной площади



(г) Площадь многоугольника



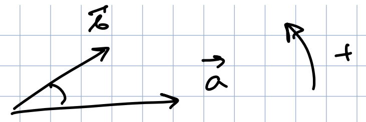
$$S_{P_1P_2P_3} = S_1 + S_2 + S_3$$

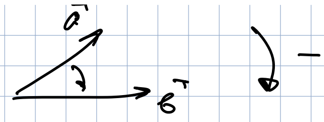
где S_i – ориентированная площадь

$$\frac{[AP_i ; AP_{i+1}]}{2}$$

(III) Угол (между векторами)

а)





$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{a} * \vec{b}}{|a|\,|b|}\right)$$

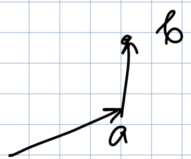
не можно (плохо)

$$\frac{\vec{a} \wedge \vec{b}}{\vec{a} * \vec{b}} = \frac{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cdot\cos\alpha} = tg\,\alpha$$

$$\alpha = arg\,tg\left(\frac{|a.x\cdot b.y - a.y\cdot b.x|}{a.x\cdot b.x + a.y\cdot b.y}\right)$$

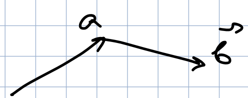
atan2 — достаточно точно считается.

б) Направление угла



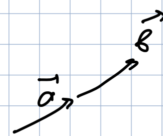
против часовой

$\vec{a} \wedge \vec{b} > 0$



по часовой

$\vec{a} \wedge \vec{b} < 0$

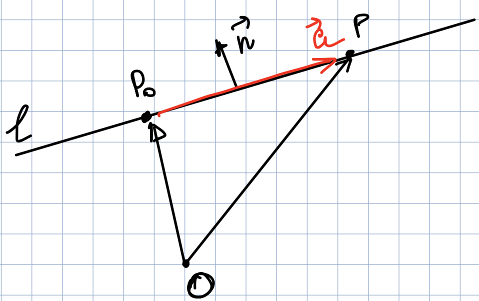


на прямой

$\vec{a} \wedge \vec{b} = 0$

IV Прямые

а) $Ax + By + C = 0$ $\quad A^2 + B^2 > 0$



$P = \{x, y\}$

$\vec{a} = \vec{OP} - \vec{OP_0}$

$(\vec{a}, \vec{n}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\vec{OP}, \vec{n}) - (\vec{OP_0}, \vec{n}) = 0$

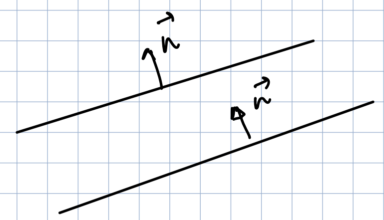
$x\cdot n.x + y\cdot n.y - (\vec{OP_0}, \vec{n}) = 0$

$A = n.x$ $\quad\quad \vec{n} = (A, B)$

$B = n.y$

$C = -(\vec{OP_0}, \vec{n})$

Замечание: найти $l' \parallel l$



$(-B; A)$

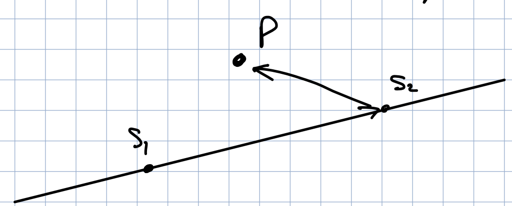
б)

$l_1: A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$

$l_2: A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$

$l_1 \parallel l_2 \iff \vec{n_1} \parallel \vec{n_2} \iff \vec{n_1} \wedge \vec{n_2} = 0 \iff A_1 B_2 = A_2 B_1$

в) Положение точки относительно прямой



Угол по часовой => справа

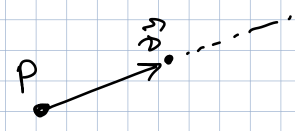
иначе => слева

г)

```
struct Line {
    int A;
    int B;
    int C;
}
```

Ⓥ Лучи (школьный вектор почти)

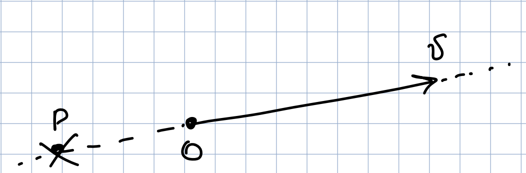
ⓐ



$\{p + \vec{v}t \mid t \geq 0\}$

```
struct Ray {
    Point p;
    Vector v;
}
```

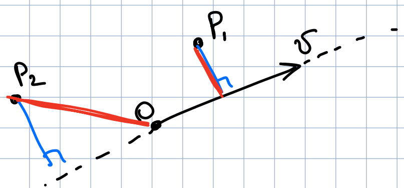
(б) Точка и луч (лежит или нет)



$\vec{v} \wedge \vec{OP} = 0$

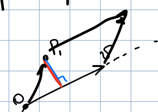
$(\vec{v}, \vec{OP}) \geq 0$

(в) Расстояние от точки до луча



1) $(\vec{v}, \vec{OP_1}) > 0$

$$dist = \left| \frac{v \wedge \vec{OP}}{|v|} \right|$$

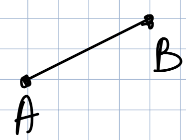


2) иначе

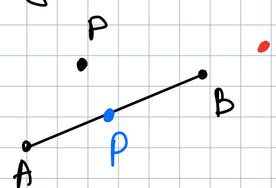
$$dist = |\vec{OP_2}|$$

VI Отрезки

```
struct Segment {
    Point A;
    Point B;
}
```

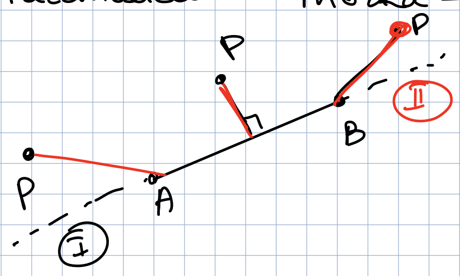


а) Принадлежность точки отрезку.



$$\begin{cases} \vec{AP} \wedge \vec{PB} = 0 \\ (\vec{AP}, \vec{PB}) \geq 0 \quad \text{сонапр.} \end{cases}$$

б) Расстояние точка – отрезок



1) $(AP, AB) \leq 0$

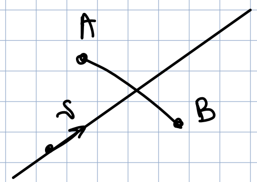
$dist = |AP|$

2) $(BP, BA) \leq 0$

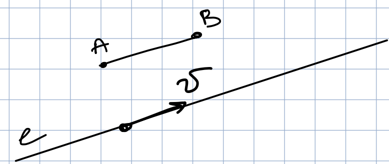
$dist = |BP|$

3) иначе считаем как равные

в) Пересечение прямая – отрезок

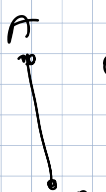


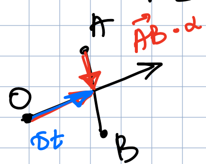
разные повороты $v \to A$ и vB



знаки ориентир. углов совпадают.

г) Пересечение отрезок – луч





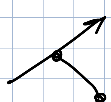
$$O + \vec{v}t = A + \vec{AB}\alpha$$

$$\vec{AO} + \vec{v}t = \alpha\vec{AB} \quad \Big|\ \wedge\vec{AB}$$

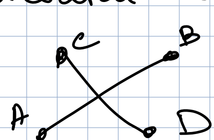
$$\underbrace{\vec{AO}\wedge\vec{AB}} + \underbrace{\vec{v}\wedge\vec{AB}}\cdot t = 0 \qquad t \geq 0$$

разного знака

Замечание: концы отрезка необходимо обработать вручную.



д) Пересечение отрезков

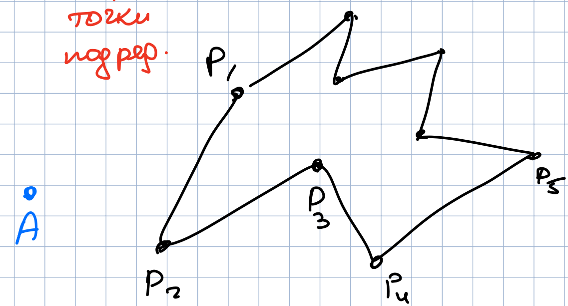


$\begin{cases} AB \text{ – прямая, } CD \text{ – отрезок} \\ AB \text{ – отрезок, } CD \text{ – прямая} \end{cases} \Rightarrow$ отрезки пересекаются

VII Многоугольники

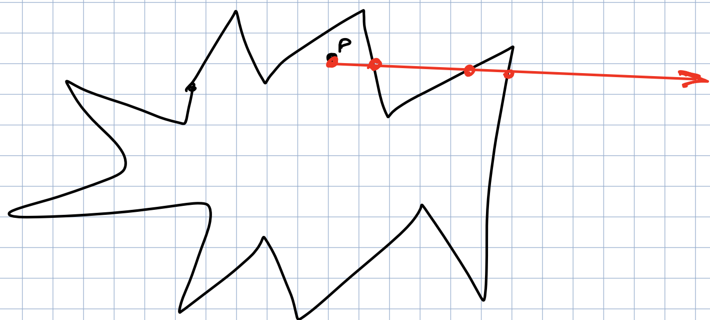
```
Polygon {
    std::vector<Point> vertices;
}
```

точки по пор.



а) площадь умеем считать

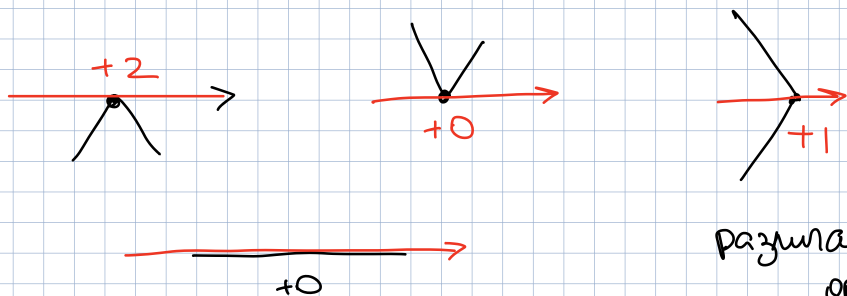
б) Точка внутри многоугольника?



нечетное => внутри

четное => снаружи

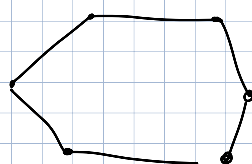
Нюансы:



различаем по ориентир. углу.

в) Формула Пика

$$S = \text{inside} + \frac{\text{border}}{2} - 1$$



целые вершины

кол-во
целых точек
внутри мн-ка

точки на
границе

2) Проверка мн-ка на выпуклость.