Большие числа

Ⅰ Хранение чисел

int → 4Б = 32б → 2^{32}

$$\overbrace{-2^{31} \dots}^{-} 0 \overbrace{\dots 2^{31}-1}^{+}$$

int64_t → 64б → 2^{64}

$$-2^{63} \dots 2^{63}-1$$

Храним в массиве поразрядно

$$\overset{2}{1}\ \overset{1}{2}\ \overset{0}{3} \Rightarrow \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ \boxed{3} & \boxed{2} & \boxed{1} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$3 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^2$$

число

8) Многочлены

$$P(x_1, \dots x_n) = \sum_i c_i \, x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$$

Многочлен $P(x) =$

$$= a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$x = 10$ (10-чно с.с.)

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1} \\ +\begin{array}{r} 123 \\ 987 \end{array} \\ \hline 1110 \end{array}$$

$3 + 7 \neq 0$! переход через разряд.

```
normalize ( vector coef) {
    carry = 0          // сколько перешло в след. разряд.
    for i=0,.. coef.size:
    {
        a = coef[i]
        a += carry
        carry = a // BASE      основание системы счисления
        a %= BASE
        coef[i] = a
    }
    while carry > 0 {
        coef.push_back (carry % BASE)
        carry //= BASE
    }
    return coef
}
```

II Перемножение мн-ов.

$$A(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$
$$B(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$$

$$A(x) \cdot B(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{m+n} x^k \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right)$$

$$(2x^2 + 3x + 1)(5x + 4) =$$
$$= \underbrace{2x^2 \cdot 5x} + \underbrace{4 \cdot 2x^2} + \underbrace{3x \cdot 5x} + \underbrace{3x \cdot 4 + 5x \cdot 1} + \underbrace{4 \cdot 1}$$

Асимптотика: $O(N^2)$

1960 1956

III Карацуба $\to O(N^{\log_2 3}) \sim O(N^{1.58})$

$N\sqrt{N}$

$$A(x) = a_0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n$$
$$B(x) = b_0 + b_1 x^1 + \dots + b_n x^n$$

|| $\Rightarrow$ добиваем нулями до степени 2.

$n = 2k$

$$a(x) = a_1(x) + x^k a_2(x)$$
$$b(x) = b_1(x) + x^k \underbrace{b_2(x)}$$

$\uparrow$ $\deg = k-1$ $\uparrow$ $\deg = k$

$$A(x) = \underbrace{a_0 + a_1 x^1 + \dots +}_{a_1(x)} \underbrace{a_{n/2} x^{n/2} + \dots a_n x^n}_{a_2(x) : x^{n/2}}$$

$$p_1(x) = a_1(x) \cdot b_1(x) \qquad \deg(p_1(x)) = 2k = n$$
$$p_2(x) = a_2(x) \cdot b_2(x)$$
$$t(x) = (a_1(x) + a_2(x))(b_1(x) + b_2(x)) \qquad \deg = n$$

$$A(x)\cdot B(x) = C(x) = p_1(x) + x^k\left(t(x)-p_1(x)-p_2(x)\right) + x^{2k}p_2(x)$$

Вспомним Мастер-Теорему:

$$T(N) = a\cdot T\left(\frac{N}{b}\right) + f(N)$$

N – размер

b – на сколько частей делим

a – сколько подзадач

$f(N)$ – доп. вып.

1) $f(n) = O(N^c)$ $\quad c < \log_b a \Rightarrow T(N) = \Theta(N^{\log_b a})$

2) $f(N) = \Theta(N^{\log_b a}\log^k N)$ $\quad \forall k \geq 0 \Rightarrow T(N) = \Theta(N^{\log_b a}\log^{k+1} N)$

3) $f(N) = \Omega(N^c)$ $\quad c > \log_b a$, ...

$T(N) = \Theta(f(N))$

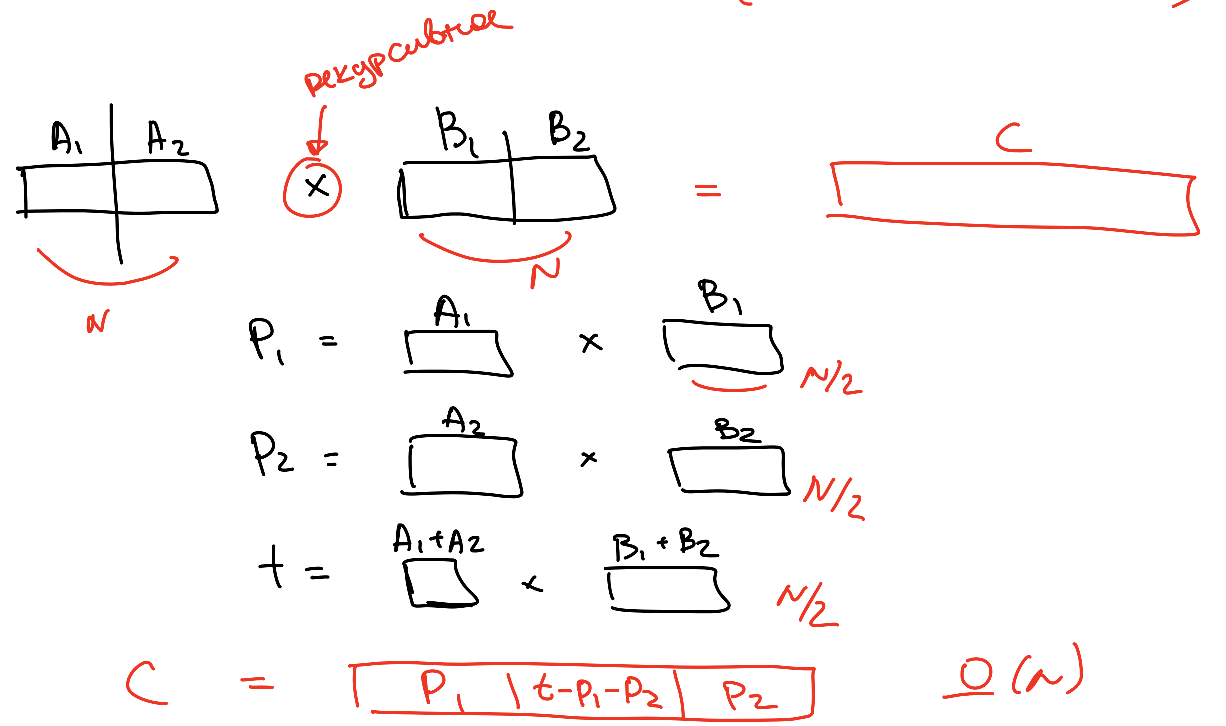
$b = 2$

$a = 3$

$f(N) = O(N^1)$

$1 < \log_2 3$? ДА

$\Rightarrow T(N) = \Theta(N^{\log_2 3})$



код → на семинарах

IV Быстрое преобразование Фурье

$$\begin{array}{ccccc} a & \xrightarrow{\text{Фурье}} & e^{\square} & & \\ \times & & \times & \searrow & e^{\square + \square} \xrightarrow{\text{обр. Фурье}} c \\ b & \rightarrow & e^{\square} & \nearrow & \end{array}$$

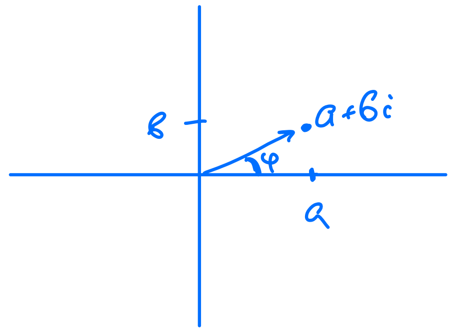
$i^2 = -1$

$c = a + bi$ → комплексное число

$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

ф. Муавра

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$



$$\begin{cases} \cos\varphi = a \\ \sin\varphi = b \end{cases}$$

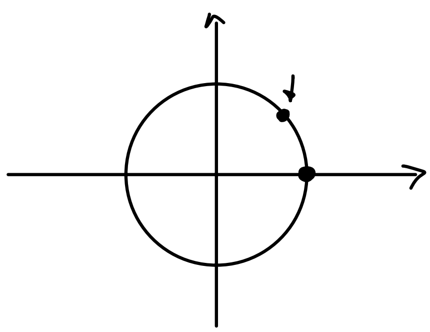
$\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}\varphi$

$c \to e^{i\varphi}$

$P(x)$

$(a)^n = 1$

$1 = w_0$



$w_1 = e^{2\pi i \frac{1}{n}}$

$(w_1)^N = \left(e^{2\pi i \frac{1}{n}}\right)^N = e^{2\pi i \cdot \frac{1}{n} \cdot N} = e^{2\pi i} =$

$= \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$

$w_k = e^{2\pi i \frac{k}{n}}$

$(w_k)^N = \dots = e^{2\pi i \frac{k}{n} \cdot N} = \underbrace{\cos(2\pi k)}_{\to 1} + i\,\cancel{\sin(2\pi k)}$

$$\omega_k \cdot \omega_1 = \omega_{k+1}$$

$$\omega_k \cdot \omega_m = \omega_{k+m}$$

$$y_j = \sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{2i\pi \frac{kj}{N}} = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \, \omega_1^{kj}$$

$$x_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k (\omega_{N-1})^{kj}$$

$$\Rightarrow \underline{O}(N \log N)$$