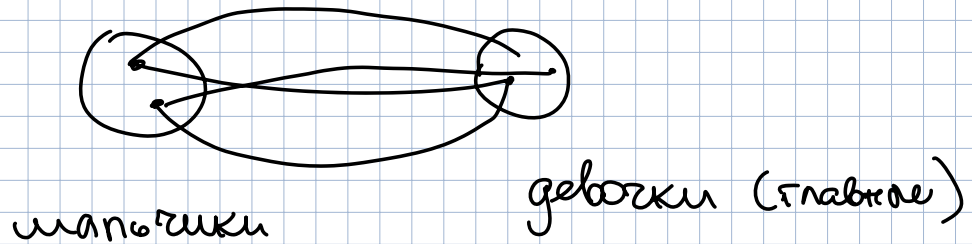


Паросоветания (лекция 24)

1

Есть мальчики и есть девочки.



Мальчики не танцуют с мальчиками.

Опр Двудольный граф - граф, состоящий из двух долей, где ребра есть только между долями, но не внутри доли.

Опр Паросоветанием M в двудольном графе называется мн-во ребер, таких что никакие два ребра не имеют общих вершин.



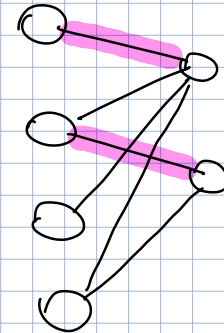
Опр Вершина $v \in M$, она наз-ся покрытой, если
свободной.

Опр Число паросотетаний наз-ся коп-во рёбер в
паросотетании.

Опр Максимальное паросотетание - паросотетание M ,
имеющее наибольшее коп-во рёбер.

Опр Совершенное (полное) паросотетание - все вершины
покрыты паросотетанием.

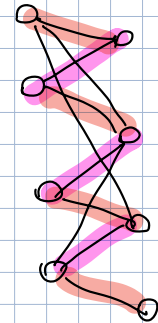
Опр Переключающая цепь - путь в двудольном
графе, т.е. для любого рёбра цепи верно,
что одно из его концов принадлежит паросотетанию
и не принадлежит паросотетанию.



Опр Дополняющая (увеличивающая) цепь - переключающая
цепь, у которой оба конца свободны.

II Th (Берга)

Паросоединение M в двудольном графе G максимальное \Leftrightarrow в G нет увеличивающей цепи.



D-во (от противного)

\Rightarrow Пусть M - макс. паросоединение, но есть увеличивающая цепь. Производим замену графа приращением по ребру паросоединения на обратное. \Rightarrow Размер паросол. увеличился $\Rightarrow M$ - не максимальное \Rightarrow противоречие.

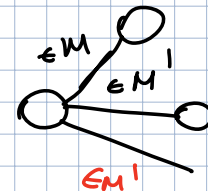
\Leftarrow в G нет увеличивающей цепи для паросоединения M . но $\exists M' : |M'| > |M|$

Возьмем $H \subset G$, т.е. $H = (V, M \Delta M')$.

(?)

$\forall v \in H \quad \deg(v) \leq 2$

(Ибо тогда будет одна вершина принадлежать двум ребрам этого паросоединения)



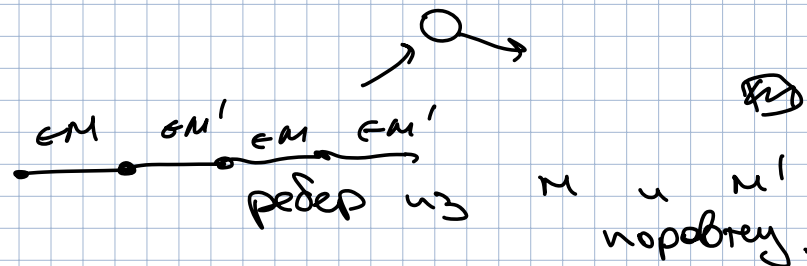
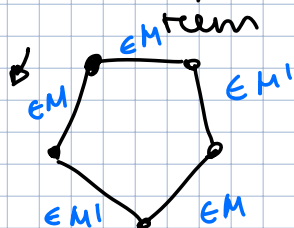
Лемма Если n степени вершин G более двух, то любая компонента связности — это простой путь или простой цикл.

Доо:

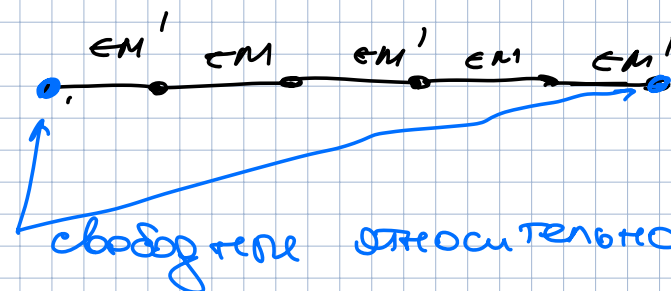
$\deg v = 0$	\Rightarrow	изолированная
$\deg v = 1$	\Rightarrow	начало/конец пути
$\deg v = 2$	\Rightarrow	середина пути / цикла

простой
цикл
простой
цикл

цикл
простой
цикл
простой



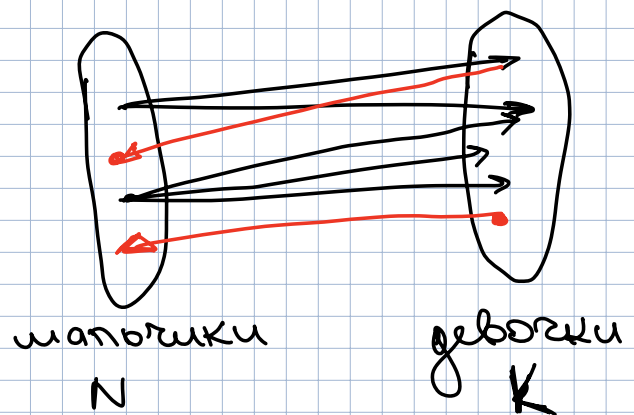
$|M'| > |M|$ как минимум один такой есть



\Rightarrow это увеличивающая цепь. противоречие

III Алгоритм Куна (поиск максимального паросочетания)

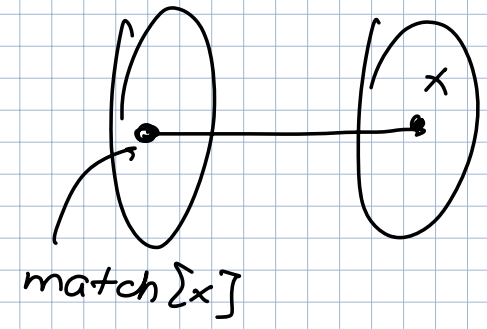
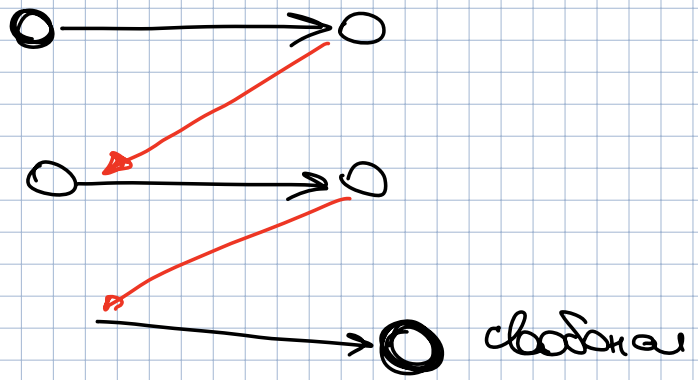
- из каталога паросочетаний пусто
- Если есть увеличивающий путь: производим переобработку "инверт."



← из девочек в мальчиков (ребра паросочетания)

→ не из паросочетания.

Увеличивающая цепь:



Нужно реализовать функцию:

$used = [false \dots false]$ // размер n
 $match = [-1, \dots -1]$ // размер k

Graph G - граф без самопетли и ребер

bool DFS(v)

if $used[v] = true$
↳ return false

$used[v] = true$

$ch = G.get_children(v)$

for $i = 0 \dots ch.size() - 1$:

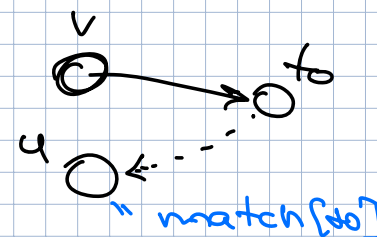
$to = ch[i]$

if $match[to] == -1$ or DFS($match[to]$)

$match[to] = v$

return true

return false



Проблема:

б

граф

храним

б

ребра
(heap)



main :

used = [false... false]

for $v = 0 \dots N$:

if DFS(v) = true

 ↳ used = [false... false]
 ↳ ++ math-count

Асимптотика: $O(VE)$

Интуиция: → не надо хранить паров заметил.
→ Ано Купа

Дополнение: Минимальное вершинное покрытие,
независимое мн-во, цикл.
Th (Кетера)