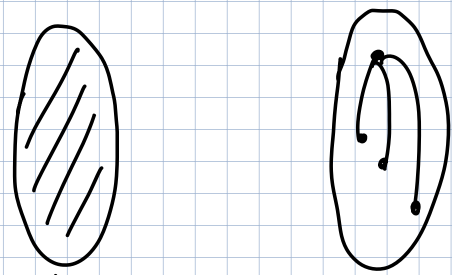
Ⅰ Улучшения Дейкстры



used

	Стандарт	Heap/BST	Биномиальная Фибоначчиева куча
(Remove) Find Min	$O(N)$	$O(\log N)$	$O(\log N)$
Change Dist	$O(1)$	$O(\log N)$	$O(1)$

Асимптотика:

N × Find Min

M × Change Dist

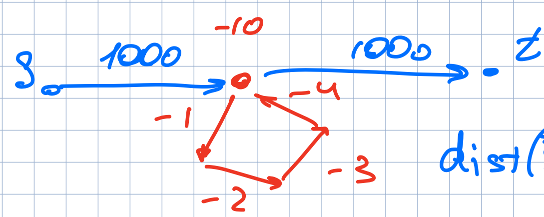
Стандарт	Heap/BST	Биномиальная Фибоначчиева куча
$O(N^2 + M)$ $\approx$ $O(N^2)$	$O(N\log N + M\log N)$ $\approx$ $O(M\log N)$	$O(N\log N + M \times 1) = O(N\log N + M)$ $\approx$ $O(N\log N)$

от start до любой

BFS невзв. → 1-k BFS взвеш. веса $\in [1 \dots k] \subset \mathbb{Z}$ → Дейкстра взвеш. веса ≥ 0 неотрицательн. → Форд-Беллман взвеш. любые веса

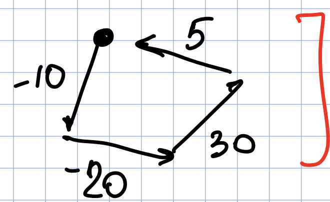
II Алгоритм Форда-Беллмана

Ребра имеют любой вес. [циклы отр. веса не очень интересуют]



$dist(s, t) = -\infty$

а) Нет циклов отрицательного веса.



неотриц. вес

A_{vk} = A[v][k] – длина кратч. пути из верш. s в верш v, с не более чем k ребер

Вар 1

```
for i = 0 .. N-1
  for j = 0 .. N-1
    A[i][j] = +∞

A[s][0] = 0
for i = 1 ... N-1 :
    edges = G.getEdges()   // все ребра
    for e = 0 ... edges.size()
        from = edges[e].from
        to = edges[e].to
        weight = edes[e].weight
        if A[to][i] > A[from][i-1] + weight :
            A[to][i] = A[from][i-1] + weight
            P[to][i] = from    // восстановление.
```

$M(N,M) = \underline{O}(N^2)$

Картинка: $\underset{A[from][i-1]}{from} \xrightarrow{weight} to$

Вар 2

```
dist = [+∞ ... +∞]
dist[s] = 0
for i = 1 ... N-1 :
    edges = G.getEdges()
    for e = 0 ... edges.size()
        from = edges[e].from
        to = edges[e].to
        weight = edes[e].weight
        if dist[to] > dist[from] + weight:
            dist[to] = dist[from] + weight
```

Асимптотики:

$$T(N,M) = O(NM)$$

$$M(N,M) = O(N)$$

Сравнение с Дейкстра: $O(N^2+M)$ $\quad$ $O(NM)$

$O(N^2)$ $\quad$ $O(N^3)$

$$|E(K_N)| = \frac{N\cdot(N-1)}{2} \sim \underline{O}(N^2)$$

$$M \sim \underline{O}(N^2)$$

Восстановление:

$M(N) = \underline{O}(N^2)$

Previous [v][i] ← как мы попали в A[v][i]

$s \to v \quad (N)$

б) Есть цикл отриц. длины?

→ Запустим внешний цикл еще один раз.

→ Если значение уменьшилось → есть цикл. отр. длины проставь $-\infty$

→ Иначе цикла нет.

в) Улучшение: как только dist перестал меняться ⇒ break

(IV) Флойда (-Уоршелла)

- Поиск кратчайших расстояний от всех вершин до всех.
- любые веса
- нет отр. циклов
- орграф

Результат:

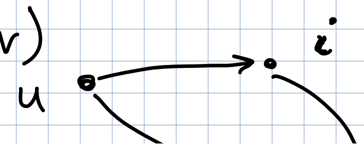
$$dist[from][to] = \begin{cases} \text{длина кр. пути } from \to to \\ +\infty, \text{ вершины } from, to \text{ несвязны} \end{cases}$$

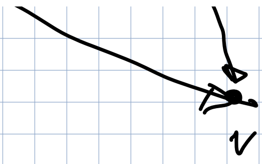
$$dist[v][u]^{(i)} = \text{кратчайшее расстояние } v \to u, \text{ что использующие вершины } \{0 \ldots i\}$$

$$weight(v,u) = \begin{cases} \text{вес ребра } v \to u \\ +\infty, \text{ иначе} \end{cases}$$

<u>Вар 1</u>

```
for u = 0... N-1
    for v = 0.. N-1
        dist[u][v]^(0) = weight(u,v)
```






```
for i = 0... N-1 :
    for u = 0... N-1 ;
        for v = 0... N-1 :
```

$$dist[u][v]^{(i)} = \min\left(dist[u][v]^{(i-1)},\ dist[u][i]^{(i-1)} + dist[i][v]^{(i-1)}\right)$$

$M(N) = O(N^3)$

$T(N) = O(N^3)$

$dist[u][v]^{(N-1)}$ ← ответ

Вар 2

```
for u = 0... N-1
    for v = 0.. N-1
        dist[u][v] = weight(u,v)

for i = 0... N-1 :
    for u = 0... N-1 ;
        for v = 0... N-1 :
```

$$dist[u][v] = \min\left(dist[u][v],\ dist[u][i] + dist[i][v]\right)$$

$T(N) = O(N^3)$

$M(N) = \underline{O}(N^2)$

Ф-Б

$\underline{O}(NM)$

~ в полном

~ $\underline{O}(N^3)$