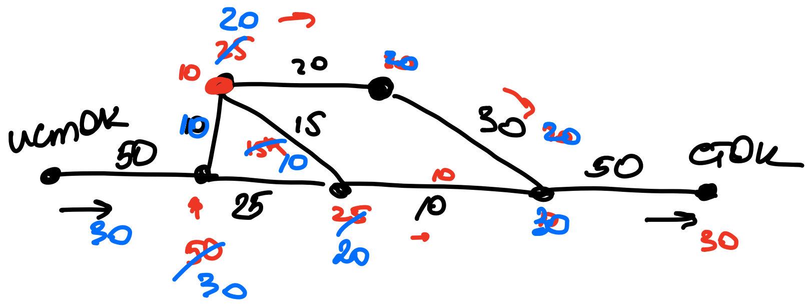
Потоки (лекция 25)

I Задача о максимальном потоке.

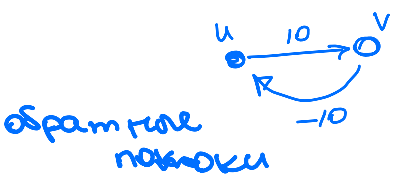


II Определения

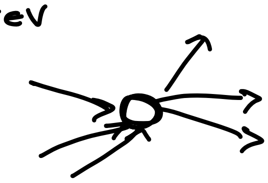
Опр Транспортная сеть — ориентированный граф с весами ребер — пропускные способности ребра $c(u,v) > 0$. Если $(u,v) \notin E \Rightarrow$
$\Rightarrow c(u,v) = 0$

Опр Выделим две отдельные вершины
- S — исток (source)
- t — сток (sink)

Опр $f(u,v)$ — поток через ребро (u,v)



- $f(u,v) \le c(u,v)$
- $f(u,v) = -f(v,u) \quad \forall u,v \in V$
- $\sum\limits_{v \in V} f(u,v) = 0$; $f_{in} = f_{out}$



Опр Величина потока

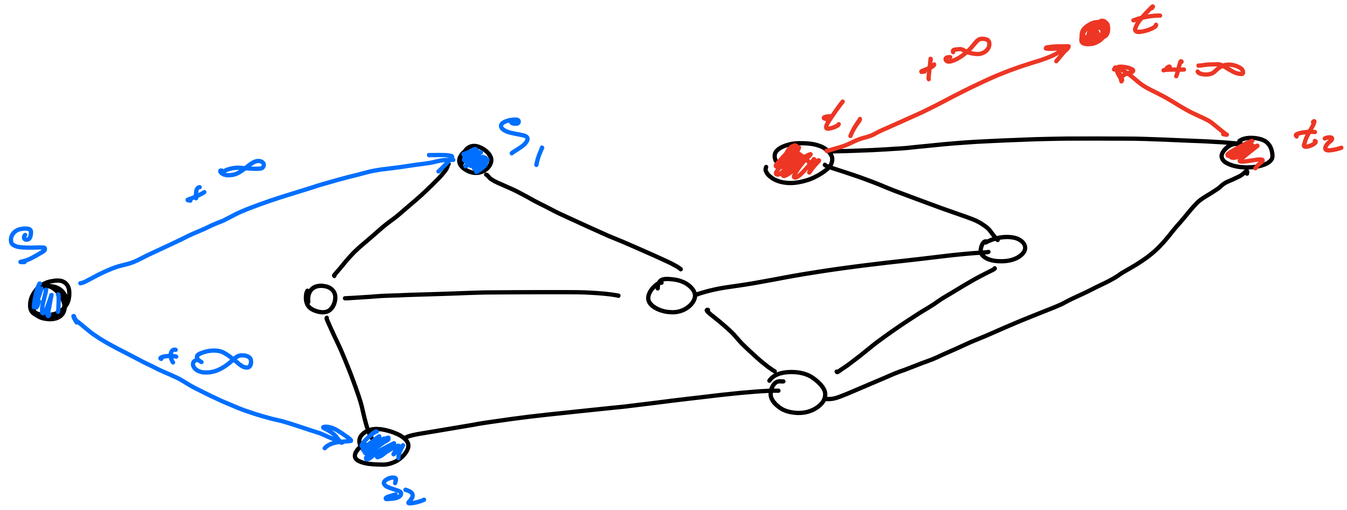
исток

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s,v) =$$

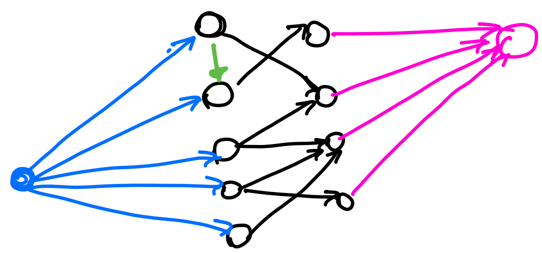
$$= \sum_{v \in V} f(v,t)$$

сток

Зам: Несколько источников и стоков



Зам: Двудольный граф и паросочетания

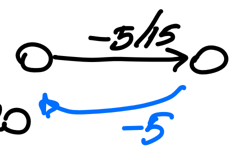


(III) Опр (подводящие к Алгоритму)

Опр Остаточная пропускная способность
$$c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$$

Опр Остаточное ребро - ребро изначального графа с весом ребра $c_f(u,v)$.

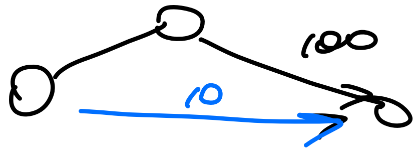
Вопрос: $f(u,v) < 0$



$$c_f(u,v) = 15 - (-5) = 20$$

Опр Остаточная сеть - изначальный граф с остаточными ребрами. (обозн: G_f)

Опр Увеличивающий путь - это простой путь p из вершины s в вершину t остаточной сети G_f.



Th (б/д) – о макс. потоке (Th Форда-Фалкерсона)

f – максимальный поток $\Leftrightarrow$ остаточная сеть G_f не содержит увеличивающих путей. □ ... ☒

⑭ Алгоритм Форда-Фалкерсона. [метод]

Ограничения: $\forall u,v \in V \quad c(u,v) \in \mathbb{Z}$.

Но что делать?

→ дробные → масштабирование $c(u,v) \in \mathbb{Q}$

→ Алгоритм может не завершиться на иррациональных c_i.

Алго:

$\forall u,v \quad f[u][v]=0$
while в графе есть увеличивающий путь:
↳ увеличиваем поток вдоль пути.

как это делать?
берем граф G_f $s \to t$ (простой)
например, DFS(s)

Хотим от DFS:

DFS(s, t, parent)
if s = t
↳ return

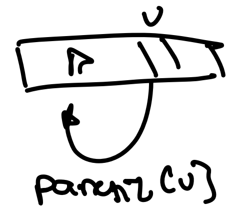
возвращать
- true / false → есть ли путь $s \rightsquigarrow t$
- parent → можем восстановить путь.

Опр Остаточной пропускной способностью увеличивающего пути (p):

$$c_f(p) = \min\{c_f(u,v) : (u,v)\in p\}$$

Алгоритм:

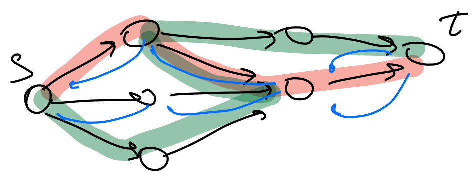
```
for u = 0 .. N:
    for v = 0 .. N:
        f[u][v] = 0

parent = [-1 . . . -1]
while DFS(s, t, parent):
    c_f_p = +inf
    for (u,v) ∈ path:
        if c_f_p > c(u,v):
            c_f_p = c(u,v)

    for (u,v) ∈ path:
        f[u][v] = f[u][v] + c_f_p
        f[v][u] = - f[u][v]
```



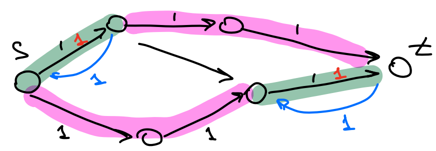
$c_f(p)=\min\{(u,v)\in p\}$

Асимптотика:

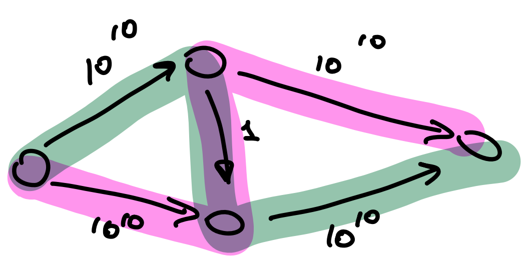
$\underline{O}(|f|\cdot E)$



$|f|=2$



Пример:



$|f| = 2\cdot 10^{10}$

(V) Алго Эдмонса-Карпа

вместо DFS запусти BFS

кратчайший по кол-ву ребер путь.

Асимпт: $\underline{O}(VE^2)$