Übung 01: Riemannsche Zeta Funktion

Tobias Blesgen und Leonardo Thome

4/14/2021

Riemannsche Zeta Funktion

Definition der Riemmannschen Zeta Funktion

Die allgemeine Definition der Reimannschen Zeta Funktion ist:

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}, s \in \mathbb{C}0 \tag{1}$$

Im folgenden wollen wir uns genauer mit Riemannschen Zeta Funktion von 2 beschäftigen, also $\zeta(2)$.

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \tag{2}$$

Numerische Näherungsverfahren

Die einfachtes Implementierung einer Näherung erfolgt durch das direkte Implementieren der Reihe über ihre Summe. Diese ist in der Impelmentation des naives Verfahren zu betrachten. Dabei stößt man jedoch schnell auf zwei große Probleme:

1. Die Konvergenz der Reihe in ihrer grundlegenden Form ist nicht sehr schnell und braucht daher viele Summenschritte bis ein außreichend genauer Wert erreicht wird.
2. Das Addieren immer kleiner Zahlen ist für den Menschen kein Problem jedoch hat der Computer nur eine begrenzte Anhalen an Stellen für eine Zahl so sind die Zahlen irgendwann zu klein um auf die größere vorherige Zahl addiert zu werden. Dies ist in der Regel kein Problem da zu dem Zeitpunkt die gewünschte Genauigkeit erreicht wurde, jedoch tritt hier das Problem der langsamen Konvergenz auf durch das der Wert zu jenem Zeitpunk noch zu ungenau ist.

Durch diese Probleme ist die Impelmentation des naives Verfahren für unsere Zwecke zu langsam und zu ungenau.

Um diese Probleme zu vermeiden kann ein Verfahren mittels alternierder Reihe nach Borwein genutzt werden. Da durch das alternieren der Reihe ist eine schnellere Konvergenz gegeben ist.

Quelle: P. Borwein: An efficient algorithm for the Riemann zeta function. In Théra, Michel A. (ed.). Constructive, Experimental, and Nonlinear Analysis (PDF). Conference Proceedings, Canadian Mathematical Society. 27. Providence, RI: American Mathematical Society, on behalf of the Canadian Mathematical Society. pp. 29–34. ISBN 978-0-8218-2167-1.

In alternierender Form lässt sich die Reihe wie folgt schreiben:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1-2^{1-s}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1^{k-1}}{k^s} \tag{3}$$

bzw. für s = 2

$$\zeta(s) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \tag{4}$$

Diese Form der Reihe und die einhergehende Berechnung sind unter Implementation der Reihe nach Borwein zufinden.

Impelmentation des naives Verfahren:

Das naive Verfahren konvergiert nur sehr langsam. Da wir es hier nur nutzen um später die ersten 100 Schritte grafisch mit den anderen Verfahren vergleichen zu können, laufen wir an dieser Steller auch nur über diese ersten 100 Summenglieder, um unnötige Wartezeiten zu vermeiden.

```
#include <Rcpp.h>

using namespace Rcpp;

//[[Rcpp::export]]
Rcpp::List naiveZetafunktion(){
  // Array der ersten 100 Werte:
    Rcpp::NumericVector x(100);
    Rcpp::NumericVector y(100);
  // Quelltext
    long double sum = 0;
    for (int i = 1; i < 100; i++)
    {
        sum += 1.0/(i*i);

        // Einsammeln der ersten 100 Werte
          x[i] = i;
          y[i] = sum;

    }
    // Rückgabe für eine grafische Wiedergabe
    return List::create(Named("x") = x, Named("y") = y);
}
```

Implementation der Reihe nach Borwein

```
#include <Rcpp.h>
#include <math.h>

using namespace Rcpp;

//[[Rcpp::export]]
Rcpp::List borwein(int s){
```

```
  // Array der ersten 100 Werte:
    Rcpp::NumericVector x(100);
    Rcpp::NumericVector y(100);
  // Quelltext
    long double summe = 0;
    long double summenext = 1;
    long double vorzeichen = 1;
    int k = 1;
    while(fabs(summenext-summe)>pow(10,-16)){
        summe += vorzeichen *pow(k,-s);
        vorzeichen *= -1;
        summenext = vorzeichen *pow(k+1,-s) + summe;
        // Einsammeln der ersten 100 Werte
        if(k<=100){
          x[k-1] = k;
          y[k-1] = summenext/ (1-pow(2,1-s));
        }
        k++;
    }
    summe /= (1-pow(2,1-s));
    Rprintf("Das Verfahren nach Borwein: %.16Lf \n",summe);
    // Rückgabe für eine grafische Wiedergabe
    return List::create(Named("x") = x, Named("y") = y);
}
```

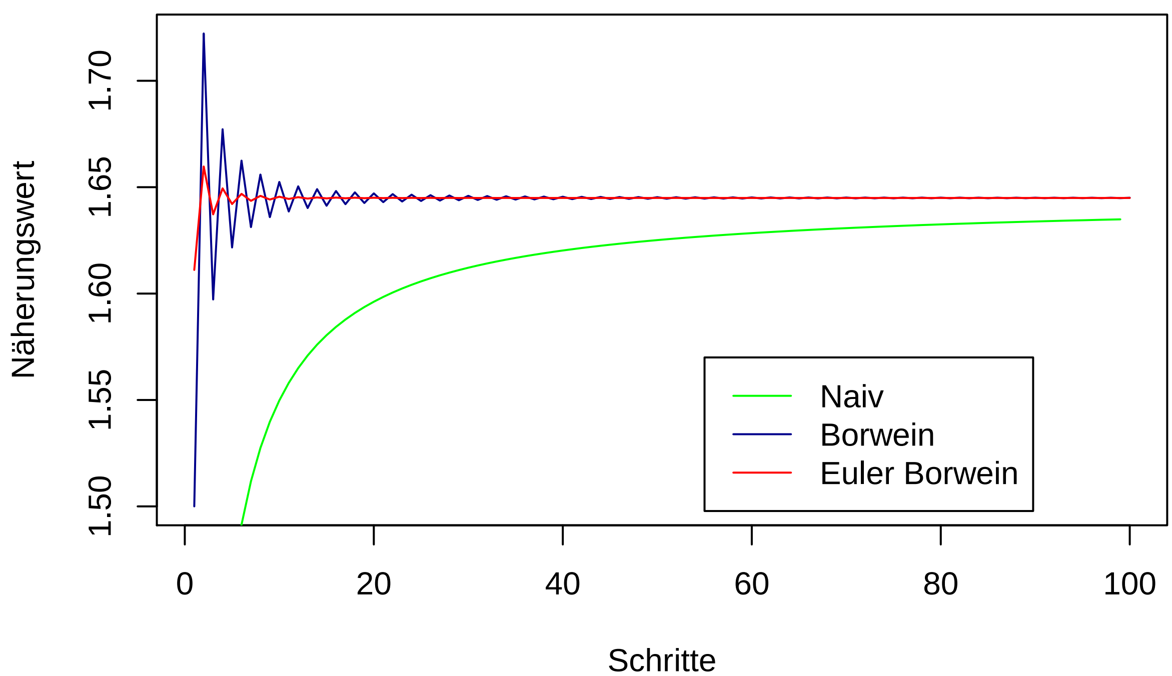
Implementation der Reihe nach Borwein Euler

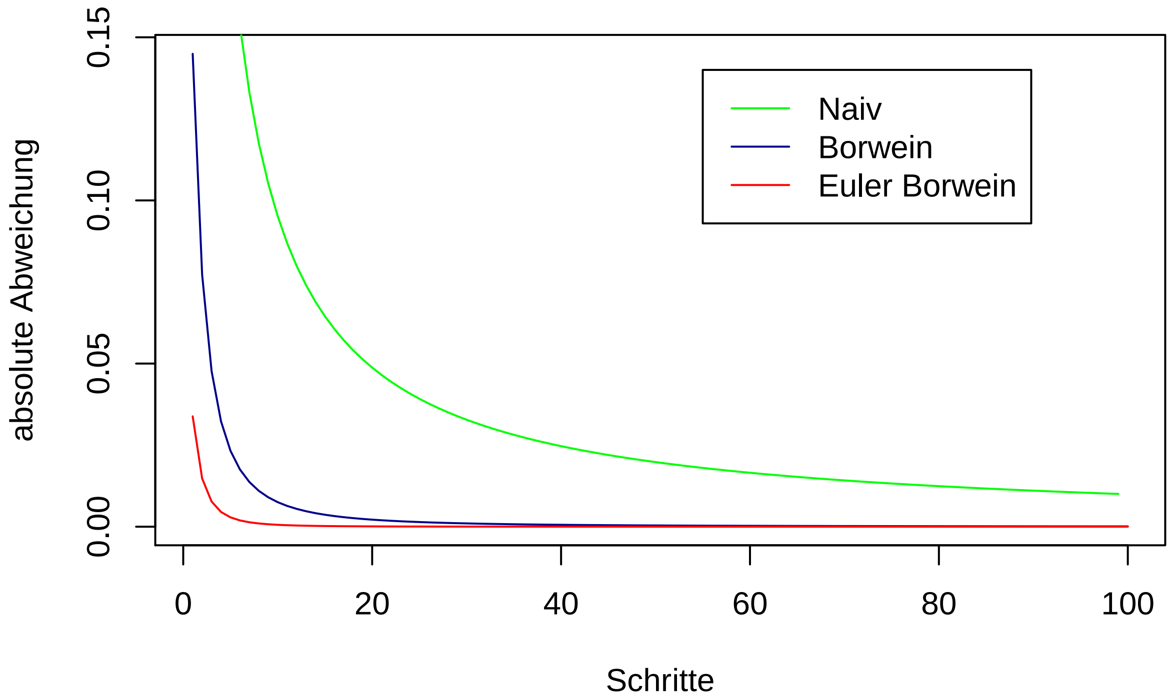
```
#include <Rcpp.h>
#include <math.h>

using namespace Rcpp;

//[[Rcpp::export]]
Rcpp::List borweinTestEuler(int s){
  // Array der ersten 100 Werte:
    Rcpp::NumericVector x(100);
    Rcpp::NumericVector y(100);
  // Quelltext
    double summe = pow(1,-s)*0.5;
    double summenext = 2;
    double vorzeichen = 1;
    int k = 1;
    while(fabs(summenext-summe)>pow(10,-16)){
        summe += vorzeichen *0.5*(pow(k,-s)-pow(k+1,-s));
        vorzeichen *= -1;
        summenext = vorzeichen* 0.5*(pow(k+1,-s)-pow(k+2,-s)) + summe;
        // Einsammeln der ersten 100 Werte
        if(k<=100){
          x[k-1] = k;
          y[k-1] = summenext/ (1-pow(2,1-s));
        }
```

```
        k++;

    }
    summe /= (1-pow(2,1-s));
    Rprintf("Das Verfahren nach Bohrwein nach Gauss verbessert ergibt %.16lf\n", summe);
    // Rückgabe für eine grafische Wiedergabe
    return List::create(Named("x") = x, Named("y") = y);
    }
```

```
## Das Verfahren nach Bohrwein nach Gauss verbessert ergibt 1.6449340668482419
```

```
## Das Verfahren nach Borwein: 1.6449340668482266
```




Naiv
Borwein
Euler Borwein
absolute Abweichung
0.00
0.05
0.10
0.15
0
20
40
60
80
100
Schritte