

# 电动力学

*INTRODUCTION TO ELECTRODYNAMICS*

NarayanGuo

西安交通大学



# 目录

0.1	前言	1
0.1.1	综述	1
0.1.2	研究课题	2
0.1.3	达成目标	2
0.1.4	各章概述	2
0.1.5	推荐参考书目	3
0.2	数学准备	4
0.2.1	矢量代数	4
0.2.2	矢量分析(场论初步)	4
0.2.3	矢量微分算子—— $\nabla$ 算子	5
0.2.4	Helmholtz 定理	6
0.2.5	$\delta$ 函数	7
1	电磁现象的普遍规律	11
1.1	电磁现象普遍规律的建立	12
1.1.1	电磁现象的实验定律	12
1.1.2	位移电流的引入 (Maxwell, 1861-1862 年)	16
1.1.3	麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式	18
1.1.4	电磁场的能量和动量	24
2	静电问题	29
2.1	静电场的基本性质	29
2.1.1	场方程	29
2.1.2	静电场的势函数表示	30
2.1.3	静电场的能量密度, 总能量	30
2.2	静电问题中的导体和介质	30
2.2.1	导体	30
2.2.2	介质	31
2.3	若干特殊的静电体系	31
2.3.1	均匀场	31

2.3.2	点电荷的场	32
2.3.3	电偶极子的场	32
2.3.4	电四极子的场	32
2.3.5	分布于小区域的电荷在远区的场按多极子场展开	32
2.4	静电边值问题及其求解方法	34
2.4.1	静电边值问题	34
2.4.2	静电边值问题的唯一性定理	35
2.4.3	静电边值问题的求解方法	35
2.5	分离变数法	35
2.6	镜像法	41
2.7	Green 函数方法	44
2.7.1	关于格林函数的概念	44
2.7.2	Green 函数方法	45
<b>3</b>	<b>静磁问题</b>	<b>47</b>
3.1	静磁现象的物理特征	47
3.2	稳定电流体系的普遍特征, 外来电动力 $\vec{K}$	47
3.2.1	稳定电流体系的必要条件: 外来电动力 $\vec{K}$	47
3.2.2	稳定电流体系的电场和电荷	48
3.3	静磁场的基本特征	49
3.3.1	场方程	49
3.3.2	静磁场用矢势 $\vec{A}$ 表示	49
3.3.3	磁标势的引入	50
3.4	静磁场的能量	51
3.5	若干特殊的静磁体系	51
3.5.1	均匀场	51
3.5.2	磁偶极子	52
3.5.3	小区域稳定电流分布的磁场按磁多极子展开	53
3.5.4	求电流线圈产生的磁标势	55
3.6	静磁问题中的介质	55
3.6.1	磁介质磁化性质的描述	55
3.7	不同类型磁介质的磁化机制	57
3.7.1	抗磁质与顺磁质	57
3.7.2	铁磁质	58
3.7.3	超导体	58
3.8	有磁介质存在时的静磁场方程	59
3.8.1	一般逆磁质或顺磁质	60

3.8.2	铁磁质	60
3.8.3	超导体	61
3.9	静磁问题的求解	61
3.9.1	静磁场的唯一性定理	61
3.9.2	静磁问题求解	61
3.10	磁偶极子在外磁场中的能量	65
3.10.1	小区域电流分布与外磁场的作用	65
3.10.2	小区域电流分布与外磁场的相互作用能	65
3.10.3	磁偶极子在外磁场中所受的力和力矩	66
3.10.4	磁偶极子在外磁场中的有效势能	66
4	电磁波的传播	69
4.1	真空中的平面电磁波	69
4.1.1	讨论电磁波在真空中传播的一般方法	69
4.1.2	真空中的平面电磁波	70
4.1.3	关于真空中平面电磁波的若干的重要的物理概念	70
4.2	高斯光束	72
4.2.1	Helmholtz 方程的波束解; 高斯光束	73
4.2.2	高斯光束的传播特性	74
4.3	电磁波在介质中的传播	75
4.3.1	电磁波在各向同性均匀非导电介质中的传播; 色散; 相速 与群速	76
4.3.2	电磁波在导体中的传播; 衰减	77
4.3.3	电磁场在各向异性介质中的传播; 正常波; 反射波	79
4.4	电磁波在介质交界面上的反射和折射	81
4.4.1	入射波、反射波、折射波	81
4.4.2	运动方程	82
4.4.3	求解	82
4.5	电磁波在导体表面的反射	84
4.6	局限在有界区域内的电磁波, 谐振腔和波导管	86
4.6.1	理想导体	86
4.6.2	以理想导体为边界的电磁波求解问题的一般方法	86
4.6.3	谐振腔	86
4.6.4	波导管	88
5	电磁波的辐射	91
5.1	推迟势	91
5.1.1	有源波动方程——d'Alembert 方程	91



## 0.1 前言

### 0.1.1 综述

电动力学课程研究的对象是什么？研究课题有哪些？通过学习本课程要达到怎样的目标？课程的内容如何安排？这些问题在开始学习本课程前是必须搞清楚的。

电动力学，英文名称为 Electrodynamics，是研究电磁现象的基础理论课程。

电磁现象的本质是什么？物理学家的认识从最初认识到的电荷—电荷之间的超距作用（称之为电作用，用库仑定律描述），电流—电流之间的超距作用（称之为磁作用，用毕奥-沙伐尔定律描述）逐渐转变为认识到必须引入电场、磁场的概念。电磁现象实质为称之为“源”的荷电物质系统与称之为“场”——亦即电磁场（电场、磁场的统一体，Electromagnetic field）的近距离相互作用中所相关的物理现象。这种现象已被定名为电磁相互作用。自然界存在四种基本相互作用—引力相互作用、电磁相互作用、弱相互作用、强相互作用。其中，电磁相互作用理论是认识最为清楚，同时又是应用最为广泛的一种相互作用理论。

电磁现象的核心是电磁相互作用，参与电磁相互作用的两个方面是电磁场和荷电物质系统（或电荷电流系统）。因此电动力学研究的对象是包含了电磁场和荷电物质系统这样一个耦合系统。

荷电物质系统除了极个别情况以外（例如带电粒子）大部分以所谓介质的形式存在。电磁现象、电磁相互作用大都以电磁场与介质的相互作用的形式出现。而由于物质结构的多样性，存在状态的多样性，电磁场与介质的相互作用也表现出多种多样性。因此电磁现象的研究是研究电磁场和包含了介质一类这样的荷电物质系统之间的相互作用这一基本课题的。

### 0.1.2 研究课题

1. 电磁现象的基本规律是怎样的？电磁场的运动规律是什么？荷电物质系统如何影响电磁场的运动？电磁场对荷电物质系统作用的规律是怎样的？在电磁相互作用中是如何反映电磁场能量——动量属性的？

2. 电磁现象中有哪些基本类型的问题？在每一类型的问题中电磁场各具有怎么样的特征？电磁场与荷电物质系统的相互作用有怎样的特点？

3. 为什么从对电磁场现象的研究中，产生了新的时空观，并建立了狭义相对论（Special relativity）？狭义相对论如何使我们对物理世界有了新的认识？

### 0.1.3 达成目标

通过电动力学的学习，应该达到以下几个目标：

1. 了解、认识电磁场。知道如何去描述它，它又有怎样的性质，并掌握其运动规律。认识电磁现象的本质，并熟悉积累典型的电磁场形态。

2. 熟悉并逐步掌握研究电磁现象所运用的数学物理工具。

3. 树立狭义相对论的时空观。掌握狭义相对论的基本原理和物理规律的相对论协变性。能使用狭义相对论原理处理简单的（相对论性的）力学问题和电磁学问题。

### 0.1.4 各章概述

本电动力学课程将根据以上所述内容共分为七章。

第一章，介绍电磁现象的普遍规律。我们将分析如何从库仑定律、毕奥-沙伐尔定律、法拉第电磁感应定律和麦克斯韦位移电流假设出发，总结出电磁现象的普遍规律——麦克斯韦方程组（Maxwell's equations）和洛伦兹力公式（Lorentz force formula）。并进而讨论电



磁场的能量-动量属性，这是电磁场物质性的重要体现。

此外，第一章还要分析并讨论电磁场与一类特殊的荷电物质系统——介质——的相互作用特点，明确介质电磁性质的表述及其含义。以及在电磁场作用下诱导出的电荷、电流分布。这样在由电磁场+介质这个耦合系统中，电磁场运动规律呈现出新的形式——介质中的麦克斯韦方程、介质交界面处的麦克斯韦方程组。

最后，第一章还要介绍电磁场的另一种描述形式——电磁场的势函数表达形式，说明电磁场也是一种规范场。电磁之间的相互作用是一种规范相互作用，它与物质运动存在的内部自由度有关。而相互作用的规范特征也是近代物理非常重要的一个猜想。

第一章是整个电动力学的基础。

从第二章起到第五章将运用电磁场运动的普遍规律讨论几类特殊的电磁学问题——静电问题、静磁问题、电磁波传播问题和电磁波辐射问题。不同类型的电磁学问题中，电磁系统——电磁场和荷电物质系统将呈现出不同的物理景象、表现出不同的特点，并引出相关的物理概念。这些问题的研究大都需要解决所谓的“定解问题”。在解决这些定解问题的过程中，我们将了解并熟悉各种数学物理工具和方法。

第六章，介绍狭义相对论。首先我们分析了它是在电磁理论研究的发展中萌生的。此外，狭义相对论体现了新的时空观，在这种时空观下，我们不仅看到了电磁场的统一性，还明确了将牛顿力学改造为相对论力学的必要性。第七章，我们将特别地讨论了带电粒子与电磁场的相互作用问题。了解从经典观点看带电粒子是如何激发电磁场的，以及电磁场又如何作用（反作用）与带电粒子的。在一定的条件下，我们发现这些理论结果与实验结果产生了不可协调的矛盾，从而进一步揭示了经典电动力学的局限性。

### 0.1.5 推荐参考书目

a) 《电动力学》

郭硕鸿等；

- b) 《电动力学》 蔡圣善等;  
 c) 《Classical Electrodynamics》 J.D. Jackson;  
 d) 《电动力学题解》 林璇英, 张之翔;

## 0.2 数学准备

经典电动力学中主要的数学工具是矢量代数、矢量分析以及数学物理方法 (包括求解偏微分方程的各种方法、特殊函数、函数的正交展开等)。电磁场是一种规范场。近代规范场理论已经广泛应用于微分几何 (主要是纤维丛理论) 来讨论规范场的局域的和整体的性质。使我们对规范场有了更加深入的了解和认识。

我们在这里对经典电动力学中所用的数学工具作一些简略的回顾。以后在课程进行中将有更多更详细的描述和补充。

### 0.2.1 矢量代数

加减	$\vec{A} \pm \vec{B}$
标积 (点乘)	$\vec{A} \cdot \vec{B}$
矢积 (叉乘)	$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
直积 (并乘)	$\vec{A}\vec{B} \neq \vec{B}\vec{A}$
混合积	$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$
二重矢积	$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} = \vec{A} \cdot (\vec{C}\vec{B} - \vec{B}\vec{C})$

### 0.2.2 矢量分析(场论初步)

标量场梯度:  $\nabla\varphi$

$$(\nabla\varphi)_l = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\Delta l}$$

矢量场旋度 (旋密度):  $\nabla \times \vec{A}$

$$(\nabla \times \vec{A})_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{A} \times d\vec{l}}{\Delta S}$$

矢量场散度 (源密度):  $\nabla \cdot \vec{B}$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \vec{B} \cdot d\vec{S}}{\Delta V}$$

上述微分运算定义相应的积分表述为

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b \nabla \varphi \cdot d\vec{l} \quad \text{N-L 公式}$$

$$\oint_{\partial \Sigma} \vec{A} \times d\vec{l} = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} \quad \text{Stokes 公式}$$

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{B}) dV \quad \text{Gauss 公式}$$

用微分几何的语言上述公式反映了  $n$  维体元 (线元、面元、三维体元……)  $M$  中的积分量与其边界  $\partial M$  上的积分量之间的关系。

### 0.2.3 矢量微分算子—— $\nabla$ 算子

关于场量的各种微分运算——标量场的梯度、矢量场的旋度、矢量场的散度, 都可以用一个矢量微分算子—— $\nabla$  算子来描述。后面还要提到另外一些涉及场量变化的微分算子——Laplace Operator (拉普拉斯算子  $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ )、D'Alembert Operator (达朗贝尔算子  $\square^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ ) ——也要用  $\square$  算子来描述。因此, 熟悉  $\nabla$  算子的运算规则及一些运算结果对于学习电动力学课程是非常必要的。

$\nabla$  算子的定义:

$$\nabla \equiv \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

双重性:

矢量性 (作为代数运算时)

微分性 (作为微分运算时)

例如：

$$\begin{aligned}\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= \nabla_A \times (\vec{A} \times \vec{B}) + \nabla_B \times (\vec{A} \times \vec{B}) \\ &= (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\nabla \cdot \vec{A}) \vec{B} + (\nabla \cdot \vec{B}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B}\end{aligned}$$

再如：

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \cdot (\nabla \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

利用  $\nabla$  算子的运算法则和 Gauss 公式很容易推出下述 Green 公式（或称 Green 定理）

$$\iiint_V (\varphi \nabla^2 \psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi) dV = \oint_{\partial V} (\varphi \nabla \psi) \cdot d\vec{S}$$

在电动力学中，常常会用到  $\nabla$  算子对  $r, \vec{r}, f(r)$  等物理量的作用结果。这里，我们将常用到的结果列出：

$$\begin{aligned}\nabla r &= \frac{\vec{r}}{r} \equiv \hat{r} & \nabla \cdot \vec{r} &= 3 \\ \nabla(\vec{a} \cdot \vec{r}) &\equiv \vec{a} & \nabla \vec{r} &= \overleftrightarrow{I} \\ \nabla \times \vec{r} &= 0 & \nabla f(r) &= \frac{df}{dr} \hat{r} \\ \nabla^2 \frac{1}{r} &= -\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = -4\pi\delta(\vec{r})\end{aligned}$$

此外，关于  $\nabla$  算子，有两个基本恒等式

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \varphi) &\equiv 0 \\ \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) &\equiv 0\end{aligned}$$

满足  $\nabla \times \vec{E} = 0$  的场  $\vec{E}$  例如静电场）常称作势量场（或有势场）。势量场总可以表示为某个标量场  $\varphi$  的梯度（例如  $\vec{E} = -\nabla \varphi$ ），满足  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  的场  $\vec{B}$ （例如磁场）可称为无散场。无散场总可以表示为某个矢量场的旋度（例如  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ）。

#### 0.2.4 Helmholtz 定理

若给定三维空间矢量场  $\vec{V}(\vec{r})$  的旋密度  $\vec{c}$  和源密度  $S$ ，并且此矢量场在无穷远处旋密度和源密度的总量等于零，则此矢量场唯一确

定, 即给定:

$$\nabla \cdot \vec{V} = S$$

$$\nabla \times \vec{V} = \vec{c} \quad (\nabla \cdot \vec{c} = 0, \text{自洽性条件})$$

则:

$$\vec{V} = -\nabla\phi + \nabla \times \vec{A}$$

其中:

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{S(\vec{r}') d\tau'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\vec{c}(\vec{r}')(\vec{r}') d\tau'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

对于有界区域情形, 在给定边界条件下也可得到类似结论, 此时  $\vec{V}$  的表达式中应加上边界项的贡献。

关于解的唯一性证明, 在后面讨论 Maxwell 方程组的完备性时将给予进一步说明。

### 0.2.5 $\delta$ 函数

物理学中许多物理理论具有线性理论的特点, 在这些理论中叠加原理成立, 在这些理论中 Green 函数 (有时称为点源函数, 或瞬时点源函数) 具有特殊意义。在物理上它反映了相互作用及相互作用传播的图像。在数学上它可以直接给出所求场分布的积分表达式。Green 函数与  $\delta$  函数有着密切关系。

$\delta$  函数是怎样一种“函数”呢?

电动力学和物理学其他领域一样, 讨论问题时会引入一些理想模型。如点电荷, 偶极子, 四极子, 线电荷, 面电荷等等。这些理想模型是实际情况的一个极限情形, 描述这些理想模型的一个重要工具就是  $\delta$  函数。虽然一些数学家 (Weierstrass, Heaviside 等) 最早用  $\delta$  函数的概念讨论有关数学问题。但是物理学家 Dirac (1930 年) 第一次引入了  $\delta$  函数的形式符号并在其著名的“量子力学原理”中使用了  $\delta$  函数。以后物理学家开始在场论问题中广泛使用  $\delta$  函数讨论相关问题。

物理学中一切点量，如点质量（质点），点电荷，瞬时源（如瞬时信号-脉冲）等均可用  $\delta$  函数来描述。

物理图像清晰，在数学运算中可以当作普通函数一样进行各种运算。如微分，积分，积分变换。运用  $\delta$  函数可以为我们处理有关数学物理问题带来极大的方便。

### $\delta$ 函数的数学概念

$\delta$  函数不是通常意义下的函数，而是一个较为复杂的取极限过程的缩写。设有一组以  $\alpha$  为指数的函数  $\{\delta_\alpha(x)\}$ ，它有以下特征：

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \delta_\alpha(x) = 0$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta_\alpha(x) dx = f(0)$$

若把  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \delta_\alpha(x)$  用  $\delta(x)$  来表示（注意取极限和积分的次序并不总是可交换的），上述性质又可表示为：

$$\delta(x) = 0 \quad x \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$$

但上述表达式应在前述的取极限的意义下去理解。

具有  $\delta$  函数性质的函数组举例：

i)

$$\delta_c(x) = \begin{cases} \frac{1}{c} & |x| \leq \frac{c}{2} \\ 0 & |x| > \frac{c}{2} \end{cases}$$

ii)

$$\delta_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\alpha^2} \quad (\text{Gauss 分布函数})$$

iii)

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$$

$\delta$  函数的性质

$$\begin{aligned}\delta(x) &= 0 & x &\neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x &= f(0) & \text{特别是} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\mathrm{d}x &= 1 \\ x\delta(x) &= 0 \\ \delta(ax) &= \frac{1}{|a|}\delta(x) \\ f(x)\delta(x-a) &= f(a)\delta(x-a) \\ \delta(x) &= \delta(-x) \\ \delta(x^2 - a^2) &= \frac{1}{2|a|}[\delta(x-a) - \delta(x+a)]\end{aligned}$$

$\delta$  函数的微分表示和积分表示

微分表示:

$$\delta(x) = \frac{d\eta}{dx}$$

其中  $\eta(x)$  为阶跃函数 (Heaviside 函数) :

$$\eta(X) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

积分表示: 例 (傅里叶积分表示)

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iK(x-x_0)} \mathrm{d}x$$

此外还有用正交归一完备的函数组  $\psi_n(x)$ , 构成的无穷级数表达式:

$$\sum_n \psi_n^*(x) \psi_n(x') = \delta(x - x')$$

$\delta$  函数的导数

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta'(x) \mathrm{d}x = -f'(0)$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta^{(n)}(x) \mathrm{d}x = (-1)^n f^{(n)}(0)$$

三维  $\delta$  函数

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$$
$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\vec{r})$$



# Chapter 1

## 电磁现象的普遍规律

按照经典电动力学，电磁现象的普遍规律包括了所谓 Maxwell 方程组和 Lorentz 力公式以及在 Maxwell 方程组中隐含的电荷守恒定律。Maxwell 方程组是电磁场的动力学规律，它反映了荷电物质系统如何激发电磁场，电场、磁场如何互相激发，电磁场是如何运动的等规律。而 Lorentz 力公式则反映了电磁场如何作用于荷电物质系统并如何影响它们的运动。在电磁场与荷电物质系统相互作用过程中必然伴随着能量、动量的转移和转换。这一过程是能量、动量转换以及守恒的过程。电磁现象的本质是电磁相互作用。按照近代场论的观点，电磁相互作用是一种规范相互作用。规范相互作用是由于物质系统具有内部自由度的缘故。由于规范相互作用中存在着规范对称性，因此存在相应的守恒定律。电荷守恒定律正是电磁相互作用中存在内部对称性的反映。

这一章我们将首先回顾电磁现象的普遍规律是如何由一系列有关电磁现象的实验规律基础之上、并经过理论的综合加工而提炼出来的，并阐述这些规律所包含的丰富的物理内容。然后我们将利用这些普遍规律研究在电磁相互作用过程中能量、动量是如何转移和转换的。此外，我们还将研究如何用规范场表示电磁场，以及如何用势函数表示电动力学规律。最后我们还将研究电磁现象中大量存在的电磁场和电磁介质的相互作用问题，讨论这一过程中一些较为普遍的特征。

## 1.1 电磁现象普遍规律的建立

### 1.1.1 电磁现象的实验定律

库伦定律 (Coulomb's Law, 1785 年)

库伦定律描写了在真空中两个静止的点电荷之间相互作用力的定律。为了叙述方便, 我们设其中任一点电荷的位置和带电量分别为  $\vec{r}'$  和  $q'$ , 另一点电荷为  $\vec{r}$  和  $q$ ,  $q$  受到  $q'$  的作用力为  $\vec{F}$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'\vec{R}}{R^3} \quad (1.1)$$

其中  $\vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}'$ ,  $\epsilon_0$  为真空中的介电常数,  $\epsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12} \text{F/m}$ 。

(1)式反映的是两个点电荷之间超距作用的观点。若根据场论的观点, 即近距作用观点,  $q'$  在空间激发电场其强度为  $\vec{E}$ , 电场  $\vec{E}$  在  $\vec{r}$  处作用于点电荷  $q$ , 此时 (1.1) 式应解释为:

$$q' \text{ 在空间激发的电场} \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'\vec{R}}{R^3} \quad (1.2)$$

$$q \text{ 在场中受力} \quad \vec{F} = q\vec{E} \quad (1.3)$$

而实验表明, 若空间中存在着若干点电荷, 甚至电荷连续分布, 场的叠加原理成立, 即:

$$\vec{E} = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i\vec{R}_i}{R_i^3} \rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho\vec{R}}{R^3} d\tau' \quad (1.4)$$

而分布电荷在电场中受力情况用力密度  $\vec{f}$  (单位为  $\text{N/m}^3$ ) 描写, 可表达为:

$$\vec{F} = \rho\vec{E} \quad (1.5)$$

这里我们将静止的分布电荷激发的电场称为静电场, 由 (4) 式不难推出:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.6)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (1.7)$$

(6) (7) 式通常称为静电场方程 (微分形式)。静电场方程的积分形式是:

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (1.8)$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (1.9)$$

其中  $Q = \iiint_V \rho d\tau$ ,  $\partial V$  是  $V$  的边界,  $L$  为场中任一闭合回路。(6) (7) 说明静电场有源、无旋。(9) 式说明静电场是有势场, 或者也称保守场。

若用电场线描述静电场: 电场线从正电荷出发而终止于负电荷, 在没有电荷分布的地方, 电场线连续通过。

电荷守恒定律及稳定电流条件

电荷守恒定律是物理学的基本定律之一, 它指出: 电荷不可能创生, 也不可能消灭, 只能从一处转移到另一处。

这里我们考虑某一固定的体元  $V$ , 其边界为  $\partial V$ 。单位时间内体元  $V$  内电荷的增量为  $\frac{d}{dt} \iiint_V \rho d\tau$ , 单位时间内从  $\partial V$  流出的电量为  $\oint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{S}$ , 其中  $\vec{j}$  为电流密度矢量。

由电荷守恒定律, 应有:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho d\tau = - \oint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (1.10)$$

不难推出:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (1.11)$$

(10) (11) 分别是电荷守恒定律的积分表达式和微分表达式。(11) 式有时也称为连续性方程。

对于稳定的电流分布, 应有稳定的电荷分布, 即  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ 。因此稳定电流分布的条件是:

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (1.12)$$

毕奥—沙伐尔定律 (Biot-Savart Law, 1820 年)

毕奥—沙伐尔定律描述了两个稳定电流元之间的相互作用 (超距作用) 的规律, 可表示为:

$$d\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} d\vec{I}(\vec{r}) \times \left( \frac{d\vec{I}(\vec{r}') \times \vec{R}}{R^3} \right) \quad (1.13)$$

上式可以改写成:

$$d\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j}(\vec{r}) d\tau \times \left( \frac{\vec{j}(\vec{r}') d\tau' \times \vec{R}}{R^3} \right) \quad (1.14)$$

上述表达式实际上是由数学家拉普拉斯给出的。其中:

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} H/M$$

其中,  $\mu_0$  为真空磁导率, 大小为  $\mu_0 = 1.26 \times 10^{-6} H/M$ 。

然而, 若从源与场的相互作用观点出发, (14) 式应该解释为: 电流元  $\vec{j}(\vec{r}') d\tau'$  激发了磁场

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(\vec{r}') d\tau' \times \vec{R}}{R^3} \quad (1.15)$$

而电流元  $\vec{j}(\vec{r}) d\tau$  在该磁场中受力为

$$d\vec{F} = \vec{j}(\vec{r}) d\tau \times d\vec{B} \quad (1.16)$$

对于稳定的电流分布, 不存在孤立的电流元, 而连续的电流分布所激发的磁场应是其中各电流元所激发的磁场的叠加。

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{R}}{R^3} d\tau' \quad (1.17)$$

而有物理意义的也只能是分布电流在磁场中受力的力密度

$$\vec{F} = \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) \quad (1.18)$$

由稳定的电流分布所激发的磁场成为静磁场。由(1.17) 式所示的静磁场  $\vec{B}(\vec{r})$  与稳定电流分布  $\vec{j}(\vec{r})$  之间的关系, 不难得到静磁场的场

方程:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.19)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (1.20)$$

(19) (20)表明静磁场是无源有旋的, 磁场线总是闭合的。这与静电场有源无旋的特性形成了鲜明的对照。

需要注意的是: 由(17)式推导(19) (20)式时需要用到稳定电流条件  $\nabla \cdot \vec{j} = 0$

静磁场方程的积分形式是:

$$\oint_V \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (1.21)$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (1.22)$$

(21)式常称为磁场的高斯定理, 它说明不存在磁荷。而(22)式则常称为安培环路定理。

法拉第电磁感应定律 (Faraday's law of induction, 1831 年)

受毕奥—沙伐尔定律中所显示的所谓“电生磁”的机理和图像, 法拉第终于在寻找所谓“磁生电”的过程中发现了电磁感应定律:

$$\varepsilon_{\text{感}} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (1.23)$$

其中  $\varepsilon_{\text{感}}$  为闭合回路中的感生电动势,  $\Phi$  为通过该回路的磁通量。按照麦克斯韦的观点, 产生感应电动势的是回路中的非静电力, 是涡旋电场  $\vec{E}_{\text{旋}}$ 。非静电力一般用  $\vec{K}$  表示。除了  $\vec{E}_{\text{旋}}$  外, 其他如化学电池, 温差电池等也可提供非静电力  $\vec{K}$ 。

由静止分布电荷所产生的电场一般是有源无旋场。它是有源无旋的, 可用势函数表示 (详细见后), 相应的电场可表示为  $\vec{E}_{\text{势}}$ 。一般情况下, 电场还存在  $\vec{E}_{\text{旋}}$ , 因此总电场  $\vec{E}$  可表示为  $\vec{E} = \vec{E}_{\text{势}} + \vec{E}_{\text{旋}}$ 。这时相对于闭合回路, 应有:

$$\varepsilon = \oint \vec{K} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E}_{\text{旋}} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.24)$$

考虑到  $\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$ , (23) 式所示法拉第电磁感应定律用场量表示为:

$$\oint_{\partial\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (1.25)$$

r1.5cm

其中  $\partial\Sigma$  表示某一闭合回路,  $\Sigma$  表示该闭合回路所包围的面元。与(25) 式相应的微分形式可写为:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.26)$$

应该指出, 电磁感应现象的发现促使法拉第更加坚定了必须引入场的概念, 这也是最终促使提出电磁场的重要一环。法拉第定律表明磁场发生变化时, 将产生涡旋电场。用场线表示应如图 1.2 所示。这时闭合的电场线与闭合的磁场线相链。

涡旋电场的出现, 说明在随时间变化的情形下, 库伦定律不再严格成立。

### 1.1.2 位移电流的引入 (Maxwell, 1861-1862 年)

位移电流的引入是一个典型的理论工作的结果, 同时它也是 Maxwell 方程组提出的基础。麦克斯韦最初提出位移电流假设是基于所谓“以太”模型提出的。现在我们设法从场论的观点说明为什么必须引入位移电流假设。设想下面一个最简单的交流电路, 如图 1.3 所示。将一电容器与一交流电源相连接, 线路中将有交变电流, 从而在线路周围存在着交变的磁场。与此同时, 在电容器内将有交变的电场。显然, 这是一个非稳定的情况。

图 1.3

设想在电容器内空间中存在一个闭合的回路  $L$ , 以  $L$  为边界可以有两个曲面  $S_1$ ,  $S_2$ 。其中曲面  $S_1$  与导线相交,  $S_2$  则位于电容器两板

之间。以  $\vec{j}_f$  表示电路中的交变电流，显然：

$$\iint_{S_2} \vec{j}_f \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\iint_{S_1} \vec{j}_f \cdot d\vec{S} \neq 0$$

为使安培环路定律在普遍情况下依然使用，可以引入位移电流  $\vec{j}_d$ ，它与电场  $\vec{E}$  的变化率  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  成正比

$$\vec{j}_d \equiv \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.27)$$

令总电流  $\vec{j}$  为自由电流  $\vec{j}_f$  和位移电流  $\vec{j}_d$  的叠加  $\vec{j} = \vec{j}_f + \vec{j}_d$ ，可以证明此时在电容器任一极板两侧  $\vec{j}$  仍然是连续的。此时推广的安培环路定理仍然普遍成立。

$$\iint_{S_1} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} \quad (1.28)$$

引入位移电流  $\vec{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  的必要性也可以从电荷守恒定律导出。事实上，在非稳定情形下， $\nabla \cdot \vec{j}_f \neq 0$  而  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) \equiv 0$ 。若引入位移电流  $\vec{j}_d$ ，以保持  $\nabla \cdot (\vec{j}_f + \vec{j}_d) \neq 0$  总是成立。考虑到

$$\rho = \varepsilon \nabla \cdot \vec{E} \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \left( \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (1.30)$$

显然取  $\vec{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  是一个最简单、最合适的选择。总之，在场量随时间变化情形下，为了使理论自洽，有必要引入位移电  $\vec{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ 。  
。r4cm

由(28)可知，在电场随时间变化时，相应的位移电流  $\vec{j}_d$  也将产生涡旋磁场。用场线表示可以用右图表示位移电流即变化的电场与相应的涡旋电流磁场的关系。

由于位移电流  $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  对产生涡旋磁场也有贡献, 说明在场量随时间变化情况下, 毕奥—沙伐尔定律也不再严格成立。

法拉第电磁感应定律和麦克斯韦位移电流的存在, 揭示了电磁场内部——电场和磁场——相互作用的规律: 变化的电场和磁场相互激发是其运动的主要内因。只要某处发生电磁扰动, 由于电磁场的互相激发, 它就在空间中运动传播, 形成电磁波。(28) 式可改写为

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{\Sigma} (\vec{j}_f + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \quad (1.31)$$

相应的微分形式为

$$\nabla \cdot \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_f + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.32)$$

### 1.1.3 麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式

综合电磁现象的几个实验定律——库仑定律、毕奥—沙伐尔定律、法拉第电磁感应定律以及麦克斯韦的位移电流假设, 电磁现象的基本规律——麦克斯韦方程组和洛伦兹力公式就呈现出来了。

麦克斯韦方程组

麦克斯韦于 1864 年 12 月 8 日在英国皇家学会宣读他的著名论文: “A Dynamical Theory of Electromagnetic Fields”(正式发表于 1865 年)。在这篇论文中, 他把电磁现象的规律总结成 8 个基本方程 (20 个分量方程), 其中也包括诸如电荷守恒定律、欧姆定律、位移电流表达式等等内容。以后主要是赫兹 (Hertz) 在 1890 年把其中真正涉及到电磁场动力学的方程挑选出来, 归纳为简洁的对称形式, 形成一个关于  $\vec{B}$ 、 $\vec{E}$  的四个矢量场的方程, 并称之为麦克斯韦方程组, 其名称一直



沿用至今。

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.33)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.34)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.35)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_f + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.36)$$

如果将上述方程组改写为如下形式

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

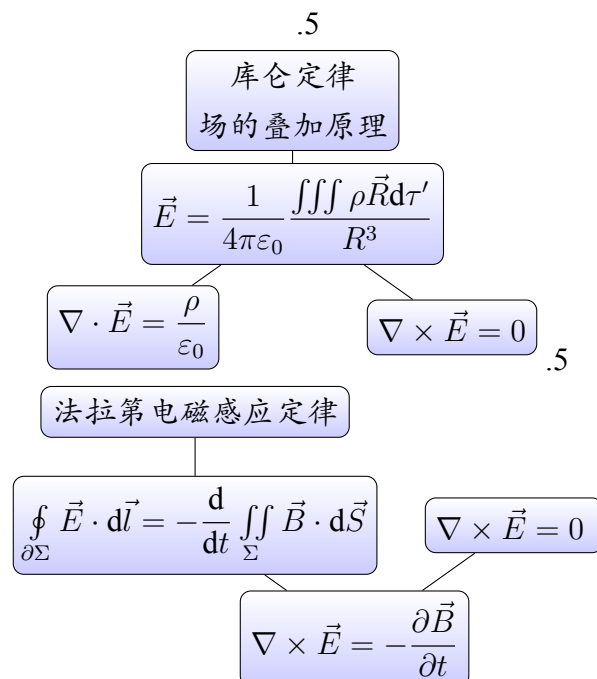
$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

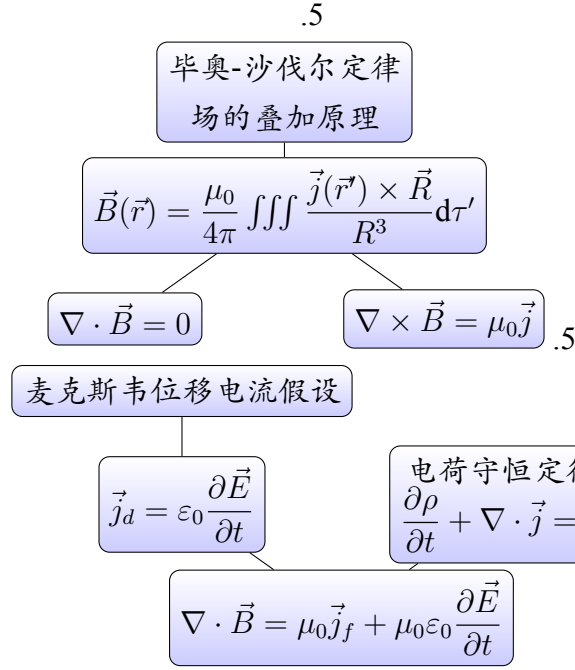
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}_f$$

可以把电磁场内部的相互作用和电磁场与外源之间的相互作用区别开来，更容易反映电磁场的统一性，以及电磁相互作用的真实图像。

麦克斯韦方程组的建立过程可用下列图表表示：





在实际应用中也常常用到麦克斯韦方程的积分形式

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1.37)$$

$$\oint_{\partial\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (1.38)$$

$$\vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (1.39)$$

$$\oint_{\partial\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt} + \mu_0 I \quad (1.40)$$

其中  $\Phi, \Phi_e$  分别为磁通量和电通量。(37) (38) (39) (40) 通常又称为电场的 Gauss 定理, 电磁感应定律, 磁场的 Gauss 定理和推广的安培环路定律。

- 关于 Maxwell's equations 的几点说明: i) 方程组以微分形式表达电磁场动力学规律, 有助于反映电磁相互作用的局域特征。
- ii) 方程组表明在电磁场运动中存在着两种不同形式的相互作用——电磁场与外源的相互作用、电磁场内部电场与磁场的相互作用, 前者反映了外源激发电磁场的特征, 后者反映了电场和磁场互相激发的特征, 这是决定电磁场运动形式的主要因素。
- iii) 电磁场内部作用决定了电磁场运动的波动特征。以无源区域的麦克

斯韦方程组为例。

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4)$$

由(2)式可得

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) + \nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

进一步展开后得

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

代入(1)式可得

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

同理可得：

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

其中  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 299792458 \text{ m/s}$ 。

两式显示了电磁场运动的波动特征。这也为确定光波的电磁本质提供了理论基础。1882年 Hertz 第一次用实验证实了电磁波的存在。

iv) 方程组包含了电荷守恒定律内容。事实上，由：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= -\mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

很容易导出：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

v) 方程组作为描述电磁场的运动规律是完备的。

所谓完备性,指的是由方程组加上适当的定解条件,可以完全把电磁场的运动形态  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  确定下来。用数学的语言表达,完备性意味着由方程组和定解条件可以把解唯一的确定下来。证明如下: 给定方程意味着 Maxwell 方程组中外源  $\rho(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  已经给定。定解条件包括初条件  $\vec{E}(\vec{r}, 0)$ ,  $\vec{B}(\vec{r}, 0)$  (必须满足约束条件:  $t = 0$  时,  $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$  和  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ) 以及适当的边界条件  $E_{||}|_{\Sigma}$  或  $B_{||}|_{\Sigma}$ , Maxwell Equation 的解是唯一的。

假设满足方程组和定解条件的解有两组:  $(\vec{E}_1, \vec{B}_1)$  和  $(\vec{E}_2, \vec{B}_2)$ , 令:  $\vec{\eta} = \vec{E}_2 - \vec{E}_1$ ,  $\vec{\beta} = \vec{B}_2 - \vec{B}_1$ , 则,  $\vec{\eta}$ ,  $\vec{\beta}$  满足下列方程组及定解条件:

方程组:

$$\nabla \cdot \eta = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \times \eta + \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \beta = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \times \eta - \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

定解条件:

$$\text{初条件:} \quad t = 0 \text{ 时 } \vec{\eta} = 0, \quad \vec{\beta} = 0 \quad (5)$$

$$\text{边条件:} \quad \vec{\eta}_{||}|_{\Sigma} \quad \text{或} \quad \vec{\beta}_{||}|_{\Sigma} = 0 \quad (6)$$

利用  $\square$ , (4) 式

$$\frac{1}{\mu_0} \left( \vec{\beta} \cdot (2) - \vec{\eta} \cdot (4) \right) = \nabla \cdot \left( \frac{1}{\mu_0} \vec{\eta} \times \vec{\beta} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 \eta^2 + \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{\mu_0} \right) = 0$$

对整个区域积分得:

$$\int_{\Sigma} \left( \frac{1}{\mu_0} \vec{\eta} \times \vec{\beta} \right) \cdot d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 \eta^2 + \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{\mu_0} \right) d\tau = 0$$

由边条件  $\square$  可得:

$$\int_{\Sigma} \left( \frac{1}{\mu_0} \vec{\eta} \times \vec{\beta} \right) \cdot d\vec{S} = 0$$

故有：

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 \eta^2 + \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{\mu_0} \right) d\tau = 0$$

由初条件  $\square$  可得  $t = 0$  时

$$\iiint_V \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 \eta^2 + \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{\mu_0} \right) d\tau = 0$$

故对任意时刻有：

$$\iiint_V \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 \eta^2 + \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{\mu_0} \right) d\tau = 0$$

由于被积表达式为非负表达式，由积分恒等于零，可得：

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0 \eta^2 + \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{\mu_0}$$

必有：

$$\eta = 0 \qquad \beta = 0$$

即有：

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = 0 \qquad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = 0$$

解的唯一性得证，方程组的完备性得证。

洛伦兹力公式 (Lorentz force, 1892)

作为电磁相互作用的一个方面，Maxwell 方程组反映了其中的一个方面：荷电物质的运动（通过其电荷、电流分布  $\rho, \vec{j}$ ）如何激发电磁场；作为电磁相互作用的另一个方面，洛伦兹提出了荷电物质在电磁场中的受力公式——Lorentz force 公式，即：

分布电荷、电流在电磁场中受到的力密度为

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \tag{1.41}$$

由此也可推出，电磁场对荷电物质的功率密度是：

$$w = \vec{j} \cdot \vec{E} \tag{1.42}$$

对于带电粒子, 则有:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad (1.43)$$

$$w = q\vec{E} \cdot \vec{v} \quad (1.44)$$

通常认为, Maxwell 方程组和 Lorentz force 公式把电磁相互作用的两个方面“场”(电磁场)和“源”(荷电物质系统)之间以及电磁场内部的相互作用作了全面的阐述。两者一起构成了经典电动力学的理论基础。

从下面的分析可知, Lorentz force 公式反映了电磁场与荷电物质系统的能量、动量转换及守恒规律。

至于其它有关电磁现象的实验定律, 如欧姆定律、介质的极化和磁化的规律等等, 原则上都可以在上述理论上结合物质结构的模型并用量子力学推演出来。但是这种推演在很大程度上依赖于人们对于物质微观结构和动力学机制的认识, 目前还不可能做到完全精确。因此在宏观电动力学中, 除了基本的 Maxwell 方程组和 Lorentz force 公式以外, 还需要补充一些有关介质电磁性质的唯象的实验规律。

#### 1.1.4 电磁场的能量和动量

电磁场和荷电物质系统是不同的物质形式。二者具有不同的形态, 不同的运动规律。但既然都是物质, 必然具有能量、动量属性。能量、动量既可以相互转移, 也可以在不同物质形态之间转换。但总体应该保持其守恒规律。

Maxwell 方程组和 Lorentz Force 公式是电磁现象的普遍规律, 给出了电磁场和荷电物质系统相互作用的规律, 必然应该包含了两个系统相互作用时遵守的能量、动量转移、转换及守恒定律, 从而能揭示电磁场的能量和动量性质。

从力学角度看电磁场对荷电物质系统的作用包括施力和做功。由

Lorentz 公式可知，其力密度  $\vec{f}$  和功率密度  $w$  分别为：

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \quad (1.45)$$

$$w = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (1.46)$$

施力意味着动量的转移，做功则意味着能量的转移。在过程中应遵循相应的守恒定律。我们将从这样的角度揭示电磁场的能量、动量性质。

电磁场的能量密度  $u$  和能流密度  $\vec{S}$

这里，我们使用能量密度  $u$  和能流密度  $\vec{S}$  来描绘电磁场的能量性质： $u$  表示单位体积内的电磁场能量，其单位为  $J/m^3$ ； $\vec{S}$  描述的是电磁场的能量流动情况，表示单位时间内通过单位面积的电磁场的能量，其单位为  $J/(m^2 \cdot s)$ 。 $\vec{S}$  的方向为电磁场能量流动方向。

考虑一空间体元  $V$ ，在体元  $V$  内电磁场对荷电物质系统做功的功率为： $\iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$

在体元  $V$  内单位时间电磁场能量的增加量是： $\frac{d}{dt} \iiint_V u d\tau$

通过  $V$  的边界  $\partial V$  单位时间内流出的电磁场能量为： $\iiint_{\partial V} \vec{S} \cdot d\Sigma$

根据电磁现象中能量转换及守恒定律应有：

$$\iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau = -\frac{d}{dt} \iiint_V u d\tau - \iiint_{\partial V} \vec{S} \cdot d\Sigma \quad (1.47)$$

转换成微分表述，应有：

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{S} \quad (1.48)$$

若以  $u'$  为荷电物质系统的能量密度（包括机械能和内能）：

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial u'}{\partial t}$$

上述能量转换及守恒定律亦可表达为：

$$\frac{\partial}{\partial t} (u + u') + \nabla \cdot \vec{S} = 0 \quad (1.49)$$

另一方面, 根据 Maxwell 方程组, 有

$$\begin{aligned}\vec{j} &= \frac{1}{\mu_0} \left( \nabla \times \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 \\ \frac{1}{\mu_0} \left( \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) &= 0\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}\vec{j} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\mu_0} \left( \nabla \times \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{E} - \frac{1}{\mu_0} \left( \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \vec{B} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \frac{\vec{B}^2}{\mu_0} \right) - \nabla \cdot \left( \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right)\end{aligned}\tag{1.50}$$

比较 (48) (50), 可得

$$-\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \frac{\vec{B}^2}{\mu_0} \right) - \nabla \cdot \left( \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right)$$

显然,  $u$  和  $\vec{S}$  的一个合理表达式为:

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \frac{\vec{B}^2}{\mu_0} \tag{1.51}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \tag{1.52}$$

关于电磁现象中能量转换及守恒定律 (50) 是由波印亭于 1884 年导出的, 所以也称为波印亭定理(Poynting's theorem)。而电磁场能流密度  $\vec{S}$  表达式 (52) 亦被称为波印亭矢量(Poynting Vector)。

以后从狭义相对论关于电磁场能量、动量张量协变性的讨论中可知 (52) 表达式是唯一的。

从  $u$  和  $\vec{S}$  的表达式可以看出电磁场能量、能流的特点:

i) 电磁场的能量是电磁能  $\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2$  和磁场能  $\frac{1}{2} \frac{\vec{B}^2}{\mu_0}$  的代数和, 分别正比于  $\vec{E}^2$ ,  $\vec{B}^2$ , 有正定性。

ii) 只有同时存在电场和磁场时, 才有电磁场的能量的流动, 能流  $\vec{S}$  的方向与  $\vec{E}$ 、 $\vec{B}$  垂直。



实例分析：直流电源对电路供电时，能量传输的图像分析。经验告诉我们，当我们合上电路中的开关，几乎同时在负载中即有电流，亦即在负载中建立了电场并有电能产生。而导体内电荷的流动是其中自由电子平均的定向漂移。以铜导线为例，导线内自由电子的数密度约为： $n = 8.4 \times 10^{28}/m^3$ 。

若其中通过的电流密度为： $j = 2.4 \text{ A/mm}^2 = 2.4 \times 10^6 \text{ A/m}^2$ ，而  $\vec{j} = -ne\vec{v}$ ， $e = 1.6 \times 10^{-19}C$ 。则有  $\vec{v} = \frac{\vec{j}}{ne} = 1.8 \times 10^{-4}m/s$

而实际上电源向电路供电时，由于电路接通的同时，其周围建立了电磁场，并由电磁场将能量从电源传输到负载，因此，能量传输的速度  $\sim$  光速  $C$ 。

由前面的理论分析可知，电磁场能量传输由其波印亭矢量  $\vec{S}$  的分布决定。下面我们来分析直流电路供电时，在电路附近电磁场分布以及  $\vec{S}$  的分布。磁场  $\vec{B}$ ：磁场线总是沿着右旋方向环绕电流周围因而

#### 直流电路能量传输景象

包围在电路周围。电场  $\vec{E}$ ：电场线基本上沿着电路电流分布，既有平行分量  $\vec{E}_{\parallel}$ ，亦有垂直分量  $\vec{E}_{\perp}$ 。其中分布特征分析如图 1.5 所示。

#### 1. 电路内

##### (1) 电源内部

$$\vec{j} = \sigma' \square (\vec{E} + \vec{K})$$

$\vec{E}$  为主要由电源内部分布电荷决定的稳恒电场，它产生静电力； $\vec{K}$  为外来电动势，又称非静电力。通常电源中  $\vec{E}$  的方向与  $\vec{K}$  的方向相反，且  $|\vec{E}| < |\vec{K}|$ 。因此  $\vec{j}$  的方向主要由  $\vec{j}$  决定。这样在电源附近电磁场的能流强度  $\vec{S}$  的方向由电源指向外部。

##### (2) 电源外部

$$\vec{j} = \sigma' (\vec{E})$$

导线内， $\vec{E}$  与  $\vec{j}$  方向一致。由于  $\sigma$  很大，故  $E$  很小。

负载内， $\vec{E}$  与  $\vec{j}$  方向一致。由于  $\sigma$  很小，故  $E$  很大。

在导线、负载表面应有适量的电荷分布，以保证在外电路中有稳定电流所需要的电场分布。

## 2. 电路外

# Chapter 2

## 静电问题

从本章开始，我们将利用第一章阐述的电磁现象的基本规律来研究几类典型的电磁学问题：静电问题、静磁问题、电磁波的传播问题和电磁波辐射问题，每一类问题有各自的特点——物理的、数学的，从而对电磁现象有更全面深入的了解。

静电问题研究静电场和静止电荷分布的相互作用，静电场和电介质或导体的相互作用。在静电问题中静电场和静止的电荷分布（包括电介质、导体在静电场作用下产生的诱导电荷分布）之间的作用处于相对平衡的状态。静电问题要研究：给定自由电荷分布以及空间中介质或导体的分布，如何求解静电场分布；静电场如何作用于荷电系统，如何作用于介质或导体。

### 2.1 静电场的基本性质

#### 2.1.1 场方程

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{array} \right.$$

上述方程的积分形式给出静电场的高斯定理；其中第二个方程表明了静电场是保守场，可以直接引入势函数  $\varphi$  描述静电场。这组方程表明静电场的电场线的特点为有头有尾、不可能闭合。

在两种介质的交界处，静电场有边值关系：

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_f \\ \hat{n} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \end{array} \right.$$

$\hat{n}$  为介质交界面处的单位法向矢量，方向由介质 1 指向介质 2。

### 2.1.2 静电场的势函数表示

静电场可用势函数  $\varphi$  表示

场方程用势函数表示如下：  
在线性介质中

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_f}{\varepsilon}$$

在介质交界面上

$$-\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} + \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \sigma_f$$

(在不存在偶极层时)

### 2.1.3 静电场的能量密度，总能量

由第一章可知，电场能量密度为，在静电场情形下，场使介质极化，所做的功以极化能形式储存起来。通常将极化能也包含在电磁能之中，此时体系的能量密度表为

$$u = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$$

在此情况下，由体系（电磁场 + 分布电荷 + 介质）的总能量应为

$$U = \iiint u d\tau$$

积分遍布全空间。若选择无穷远处为零点，利用方程可将变为

$$U = \frac{1}{2} \iiint \varphi \rho_f d\tau$$

必学指出与知识积分总量相等，并不应将  $\frac{1}{2} \varphi \rho_f$  解释为体系的能量密度。

上式在讨论电荷体系与外场的作用时是方便的，要注意的是明确区分电荷体系的自场与外场的含义。

## 2.2 静电问题中的导体和介质

在静电问题中，导体和介质有如下特点

### 2.2.1 导体

导体内部  $\vec{E} = 0, \varphi = \text{Constant}$

导体表面，有面电荷分布  $\sigma_f = \hat{n} \cdot \vec{D}$  或  $-\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\sigma_f}{\varepsilon}$ 。 $\varepsilon$  为导体外介质的介电常数，由此可计算导体所带的总电量

$$Q = -\varepsilon \oint \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Sigma$$

### 2.2.2 介质

介质的电磁性质多种多样, 介质中的场方程及介质之间的边值关系也有所不同, 下面介绍静电问题中两个不同的介质的情况。

#### 1、各向同性均匀介质

$$\text{介质内部 } \vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_f}{\varepsilon}$$

介质交界面

$$\begin{cases} -\varepsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} + \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \sigma_f \\ \varphi_2 = \varphi_1 \end{cases}$$

#### 2、铁电体 $\vec{P} = \vec{P}_0 + \chi_e \varepsilon \vec{E}$

介质内部

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_f}{\varepsilon} \quad (\varepsilon = (1 + \chi_e) \varepsilon_0)$$

介质交界面

$$\begin{cases} -\varepsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} + (1 + \chi_e) \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \vec{P}_0 \cdot \hat{n} = \sigma_f \\ \varphi_2 = \varphi_1 \end{cases}$$

## 2.3 若干特殊的静电体系

对于静电体系, 一个特定的场分布与一个特定的电荷分布有一一对应关系, 因此对于一个场分布的认识与对一个电荷分布的认识是密切关联的。

此外静电场满足场的叠加原理, 这意味着一个静电场分布可以分解为一系列特殊的静电场的叠加。这对于理解一个场分布的物理特征是很有意义的。

例如

$$\varphi = ar \cos \theta + \frac{b}{r} + \frac{c \cos \theta}{r^2}$$

对应的是一个均匀场、一个点电荷和一个电偶极子场的叠加, 其中  $a, b, c$  分别和均匀场的场强, 点电荷的电量, 电偶极子的电偶极矩有关。

### 2.3.1 均匀场

设均匀场  $\vec{E}$  沿着  $z$  方向

$$\begin{aligned} \varphi &= -E_0 z + \varphi_0 \\ &= -Er \cos \theta + \varphi_0 \end{aligned}$$

这个场分布可对应于两个均匀的无穷大带电平面之间的场或特殊类型电荷分布的内场 (见后)。

### 2.3.2 点电荷的场

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

点电荷的电荷密度可表为

$$\rho = q\delta(\vec{r})$$

### 2.3.3 电偶极子的场

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

电偶极子: 一对带等量正负电荷  $\pm q$  的点电荷对, 两者相距为  $\vec{l}$ , 若  $q \rightarrow \infty$ ,  $\Delta l \rightarrow 0$ , 但  $q\Delta l \rightarrow p$ , 则称之为电偶极子, 相应的带电状况用电偶极矩  $\vec{p}$  标志。

$$\vec{p} = \lim_{q \rightarrow \infty} \lim_{\Delta l \rightarrow 0} q\Delta l$$

电偶极子的电荷密度可表为

$$\rho = -\vec{p} \cdot \nabla \delta(\vec{r})$$

### 2.3.4 电四极子的场

电四极子: 一对大小相等、方向相反的电偶极子  $\vec{p}, -\vec{p}$  相距为  $\vec{d}$ , 当  $d \rightarrow 0$ , 但  $pd$  保持有限, 即构成一个电四极子。

电四极子有两种基本构型

一个电四极子代表一种特殊的电荷分布, 用一种特殊的二阶对称张量  $\vec{\mathcal{D}}$  (称为电四极矩) 来描写

$$\vec{\mathcal{D}} = \lim_{p \rightarrow \infty} \lim_{d \rightarrow 0} \lim_{pd \rightarrow \text{Constant}} 3(\vec{p}\vec{d} + \vec{d}\vec{p})$$

对应的无迹张量为

$$\vec{D} = \vec{\mathcal{D}} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\vec{\mathcal{D}}) \vec{I}$$

可以证明电四极子的电场为

$$\varphi_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6} \frac{\vec{\mathcal{D}} : (3\hat{r}\hat{r} - \vec{I})}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{D} : \hat{r}\hat{r}}{2r^3}$$

此外还有八极子, 十六极子, 三十二极子……它们的概念以及相应的场分布特点可以从后面的说明得以了解。

### 2.3.5 分布于小区域的电荷在远区的场按多极子场展开

若在区域内有电荷分布  $\rho$ , 在区域外任意一点  $M$  由  $\rho$  所激发的电场可表为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}') d\tau'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

以  $a$  表示电荷区的线度, 若  $r > a \geq r'$

把  $\frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$  在  $\vec{r}' = 0$  点处对做展开 (实为对  $\frac{r'}{r}$  做展开)

$$\frac{1}{R} = \left(\frac{1}{R}\right)_0 + \vec{r}' \cdot (\nabla' \frac{1}{R})_0 + \frac{1}{2!} \vec{r}' \vec{r}' : (\nabla' \nabla' \frac{1}{R})_0 + \dots$$

其中

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{R}\right)_0 &= \frac{1}{r} \\ (\nabla' \frac{1}{R})_0 &= \frac{\vec{r}'}{r^3} = \frac{\hat{r}}{r^2} \\ (\nabla' \nabla' \frac{1}{R})_0 &= \frac{3\vec{r}'\vec{r}' - r'^2 \vec{I}}{r^5} = \frac{3\hat{r}\hat{r} - \vec{I}}{r^3} \end{aligned}$$

则在  $M$  点的场可表为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint \frac{\rho(\vec{r}') d\tau'}{R} = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2$$

总电荷  $Q = \iiint \rho(\vec{r}') d\tau'$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r}$$

电偶极矩  $vecp = \iiint \rho(\vec{r}') \vec{r}' d\tau'$

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

电四极矩  $\vec{\mathcal{D}} = \iiint 3\rho(\vec{r}') \vec{r}' \vec{r}' d\tau'$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6} \frac{\vec{\mathcal{D}} : (3\hat{r}\hat{r} - \vec{I})}{r^3}$$

$Q, \vec{p}, \vec{\mathcal{D}}$  分别称为电荷系统的总电荷、总电偶极矩、总电四极矩。

由于  $\vec{\mathcal{D}}$  的迹对无贡献,  $\varphi_2$  中也可将用其对应的无迹张量  $\vec{D}$  来代替。

$$\vec{D} = \iiint \rho(\vec{r}') (3\vec{r}' \vec{r}' - r'^2 \vec{I}) d\tau'$$

可以看出多极子的势是随着  $(\frac{1}{r})^{l+1}$  递减的, 因此电荷系统在区域外的势按多极子势展开, 实际上也是按  $(\frac{1}{r})^{l+1}$  作展开, 这在近似计算中是常用方法。

在场论中, 也常常将  $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$  按球谐函数作展开, 当  $r' < r$  时, 有

电荷区外的电势可表为

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_l^{m=-l} \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}}$$

$$q_{lm} = \iiint Y_{lm}^*(\theta', \phi') r'^l \rho(\vec{r}') d\tau'$$

称为系统的电多极矩。

例：计算下图电荷分布所产生的电势

对此电荷系统

$$Q = 0$$

$$\vec{p} = 0$$

$$\vec{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 0 & 3ql_1l_2 & 0 \\ 3ql_1l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \vec{D}$$

在球坐标下

$$\hat{r} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

$$\vec{D} : \hat{r}\hat{r} = \text{Tr} \begin{pmatrix} 0 & 3ql_1l_2 & 0 \\ 3ql_1l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin^2 \theta \cos^2 \phi & \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi & \sin \theta \cos \theta \cos \phi \\ & \sin^2 \theta \sin^2 \phi & \sin \theta \cos \theta \sin \phi \\ & & \cos^2 \theta \end{pmatrix}$$

$$= 6ql_1l_2 \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi$$

$$\varphi_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{D} : \hat{r}\hat{r}}{2r^3} = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} ql_1l_2 \frac{\sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi}{r^3}$$

## 2.4 静电边值问题及其求解方法

### 2.4.1 静电边值问题

对于静电体系，若给定区域内电荷分布（一般指自由电荷分布）和电介质（或导体）分布，以及区域边界上的值或的值（在通常情况下即相应于的值）。求解区域内的场分布，此即为静电边值问题。

这相应于数学物理中所谓一类“定解问题”。

数学物理中的定解问题，必须考虑两个因素——方程和定解条件。从物理上看，方程反映了静电场内各部分之间的联系以及静电场和区域内腹部电荷的相互作用。但仅有方程尚不足以确定体系的运动变化，因此体系的运动变化还与其初始状态以及通过边界所受的外界作用有关。从数学上看，一个（线性）微分方程有无穷多解，一个一般解在其通解中含有无数多个任意系数（甚至包含任意函数），而初始状况和边界状况则是确定这些函数的数值或者函数形式的边界条件和初值条件。求一个微分方程的描述——一定初值问题和边界条件的问题数学上称之为“定解条件”。

静电问题的定解只需要考虑方程和边界条件，故又称之为静电初值问题。



### 2.4.2 静电边值问题的唯一性定理

静电边值问题的解（满足场方程，满足边界条件）是唯一的。

此定理的证明类似于第一章证明 Maxwell 方程组完备性的证明。证明从略。

在静电边值问题求解时，当问题具有某种明显的对称性时，选择适当的“试探解”，其根据就是静电边值问题的唯一性定理。

### 2.4.3 静电边值问题的求解方法

#### 1、分离变数法

根据边界形状，包括介质交界面的形状选择适当的坐标系，将方程变数分离，同时将边条件变数分离，分解为若干常微分方程的问题。其中包含的一定数量的本征值问题求得相应的本征函数组，然后求得满足方程的一系列特解，用特解叠加表达方程的一般解，根据本征函数组的正交完备性，并用定解条件把叠加系数求出，从而求出问题的解。

在分离变数中，求解本征值问题是核心问题，有时把问题的特解称作“本征运动”。

#### 2、镜像法

当以一个规整区域内仅有少数孤立点源或线源，根据物理分析（对称性分析）将问题的解表达为源和项所激发的场的叠加。

#### 3、Green 函数方法

先求出相应的定解问题的 Green 函数，然后利用 Green 定理将定解问题利用 Green 函数的积分表达出来。

#### 4、其他方法

变分法、积分变换法、有限元法等，大都适用于近似计算。

## 2.5 分离变数法

数学物理问题的求解，例如静电问题的求解，常常遇到（线性）偏微分方程的求解问题。用分离变数法求解在数学上是把一个一般的运动分解成一定自由度上的“本征振动”的问题，因此在这种方法里求解本征值问题，以及利用本征函数组的正交完备性是重点。

我们通过经典学中的几个实例来展示分离变数法的步骤和要点。

例 1：介电常数为  $\varepsilon$ 、半径为  $R_0$  的介质球置于均匀外电场  $\vec{E}_0$  之中，求介质球内外的电势。

物理机制：介质球在外电场中被极化，在其表面产生束缚电荷（极化电荷），这些束缚电荷激发新的场  $\vec{E}'$ ，（在介质内部，其方向总是与  $\vec{E}_0$  相反，故称之为退极化场），叠加在原外场  $\vec{E}_0$  上，得到总电场  $\vec{E}$ ，束缚电荷分布和总电场  $\vec{E}$ （在球内为  $\vec{E}_1$ ，在球外为  $\vec{E}_2$ ）相互制约，其制约关系反映在其介质球表面两边场量的边值关系上。

求解步骤：

(1) 将物理问题表达为数学上的定解问题

选取球坐标系，设球心  $O$  为坐标原点，并选的  $\vec{E}_0$  方向为极轴方向，这时  $\phi = \phi(r, \theta)$ 。介质球内外的场量分别用  $\varphi_1, \varphi_2$ ，表示

方程

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \varphi_1 = 0 \quad r < R_0 \\ \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = \varphi_2 \\ -\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} + \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = 0 \end{array} \right. \quad r = R_0 \\ \nabla^2 \varphi_2 = 0 \quad r > R_0 \end{array} \right.$$

定解条件  $r \rightarrow 0$  有界,  $r \rightarrow \infty$  时,  $-E_0 r \cos \theta$

(2) 求解方程

a) 将方程和边条件变数分离

令  $\varphi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$

代入  $\nabla^2 \varphi = 0$ , 得

$$\frac{1}{r^2 R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = 0$$

要使方程有界, 必须有

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -\lambda \\ \frac{1}{r^2 R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) = \lambda \end{array} \right.$$

对于前一个方程, 引入变量  $x = \cos \theta$  令  $\Theta(\theta) = y(x)$ , 方程变为 Legendre 方程

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda y = 0 \quad -1 \leq x \leq 1$$

后一个方程则变为 Euler 方程

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \lambda R = 0 \quad (0 < r < R_0, R_0 < r < \infty)$$

b) 求解本征值问题在区间内有界

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda y = 0$$

在  $[-1, 1]$  区间内有界, 得本征值  $\lambda = l(l+1)$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots$

本征函数  $P_l(\cos \theta)$

c) 求解方程的特解和一般解将  $\lambda = l(l+1)$  带入关于的径向方程

得解  $R(r) = a_l r^l + b_l r^{-l-1}$

得特解  $R_l(r)P_l(\cos \theta)$ , 及一般解 (或通解)

$$\varphi_1(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (a_l r^l + b_l r^{-l-1}) P_l(\cos \theta) \quad r < R_0$$

$$\varphi_2(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (c_l r^l + d_l r^{-l-1}) P_l(\cos \theta) \quad r > R_0$$

d) 定叠加系数, 从而得解  
 $r \rightarrow 0, \varphi_1$  有界  $\rightarrow b_l = 0$

$$\varphi_1 = \sum_{l=0}^{\infty} a_l r^l P_l(\cos \theta)$$

$r \rightarrow \infty, \varphi_2 \rightarrow -E_0 r \cos \theta$  得到  $c_1 = -E_0, c_l = 0 (l \neq 1)$

$$\varphi_2 = -E_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$

由  $r = R_0$  处的边值关系

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 \\ \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = \varepsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \end{cases}$$

得

$$\begin{aligned} \sum_l a_l R_0^{l-1} P_l(\cos \theta) &= -E_0 R_0 \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \\ \varepsilon \sum_l a_l l R_0^{l-1} P_l(\cos \theta) &= \varepsilon_0 (-E_0 \cos \theta - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta)) \end{aligned}$$

利用  $P_l(\cos \theta)$  在  $0 \leq \theta \leq \pi$  区间上的正交完备性, 比较等式两边  $P_l(\cos \theta)$  的系数, 得到关于的联立方程, 并最终得各系数。

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 \\ d_1 = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} R_0^3 E_0 \end{cases}$$

$l \neq 1$  时

$$\begin{cases} a_l = 0 \\ d_l = 0 \end{cases}$$

即得解

$$\varphi = \begin{cases} \phi_1 = -\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 r \cos \theta & r < R_0 \\ \varphi_2 = -E_0 r \cos \theta + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} R_0^3 E_0 \frac{\cos \theta}{r^2} & r > R_0 \end{cases}$$

结果讨论

a) 球内电场为

$$\vec{E}_1 = \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \vec{E}_0$$

通常  $\varepsilon > \varepsilon_0$ 。

在球内总电场的作用下, 介质极化强度为

$$\vec{p} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}_1 = (\varepsilon - \varepsilon_0) \vec{E}_1 = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} 3\varepsilon_0 \vec{E}_0$$

介质球的总电偶极矩为

$$\vec{p}_{\text{总}} = \frac{4\pi}{3} R_0^3 \vec{p} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} 4\pi \varepsilon_0 R_0^3 \vec{E}_0$$

正是这个偶极矩在球外产生了电势

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\vec{p}_{\text{总}} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \frac{\varepsilon_0 R_0^3}{r^2} \cos \theta$$

b) 从另一方面看介质的均匀极化, 在球面产生极化面电荷

$$\sigma_p = \hat{n} \cdot \vec{p} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta$$

此极化面电荷在球内外产生的场  $\varphi'_1, \varphi'_2$

$$\varphi'_1 = \sum_l a'_l r^l P_l(\cos \theta)$$

$$\varphi'_w = \sum_l \frac{d'_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta)$$

在  $r = R_0$  处

$$\varphi'_1 = \varphi'_2$$

$$-\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi'_2}{\partial r} \Big|_{R_0} + \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi'_1}{\partial r} \Big|_{R_0} = \sigma_p$$

可求得

$$a'_1 = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0$$

$$d'_1 = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 R_0^3$$

将  $\varphi'_1, \varphi'_2$  与叠加在均匀场上的得到球内外部电势分布

$$\phi_1 = -E_0 r \cos \theta + \varphi'_1 = -\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 r \cos \theta$$

$$\varphi_2 = -E_0 r \cos \theta + \varphi'_2 = -E_0 r \cos \theta + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} R_0^3 E_0 \frac{\cos \theta}{r^2}$$

从上面的分析可以看出, 对于静电场, 电场分布和电荷分布具有一一对应关系, 利用叠加原理可以将各分布电荷所产生场叠加起来得到总电场分布。

下面一个例子将讨论带点导体在其表面所带电荷分布以及相应的表面附近电场分布与其表面所带电荷分布的联系。从简单的物理分析, 即从表面附近电场线

分布可以推断表面所携带的自由电荷分布, 从而附近的场线分布与表面的弯曲程度有密切关系, 如下面图所示

可以看出表面附近的电场分布将随表面整体形状的改变而改变  
为了有一定量分析, 讨论下面一个实例

例 2. 导体尖劈带电势  $V$ , 分析它的尖角附近的电场  
解:

采用柱坐标系  
尖劈外的任意一点  $M = M(r, \phi)$ , 电势  $\varphi(M) = \varphi(r, \phi)$   $0 \leq r < \infty$   $0 \leq \phi \leq 2\pi$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} \quad (2.1)$$

$$\varphi(r, 0) = \varphi(r, 2\pi - \alpha) \quad (2.2)$$

用分离变量法讨论, 需将方程和边条件都齐次化  
可引入  $\varphi' = \varphi - V$   $\varphi'(r, 0) = \varphi'(r, 2\pi - \alpha)$  令  $\varphi' = R(r)\Theta(\phi)$  带入  $\nabla^2 \varphi' = 0$   
可得两个常微分方程

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - \nu^2 R = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{d^2 \Theta}{d\phi^2} + \nu^2 \Theta = 0 \quad (2.4)$$

由  $\varphi$  的边界条件可得

$$\Theta(0) = \Theta(2\pi - \alpha) = 0$$

$$\Theta_n(\phi) = a \sin(\nu_n \phi) \quad (2.5)$$

$$\nu_n = \frac{n\pi}{2\pi - \alpha} = \frac{n}{2 - \frac{\alpha}{\pi}} \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

相应的  $R_n(r) = a_n r^{\nu_n} + b_n r^{-\nu_n} = a_n r^{\nu_n}$  (由  $r \rightarrow 0$ ,  $\varphi'$  有限)  
于是得到方程的一般解

$$\varphi = \varphi' + V = V + \sum_n a_n r^{\nu_n} \sin \nu_n \phi \quad (2.6)$$

为了确定叠加系数  $a_n$ , 给出包围尖劈一大曲面上的边界条件。尽管如此, 我们仍可从上述结果中对尖角附近的电场作定性分析

在尖角附近, 对场的贡献主要来自  $r$  的最低幂次项, 即  $n = 1$  的项, 令

$$\varphi = \varphi' + V = V + a_1 r^{\nu_1} \sin \nu_1 \phi \quad \left( \nu_1 = \frac{1}{2 - \frac{\alpha}{\pi}} \right) \quad (2.7)$$

电场的两分量  $E_r$   $E_\phi$  分别为

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \approx -\nu_1 a_1 r^{\nu_1 - 1} \sin \nu_1 \phi \\ E_\phi &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \approx -\nu_1 a_1 r^{\nu_1 - 1} \cos \nu_1 \phi \end{aligned} \quad (2.8)$$

劈尖两面上的自由电荷面密度为

$$\sigma_f = \varepsilon_0 E_n = \begin{cases} \varepsilon_0 E_\phi & (\phi = 0) \\ -\varepsilon_0 E_\phi & (\phi = 2\pi - \alpha) \end{cases} \quad (2.9)$$

结果讨论

(1) 若  $\alpha$  很小,  $\nu_1 = \frac{1}{2 - \frac{\alpha}{\pi}} \approx \frac{1}{2}$ 。尖角附近的场强和电荷密度都近似正比于  $r^{-\frac{1}{2}}$ , 这

意味着尖角附近存在着很强的电场和电荷面密度

(2) 在导体表面处  $E_r = 0$ , 意味着仍有电场线与导体表面垂直关系

(3) 若  $\alpha$  的取值为  $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$  面电荷密度  $\sigma_f$  分别正比于  $r^{-\frac{1}{3}}, r^0, r$  大致反映导体表面上面电荷分布(从而反映场分布)与导体表面整体弯曲形状的关系

(4) 相应的三维锥尖问题, 与尖端放电现象有直接联系, 相关问题的求解与讨论参看 *J.D.Jackson* P.104 - 107

## 2.6 镜像法

当静电问题中, 所讨论的区域内只有一个或几个点源, 区域的边界时规整的导体或介质界面, 此时趋于边界上诱导电荷在区域内激发的电场可以区域外若干点源的像所激发的场来替代, 因此只需确定这些像的位置及其电荷, 区域内场可以表示为  $\varphi = \varphi_s + \varphi_I$ 。其中  $\varphi_s$  表示趋于内点源所激发的场。 $\varphi_I$  表示源像所激发的场, 只需  $\varphi = \varphi_s + \varphi_I$  在边界上满足给定的边界条件。由静电边值问题唯一性定理即可断定  $\varphi$  为该静电问题的解。这种方法称为镜像法。

例 1. 在无限大接地导体平面的上半空间  $M$  点置一点电荷  $q$ , 求上半空间电场分布解:

选坐标系, 使  $M$  点的坐标为  $(0, 0, a)$   
定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = \frac{1}{\varepsilon_0} q \delta(x) \delta(y) \delta(z - a) & z > 0 \\ \varphi|_{z=0} = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\text{设 } \varphi = \varphi_s + \varphi_I \quad \text{已知 } \varphi_s = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}}$$

则像电荷  $q'$  在上半空间激发的场  $\varphi'$  应满足

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_I = 0 & z > 0 \\ \varphi_s + \varphi_I|_{z=0} = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

显然取像电荷  $q' = q$ , 且处于位置  $M'(0, 0, -a)$  即可

$$\varphi_I = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{-q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2}} \quad z > 0 \quad (2.12)$$

问题的解为

$$\varphi_I = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{-q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2}} \quad z > 0 \quad (2.13)$$

讨论:

边界接地的直角导体面右上  $M(a, b, 0)$  处置一点电荷  $q$ , 求右上象限中的场分布

例 2. 真空中有一半径为  $R_0$  的接地导体球, 将一点电荷至于球外距球心  $a$  ( $a > R_0$ ) 的点  $M$  处, 求球外空间的场分布

解:

此定解问题为

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = -\frac{q}{\varepsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{a}) & (r > R_0) \\ \varphi|_{r=R_0} = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

用镜像法求解

令  $\varphi = \varphi_s + \varphi_I$ , 已知  $\varphi_s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{a}|}$

设  $q$  相对球面的镜像位于球内  $M'$  点  $M'(b, 0, 0)$  所带电量为  $q'$ , 要求

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_I = 0 & r > R_0 \\ \varphi_s + \varphi_I|_{r=R_0} = 0 \\ \varphi_s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{a}|} \end{cases} \quad (2.15)$$

且对球面上任意一点  $P$  满足方程

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{a}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{a}'|} \quad (2.16)$$

即要求

$$\frac{q}{R} + \frac{q'}{R} = 0 \quad (2.17)$$

或

$$\frac{R}{R'} + \frac{q}{q'} = \text{常数} \quad (2.18)$$

即  $M'$  必须为  $M$  的球面对称点

$$ab = R_0^2 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{R_0^2}{a} \quad (2.19)$$

如此

$$q' = -\frac{R_0}{a}q \quad (2.20)$$

于是得导体球外的电场分布为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{a}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-\frac{R_0}{a}q)}{|\vec{r} - \frac{R_0^2}{a^2}\vec{a}|} \quad (2.21)$$

讨论:

i) 此问题能否用分离变量法求解?

ii) 若导体球不是接地, 而是带电量  $Q$ , 如何处理?

例 3. 若例 1 中下半空间是充满介电常数  $\epsilon$  的介质, 如何求空间电势分布?

解:



设上半空间电势为  $\varphi_1$ ，下半空间电势为  $\varphi_2$   
场方程

$$\begin{aligned}\nabla^2 \varphi_1 &= -\frac{q}{\varepsilon_0} \delta(\text{vecr} - \text{veca}) & z > 0 \\ \nabla^2 \varphi_1 &= 0 & z < 0 \\ \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} &= \varepsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \\ \varphi_1 &= \varphi_2\end{aligned}\tag{2.22}$$

边界条件

$$\begin{aligned}\varphi_1 &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \\ \varphi_2 &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0\end{aligned}\tag{2.23}$$

令

$$\varphi_1 = \varphi_{1s} + \varphi_{1I} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{a}|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q'}{|\vec{r} + \vec{a}|}\tag{2.24}$$

其中第二项交界面上面电荷在上半空间激发的场由对称性考虑， $\varphi_2$  应为

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{a}|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{a}|}\tag{2.25}$$

将  $\varphi_1, \varphi_2$  带入  $z = 0$  处的边值关系可求得

$$\begin{aligned}\varepsilon_0(-q + q') &= \varepsilon(-q - q') \\ q' &= -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} q\end{aligned}\tag{2.26}$$

将  $q'$  带入  $\varphi_1, \varphi_2$  的表达式即得解

结论：

- i) 在一定对称性条件下，界面上诱导电荷激发的场与像电荷激发的场等价
- ii) 对于界面两边，与界面上诱导电荷激发场等价的像电荷  $(q', \vec{b})$  与  $(q, \vec{a})$  关于界面有对称性(平面对称或球面对称等)

补充题：在上面两个例子中，若点源为电偶极子  $\vec{p}$ ，其镜像又是怎样的？

## 2.7 Green 函数方法

### 2.7.1 关于格林函数的概念

在电动力学中遇到各种类型的定解问题, 即在一定定解条件下求解场方程的解。这些方程大都是线性偏微分方程, 其解满足叠加原理。Green 函数是与定解问题相应的电源函数。可以用叠加方法由点源函数把问题的解直接用积分形式表达出来。

以静电边值问题为例, 场方程为

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = f(\vec{r}) \quad (2.27)$$

定解条件为边界条件(第一类, 第二类, 第三类)

最简单的例子是电荷分布在有界区域, 在无解区域内  $\varphi \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$   
此问题的解为

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau' \\ &= \iiint -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \left(-\frac{\rho(\vec{r}')}{\varepsilon_0}\right) d\tau' \\ &= \iiint G(\vec{r}, \vec{r}') f(\vec{r}') d\tau' \\ &= \hat{k} f(\vec{r}) \end{aligned} \quad (2.28)$$

$\hat{k}$  表示一个积分算子

$$\hat{k} \equiv \iiint d\tau' G(\vec{r}, \vec{r}') \quad (2.29)$$

它对于任意函数  $f(\vec{r})$  的作用定义为

$$\hat{k} f \equiv \iiint d\tau' G(\vec{r}, \vec{r}') f(\vec{r}') \quad (2.30)$$

$G(\vec{r}, \vec{r}')$  称为积分算子  $\hat{k}$  的核 (Kernel), 通常又称为该定解问题的 Green 函数  
在上例中

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.31)$$

不难证明他描述方程, 以及无穷远边界条件

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r}, \vec{r}') \quad (2.32)$$

$$G(\vec{r}, \vec{r}') \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

显然 Green 函数的具体形式依赖于相应的定解问题(场方程和定解条件)

## 2.7.2 Green 函数方法

对一个(线性偏微分方程)的定解问题, 通过求解相应的 Green 函数, 将解用此 Green 函数表达出来, 称为 Green 函数方法。

其步骤为:

i) 求与定解问题相应的 Green 函数

ii) 利用 Green 公式(或称 Green 定理)将原定解问题的解用 Green 函数表达出来(通常为积分形式)。

例: 在无穷大平面平面上有半径为  $a$  的圆, 圆内和圆外用极窄的绝缘还绝缘。设圆内电势为  $V$ , 导体其余部分电势为 0, 求上半空间电势

解:

方程

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad z > 0 \quad (2.33)$$

定解条件

$$\varphi \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

$$\varphi|_{z=0} = \begin{cases} V_0 & z < a \\ 0 & z > a \end{cases} \quad (2.34)$$

此问题为第一类边值问题, 相应的 Green 函数满足方程

$$\nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (z, z' > 0) \quad (2.35)$$

$$G(\vec{r}, \vec{r}')|_{z=0} = 0$$

由前用镜像法已求得

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \right] \quad (2.36)$$

利用 Green 定理

$$\begin{aligned} & \iiint [\varphi(\vec{r}') \nabla'^2 G(\vec{r}, \vec{r}') - G(\vec{r}, \vec{r}') \nabla'^2 \varphi(\vec{r}')] d\tau' \\ &= \oint_{\partial V} \left[ \varphi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\vec{r}, \vec{r}') - G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \varphi(\vec{r}') \right] d\Sigma' \end{aligned} \quad (2.37)$$

注意对上半空间而言, 导体平面的外法线为  $\hat{n} = -\hat{z}$  故有  $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial z}$

将前述  $\varphi$  和  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  的方程及定解条件带入得

$$\begin{aligned}
 \varphi(\vec{r}) &= \varphi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\vec{r}, \vec{r}') d\Sigma' \\
 &= \iint_{\text{圆内}} V_0 \left( -\frac{\partial}{\partial z'} \right) \left[ -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \right] d\Sigma' \\
 &= \frac{V_0}{4\pi} \iint_{\text{圆内}} dx' dy' \frac{2z}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2]^{3/2}} \\
 &= \frac{V_0 z}{2\pi} \int_0^a R' dR' \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{1}{[R^2 + z^2 + R'^2 - 2RR' \cos(\phi - \phi')]^{3/2}}
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

此积分为 *Legendré* 椭圆积分, 当  $R^2 + z^2 \gg 2$  时 ( $R' < a$ ) 可以把被积函数展开。积分后第一项为偶极子势。积分得

$$\varphi(R, z) = \frac{V_0 a^2}{2} \frac{z}{[R^2 + z^2]^{3/2}} \left[ 1 - \frac{3}{4} \frac{a^2}{R^2 + z^2} + \frac{15}{8} \frac{a^2 R^2}{[R^2 + z^2]^2} + \dots \right] \tag{2.39}$$

# Chapter 3

## 静磁问题

### 3.1 静磁现象的物理特征

静磁现象虽然与静电现象同属于电磁现象的一种，但它恰呈现了与静电现象很不同的特征。

静磁现象研究的是稳定电流分布与静磁场的相互作用。

首先要产生稳定的电流分布，一般说必须有外来电动势  $\vec{K}$  的参与；

其次稳定电流分布激发的磁场是无源有旋的，磁场的无源（无磁荷），说明最基本的电流分布是磁偶极子；磁场的测量也是基于对磁偶极子的作用

磁场作用于电流的方式也与电场作用于电荷的方式不同，前者是直线式的，后者是螺旋式的；

此外静磁现象中的介质呈现了更多种多样的有特殊电磁性质的磁介质。特别是强磁介质（铁磁介质）完全逆磁介质（超导体），它们在科学技术中有重要应用。

### 3.2 稳定电流体系的普遍特征，外来电动势 $\vec{K}$

#### 3.2.1 稳定电流体系的必要条件：外来电动势 $\vec{K}$

对于稳定电流分布，必定有

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{j} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(F) = 0 \end{cases}$$

其中  $F$  为静电现象中任意一个物理量。

电流的存在一般意味着有电能转化为焦耳热能，因此维持稳定电流必须有外来电动势将其他形式的能量转化为电能，其特点分析如下。

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{S}$$

$$\vec{j} = \sigma_c(\vec{E} + \vec{K})$$

外来电动力  $\vec{K}$  的功率密度

$$\begin{aligned}\vec{j} \cdot \vec{K} &= \vec{j} \cdot \left( \frac{\vec{j}}{\sigma_c} - \vec{E} \right) = \frac{j^2}{\sigma_c} + \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} \\ &= \frac{j^2}{\sigma_c} + \nabla \cdot \vec{S}\end{aligned}$$

相应的积分形式为

$$\iiint_V \vec{j} \cdot \vec{K} d\tau = \iiint_V \frac{j^2}{\sigma_c} d\tau + \oint_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{\Sigma}$$

等式左边第一项为外来电动力做功；等式右边第一项为体元焦耳热能。等式右边第二项是从体元边界流出的电磁能量。

### 3.2.2 稳定电流体系的电场和电荷

稳定电流体系总是伴随着稳恒电场的存在。这种稳恒电场要满足静电场的基本方程，还要受到稳恒电流条件的欧姆定律的制约。

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0$$

$$\vec{j} = \sigma_c(\vec{E} + \vec{K})$$

由于  $\nabla \times \vec{E} = 0$ ，仍可用标势  $\varphi$  表示电场  
在  $\vec{K} = 0$  的区域应有

$$\nabla \cdot (\sigma_c \nabla \varphi) = 0$$

在  $\sigma_c$  不连续的区域有

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

$$\sigma_{c1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \sigma_{c2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$$

电荷分布由下式决定

$$\begin{aligned}\rho_f &= -\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \varphi) = \nabla \cdot \left( \frac{\varepsilon}{\sigma_c} \vec{j} \right) \\ &= \vec{j} \cdot \nabla \left( \frac{\varepsilon}{\sigma_c} \right)\end{aligned}$$

由上述方程可以看出：只有当导体在沿着电流流动的方向上不均匀时，才存在分布的自由电荷，分布均匀的导体，电荷只分布于交界面上

$$\sigma_f = \hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \hat{n} \cdot \vec{j} \left( \frac{\varepsilon_2}{\sigma_{c2}} - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_{c1}} \right)$$

### 3.3 静磁场的基本特征

#### 3.3.1 场方程

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f \end{cases}$$

第一式说明磁场无磁荷，第二式的积分即为安培环路定理。静磁场的方程的积分即是  $B-S-A$  定律，可以给出

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{R}}{R^3} d\tau'$$

说明了静磁场场分布与电流分布存在着一一对应的关系。

#### 3.3.2 静磁场用矢势 $\vec{A}$ 表示

由  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ，可以引入矢势  $\vec{A}$ ，令

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

相应的积分表示为

$$\oint_{\partial\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi$$

即矢势  $\vec{A}$  闭路积分等于所围面积的磁通量

在第一章我们在讨论 Aharonov-Bohm 效应时已经利用这一关系式，从而了解了引入矢势的意义，证明讨论微观粒子与电磁场作用时，用  $\vec{A}$  来描述磁场的必要性。

第一章我们曾指出，用势函数  $\{\vec{A}, \varphi\}$  描述电磁场， $\vec{A}, \varphi$  可以存在规范变换

$$\begin{cases} \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi \\ \varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial\psi}{\partial t} \end{cases}$$

其中  $\psi$  为任意标量函数  
在上述规范变换下

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} = \vec{B} \\ -\nabla\varphi' - \frac{\partial A'}{\partial t} = -\nabla\varphi - \frac{\partial A}{\partial t} = \vec{E} \end{cases}$$

即可测量量  $\vec{B}, \vec{E}$  不随规范变换而改变。

因此对于势函数  $\{\vec{A}, \varphi\}$  可以加上规范条件, 便于方便讨论相关的问题。例如加上 Coulomb 规范条件

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0$$

在此规范下

$$\nabla \times \vec{B} = -\nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

或

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

此方程有唯一解

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}') d\tau'}{R}$$

此式有时被用来讨论给定电流分布下的矢势  $\vec{A}$  并进而讨论磁场  $\vec{B}$  的分布。

### 3.3.3 磁标势的引入

求解矢势  $\vec{A}$  的计算一般比较复杂, 在很多实际问题中电流分布在局部区域, 而我们感兴趣的是电流区域的内的磁场, 如果在我们研究的空间内所有的回路  $L$  都没有链着的电流 (数学上称这种区域为单连通的) 这时恒有

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$$

因而在这一空间区域内可引入磁标势  $\varphi_m$ , 令

$$\vec{H} = -\nabla\varphi_m$$

则由  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ , 可得方程

$$\nabla^2 \varphi = \nabla \cdot \vec{M}$$

若类比于电介质极化的情形  $\nabla \cdot \vec{P} = -\rho_f$  引入假想磁荷密度  $\rho_m$

$$\nabla \cdot \vec{M} = -\rho_m$$

上述场方程也可表示为

$$\nabla^2 \varphi = -\rho_m$$

在两个介质交界面上  $\varphi$  描述边值关系

$$\begin{cases} \varphi_{m1} = \varphi_{m2} \\ \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n} = \hat{n} \cdot (\vec{M}_2 - \vec{M}_1) \end{cases}$$



第二个方程有时也可以表示为

$$\mu_2 \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} = \mu_1 \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n}$$

若用矢势  $\vec{A}$  讨论静磁问题, 在两个交界面上  $\vec{A}$  的边值关系形式上会比较复杂。

### 3.4 静磁场的能量

由前, 一个静磁体系的总能量应为

$$U = \iiint \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} d\tau$$

积分遍及磁场的全部区域。考虑到  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ , 体系总能量  $U$  也可表示为

$$U = \iiint \frac{1}{2} \vec{j}_f \cdot \vec{A} d\tau$$

从被积表达式可知, 计算  $U$  时只需遍及电流分布的区域即可。同样上式只对计算静磁体系的总能量有意义。

类似于静电场情形, 也可以引入某一电流体系  $\vec{j}$  与给定外磁场的相互作用能, 其数值可表示为

$$U_I = \iiint \vec{j}_f \cdot \vec{A}_e d\tau$$

式中  $\vec{A}_e$  表示外磁场的矢势

### 3.5 若干特殊的静磁体系

#### 3.5.1 均匀场

在静磁情形下由稳定电流分布产生均匀磁场是很难做到的。只有在无限长密绕通电线圈年内不近似有均匀磁场分布。另一种在空间一定区域产生近似均匀磁场的是通电亥姆霍兹线圈的情形。

但在很多情形下仍会用到均匀磁场的概念。

设均匀磁场  $B = B_0 \hat{e}_z$  若用矢势  $\vec{A}$  表达均匀场, 由于势函数存在规范自由度, 可以有不同的  $\vec{A}$  表达式。

$$\nabla \times \vec{A} = B_0 \hat{e}_z$$

即有

$$\begin{cases} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = B_x = 0 \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = B_y = 0 \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_z = B_0 \end{cases}$$

对应上述方程组, 有三组最简单的解

$$A_x = -B_0 y \quad A_y = 0 \quad A_z = 0$$

$$A_x = 0 \quad A_y = B_0 x \quad A_z = 0$$

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r} = \left(-\frac{1}{2} B_0 y, \frac{1}{2} B_0 x, 0\right)$$

在量子力学中更多的使用第三组解得形式  
若在可以使用磁标势  $\varphi_m$  的情形, 也可以用下式表示均匀场

$$\varphi_m = -\vec{H}_0 \cdot \vec{r} = -H_0 r \cos \theta$$

### 3.5.2 磁偶极子

通常认为一桶油电流  $I$ , 半径为  $a$  的圆线圈所产生的磁场, 当  $a \rightarrow 0$  且  $I \rightarrow \infty$  但  $\pi a^2 I \rightarrow$  有限值  $m$  为磁偶极子的场, 并定义

$$\vec{m} = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ I \rightarrow \infty \\ \pi a^2 I \rightarrow m}} \pi a^2 I \hat{n}$$

$\hat{n}$  为通电线圈的法向单位矢量, 与电流方向成右手螺旋关系。 $\vec{m}$  称为磁偶极子的偶极矩。

下面由通电线圈产生的  $\vec{A}$  表达式在上述极限情形下求得磁偶极子的矢势  $\vec{A}_m$  以及相应的  $\vec{B}_m$ 。

线圈电流产生的矢势为

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}') d\tau'}{R} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\vec{l}}{R} \end{aligned}$$

换用球坐标系  $(r, \theta, \phi)$ , 由对称性可知  $\vec{A}$  只有  $\phi$  分量  $A_\phi$ , 且只依赖于  $r, \theta$ , 即  $A_\phi = A_\phi(r, \theta)$ , 由  $A_\phi(r, \theta)$  与  $\phi$  可以选定  $xz$  平面上一点  $P$  来计算  $A_\phi$ , 此时

$$d\vec{l} \cdot \vec{e}_\phi = I dl_y = a I \cos \phi' d\phi'$$

$$R = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \sin \theta \cos \phi'}$$

$$A_\phi(r, \theta) = \frac{\mu_0 a I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi' d\phi'}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \sin \theta \cos \phi'}}$$

上式积分可用椭圆积分表出, 当

$$2ra \sin \theta \ll r^2 + a^2$$

时, 可以简单地算出近似结果, 把根式对  $\frac{2ra \sin \theta \cos \phi'}{r^2 + a^2}$  展开。展开式的偶此项对  $\phi$  的积分为零, 只需保留奇次项。若我们要计算  $\vec{B}(r, \theta)$  到二级近似, 则  $A_\phi$  需要计算到第三项

$$\begin{aligned} A_\phi &= \frac{\mu_0 a I}{4\pi \sqrt{r^2 + a^2}} \int_0^{2\pi} d\phi' \cos \phi' \left[ \frac{ra \sin \theta \cos \phi'}{r^2 + a^2} + \frac{5}{2} \frac{r^3 a^3 \sin^3 \theta \cos^3 \phi'}{(r^2 + a^2)^3} \right] \\ &= \frac{\mu_0 a I}{4} \left[ \frac{ra \sin \theta}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{15}{8} \frac{r^3 a^3 \sin^3 \theta}{(r^2 + a^2)^{\frac{7}{2}}} \right] \end{aligned}$$

此式的适用范围是  $2ra \sin \theta \ll r^2 + a^2$ , 包括远场 ( $r \gg a$ ) 和远轴场 ( $r \sin \theta \gg a$ ) 要计算  $\vec{B}$ , 需用公式

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \vec{e}_r \\ &\quad + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \hat{e}_\theta \\ &\quad + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{e}_\phi \\ \vec{B} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) \hat{e}_\theta \end{aligned}$$

在远场情形下  $r \gg a \Rightarrow A_\phi$  只需取第一项

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^2}$$

其中

$$m \equiv \pi a^2 I$$

定义磁偶极矩

$$m \equiv \pi a^2 I \hat{e}_z$$

可见对于远场载流圆线圈的矢势可表达为

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

### 3.5.3 小区域稳定电流分布的磁场按磁多极子展开

若电流分布于小区域, 其在远区的场可按磁多极子场展开由

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}(\vec{r}') d\tau'}{R}$$

将  $\frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$  对  $\frac{r'}{r}$  做 *Taylor* 展开

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \dots$$

代入  $\vec{A}$  的表达式

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{1}{r} \iiint \vec{r}' d\tau' - \frac{\vec{r}}{r^3} \iiint \vec{r}' \vec{j} d\tau' + \dots \right]$$

展开第一项

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \iiint \vec{r}' d\tau'$$

其物理意义为无磁单极贡献, 或说不存在磁荷。

展开第二项, 利用

$$\vec{r}' \vec{j} = \frac{1}{2}(\vec{r}' \vec{j} + \vec{j} \vec{r}') + \frac{1}{2}(\vec{r}' \vec{j} - \vec{j} \vec{r}')$$

可证明前一项积分对  $\vec{A}^{(1)}$  无贡献 (证明见后)

第二项的积分为

$$\begin{aligned} \vec{A} &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \iiint \frac{1}{2}(\vec{r}' \vec{j} - \vec{j} \vec{r}') d\tau' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3} \times \iiint \frac{1}{2}(\vec{r}' \times \vec{j}) d\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \end{aligned}$$

其中

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \iiint (\vec{r}' \times \vec{j}) d\tau'$$

即为该电流系统的磁偶极矩, 而  $\vec{A}^{(1)}$  即为磁偶极矩的矢势表达式

可以预期  $\vec{A}$  展开的高此项  $\vec{A}^{(2)}, \vec{A}^{(3)}, \dots$  分别相应于磁四极子, 磁四极子... 的矢势表达式。

关于  $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$  的证明的补充

利用恒等式 (当  $f, g, \vec{j}$  在无穷远处趋于零)

$$\begin{aligned} &\iiint \nabla' \cdot (f g \vec{j}) d\tau' \\ &= \iiint (f \vec{j} \cdot \nabla' g + g \vec{j} \cdot \nabla' f + f g \nabla' \cdot \vec{j}) d\tau' = 0 \end{aligned}$$

在稳定电流条件  $\nabla \cdot \vec{j} = 0$  及令  $f = x_i, g = x_j$

即可得

$$\iiint (\vec{r}' \vec{j} + \vec{j} \vec{r}') d\tau' = 0$$

从磁标势描述磁偶极子势为

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

从  $\vec{A}^{(1)}$  可得  $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3\hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{m}) - \vec{m}}{R^3} \right]$

从  $\varphi_m$  计算也可得相同结果。

### 3.5.4 求电流线圈产生的磁标势

设电流线圈载有电流  $I$ ，它可以看做线圈所围的一个曲面上许多载有电流  $I$  的小线圈拼合成，而每一个小线圈可看做是一个磁偶极子，其磁矩为  $I d\vec{S}$ ，它在空间任意点产生的磁标势  $d\varphi_m$  为

$$d\varphi_m = \frac{1}{4\pi} \frac{I d\vec{S} \cdot \vec{R}}{r^3} = \frac{I}{4\pi} d\Omega$$

$d\Omega$  为面元  $S$  对场点  $P$  所张开的立体角元，因此整个电流线圈产生的磁标势为

$$\varphi_m = \frac{I}{4\pi} \iint d\vec{S} \cdot \frac{\vec{R}}{R^3} = \frac{I}{4\pi} \Omega$$

$\Omega$  为整个线圈环路对场点  $P$  所张的立体角

这也是静磁场中叠加原理的体现。类似的在静电学中面偶极层在空间激发的电场也可以用类似的方法计算。

## 3.6 静磁问题中的介质

磁性材料有广泛的应用，磁性材料的存在将影响磁场的分布。这是由于磁介质在磁场中磁化的缘故。本节将讨论磁介质磁化性质的描述，相应物理量的含义，为了确定磁介质对磁场分布的影响，我们还将讨论有磁介质存在时的静磁场方程。作为磁性材料，由

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 (\vec{j}_f + \vec{j}_m)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f \rightarrow \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_f$$

对产生强磁场有巨大应用。

### 3.6.1 磁介质磁化性质的描述

第一章我们在讨论介质电磁性质时，曾引入磁化强度  $\vec{M}$  描述介质的磁化状态。在讨论有介质存在时的电磁学问题时曾引入辅助量——磁化强度  $\vec{H}$

$$\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (3.1)$$

讨论介质磁化性质可以讨论  $\vec{M} \rightarrow \vec{B}$  的关系，也可以讨论  $\vec{M} \rightarrow \vec{H}$  关系。由于与自由电流有着直接的线性关系，因此讨论有磁介质存在时的电磁学问题时，常常把  $\vec{H}$  作为基本场量来对待。

对于各向同性，均匀的非铁磁性介质，磁化强度  $\vec{M}$  和  $\vec{H}$  之间有简单地线性关系

$$\vec{M} = \kappa_m \vec{H}$$

$\kappa_m$  称为介质的磁化率  
而

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \\ &= \mu_0(1 + \kappa_m)\vec{H} \\ &= \mu_0\mu_r\vec{H} \\ &= \mu\vec{H}\end{aligned}$$

$\mu_r$  称为介质的相对磁导率。 $\mu$  称为磁导率。一般把  $-1 < \kappa_m < 0$  ( $\mu_r < 1$ ) 的介质称为逆磁介质，而把  $\kappa_m > 0$  ( $\mu_r > 1$ ) 的介质称为顺磁介质。

为了探讨不同磁介质对磁场分布影响的不同，1850 年 W.Thomson 曾给 Faraday 一封信，在信中他画了一幅画，描述了他心目中的逆磁体和顺磁体中的磁力线分布图像

根据 W.Thomson 提供的图示分析，Faraday 认识到磁力线并不是物体所固有的，物体在磁场中不会产生新的磁力线，而只会改变已有磁力线的分布。据此 Faraday 提出了物体的导磁性原理，即具有不同的磁导率，顺磁体的磁导率搞，磁力线比较容易通过，能收容空间的磁力线；抗磁体的导磁率小，磁力线通过会遇到阻力，而不易通过，因而要排斥空间的磁力线。根据这个原理，顺磁体要向磁场线密集的地方运动，而抗磁体则要向磁力线稀疏的地方运动。从此电磁学中有了磁导率的概念。

铁磁介质  $\vec{M}$  与  $\vec{H}$  之前不存在线性关系， $\vec{M}$  与  $\vec{H}$  的关系是非齐次，非线性且往往呈各向异性。铁磁介质一般有很强的磁性，在不强的外磁场作用下 ( $10^{-2}\text{Gauss}$   $10^{-6}\text{Gauss}$ ) 就可以达到接近饱和的磁化强度。铁磁介质的磁化性质需用磁化曲线来描述，且有初始磁化曲线以及磁滞回线之分。

描述其磁化特性的参量包括

起始磁导率  $\mu_I$

最大磁导率  $\mu_{max}$

饱和磁导率  $M_s$

剩余磁化强度  $M_R$

使介质完全退磁所需要的反向磁场——矫顽力  $H_c$  按  $H_c$  的大小铁磁材料可分为软磁材料和硬磁材料：软磁材料  $H_c$   $1\text{A/m}$  硬磁材料  $H_c$   $10^4$   $10^6\text{A/m}$ 。软磁材料一般用作铁芯，而硬磁材料一般用于永磁体)

铁磁材料的  $\kappa_m$  约为  $10^2$   $10^6$ ，远大于 1，故有

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \\ &= \mu_0(1 + \kappa_m)\vec{H} \\ &= \mu_0\kappa_m\vec{H} \\ &= \mu_0\vec{M}\end{aligned}$$

故 B—H 曲线与 M—H 曲线相似。

饱和磁导率  $M_s$  起始磁导率  $\mu_I$  最大磁导率  $\mu_{max}$  是软磁材料的主要参数。

讨论：这些参数的重要性表现在哪里？

不同铁磁材料的磁滞回线形状相差很大，分为软磁材料，硬磁材料，矩磁铁氧体材料。

磁介质中，除了上述抗磁，顺磁，铁磁以外，超导材料由于其完全抗磁性（Meissner 效应——处于超导态时，超导体内的磁感应强度）也可以看做一类特殊的磁性材料。

$$\vec{B} = 0$$

$$\vec{M} = -\vec{H}$$

$$\kappa_m = -1$$

$$\mu = \mu_0(1 + \kappa_m) = 0$$

在超导相时，超导体表面的传导电流  $\vec{\alpha}_s$  在超导体内的逆向磁场完全抵消了外磁场，从而把磁场排出体外。

归纳起来，四种磁介质的性质按  $\kappa_m(\mu_r)$  的值可以用下列图示区分如下

### 3.7 不同类型磁介质的磁化机制

在第一章我们曾经说过描述介质电磁性质的物理量无论是整体的还是局域的都是宏观量，它们是相应微观量的统计平均值。物质的种种宏观性质必然涉及构成它的微观粒子的行为。而微观粒子的运动遵循着量子力学规律，这些规律与经典理论虽有联系，但却有巨大区别。要了解介质的磁化机制，从本质上说应该从量子力学原理出发。事实上如铁磁质的磁化机制，超导体的磁化机制，只有在量子力学的基础上才能给予准确的描述和理解。但是采用经典的、唯象的方法也能使我们对这些机制有一定的感性认识。

#### 3.7.1 抗磁质与顺磁质

按照经典的观念，物质的磁性来源于其中的“分子电流”。所谓“分子电流”指的是由原子内部各电子绕原子核的轨道运动，各电子的自旋运动以及原子核的自旋运动等概念的总称，它们分别产生电子轨道运动磁矩，电子自旋磁矩，核自旋磁矩。在无外磁场时，这些磁矩之和就是“分子电流”和固有磁矩，简称“分子固有磁矩”，用  $\vec{m}_0$  表示。

抗磁质，分子固有磁矩  $\vec{m}_0 = 0$ ，但由于作轨道运动的电子在外加磁场作用下将产生 Larmor 进动，从而产生附加磁矩  $\delta\vec{m}_l$ ，而  $\delta\vec{m}_l$  的方向与外加磁场  $\vec{H}$  的方向相反。这是由于电子带负电，轨道磁矩的方向与角动量（角速度）的方向相反，从而使介质出现逆磁特征。

顺磁质，分子电流有非零的固有磁矩  $\vec{m}_0$ ，无外场时，其和为零，不显磁性。在外加磁场  $\vec{H}$  后，虽然仍然有电子绕  $\vec{H}$  作 Larmor 进动，从而产生反向的附加磁矩  $\delta\vec{m}_l$  的影响。但是更为重要的是，由于热运动，使分子因相互碰撞，较多的分子固有磁矩  $\vec{m}_0$  转向能量较小的方向，也就是磁场的方向。因为磁偶极子在外磁场中的有效势能为  $U_m = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ ，在热平衡下，分子的状态将遵从 Maxwell-Boltzman 分布（经典统计）

$$\overline{W} \sim e^{-E/kT} \quad (\text{其中 } E = -\vec{m} \cdot \vec{B})$$

由于热运动，在热平衡下，因固有磁矩转向磁场方向导致的顺磁效应要大大超过由 Larmor 进动产生附加磁矩的抗磁效应。因而物质呈现顺磁性。

### 3.7.2 铁磁质

铁磁质中，原子之间存在着交换力（量子力学中特别的概念，是指使相邻原子中不配对电子自旋趋于平行的作用力）。在交换力作用下邻近原子的自旋（从而自旋磁矩）趋于一致的排列，从而产生自发磁化。由这些磁矩方向完全一致的相邻原子所组成的小区域称为 Weiss 区域，或称磁畴。在未磁化的铁磁质内各磁畴的自发磁化方向不同，宏观上不显磁性。在外加磁场后，随着外加磁场增强，在铁磁质内会出现：□ 畴壁移动并消失；□ 磁畴磁矩转动；□ 达到饱和状态阶段，从而显示出很强的磁性。

各种铁磁材料，磁畴的形状、大小很不相同。其几何线度大致为  $\mu\text{m} \sim \text{mm}$  量级。

### 3.7.3 超导体

超导体有两个最重要的宏观电磁性质：(1)超导电性（或零电阻，1911 年发现）和(2)完全逆磁性（Meissner 效应，1933 年发现）。由此可以推断：□ 超导体内不可能存在电场；□ 因而超导体内磁场不允许变化。按照当前理论的观点，超导体是量子多体系统，超导电性和 Meissner 效应是宏观量子效应，因此超导理论必须是建立在量子力学基础上的微观理论（1957, BCS 理论）。在此之前 1935 年 London 兄弟提出了一个二流体模型，这一唯象理论统一描述了超导电性和完全逆磁性。下面简单介绍这一二流体模型。

二流体模型认为超导体中存在两种“流体”，即超导电子和正常电子（根据 BCS 理论，超导电子相应于 Cooper 对，其电荷和质量分别为  $e_s = 2e, m_s = 2m_e$ ），因而超导体内存在两种电流：超导电流  $\vec{j}_s$  和正常电流  $\vec{j}_n$ 。超导体的超导电子无阻尼，电场  $\vec{E}$  对它起加速作用，而正常电子则有阻尼。它们在超导体内的运动服从不同的规律：

$$\begin{cases} \dot{\vec{j}}_s = \frac{n_s e_s^2}{m_s} \vec{E} \\ \vec{j}_n = \sigma \vec{E} \end{cases}$$

即超导体中电场起着加速超导电流和维持正常电流的作用。可以看出在稳态情形  $\vec{E} = 0, \vec{j}_n = 0$  时无损耗。只有在交变情形  $\vec{E} \neq 0, \vec{j}_n \neq 0$  时有损耗。

由 London 第一方程和方程  $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  可得

$$\mu_0 \nabla \times \dot{\vec{j}} = \frac{1}{\lambda^2} \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

其中  $\lambda^2 \equiv \frac{m_s}{\mu_0 n_s e_s^2}$ ， $\lambda$  是超导体中的特征长度。故有  $\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \nabla \times \vec{j}_s + \frac{1}{\lambda^2} \vec{B}) = 0$

London 兄弟假设

$$\mu_0 \nabla \times \vec{j}_s + \frac{1}{\lambda^2} \vec{B} = \text{常数} = 0$$

通常称此方程为 London 第二方程。



总之二流体模型下超导体电磁性质方程可以概括为

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \\ \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \\ \vec{j}_n = \sigma \vec{E} \\ \mu_0 \dot{\vec{j}}_s = -\frac{1}{\lambda^2} \vec{E} \\ \mu_0 \nabla \times \vec{j}_s = -\frac{1}{\lambda^2} \vec{B} \end{array} \right.$$

在稳态情况下  $\vec{j}_s = \text{恒量}$ ,  $\vec{j}_n = 0$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_s$$

与 London 第二方程

$$\mu_0 \nabla \times \vec{j}_s = -\frac{1}{\lambda^2} \vec{B}$$

联立可得

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{\lambda^2} \vec{B} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{j}_s - \frac{1}{\lambda^2} \vec{j}_s = 0$$

$\lambda$  的数量级通常为  $\sim 10^{-7} m = 0.1 \mu m$

考虑一简单情况。设  $z > 0$  半空间为超导体, 而  $z < 0$  的半空间存在均匀磁场  $\vec{B}_2 = B_0 \vec{e}_x$ , 则由上述  $\vec{B}$  和  $\vec{j}_s$  的方程可求得, 在  $z > 0$  的上半空间

$$\vec{B} = B_0 e^{-z/\lambda} \vec{e}_x$$

可以看出  $\lambda$  标志了磁场透入超导体的深度, 通常称之为 London 穿透深度。

同样, 也可求得在  $z > 0$  的上半空间

$$\vec{j}_s = j_{s0} e^{-z/\lambda} \vec{e}_y$$

$$j_{s0} = \frac{B_0}{\mu_0} \frac{1}{\lambda}$$

从结果可以看出超导电流也主要存在于表面厚度为  $\lambda$  的薄层内。超导体所显示出的抗磁性是由于超导电流在其内部产生与外磁场逆向的磁场的缘故。

对于大尺度超导体, 若看成  $\lambda \rightarrow 0$ , 则可认为磁场完全被排斥于超导体外。即在内部  $\vec{B} = 0$ 。超导电流仅分布于表面, 表面电流密度  $\alpha_s = \frac{B_0}{\mu_0}$ 。

可以认为在超导体内部  $\vec{M} = -\vec{H}$ , 即  $\chi_m = -1$ 。这时称超导体处于理想 Meissner 态。

### 3.8 有磁介质存在时的静磁场方程

在讨论有磁介质存在时的静磁问题时, 通常用磁标势来讨论比较方便。

### 3.8.1 一般逆磁质或顺磁质

对于没有自由电流分布的单连通区域, 通常引入磁标势。其场方程为

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

在介质交界面上

$$\begin{cases} \varphi_{m2} = \varphi_{m1} \\ \mu_2 \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n} = \mu_1 \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} \end{cases}$$

### 3.8.2 铁磁质

对于没有自由电流分布的区域仍然可以引入磁标势。

理想铁磁体

$\mu \rightarrow \infty$  的铁磁体表面为等势面。以  $\varphi_{m1}$  代表铁磁体内的磁标势, 以  $\varphi_{m2}$  代表真空中的磁标势。由磁场变值关系

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0$$

以及  $\vec{B}_2 = \mu_0 \vec{H}_2$ ,  $\vec{B}_1 = \mu \vec{H}_1$   
得

$$\begin{aligned} \mu_0 H_{2n} &= \mu H_{1n} \\ H_{2t} &= H_{1t} \end{aligned}$$

$$\frac{H_{2t}}{H_{2n}} = \frac{\mu_0}{\mu} \frac{H_{1t}}{H_{1n}} \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0$$

即该磁体外表面  $H_{2t} = 0$ , 因而  $H_{1t} = 0$ 。故该表面为等磁势面。

一般软铁磁材料的  $\mu$  值都很大, 因而用这些材料制成的磁极, 其表面可以近似看作等磁势面。设计一定的磁极表面形状可以获得所需要的磁场分布。

永磁体

永磁体大半由硬磁材料经过磁化体内由较大的剩磁强度  $\vec{M}_0$  而形成。在永磁体内没有自由电流分布, 仍可采用磁标势。

在永磁体内  $\vec{M} = \vec{M}_0 + \chi \vec{H}$ 。在  $\vec{H}$  变化不大的范围内可视  $\chi$  为常数, 仍有场方程

$$\nabla^2 \varphi_m = 0$$

但在其表面有边值关系

$$\begin{cases} \varphi_{m2} = \varphi_{m1} \\ -\frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n} + \mu_r \frac{\partial \varphi_{m1}}{\partial n} = \hat{n} \cdot \vec{M}_0 \quad \mu_r = 1 + \chi \end{cases}$$

第二式由  $\nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M}$  得到。

### 3.8.3 超导体

若把超导体看作完全逆磁介质

$$\vec{M} = -\vec{H} \quad (\chi_m = -1)$$

超导电流看作磁化电流

$$\nabla \times \vec{M} = \vec{j}_s$$

超导电流只分布在表面

$$\hat{n} \times \vec{M} = -\vec{\alpha}_s$$

在超导体内有场方程

$$\nabla^2 \varphi_{m1} = 0$$

在超导体表面有边值关系

$$\begin{cases} \varphi_{m2} = \varphi_{m1} \\ \frac{\partial \varphi_{m2}}{\partial n} = 0 \end{cases}$$

## 3.9 静磁问题的求解

### 3.9.1 静磁场的唯一性定理

如果静磁体系  $V$  内存在着电流和磁介质，且关系式  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  成立，则体系内的磁场由电流和磁介质分布以及边界上  $\vec{A}$  或  $\vec{H}$  的法向分量唯一确定。  
证明从略。

### 3.9.2 静磁问题求解

例 1 设有无限长的线电流沿  $z$  轴流动，在  $z < 0$  的空间内充满磁导率  $\mu$  为的均匀介质。 $z > 0$  的空间为真空。试用唯一性定理求磁感应强度  $\vec{B}$ ，并求磁化电流分布。

解 考虑到磁场分布应具有轴对称，故采用柱坐标系。在边界面上应有

$$\begin{cases} \hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \\ \hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\alpha}_f \end{cases}$$

场方程为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = I \vec{e}_z \delta(R) \delta(z) \frac{\delta(\varphi)}{2\pi} = \vec{j}_f \end{cases}$$

由对称性分析，并应用安培环路定理，并考虑边值关系可设解

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{H}_2 = \frac{I}{2\pi R} \vec{e}_\phi \\ \vec{H}_1 = \frac{I}{2\pi R} \vec{e}_\phi \\ \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{e}_\phi \\ \vec{B}_1 = \frac{\mu I}{2\pi R} \vec{e}_\phi \end{array} \right.$$

磁化电流分布  
在介质 1 线电流周围

$$I_m = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} I = \chi_m I$$

在介质面上

$$\begin{aligned} \alpha_m &= -\hat{n} \times \vec{M} = -\hat{n} \times \chi_m \vec{H}_1 \\ &= \frac{\chi_m I}{2\pi R} \vec{e}_R \end{aligned}$$

例 2 求球形永久磁铁所激发的磁场  
永久磁铁

$$\vec{M} = \vec{M}_0 + \vec{M}' = \vec{M}_0 + \chi \vec{H}_1$$

其中,

$\vec{M}_0$ : 固有磁化强度

$\vec{M}$ : 诱导磁化强度

可以认为在永磁球球内  $\vec{M}_0$  均匀,  $\nabla \cdot \vec{M}_0 = 0$ 。

故在球内  $\nabla \cdot \vec{H} = 0$

$$\nabla^2 \phi_{m1} = 0 \quad r > R$$

又球外

$$\nabla^2 \phi_{m2} = 0 \quad r > R$$

在球表面( $r = R$ ), 有边值关系:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{m2} = \phi_{m1} \\ -\mu_0 \frac{\partial \phi_{m2}}{\partial r} + \mu_0 \mu_r \frac{\partial \phi_{m1}}{\partial r} = \mu_0 \hat{n} \cdot \vec{M}_0 = \mu_0 M_0 \cos \theta \end{array} \right.$$

已取  $\vec{M}_0$  的方向为极轴方向.  
定解条件

$$\begin{cases} r \rightarrow 0 & \phi_{m1} \rightarrow \text{有限} \\ r \rightarrow \infty & \phi_{m2} \rightarrow 0 \end{cases}$$

用分离变数法,可求得:

$$\begin{cases} \phi_{m1} = \text{arccos}\theta \\ \phi_{m2} = \frac{b}{r^2} \cos\theta \end{cases}$$

带入边值关系,求得:

$$\begin{cases} a = \frac{M_0}{2+\mu_r} \\ b = \frac{M_0}{2+\mu_r} R_0^3 \end{cases}$$

球外空间是磁偶极子场, 其偶极矩为

$$\vec{m} = \frac{4\pi}{2+\mu_r} M_0 R_0^3$$

球内为均匀场

$$\begin{cases} \vec{H} = -\frac{M_0}{2+\mu_r} \\ \vec{M} = \vec{M}_0 + \vec{M}' = \vec{M}_0 + \chi_m \vec{H} \end{cases}$$

例3 半径为  $R_0$  的超导体球置于均匀外磁场  $H_0$  中, 求磁场分布及球面的超导电流分布。  
场方程

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi_{m1} = 0 & r < R_0 \\ \nabla^2 \phi_{m2} = 0 & r > R_0 \end{cases}$$

边值关系

$$\begin{cases} \phi_{m1} = \phi_{m2} = 0 \\ \frac{\partial \phi_{m2}}{\partial r} = 0 \end{cases}$$

定解条件

$$\begin{cases} r \rightarrow 0 & \phi_{m1} \rightarrow \text{有限} \\ r \rightarrow \infty & \phi_{m2} \rightarrow H_0 r \cos \theta \end{cases}$$

由场方程及定解条件,求得:

$$\begin{cases} \phi_{m2} = -H_0 r \cos \theta \\ \phi_{m1} = \arccos \theta \end{cases}$$

带入边值关系, 求得

$$\begin{cases} a = -\frac{3H_0}{2} \\ b = -\frac{H_0}{2} R_0^3 \end{cases}$$

故有

$$\begin{cases} \phi_{m2} = -H_0 r \cos \theta - \frac{H_0 R_0^3}{2r^2} \cos \theta \\ \phi_{m1} = -\frac{3H_0}{2} r \cos \theta \end{cases}$$

在球外为均匀场和磁偶极子场的叠加

$$\vec{m} = -2\pi R_0^3 \vec{H}_0$$

球内

$$\vec{M} = -\vec{H}_2 = -\frac{3\vec{H}_0}{2} \alpha_s = -\hat{n} \times \vec{M} = \vec{e}_r \times \frac{3\vec{H}_0}{2}$$

即

$$\vec{\alpha}_s = -\hat{n} \times \vec{M} = -\frac{3}{2} H_0 \sin \theta \vec{e}_\phi$$

上式计算中是把超导体看作特殊的磁介质, 超导电流看作为磁化电流。若把看作自由电流, 则需用公式

$$\hat{n} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{\alpha}_s$$

例3 证明  $\mu \rightarrow \infty$  的磁介质表面为等势面。

设介质 1 为具有极大磁导率的介质, 介质 2 为真空, 磁场边值关系为

$$\begin{cases} \hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \\ \hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0 \quad (\vec{\alpha}_f = 0) \end{cases}$$

已知

$$\vec{B}_2 = \mu_0 \vec{H}_2 \quad \vec{B}_1 = \mu \vec{H}_1$$

由边值关系

$$\mu_0 H_{2n} = \mu H_{1n}$$

$$H_{2t} = H_{1t}$$

$$\frac{H_{2t}}{H_{2n}} = \frac{\mu_0}{\mu} \frac{H_{1t}}{H_{1n}}$$

$\mu \rightarrow \infty$  时

$$\frac{H_{2t}}{H_{2n}} = \frac{\mu_0}{\mu} \frac{H_{1t}}{H_{1n}} = 0$$

说明

$$H_{2t} = H_{1t} = 0$$

可见该磁性介质表面与表面  $\vec{H}_2$ 、 $\vec{H}_1$  垂直，故该介质表面为等势面。

一般软铁磁材料的  $\mu$  值都很大，因而用这些材料制成磁极，当用电流磁化时，其表面为等势面，即  $\varphi_m|_{\Sigma} = \text{常数}$ ，选择磁极表面的形状可以获得所需的磁场分布。

从例 3、例 4 可以看到理想超导体表面  $B_{2n} = 0$ ，( $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ )， $\mu \rightarrow \infty$  的理想磁铁表面  $H_{1t} = 0$  ( $\varphi = \text{Const}$ )，对于这两类磁介质的理想模型，若其边界具有一定对称时，可以用镜像法处理静磁问题，求磁场分布。

## 3.10 磁偶极子在外磁场中的能量

### 3.10.1 小区域电流分布与外磁场的作用

静磁问题第四节我们曾讨论过小区域电流分布可以看作是一系列磁多极子的迭加，它们所产生的磁场即为一系列磁多极子场的迭加。

本节将讨论磁相互作用的另一方面，即磁场如何作用于小区域分布电流。从下面的分析可知，类似的，我们也可以把它分解为磁场对磁多极子的作用。在实际应用中遇到的最多的是外磁场对磁偶极子的作用。

讨论小区域分布电流在外磁场中的能量的问题与小区域电荷分布在外电场中的能量的问题有很大不同。其一是静电场是有势场或保守场，静研场不是；二是小区域电荷分布在外电场中的能量领头项是点电荷在外电场中的能量，电偶极子在外电场中的能量处于次一级的地位，但小区域电流分布在微观领域，这个问题具有重要意义，如所谓 Zeeman 效应——原子能级在磁场中的分裂就与此直接有关。

### 3.10.2 小区域电流分布与外磁场的相互作用能

由前 静磁场能量可以表为

$$U = \frac{1}{2} \iiint \vec{j} \cdot \vec{A} d\tau$$

很容易推出小区域电流分布在外磁场中的能量可表述为

$$U_I = \iiint \vec{j} \cdot \vec{A}_e d\tau$$

当电流分布为电流圈时

$$U_I = I \oint \vec{A}_e \cdot d\vec{l} = I \iint \vec{B}_e \cdot d\vec{S}$$

若小区域的线度外磁场变化的线度, 将  $\vec{B}_e(\vec{r}')$  在  $\vec{r}' = 0$  的领域展开

$$\vec{B}_e(\vec{r}') = \vec{B}_e(0) + \vec{r}' \cdot \nabla' \vec{B}_e(0) + \dots$$

领头项为

$$U_I = I \vec{B}_e(0) \cdot d\vec{S}$$

### 3.10.3 磁偶极子在外磁场中所受的力和力矩

电流体系在外磁场中所受的作用力

$$\vec{F} = \iiint \vec{j}(\vec{r}') \times \vec{B}_e(\vec{r}') d\tau' = \vec{F}_0 + \vec{F}_1 + \dots$$

其中

$$\vec{F}_0 = \iiint \vec{j}(\vec{r}') d\tau' \times \vec{B}_{eo} = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= \iiint \vec{j}(\vec{r}') d\tau' \times [\vec{r}' \cdot \nabla \vec{B}_{eo}] \\ &= -\nabla \times \iiint \vec{j}(\vec{r}') [\vec{r}' \cdot \vec{B}_e(\vec{r}')] d\tau' \\ &= -\nabla \times [\vec{m} \times \vec{B}_e(r)] \\ &= \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}_e) \end{aligned}$$

同样, 由小区域内电流系统在外磁场中所受力矩

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \iiint \vec{r}' \times [\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{B}_e(\vec{r}')] d\tau' \\ &= \vec{m} \times \vec{B}_e \end{aligned}$$

### 3.10.4 磁偶极子在外磁场中的有效势能

当磁偶极子在外磁场中作一微小平移  $\delta\vec{\xi}$  或微小转动  $\delta\theta$  时, 若外磁场将对磁偶极子做功可以表达为:

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta\vec{\xi} = -\Delta(U_{eff})$$

$$\delta W = \vec{N} \cdot \delta\vec{\theta} = -\Delta(U_{eff})$$

[



则称  $U_{eff}$  为磁偶极子在外磁场中的有效势能。

由前分析磁偶极子在外磁场中受力和受力矩，可以看出，可取

$$U_{eff} = -\vec{m} \cdot \vec{B}_e$$

值得注意的是：磁偶极子与外磁场的相互作用能为

$$U_I = \iiint \vec{j} \cdot \vec{A}_e d\tau' = \vec{m} \cdot \vec{B}_e$$

可见当外磁场对磁偶极子作功时，有效势能减小了而它们之间的相互作用能却增加了，原因是在没有外电源的情况下，转动或平移磁偶极子时，并不能保持磁偶极子与外磁场的能量不改变，可以证明若要保持  $\vec{m}$  和  $\vec{B}_e$  都不改变，则必须提供外源，并且外源提供的能量为  $2U_I$ 。

假设磁偶极子和外磁场分别由电流圈  $(I, L)$  和  $(I_e, L_e)$  产生，两个电流体系的相互作用能为

$$\begin{aligned} U_I &= \frac{1}{2} (I \oint \vec{A}_e d\vec{l} + I_e \oint \vec{A} d\vec{l}) \\ &= \frac{1}{2} (I\Phi_e + I_e\Phi) \end{aligned} \quad [$$

当线圈运动时，若保持电流  $I$  和  $I_e$  不变，则相互作用能改变为

$$\delta U_I = \frac{1}{2} (I\delta\Phi_e + I_e\delta\Phi)$$

考虑到

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -\frac{d\Phi_e}{dt} \\ \varepsilon_e &= -\frac{d\Phi}{dt} \end{aligned} \quad [$$

在  $\delta t$  时间上内感应电动势所做的功为

$$\varepsilon I dt + \varepsilon_e I_e dt = -I d\Phi_e - I_e d\Phi$$

为此电源为抵抗感应电动势必须提供能量

$$\delta W_s = I\delta\Phi_e + I_e\delta\Phi = 2\delta U_I$$

可以看出，整个体系包括相互作用的三个方面：电源、电磁场以及两个线圈上的电流，必须将这三个方面都考虑在内，才能应用能量守恒定律。设线圈移动

时场对它做功为  $\delta A$ ，能量守恒要求电源提供的能量应等于总磁能的改变  $\delta U_I$  加上对线圈作的功

$$\delta W_s = \delta U_I + \delta A$$

$$\delta A = \delta W_s - \delta U_I = \delta U_I \quad [$$

即对线圈所作的功等于相互作用能的增量而不是减小量。若定义力学中的(有效) 势能  $U_{eff}$ ，应使体系对外作功等于(有效) 势能  $U_{eff}$  的减小，故有

$$\begin{aligned} U_{eff} &= -U_I = -\iiint \vec{j} \cdot \vec{A}_e d\tau \\ &= -\vec{m} \cdot \vec{B}_e \end{aligned} \quad [$$

此式和电偶极子在外电场中的势能公式

$$U_{eff} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

相对应。

# Chapter 4

## 电磁波的传播

电磁波是电磁场最普遍的运动形态，它描述了电磁场内任一局部扰动。由于电磁场的内部作用（变化磁场激发感应电场，变化电场激发感应磁场）在电磁场内部各个方向传播这一物质图像。

电动力学课程讨论电磁波的主要有两方面课题：电磁波的激发（产生问题）——称之为辐射问题和电磁波的传播问题——电磁波如何传播，在传播过程中如何与介质相互作用的问题。本章主要讨论电磁波的传播问题。

电磁波又可存在各种形态。本章先讨论一种最基本、最重要的电磁波——真空中的平面电磁波。

### 4.1 真空中的平面电磁波

#### 4.1.1 讨论电磁波在真空中传播的一般方法

Helmholtz Equation

在一般情况下， $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$ , 满足真空中的 Maxwell Equations:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

有上述方程组可导出一波动方程

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

研究真空中传播的电磁波，就要研究上式的解。通常首先研究真空中的单频电磁波

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \end{cases}$$

此时波动方程变为

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$$

$$k^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2$$

上式称为 Helmholtz 方程, 研究电磁波的传播问题, 就是要研究满足 Helmholtz 方程并满足 Maxwell 方程组相关方程以及色散关系各种可能形式的解, 按照激发和传播条件的不同, 电磁波有各种各样的形态, 有广播天线发射出球面波, 有沿着传输线或波导管, 光纤定向传播的波, 由激光器激发的狭管光束等等, 他们都是 Helmholtz 方程的解。真空中的平面简谐电磁波是最简单, 最基本的电磁波。

### 4.1.2 真空中的平面电磁波

Helmholtz 方程中最简单而又最基本的解是平面波解

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

其中满足  $\vec{E}_0 \cdot \vec{k} = 0$ 。

而  $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}, \vec{B}_0 = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E}_0$

概括起来, 真空中的平面电磁波的表达式为

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ \vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \end{cases}$$

其中  $\vec{E}_0, \vec{B}_0, \omega, \vec{k}$  满足下述关系

$$k^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{k} = 0$$

$$\vec{B}_0 = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E}_0 = \hat{k} \times \frac{\vec{E}_0}{c}$$

可见表征平面电磁波的独立分量有六个

$$\omega, \hat{k}, \vec{E}_0$$

其中  $\vec{E}_0$  包含了相位因子  $\varphi_0$  通常把平面电磁波简单表示为

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

但应包括关于各参数之间的关系, 以及  $\vec{B}$  的上述关系的理解。

### 4.1.3 关于真空中平面电磁波的若干的重要的物理概念

1、波频-波数-波长-波幅

波频	波数	波长	波幅
$\omega$	$\vec{k}$	$\lambda = \frac{2\pi}{k}$	$ \vec{E}_0 $

2、相-初相-等相面-相速度

$$\begin{aligned}
\text{相} \quad \phi &= \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0 \\
\text{初相} \quad \varphi_0 & \\
\text{等相面} \quad \phi &= \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0 = \text{Constant} \\
\text{相速} \quad v_{\text{phase}} &= \frac{dr_k}{dt} = \frac{\omega}{k} \quad (r_k = \hat{k} \cdot \vec{r})
\end{aligned}$$

其中任意时刻等相面满足方程

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{Constant}$$

这是平面方程，等相面是平面，故称为平面电磁波。相速度  $v_{\text{phase}}$  是等相面移动的速度。在垂直于等相面的法向上，即在  $\hat{k}$  方向上，有

$$v_{\text{phase}} = \frac{dr_k}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

### 3、偏振-线偏振-左(右)旋圆偏振

平面电磁波  $\vec{E}_0 \perp \hat{k}$ ，对给定的  $\hat{k}$ ， $\vec{E}_0$  有两个独立的振动方向，称之为两个独立的偏振模式，引入线偏振基矢  $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ 。他们与  $\hat{k}$  构成右手螺旋系  $(\hat{k}, \hat{e}_1, \hat{e}_2)$

平面电磁波的线偏振表示

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\
&= (E_{01} \hat{e}_1 + E_{02} \hat{e}_2) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}
\end{aligned}$$

这两个偏振模式可以有一相角差，这也是  $\vec{E}_0$  需要用三个参量描述的原因。也可以引入左(右)旋圆偏振基矢

$$\hat{e}_{\pm} = \frac{\hat{e}_1 \pm i\hat{e}_2}{\sqrt{2}}$$

平面电磁波也可以表示为

$$\vec{E} = (E_{0+} \hat{e}_+ + E_{0-} \hat{e}_-) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

最一般的偏振模式应为椭圆偏振。

需要说明的是上述定义的  $\hat{e}_1, \hat{e}_2$  解集为左(右)旋圆偏振是所谓光学常规。与粒子物理中用的角动量常规(helicity, 螺旋度)有这不同的理解。

### 4、复能量密度 $u^*$ ，复能流密度 $\vec{S}^*$

上述平面电磁波的表达式是场量  $\vec{E}, \vec{B}$  的复数表达式，物理上真实的场量应是取其实部  $\Re(\vec{E}), \Re(\vec{B})$ 。

注意到电磁场能量密度  $u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$  以及能流密度  $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$  都是场量的二次表达式，其瞬时表达式不能由场量的复数表达式直接带入  $u$  或者  $\vec{S}$  中，然后取实部得到，而是应场量的实数表示  $\Re(\vec{E}), \Re(\vec{B})$  带入求得  $u, \vec{S}$  中的瞬时值。

由于讨论电磁波的能量、动量特性时，往往只关心其时用平均值，对于两个随时间简谐变化的量，其二次式的时用平均值与其复数表达式有以下的简单关系。若  $f = f_0 e^{-i\omega t}, g = g_0 e^{-i\omega t + \varphi_0}$

$$\begin{aligned}
\langle \Re(f) \Re(g) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T dt f_0 \cos(\omega t) f_0 \cos(\omega t) g_0 \cos(\omega t - \varphi_0) \\
&= \frac{1}{2} f_0 g_0 \cos \varphi_0 \\
&= \frac{1}{2} \Re(f^* g)
\end{aligned}$$

对于平面简谐电磁波常引入复能量密度  $u^*$ , 复能流密度  $\vec{S}^*$

$$u^* = \frac{1}{2}(\epsilon_0 \vec{E}^* \cdot \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^* \cdot \vec{B})$$

$$\vec{S}^* = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}^* \times \vec{B}$$

而得到

$$\langle u \rangle_t = \frac{1}{2} \Re(u^*)$$

$$\langle \vec{S}^* \rangle_t = \frac{1}{2} \Re(\vec{S}^*) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \hat{k} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \epsilon_0 E_0^2 \hat{k} = c \langle u \rangle_t \hat{k}$$

通常定义电磁波的能量传播速度为其群速度  $v_g$ , 对于平面电磁波, 显然有

$$v_g = \frac{|\langle \vec{S}^* \rangle_t|}{\langle u \rangle_t} = c$$

5、复动量密度  $\vec{g}^*$ , 复动量流密度  $\vec{T}^*$   
定义电磁场的复动量密度  $\vec{g}^*$

$$\vec{g}^* = \epsilon_0 \vec{E}^* \times \vec{B}$$

复动量流密度  $\vec{T}^*$

$$\vec{T}^* = (\frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^* \cdot \vec{E} \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^* \cdot \vec{B}) \vec{I} - (\epsilon_0 \vec{E}^* \vec{E} \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^* \cdot \vec{B})$$

对于平面波, 可以证明

$$\langle \vec{g}^* \rangle_t = \frac{1}{2} \Re(\vec{g}^*) = \frac{\langle u \rangle_t}{c} \hat{k}$$

$$\langle \vec{T}^* \rangle_t = \frac{1}{2} \Re(\vec{T}^*) = \langle u \rangle_t \hat{k} \hat{k}$$

## 4.2 高斯光束

平面电磁波是具有确定传播方向( $\hat{k}$ )的, 但却广延于全空间的波动。由于其中“宽度”无穷大, 因此其总能量、总动量也无穷大, 是不可能实现的电磁波形态。但是分析许多问题时还要借助于这种模型(波动的理想模型)。此外又是会把它看作叠加成分(Fourier 分析)。

实际应用的电磁波往往是要要求具有大致确定的传播方向, 同时要求他在空间形状比较狭窄的射束, 即唱腔在空间中的分布具有有限的宽度。近年来发展起来的激光技术中, 从发射器发出的光束一般是很狭窄的光束。

但是由于电磁波的运动必须满足波动方程, 在真空情况下必须满足 Helmholtz 方程。从后面的分析中可知波束的“宽度”大小(反映了“聚焦”的好坏)与波束发散角大小(反映了“定向”的好坏)有相互制约的关系。这是波动现象的一个普遍特征(通常称之为不确定性关系)。若要有良好的“聚焦”(宽度很小很小), 则必定有较大的发散角; 如要有良好的定向(发散角很小很小), 则宽度不能太小。

我们将在这一节中以高斯光束为例分析狭窄射束的传播特点。

### 4.2.1 Helmholtz 方程的波束解；高斯光束

波束场强在横截面上的分布形式是由具体的激发条件决定的。我们研究一种常见的比较简单形式，这种波束的场强分布具有轴对称性，中部场强最强，靠近“边缘”处的场强迅速减弱，设波束轴对称轴为  $z$  轴（也是主要传播方向），在横截面上的场强分布用高斯函数描述

$$\sim e^{-\frac{x^2+y^2}{\omega^2}}$$

当  $\sqrt{x^2+y^2} > \omega$  时，高斯光束的值迅速下降，因此参数  $\omega$  可以表示波束的宽度。这样的波束称为高斯波束。

由于波动的特点，波束在传播过程中一般不能保持截面不变。因此波束的宽度一般是  $z$  的函数，即  $\omega = \omega(z)$ ，又当波束变宽时，场强也相应减弱，因此波幅也是  $z$  的函数。

若以  $u(x, y, z)e^{-i\omega t}$  表示电磁波任一直角分量，考虑到上述相关因素，显然波束解应有这样的形式

$$u(x, y, z) = g(z)e^{-if(z)(x^2+y^2)}e^{ikz}$$

它满足 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad (k^2 = \frac{\omega^2}{c^2})$$

把  $u(x, y, z)$  表示为

$$u(x, y, z) = \psi(x, y, z)e^{ikz}$$

$\psi(x, y, z)$  满足方程

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

相对于  $e^{ikz}$  而言， $\psi(x, y, z)$  是  $z$  的缓变函数，可以预期  $\psi$  对  $z$  的展开式可以忽略高次项，即方程中可忽略  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$  项，即关于  $\psi(x, y, z)$  的方程可以近似为

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

将  $\psi(x, y, z) = g(z)e^{-if(z)(x^2+y^2)}e^{ikz}$  代入上述方程，得到

$$(x^2 + y^2)[2gf^2 - ikgf'] - [2fg - ikg'] = 0$$

等式对任意的  $x, y$  成立，故得到方程组

$$2f^2 = ikf'$$

$$2fg = ikg'$$

解方程，得到

$$f(z) = \frac{1}{A + \frac{2i}{k}z}$$

$$g(z) = \frac{u_0}{1 + \frac{2i}{kA}z}$$

其中  $A, u_0$  为积分常数。令  $A = \omega_0^2$

$$\omega^2(z) = A(1 + \frac{4z^2}{k^2 A^2}) = \omega_0^2[1 + (\frac{2z}{k\omega_0})^2]$$

则有,

$$f(z) = \frac{1}{\omega^2(z)}(1 - \frac{2iz}{k\omega_0^2})$$

$$g(z) = u_0 \frac{\omega_0}{\omega} e^{-i\phi}$$

$$\phi = \arctan(\frac{2z}{k\omega_0^2})$$

$$u(x, y, z) = u_0 \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\frac{x^2 + y^2}{\omega^2} + i\Phi}$$

其中

$$\Phi = kz + \frac{k(x^2 + y^2)}{2z[1 + (\frac{\omega_0^2 k}{2z})^2]} - \phi$$

## 4.2.2 高斯光束的传播特性

从高斯光束解的表达式

$$u(x, y, z) = u_0 \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\frac{x^2 + y^2}{\omega^2} + i\Phi}$$

可以看出高斯光束具有以下传播特性:

1、因子  $e^{-\frac{x^2 + y^2}{\omega^2}}$  是限制波束宽度的因子, 波束宽度由函数  $\omega(z)$  表示,  $z=0$  处波束具有最小宽度, 该处为光束腰部 (称为光腰), 离腰部越远, 波束的宽度越大。

2、因子  $u_0 \frac{\omega_0}{\omega}$  是  $z$  轴上 ( $x=0, y=0$ ) 的波幅,  $u_0$  为波束腰部的真服,  $\frac{\omega_0}{\omega}$  表示波束变宽振幅相对变弱。

3、因子  $\Phi$  是波的相位因子, 包括了三个部分, 其中  $kz$  为主要部分, 第二部分不仅与  $z$  有关, 也与  $x, y$  有关, 在远离腰部, 其值趋近于  $k\frac{x^2 + y^2}{2z}$ ; 第三部分  $-\phi$  在远离腰部 ( $z \geq k\omega_0^2$ ) 趋近于  $\frac{\pi}{2}$ 。

等相面由  $\Phi = Constant$  确定, 在  $z=0$  处,  $\Phi=0=Constant$ 。故  $z=0$  平面是等相面。当波传播到远离腰部处

$$z \geq k\omega_0^2, z^2 \geq x^2 + y^2$$

等相面方程为

$$\Phi = k(y + \frac{x^2 + y^2}{2z}) = kz(1 + \frac{x^2 + y^2}{2z^2}) \approx Constant$$

其中利用了  $(1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2})^{1/2} \approx 1 + \frac{x^2 + y^2}{2z^2}$



即远处波阵面是以腰部中心为球心的球面，由此可见波阵面失宽腰部处的平面逐渐过渡到远处的球面形状。

4、波束并非完全定向，由签署讨论可知在远处波阵面将区域球面形状，即波束传播方向将趋于发散，发散的度将由发散角  $\theta$  来描述，这由宽度因子  $w(\theta)$  在  $z \rightarrow \infty$  的渐近线决定

$$w(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \frac{2z}{k\omega_0}$$

发散角由  $\tan \theta = \frac{\omega}{z}$  决定，故有

$$\theta \approx \frac{2}{k\omega_0}$$

波矢的横向分量  $\Delta k_{\perp}$  为

$$\Delta k_{\perp} = k\theta = \frac{2}{\omega_0}$$

即有

$$\Delta k_{\perp} \cdot \omega_0 \sim O(1)$$

$O(1)$ 表示 Order(1)即 1 的数量级。

上式反映了波束的腰部宽度  $\omega_0$  与远处波矢的横向宽度  $\Delta k_{\perp}$  之间的关系。这些也是波动现象的一个普遍特征，如要有良好的聚焦 ( $\omega_0$  小)，则横向宽度  $\Delta k_{\perp}$  必须足够大，而若要有良好的定向 ( $\Delta k_{\perp}$  小)，则腰宽  $\omega_0$  不能太小。只有无限宽度的平面波才具有确定的波矢。任何有宽度的波束不可能有完全确定的波矢，这即是所谓波动现象中的不确定关系。

5、高斯光束是一种最为简单的波模（基模）。波束还可以有其他波模，这由场在横向截面的分布决定，有些波模的横向分布不是简单的高斯函数，另一些波模不具有轴对称性，这些波模的特点是在横截面上含有一些节点（场强为 0 的点），因而在横截面上光强呈现出明暗相间的图样。一般射束可以分解为各种波模的叠加，具体形状由激发条件决定。

## 4.3 电磁波在介质中的传播

在第一章中我们曾一般的讨论了戒指与电磁场相互作用的一般特点。指出计划，磁化，传导是电磁场作用域介质产生的主要效应，而介电常数  $\epsilon$ 、磁导率  $\mu$ 、电导率  $\sigma$  是描述介质电磁性质的主要参数（对各项异性介质，这些参数可能是张量性质的参量）。

当作用于介质的电磁场量时随时间空间而变化的电磁波时，由于介质中各处极化强度  $\vec{P}$ 、磁化强度  $\vec{M}$ 、传导电流密度矢量  $\vec{j}_f$  也要随之做相应变化（大小，方向），而且此时它们与  $\vec{E}$ 、 $\vec{B}$  的关系已不是完全同步变化的关系，瞬时、局域的关系不再成立，这就使得描述电磁性质的参量  $\epsilon$ 、 $\mu$ 、 $\sigma$  一般随着电磁波的频率  $\omega$  的不同而变化，即  $\epsilon = \epsilon(\omega)$ 、 $\mu = \mu(\omega)$ 、 $\sigma = \sigma(\omega)$ ，由此引起了在介质中的电磁波的色散效应。与此同时，由于介质中的  $\vec{P}$ 、 $\vec{M}$ 、 $\vec{j}_f$  不断随着时间变化其大小、方向，必须含有电磁场能量转化为介质的内能，因此电磁波在介质中传播时必然含有耗散而引起的衰减。色散与衰减时电磁波在介质中必然发生的现象。

由于实际存在的电磁波的激发和传播总是只持续在一定的时间内，固而包含了多种频率成分，即具有一定的频谱，而不是单频的电磁波，这还将引起在介质中电磁波的相位传播速度  $v_p$  和能量传播速度  $v_g$  有了差别。

### 4.3.1 电磁波在各向同性均匀非导电介质中的传播；色散；相速与群速

对于各向同性、均匀、非导电介质中传播的电磁波，一般有  $\vec{D} = \varepsilon(\omega)\vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu(\omega)\vec{H}$ ，由 Maxwell 方程组可导出波动方程，对于单频的电磁波，则可以得到 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$$

但这时的色散关系为

$$k^2 = \mu(\omega)\varepsilon(\omega)\omega^2$$

这时相速度

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = v_p(\omega)$$

一个实际的电磁波往往包含了多个频率成分，其场强的直角分量，总可以表为平面波的叠加

$$u(\vec{r}, t) = \int C(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} d\vec{k} d\omega$$

电磁波种不同的频率成分由不同的相速度，记载传播过程中将产生色散。

除了色散意外，电磁波在这样的介质中传播过程中一般能量传播速度  $v_g$  (群速度) 与相位传播速度  $v_p$  由不同的概念，不同的数值。

为了了解实际上在介质中传播的电磁波中的相速度和群速度的概念以及二者的区别，我们以一维波包 (或波列) 在介质中传播为例进行讨论。

一维波包包含了一定范围的频率成分 (或波数成分)

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int C(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$$

其中  $\omega = \omega(k)$  (由  $k^2 = \mu(\omega)\varepsilon(\omega)\omega^2$ )

$$C(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{-ikx} dx$$

对一个长度为  $\Delta x$  量级的波包，其  $u(x, 0)$  如下图

相应地其 Fourier 分量的振幅  $C(k)$  如下图所示

是一个中心值为  $k_0$ ，宽度为  $\Delta k$  的谱分布。

这里  $\Delta x$ 、 $\Delta k$  应理解为偏离中心值得方均根偏差。

可以证明

$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}$$

对于一色散介质，若  $\omega(k)$  对的依赖关系偏离现行不是太大，总可以将  $\omega(k)$  在  $k_0$  附近展开。这时应有

$$\omega(k) = \omega_0(k_0) + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0 (k - k_0)$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int C(k) e^{ikx - \omega t} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int C(k) e^{i[(k-k_0)x + k_0x - \frac{d\omega}{dk}|_0(k-k_0)t - \omega_0 t]} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int C(k) e^{i[(k-k_0)x - \frac{d\omega}{dk}|_0(k-k_0)t]} dk e^{i(k_0x - \omega_0 t)} \\ &= u(x - \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0 t, 0) e^{i(k_0x - \omega_0 t)} \end{aligned}$$

由此表达式可以看出, 波包以群速度  $v_g$

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0$$

运动, 而其相速度  $v_p$ , 则为

$$v_p = \frac{\omega_0}{k_0}$$

实际上, 由于波包中各个频率成分的相速度并不相同, 在传播过程中波包的形状将发生改变, 这即是所谓波包的弥散。这在强色散介质中尤为显著。

### 4.3.2 电磁波在导体中的传播; 衰减

导体的电磁性质方程:

$$\vec{j}_f = \sigma \vec{E}; \quad \varepsilon, \mu \sim \varepsilon_0, \mu_0$$

电磁波在导体中传播, 场方程不同于真空或非导电介质中的情形。因为方程中会出现非齐次项 (源项) 除了电流的项, 是否会出现电荷项呢? 由

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{j} = \sigma \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho \\ \nabla \cdot \vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{cases}$$

可得方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho = 0$$

显然有

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t} = \rho_0 e^{-t/\tau}$$

亦即在导体中如有自由点电荷存在, 它亦将很快的衰减, 衰减特征时间为

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

对一般金属, 其电阻率 (以  $10^{-8} \Omega m$  为单位) Ag、Cu、Al、Fe、Hg、的值分别为 1.5, 1.6, 2.5, 8.7, 94, 由此可求得

$$\tau_{Cu} \approx 1.4 \times 10^{-19} s$$

$$\tau_{Hg} \approx 8.3 \times 10^{-18} s$$

可见只要电磁波波频  $\omega \ll 10^{17} Hz$ , 对良导体而言, 自由电荷只存在于其表面 (可见光频率范围  $4 \times 10^{14} \sim 8 \times 10^{14} Hz$ )。因此电磁波在导体中传播时, 可用下列方程组讨论其性质

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

相应地波动方程为

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - \sigma\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{B} - \sigma\mu \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

波动方程中出现对时间的一次到书香, 物理上代表了耗散 (从而衰减) 的存在。

此时虽然仍存在单色平面电磁波解, 但色散关系变为

$$-k^2 + i\sigma\mu\omega + \varepsilon\mu\omega^2 = 0$$

或

$$k^2 = \varepsilon\mu\omega^2$$

其中  $\varepsilon_\omega = \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}$ , 称为等效复介电常数, 其实部、虚部分别代表位移电流

$\vec{j}_d = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  和传导电流  $\vec{j}_f = \sigma \vec{E}$  的贡献, 由前面的讨论可知, 对于一般的电磁波

频率 (小于光频段)  $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ , 由此可知  $\Im(\varepsilon_\omega) \gg \Re(\varepsilon_\omega)$ , 由前述导体中的平面

电磁波的色散关系可知, 若  $\omega$  为实数,  $\varepsilon_\omega$  为复数, 则  $\vec{k}$  必为复矢量。

引入复波矢

$$\vec{k} = \vec{\beta} + i\vec{\alpha}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$= \vec{E}_0 e^{-\vec{\alpha} \cdot \vec{r}} e^{i(\vec{\beta} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

可以看出来这是衰减波,  $\vec{\alpha}$  方向为衰减方向, 而  $1/\alpha$  则为衰减长度, 当电磁波从真空中入射到导体表面时, 透射入道题的电磁波, 其  $\vec{\alpha}$  垂直与导体表面, 因此  $1/\alpha$  也成为穿透深度。

从  $\vec{E}$  的表达式及上述分析可知复波矢  $\vec{k} = \vec{\beta} + i\vec{\alpha}$  中实部  $\vec{\beta}$  描述了波传播的相位关系, 故称为相位常数, 虚部  $\vec{\alpha}$  描述波传播的衰减关系, 故称为衰减常数。

由色散关系  $k^2 = \varepsilon\mu\omega^2$ , 可以推出

$$\beta^2 - \alpha^2 = \varepsilon\mu\omega^2$$

$$\vec{\beta} \cdot \vec{\alpha} = \frac{1}{2}\sigma\mu\omega$$

对良导体  $\Re(\varepsilon_\omega) \ll \Im(\varepsilon_\omega)$ , 可导出

$$\beta^2 - \alpha^2 \approx 0$$

$$\beta\alpha = \frac{1}{2}\sigma\mu\omega$$

(从电磁波入射到导体表面时, 导体表面常量的边值关系可得出  $\vec{\alpha}$  垂直于表面的结论, 同时说明的垂直分量远大于平行分量。)

于是有

$$\alpha \approx \beta\alpha \sqrt{\frac{\sigma\mu\omega}{2}}$$

例: 对于 Cu, 若  $f = 50Hz$

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu\omega}} \approx \sqrt{\frac{2 \times 1.6 \times 10^{-8}}{1.26 \times 10^{-6} \times 2\pi \times 50}} \sim 0.9cm$$

若  $f = 100\text{MHz}$  (超短波)

$$\delta = \frac{1}{\alpha} 0.07\text{mm}$$

趋肤效应：电磁场以及它相互作用的高频电流仅集中于表面很薄一层之内，这种现象称为趋肤效应。

又

$$\begin{aligned}\vec{B}_0 &= \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_0 \\ k &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} e^{i\phi} \approx \sqrt{\sigma\mu\omega} e^{i\pi/4} \\ \left| \frac{B_0}{\sqrt{\mu}} \right| &\gg |\sqrt{\varepsilon} E_0|\end{aligned}$$

金属内部电磁场能量主要是磁场能量，且  $\vec{B}, \vec{E}$  之间的相位差为  $\pi/4$ ， $\vec{B}, \vec{E}$  的方向基本与表面平行。

### 4.3.3 电磁场在各向异性介质中的传播；正常波；反射波

对于各向异性介质，例如单晶，其电磁性质方程一般为

$$\begin{cases} \vec{D} = \vec{\varepsilon} \cdot \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \end{cases}$$

其中是介电张量，描述了单晶的介电性质。

对于单光轴晶体，设为光轴方向，此时

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \varepsilon_1 & \\ & & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

此时，介质中仍存在平面电磁波， $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}$  的运动形式均取

$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

代入介质的 Maxwell 方程组，可得

$$\begin{cases} \vec{k} \cdot \vec{D} = 0; & \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}; & \vec{k} \times \vec{H} = -\omega \vec{D} \end{cases}$$

其中有两个方程不同于各向同性介质情形。此时各场量的方向有如下图所示

由前述  $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}$  与  $\omega, \vec{k}$  的方程组，可得

$$\vec{D} = -\frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{H} = -\frac{1}{\omega^2 \mu} \vec{k} \times [\vec{k} \times \vec{E}]$$

$$\begin{cases} \vec{\varepsilon} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\omega^2 \mu} [k^2 \vec{E} - \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E})] \\ &= \frac{1}{\omega^2 \mu} (k^2 \vec{I} - \vec{k}\vec{k}) \cdot \vec{E} \end{cases}$$

晶体光学第一基本方程

$$\vec{L} \cdot \vec{E} = 0$$

其中

$$\vec{L} = \vec{\varepsilon} - \frac{1}{\omega^2 \mu} (k^2 \vec{I} - \vec{k} \vec{k})$$

此方程等价于在各项异性非导电介质中的平面电磁波的色散关系内容。

要得到非零解, 必须有

$$\det(\vec{L}) = 0$$

为方便起见, 选取坐标系, 使得  $\vec{k}$  在  $(\hat{y}, \hat{z})$  平面内, 此时  $k_1 = 0, k^2 = k_2^2 + k_3^2$ , 此平面称为主截面

$$\vec{k} \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2^2 & k_2 k_3 \\ 0 & k_3 k_2 & k_3^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{\varepsilon} - \frac{1}{\omega^2 \mu} (k^2 \vec{I} - \vec{k} \vec{k}) \\ &= \begin{pmatrix} \mu \varepsilon_1 \omega^2 - k^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu \varepsilon_1 \omega^2 - k^2 + k_2^2 & k_2 k_3 \\ 0 & k_3 k_2 & \mu \varepsilon_1 \omega^2 - k^2 + k_3^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

由

$$\det(\vec{L}) = 0$$

得

$$\begin{aligned} &(\mu \varepsilon_1 \omega^2 - k^2)[(\mu \varepsilon_1 \omega^2 - k^2)(\mu \varepsilon_2 \omega^2 - k^2) - k_2^2 k_3^2] \\ &= (\mu \varepsilon_1 \omega^2 - k^2)[\mu^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \omega^4 - k^2(\varepsilon_2 \cos^2 \theta + \varepsilon_1 \sin^2 \theta) \mu \omega^2] \\ &= 0 \end{aligned}$$

方程有两个非零解

$$1、k^2 - \mu \varepsilon_1 \omega^2 = 0$$

相应于  $E_1 \neq 0, E_2 = 0, E_3 = 0$

$$2、\mu^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \omega^2 - k^2(\varepsilon_2 \cos^2 \theta + \varepsilon_1 \sin^2 \theta) \mu = 0$$

相应于  $E_1 = 0, E_2, E_3 \neq 0$

第一种解

相应于  $\vec{D} = \varepsilon_1 \vec{E}$ , 垂直于主截面,  $\vec{E} \perp \vec{K}, \vec{S}, \vec{k}$  方向一致。

$$\text{相速度: } v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon_1}}$$

$$\text{群速度: } v_g = v_p$$

这种波称为正常波。

第二种解

$$\vec{E} \text{ 在主截面内, } \vec{D} = \varepsilon_1 \vec{E}_2 + \varepsilon_2 \vec{E}_3$$

$\vec{D}, \vec{E}$  方向不一致。

由  $\vec{D} \cdot \vec{k} = 0$ , 得

$$\varepsilon_1 E_2 \sin \theta + \varepsilon_2 E_3 \cos \theta = 0$$

$$E_3 = -\frac{\varepsilon_1 \sin \theta}{\varepsilon_2 \cos \theta} E_2$$

设  $\vec{E}, \vec{D}$  夹角为  $\alpha$ , 可证

$$\sin \alpha = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{\varepsilon_1^2 \sin^2 \theta + \varepsilon_2^2 \cos^2 \theta}}$$

这种波的相速度  $v'_p$  为

$$v'_p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 \sin^2 \theta + \varepsilon_2^2 \cos^2 \theta}{\mu \varepsilon_1 \varepsilon_2}}$$

为计算此种电磁波的群速度, 可计算其能量密度

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) \\ &= \frac{1}{2}[\vec{E} \cdot (-\frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{H}) + (\frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E}) \cdot \vec{H}] \\ &= \frac{k}{\omega} \vec{S} \cdot \hat{k} \end{aligned}$$

$$v'_g = \frac{|\vec{S}|}{u} = \frac{v_p}{\cos \alpha}$$

相速度时群速度在波矢方向上的投影, 这样的波模称为反常波。

结论: 各向异性介质可以允许两种单色平面电磁波在同一给定方向上传播, 它能具有不同的线偏振和不同的传播速度。反映了这种介质中电磁波的传播特性对于与传播方向和偏振的依赖。

## 4.4 电磁波在介质交界面上的反射和折射

在光学中我们知道光从一种介质进入另一种介质时, 在介质交界面上会发生反射和折射, 入射光线、反射光线、折射光线之间满足反射定律、折射定律, 其强度则满足 Fresnel 公式; 当光线从光密介质进入光疏介质时, 入射角若大于临界角时, 会发生全反射。点动力鞋如何解释这些经验规律呢?

其物理图像是电磁波在传播过程中, 在介质交界面上将诱导出束缚电荷、电流, 这些随时间变化的束缚电荷、电流将向外辐射电磁波, 在介质 1 内即为反射波, 在介质 2 内即成折射波。(由经典电子论得知, 介质中的电磁波由入射波和各散射中心发出的散射波相干叠加而成。)

### 4.4.1 入射波、反射波、折射波

处理反射、折射问题的第一步是将入射波、反射波、折射波写成平面波形式

$$\begin{aligned} \text{入射波} \quad \vec{E} &= \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ \text{反射波} \quad \vec{E}' &= \vec{E}'_0 e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t)} \\ \text{折射波} \quad \vec{E}'' &= \vec{E}''_0 e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{r} - \omega'' t)} \end{aligned}$$

我们要根据电磁场的运动规律由  $\vec{E}$  求出  $\vec{E}', \vec{E}''$ 。

### 4.4.2 运动方程

包括在每个介质内的平面电磁波的运动方程和两个介质交界面上的边值关系。

在介质内部, 由 Maxwell 方程组可得

$$\begin{aligned} k^2 &= \mu\varepsilon\omega^2 \\ \vec{k} \cdot \vec{E}_0 &= \vec{k} \cdot \vec{B}_0 \\ \vec{B}_0 &= \frac{\vec{k} \times \vec{E}_0}{\omega} \end{aligned}$$

在介质交界面处, 令  $\vec{E}_1 = \vec{E} + \vec{E}'$ ,  $\vec{E}_2 = \vec{E}''$  和  $\vec{H}_1 = \vec{H} + \vec{H}'$ ,  $\vec{H}_2 = \vec{H}''$ , 边值关系为

$$\begin{aligned} \hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) &= 0 \\ \hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) &= 0 \end{aligned}$$

对于平面电磁波, 由于  $\nabla \times \vec{E} = i\omega\mu\vec{H}$ ,  $\nabla \times \vec{H} = -i\omega\mu\vec{E}$ 。另两个方程  $\nabla \cdot \vec{E} = 0, \nabla \cdot \vec{H} = 0$ 。可由前述两个关系给出, 无需专门关注。

在实际求解中, 我们将利用关系式

$$\vec{H}_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \hat{k} \times \vec{E}_0, \quad \vec{E}_0 = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \hat{k} \times \vec{H}_0$$

把边值关系中关于的方程  $\vec{H}_0$ , 化为的另一组方程, 或者相反。

### 4.4.3 求解

1、相位关系——反射定律、折射定律

在边界处 ( $z = 0$ ),  $E_{2t} = E_{1t}$ ,  $H_{2t} = H_{1t}$ , 等式在边界上任意位置、任意时刻均成立。

必有

$$(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)|_{z=0} = (\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t)|_{z=0} = (\vec{k}'' \cdot \vec{r} - \omega'' t)|_{z=0}$$

由此得

$$\begin{cases} \omega = \omega' = \omega'' \\ k_x = k'_x = k''_x \\ k_y = k'_y = k''_y = 0 \end{cases}$$

其中选择合适的入射平面, 使得  $k_y = 0$

即有以下结论:

(1) 反射波、折射波得频率与入射波得频率相同;

(2) 反射线、折射线得与入射线在同一平面内, 即  $\vec{k} = \vec{k}' = \vec{k}''$  共面;

(3)  $\frac{\sin \theta'}{\sin \theta} = \frac{k'_x/k'}{k_x/k} = \frac{k}{k'} = 1, \theta' = \theta$ ;

(4)  $\frac{\sin \theta''}{\sin \theta} = \frac{k}{k''} = \frac{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}}{\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}} = \frac{n_1}{n_2} = n_{12}$ 。

其中  $n_1, n_2$  分别为介质 1, 介质 2 的折射率,  $n_{12}$  为介质相对于介质的相对折射率。

上述结论包含了光学中反射定律和折射定律的全部内容。

2、振幅关系——Fresnel 公式



关于反射波、折射波与入射波的振幅关系，对于不同的偏振模式有不同的结论，我们将分别讨论。

$\vec{k}$  确定后， $\vec{E}_0$  存在两个独立的偏振模式：一是垂直入射面  $\vec{E}_0, \vec{E}'_0, \vec{E}''_0$  ( $\vec{H}_0, \vec{H}'_0, \vec{H}''_0$  则在入射面内)；另一是  $\vec{E}_0, \vec{E}'_0, \vec{E}''_0$  在入射面内 ( $\vec{H}_0, \vec{H}'_0, \vec{H}''_0$  则垂直于入射面)。我们将上述两种模式分别称为“垂直模式”和“平行模式”。见下图所示：

(1) 垂直模式

边值关系可写为

$$\begin{cases} E_{0\perp} + E'_{0\perp} = E''_{0\perp} \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}(E_{0\perp} - E'_{0\perp}) \cos \theta = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E''_{0\perp} \cos \theta'' \end{cases}$$

一般介质的磁导率都接近  $\mu_0$ ，取  $\mu_0 \approx \mu_1 \approx \mu_2$ 。并考虑到，将此代入上述方程组，可得

$$\begin{aligned} \frac{E'_{0\perp}}{E_{0\perp}} &= -\frac{\sin(\theta - \theta'')}{\sin(\theta + \theta'')} \\ \frac{E''_{0\perp}}{E_{0\perp}} &= \frac{2 \cos \theta \sin \theta''}{\sin(\theta + \theta'')} \end{aligned}$$

(2) 平行模式

边值关系可写为

$$\begin{cases} (E_{0\parallel} - E'_{0\parallel}) \cos \theta = E''_{0\parallel} \cos \theta'' \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}(E_{0\parallel} + E'_{0\parallel}) \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E''_{0\parallel} \end{cases}$$

因此能够求得：

$$\begin{aligned} \frac{E'_{0\parallel}}{E_{0\parallel}} &= \frac{\tan(\theta - \theta'')}{\tan(\theta + \theta'')} \\ \frac{E''_{0\parallel}}{E_{0\parallel}} &= \frac{2 \cos \theta \sin \theta''}{\sin(\theta + \theta'') \cos(\theta - \theta'')} \end{aligned}$$

上述两组不同偏振模式下的振幅关系，称为 Fresnel 公式。

(3) 结果讨论：分别讨论电磁波从光疏介质进入光密介质（即  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$  从而  $\theta_1 > \theta''$ ）和由光密介质进入光疏介质（即  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$  从而  $\theta_1 < \theta''$ ）两种情形。

从光疏介质射向光密介质  $\theta > \theta''$

a)  $\frac{E'_{0\perp}}{E_{0\perp}}$  半波损失

b) 反射系数  $\gamma(\gamma_{\perp}, \gamma_{\parallel})$

定义反射波于入射波强度之比为反射系数，即

$$\gamma = \frac{|E'|^2}{|E|^2}$$

$\gamma_{\perp}, \gamma_{\parallel}$  都是  $\theta$  的函数，它们随  $\theta$  的变化如下图  
垂直入射 ( $\theta = 0$ )

$$\gamma_{\perp} = \gamma_{\parallel} = \gamma_0 = \left( \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} \right)^2$$

c) 反射光的偏振度

$$P(\theta) = \frac{\gamma_{\perp} - \gamma_{\parallel}}{\gamma_{\perp} + \gamma_{\parallel}}$$

当  $\theta = \theta_b$  时,  $\theta + \theta'' = \frac{\pi}{2}, \gamma_{\parallel}$

此时,  $P(\theta_b) = 1$  全偏振

$\theta_b$  称为 Brewster 角, 可以证明  $\theta_b = \tan^{-1}(n'/n)$  若入射光为自然光, 两种偏振光等量混合, 当入射角时  $\theta = \theta_b$ , 反射光则为全偏振光。

从光密介质射向光疏介质  $\theta < \theta''$

$$\frac{\sin \theta''}{\sin \theta} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} = n_{12}$$

定义: 临界角  $\theta_c$ , 当  $\theta = \theta_c$  时  $\theta'' = \frac{\pi}{2}$

可证  $\theta_c = \sin^{-1}(n'/n)$  当  $\theta > \theta_c$  时, 将发生全反射, 此时形式上有  $\sin \theta'' > 1$ , 考虑到

$$\sin \theta'' = \frac{k_x''}{k''}, \quad \cos \theta'' = \frac{k_z''}{k''}$$

$$\sin^2 \theta'' + \cos^2 \theta'' = 1$$

$k_x'' > k'', k_z''$  必将为虚数, 令  $k_z'' = i\tau$  折射波

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_0'' e^{-\tau z} e^{i(k_x x - \omega t)}$$

可证, 此时  $\gamma_{\parallel} = 1, \gamma_{\perp} = 1$

此时反射波与入射波具有相同的振幅, 但有一定相位差。

光纤所以被用来传播电磁波信号其基本原理就是利用了全反射的性质。

## 4.5 电磁波在导体表面的反射

由第三节的讨论, 可知在导体中传播的电磁波与非导电解质中传播的电磁波比较, 其主要差别体现在

$$\varepsilon \rightarrow \varepsilon_{\omega} = \varepsilon + i \frac{\sigma}{\omega}$$

$$\vec{k} \rightarrow \vec{k} = \vec{\beta} + i \vec{\alpha}$$

设平面电磁波由真空入射到导体表面, 由边值关系可得

$$\begin{cases} \omega = \omega' = \omega'' \\ k_x = k'_x = k''_x \\ k_y = k'_y = k''_y = 0 \end{cases}$$

由此可得

$$\beta_x = k_x, \quad \beta_y = k_y = 0$$

$$\alpha_x = 0, \alpha_y = 0$$

只有

$$\alpha_z \neq 0$$

利用

$$\beta^2 - \alpha^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \approx 0$$

$$\vec{\beta} \cdot \vec{\alpha} = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega$$

即

$$\beta_x^2 + \beta_y^2 - \beta_z^2 = 0$$

$$\beta_z \alpha_z = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega$$

$$\frac{\beta_x}{\beta_z} \sim \frac{k_x}{\beta} \sim \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \omega}{\sqrt{\frac{\mu \sigma \omega}{2}}} \sim \sqrt{\omega \frac{\varepsilon_0}{\sigma}} \ll 1$$

对于良导体  $\frac{\varepsilon_0}{\sigma} \sim 10^{-18} s$

可见  $\vec{\beta}$  与  $\vec{\alpha}$  夹角很小

为简单起见, 讨论垂直入射的情形  $\beta_x = 0$ , 此时由边值关系

$$\vec{k}'' = (1 + i) \vec{\alpha}$$

以及

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0$$

以及  $\vec{H} = \frac{1}{\mu \omega} \vec{k} \times \vec{E}$  可解得

$$\frac{E'}{E} = \frac{\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}} - (1 + i)}{\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}} + (1 + i)}$$

反射系数

$$\gamma_{\perp} = \left| \frac{E'_{0\perp}}{E_{0\perp}} \right|^2 = \frac{(1 - \sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}})^2 + 1}{(1 + \sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}})^2 + 1} \approx 1 - 2\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}}$$

例: 入射波  $\nu = 2.5 \times 10^{13} Hz$ ,  $\lambda \approx 1.2 \times 10^{-5} m$  (红外) 在 Cu 表面反射  $\frac{1}{\sigma} = 1.6 \times 10^{-8} \Omega m$

$$2\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}} \sim 0.014$$

实测值为

$$\gamma = 1 - 0.016$$

在微波段 ( $\nu \sim 10^{10} Hz$ ,  $\lambda \sim 10^{-2} m$ ) 和无线电下

$$2\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}} < 10^{-3}$$

或更小。

因此在许多情形下, 在金属表面反射时, 可以看做反射系数可视作  $\gamma = 1$ 。  $\gamma = 1$  的导体称为理想导体, 在实际工作的电磁波波段, 良导体近似看做理想导体, 这在处理实际问题时是很有意义的。处理金属管波导问题时就利用这样的理想模型。

Fresnel 适用条件: 各向同性非导电介质; 弱场, 线性, 光频段 (磁化机制冻结)。

## 4.6 局限在有界区域内的电磁波，谐振腔和波导管

播过若局限在有界区域，则波矢将只能取分立的值。因而必有一个最小波矢（最大波长），相应的由一个最低频率（称为截止频率），这样的波动通常称为驻波。此外驻波内通常还有所谓节点存在。

本节主要讨论 Helmholtz 方程的驻波解。

要是电磁波局限在有限区间，可以利用良导体作为电磁波的电解，或者利用全反射方法，使电磁波在光纤中传播。

### 4.6.1 理想导体

为使得问题讨论简便，引入理想模型——理想导体。

1、 $\sigma \rightarrow \infty$  的导体称为理想导体。

2、理想导体的物理性质

电磁波入射到理想导体表面将全部波反射，穿透深度等于零。亮相道题内部均等于零，因而理想导体表面构成电磁波存在的边界。理想导体表面存在面电荷、面电流但不引起损耗。

3、理想导体边界条件

$$\hat{n} \times \vec{E} = 0$$

$$\hat{n} \times \vec{H} = \vec{\alpha}_f$$

$$\hat{n} \cdot \vec{D} = \sigma_f$$

$$\hat{n} \cdot \vec{B} = 0$$

### 4.6.2 以理想导体为边界的电磁波求解问题的一般方法

定频问题，求解  $\vec{E} = \vec{E}_0(\vec{r})e^{-i\omega t}$ ， $\vec{B}$  由方程  $\nabla \times \vec{E} = i\omega\vec{B}$  求出， $\vec{E}$  满足方程组

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 & k^2 = \mu\epsilon\omega^2 \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \end{cases}$$

以及边界条件

$$\begin{cases} E_t = 0 \\ \frac{\partial E_n}{\partial n} = 0 \end{cases}$$

第二个边界条件由第一个边界条件以及  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$  在边界处的推论而得到。

### 4.6.3 谐振腔

在实际应用中需要产生一定频率的电磁波以用来传输信息。

产生低频电磁波使用  $LC$  回路，频率  $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ 。要提高谐振频率，需使  $L, C$  下降。而这将增大辐射损耗（电磁能不易聚集于元件内部）和焦耳损耗（趋肤效应），因此提高频率时在微波范围，常用金属壁面的谐振腔，在激光范围内常用激光介质和反射镜组成的光学谐振腔共同构成的激光器。

谐振腔的形状可以不同，下面以矩形谐振腔 ( $L_1 \times L_2 \times L_3$ ) 为例讨论其中激发的电磁波的特征。设  $u$  为  $\vec{E}$  的任一直角分量，它满足方程

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad (k^2 = \mu\epsilon\omega^2)$$

用分离变数法求解, 令  $u = X(x)Y(y)Z(z)$ , 则应有

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X = 0 \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0 \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0 \end{cases}$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \mu\epsilon\omega^2$$

考虑到的边条件, 可得到的驻波解得一般形式

$$u(x, y, z) = (c_1 \cos k_x x + d_1 \sin k_x x)(c_2 \cos k_y y + d_2 \sin k_y y)(c_3 \cos k_z z + d_3 \sin k_z z)$$

其中  $k_x, k_y, k_z$  为一系列本征值,  $c_i, d_i$  为待定系数

设  $u = E_x = YXZ$  对于  $x = 0, x = L_1$  界面,  $E_x$  是其法向分量, 应有  $\frac{dX}{dx} = 0$

故有  $X = c_1 \cos k_x x, k_x = \frac{m\pi}{L_1} (m = 0, 1, 2, \dots)$  而  $y = 1, y = L_2$  界面, 及  $y = 1, y = L_3$  都是切向分量  
故有

$$Y = d_2 \sin k_y y, \quad k_y = \frac{n\pi}{L_2} (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$Z = d_2 \sin k_z z, \quad k_z = \frac{p\pi}{L_2} (n = 0, 1, 2, \dots)$$

同时可以推出

$$E_x = A_1 \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z$$

$$E_y = A_2 \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z$$

$$E_z = A_3 \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z$$

在  $E_x, E_y, E_z$  中取相同的  $k_x, k_y, k_z$  原因是因为对于谐振腔中, 每一点, 都必须满足方程。

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

这一要求, 同时给出之间的一个限制条件

$$A_1 k_x + A_2 k_y + A_3 k_z = 0$$

即  $A_1, A_2, A_3$  中只有两个量是独立的 (相应于平面电磁波对一定的  $\hat{k}$ , 只存在两个独立的偏振。)

上述的表达式  $E_x, E_y, E_z$ , 当  $k_x, k_y, k_z$  取相应分立的值以及  $A_1, A_2, A_3$  满足约束条件, 表明它满足了 Helmholtz 方程和  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$  以及的相应的边界条件, 因此它代表了谐振腔内一种可能的电磁场的本征振荡, 通常称为谐振腔内的一种波模, 每一组  $(m, n, p)$  值有两个独立的偏振波模, 谐振频率为

$$\omega_{mnp} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_2}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L_3}\right)^2}$$

从  $E_x, E_y, E_z$  的表达式时不难看出中最多只允许  $m, n, p$  一个取零, 对应一个谐振腔 ( $L_1 \geq L_2 \geq L_3$ ), 最低频率的谐振波模为  $(1, 1, 0)$ , 相应的谐振频率为

$$f_{110} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{1}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{L_2}\right)^2}$$

波长则为

$$\lambda_{110} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{L_2}\right)^2}}$$

#### 4.6.4 波导管

谐振腔是产生一定频率电磁波的器件，波导管则是用来传输一定频率范围电磁波的器件。

第一章曾分析过直流电路中能量传输图像，从中可以看出电路中导线起着引导电磁场能量传输的作用。

电磁能量传输的方式有：双线传输、同轴线传输、波导管传输、光纤传输，不同的传播方式应用于不同的频率波模。

下列以矩形波导管为例讨论其中传输电磁波能量的一些特点。

设矩形波导管的横截面为  $a \times b (a > b)$  (如图)，波导管内的电磁波沿着轴方向为行波，在  $XY$  平面内为驻波。

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y)e^{i(k_z z - \omega t)}$$

由方程

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad k^2 = \mu \epsilon \omega^2$$

得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\vec{E}(x, y) + (k^2 - k_z^2)\vec{E}(x, y) = 0$$

仿照矩形谐振腔中的电磁波的讨论， $\vec{E}(x, y)$  中的任一直角分量必定有形式

$$u(x, y) = (c_1 \cos k_x x + d_1 \sin k_x x)(c_2 \cos k_y y + d_2 \sin k_y y)$$

根据边界条件

$$\begin{aligned} x = 0, a \quad E_y = E_z = 0 \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} &= 0 \\ y = 0, b \quad E_x = E_z = 0 \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

可求得

$$\begin{aligned} E_x &= A_1 \cos k_x x \sin k_y y e^{i(k_z z - \omega t)} \\ E_y &= A_2 \sin k_x x \cos k_y y e^{i(k_z z - \omega t)} \\ E_z &= A_3 \sin k_x x \sin k_y y e^{i(k_z z - \omega t)} \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{m\pi}{a}, k_y = \frac{n\pi}{b} \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \\ k_z^2 &= k^2 - (k_x^2 + k_y^2) \end{aligned}$$

由

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

得

$$A_1 k_x + A_2 k_y - i A_3 k_z = 0$$

即对应一定的频率  $\omega$ ，一定的  $(m, n)$  值，存在两种不同的波模，由于对单频电磁波有  $\vec{B} = \frac{1}{i\omega} \nabla \times \vec{E}$ ，意味着  $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$  只有两个独立分量，对于在波导管中传播的电磁波通常选  $E_z, B_z$  作为两个独立分量。其余场分量  $E_x, B_x$  均可以用表达，把  $E_z = 0$  的波模称为横电波 (TE 波)， $B_z = 0$  的波模称为横磁波 (TM 波)。这就是说，在一定频率下，对应于一组本征值  $(m, n)$  存在两种独立的波模：TE<sub>mn</sub> 波、TM<sub>mn</sub> 波。波导管不存在 TEM 波。此外，必须指出， $m, n$

不能同时为, 而  $TM$  波甚至不存在  $TM_{m0}, TM_{0n}$  波模。这可以从波导管中的波的表达式中看出。由  $\vec{B} = \frac{1}{i\omega} \nabla \times \vec{E}$ , 利用前述矩形波导管中的表达式, 可求得:

$$B_x = B_1 \sin k_x x \cos k_y y e^{i(k_z z - \omega t)}$$

$$B_y = B_2 \cos k_x x \sin k_y y e^{i(k_z z - \omega t)}$$

$$B_z = B_3 \cos k_x x \cos k_y y e^{i(k_z z - \omega t)}$$

在波导管内能沿着轴传播的电磁波, 必须要求  $k_z$  大于零, 即  $k_z = \sqrt{k^2 - (k_x^2 + k_y^2)}$ 。因此其中的每一个波模  $(m, n)$  存在一个可以在波导管内传播的最低频率, 称为该波模的截止频率

$$\omega_{c,mn} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

若  $a > b$ , 波有最低的截止频率

$$f_{c,10} = \frac{\omega_{c,10}}{2\pi} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\varepsilon}} \xrightarrow{\text{in vacuum}} \frac{c}{2a}$$

实际应用中, 最常用的波模是  $TE_{10}$  波, 它具有的最低的截止频率。由于其他最高波模的截止频率都比较高, 因此在某一频率范围内, 我们总可以选择波导管的尺寸, 使其只通过  $TE_{10}$  波。

例题分析: 已知矩形波导  $(a \times b)$  中  $TE_{10}$  波  $H_z$  分量

$$H_z = H_0 \cos \frac{\pi}{a} x e^{i(k_z z - \omega t)}$$

求: (1) 管壁上的电流分布;

(2) 沿  $z$  方向传播的能留的时间平均值  $\langle S_z \rangle$

(3) 相速度  $v_p$ , 群速度  $v_g$

解: 由  $E_z = 0$ , 和  $H_z = H_0 \cos \frac{\pi}{a} x e^{i(k_z z - \omega t)}$ , 可求得  $TE_{10}$  波中的其他场分量

$$E_x = 0$$

$$E_y = \frac{i\omega\mu a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi}{a} x e^{i(k_z z - \omega t)}$$

$$H_x = -\frac{ik_z a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi}{a} x e^{i(k_z z - \omega t)}$$

(1) 管壁上的电流分布由  $\vec{\alpha} = \hat{n} \times \vec{H}$  给出对于管壁  $(x=0, a), \hat{n} = \hat{e}_x \times (-\hat{e}_y)$

$$\alpha_y = -H_z = -H_0 \cos \frac{\pi}{a} x \cos(k_y y - \omega t)$$

$$\alpha_z = 0$$

对于管壁  $(y=0, b), \hat{n} = \hat{e}_y \times (-\hat{e}_x)$

$$\alpha_x = H_z = H_0 \cos \frac{\pi}{a} x \cos(k_y y - \omega t)$$

$$\alpha_z = -H_x = \frac{ik_z a}{\pi} H_0 \sin \frac{\pi}{a} x e^{i(k_z z - \omega t)}$$

管壁电流分布如下面所示

管壁电流是腔内电磁波作用的结果,反过来它也是引导电磁场能量传输的必要条件,从图上可以看出波导管窄边上没有纵向电流,电流是横过窄边的,因此波导管摘编上任何纵向裂缝都对波的传播有较大影响,并导致由裂缝向外辐射电磁波。但横向裂缝却不会影响电磁波在管内传播。在宽边的中线上横向电流为零,因此在宽边中部的纵向裂缝都不会影响波的传播。这种裂缝广泛的应用于探针测量波导内物理量的技术之中。

(2)

$$\begin{aligned}\langle S_z \rangle &= \frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b \frac{1}{2} \Re(\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \hat{e}_z dx dy \\ &= \frac{1}{2ab} \int_0^a \int_0^b (-\Re(E_y H_x^*)) dx dy \\ &= \frac{\omega \mu k_z a^2}{4\pi^2} H_0^2\end{aligned}$$

其中  $k_z^2 = \sqrt{\mu\epsilon\omega^2 - (\frac{\pi}{a})^2}$  (3)  $TE_{10}$  波的相速为

$$v_p = \frac{\omega}{k_z} > c$$

群速度为能量沿着方向传播速度

$$v_g = \frac{\langle S_z \rangle}{\langle u \rangle}$$

其中

$$\begin{aligned}\langle u \rangle &= \int_0^a \int_0^b \frac{1}{2} \Re(\frac{1}{2} \epsilon E^* E + \frac{1}{2} \frac{1}{\mu} B^* B) dx dy \\ &= \frac{\omega^2 \mu^2 \epsilon a^2}{4\pi} H_0^2\end{aligned}$$

故有

$$v_g = \frac{\langle S_z \rangle}{\langle u \rangle} = \frac{k_z}{\mu\epsilon v_p} < c$$

且有关系

$$v_p v_g = \frac{1}{\mu\epsilon} \rightarrow c^2 (\text{真空中})$$



# Chapter 5

## 电磁波的辐射

前面讲过，有关电磁波的问题可以分两类：一类是电磁波如何产生（或激发），另一类是如何传播。前一章讨论了电磁波的传播问题。讨论在不同条件下电磁波传输特性有何不同，在传播过程中会发生那些现象（色散、衰减、反射、折射）。

本章将讨论电磁波的产生问题。由前面几章的讨论已经知道稳定的电荷、电流分布只能产生稳恒的电磁场——静电场、静磁场。只有当电荷、电流分布随时间变化，更确切地说其运动状态发生变化，如荷电体作加速运动——如作简谐振动，荷电粒子在磁场作圆周运动或有突然减速，加速等等便会产生电磁辐射。必须指出上述论述是在经典电磁理论的结论。在微观领域，电磁辐射产生于所谓‘量子跃迁’。我们在这一章讨论的是宏观电荷，电流系统的电磁辐射。第七章我们再讨论带电粒子的辐射。

从本质上讲，电磁波辐射的问题是电荷、电流系统的电磁场相互作用问题。变化着的电荷、电流系统激发电磁场。荷电物质系统必然受到所激发的电磁场的反作用。即会产生辐射阻尼。本章只局限于讨论给定电荷、电流如何随时间变化。会激发怎么的电磁波。

伴随着电磁波的产生，必须有能量从辐射源（随时间变化的荷电物质系统）辐射出去，这就决定了辐射场的如下一些特点：

$$\text{场量}(\vec{E}, \vec{B}) \propto \frac{1}{r}$$

$$\langle \vec{S} \rangle \propto \frac{1}{r^2}$$

因此讨论电磁波的辐射问题，主要课题是求有源情形下的波动方程的解，特别是求相关的  $\frac{1}{r}$  的场辐射场的能流密度，从而求出辐射问题相关的物理量——辐射角分布，辐射功率等。

与讨论电磁波传播问题不同，讨论辐射问题我们从势函数  $\vec{A}$ ,  $\varphi$  出发讨论（主要是  $\vec{A}$ ），由  $\vec{A}$  求出  $\vec{B}$ ，然后再由  $\varphi$  求出  $\vec{E}$ ，并求出  $\vec{S}$ 。并求出辐射角分布、辐射功率  $P$ 。

### 5.1 推迟势

#### 5.1.1 有源波动方程——d'Alembert 方程

