

# 核物理导论

从入门到放弃

救救孩子版

---

NarayanGuo

Xi'an Jiaotong University

E-mail: [NarayanGuo@gmail.com](mailto:NarayanGuo@gmail.com)

---

# 目录

I	预备知识	1
1	量子场论的概念	1
1.1	场与场方程	1
1.1.1	Lagrange 形式	1
1.1.2	Hamilton 形式	2
1.2	量子场的模型	2
1.2.1	Klein-Gordon 场	2
1.2.2	Dirac 场	3
1.2.3	Maxwell 场	4
2	群论	5
2.1	群论的基本概念	5
2.2	群表示论	8
2.3	Lie 群	9
2.4	SU(2),SU(3) 群	11
2.4.1	定义	11
2.4.2	表示	11
2.4.3	SU(2) 群的一些例子	12
2.4.4	SU(3) 群	12
2.4.5	与味空间的对应	14
3	单位制与 Feynman 图	15
3.1	单位制	15
3.2	单位制转换方法 NU→SI	15
3.3	费曼图	17
II	强子性质	19
4	核子	19
4.1	质量、电荷、自旋、磁矩、寿命、同位旋、半径和形状因子	19
4.1.1	质量	19
4.1.2	电荷	19
4.1.3	磁矩	20
4.1.4	自旋	20

4.1.5	同位旋	20
4.1.6	核子半径与形状因子 (form factor)	22
4.2	小结	23
4.2.1	同位旋	23
4.2.2	形状因子	23
4.2.3	两种常用的质子电荷分布	24
4.3	实验方面	24
4.3.1	概念复习	24
4.3.2	利用电磁相互作用测量电荷分布	24
4.3.3	一个说明	25
4.4	核子的电磁形状因子	26
5	$\pi$ 介子	27
5.1	历史介绍	27
5.2	$\pi$ 介子的理论预言	27
5.2.1	回顾电磁场理论	27
5.2.2	建立介子场理论	28
5.3	Pion 性质	30
5.3.1	Pion 的电荷	30
5.3.2	Pion 的质量	30
5.3.3	Pion 的同位旋	30
5.3.4	Pion 的自旋、宇称	31
5.4	正反粒子	31
5.4.1	产生和衰变	31
6	K 介子	32
6.1	K 介子和奇异粒子	32
6.1.1	4 种 K 介子	32
6.2	衰变	33
6.2.1	其他奇异粒子	33
6.3	共振态 (Resonance)	34
6.3.1	基本概念	34
6.3.2	共振态的实验发现	34
6.3.3	共振粒子举例	35
7	强子分类	36
7.1	强子分类方式	36
7.1.1	重子-介子分类	36
7.1.2	稳定粒子-介子分类	37

7.1.3	自旋宇称分类	37
7.1.4	经验分类	37
7.2	经验分类	38
7.3	夸克模型	40
III	QCD 理论下的强子模型	42
8	QCD 的基本理论	42
8.1	QCD 定性讨论	43
8.2	夸克的色自由度	43
8.2.1	实验基础	43
8.2.2	色自由度的数学描述 $\Rightarrow SU(3)_c$ 群	45
8.3	带色的胶子	46
8.3.1	胶子	46
8.4	渐进自由	48
8.5	小结	49
8.6	非相对论势模型	50
8.6.1	两个基本假设	50
8.7	常用的势函数	50
9	夸克胶子动力学讨论	51
9.1	核子的结构常数	52
9.1.1	深度非弹性散射 (Deep Inelastic Scattering, DIS)	52
9.2	强子的质量和磁矩	55
9.2.1	强子的质量	55
9.2.2	强子的磁矩	56
IV	手征对称性	57
10	守恒流与 Nöther 定理	57
11	手征对称性	59
11.1	手征	59
11.2	$\gamma^5$ 的本征值, 本征态	60
11.3	手征变换	60
11.4	夸克体系的手征对称性	61

12 对称性自发破缺	62
12.1 对称性自发破缺的描述	63
12.1.1 量子力学	63
12.1.2 力学	63
12.1.3 量子场论	63
12.1.4 Goldstone 定理	64
12.1.5 经典场说明	64
12.1.6 粒子质量	65
12.2 Higgs 机制	66
12.3 手征对称性自发破缺	66
12.4 $\mathcal{L}$ 手征对称性说明 (无穷小变换)	67
12.5 真空中对称性自发破缺	68
12.5.1 手征极限的情况	68
12.5.2 非手征极限的情况	69
12.6 加入核子自由度的线性 $\sigma$ 模型	69
12.6.1 手征对称性的证明	69
12.6.2 讨论基态手征对称性的自发破缺	70
12.7 介绍几个关系式	71
12.7.1 $\pi$ 介子衰变常数 $f_\pi$ 的试验确定	71
12.8 PCAC(Partially Conserved Axial-vector Current)	
轴矢流部分守恒	72
12.8.1 GOR(Gell-Mann-Oakes-Renter) 关系	72
12.9 小结	72

---

# 预备知识

## 1 量子场论的概念

### 1.1 场与场方程

本节我们给出量子场论中普遍构造动力学模型的基本程序，即从 Lagrangian 出发，构造粒子体系的场论模型。Lagrange 作用量原理的两个重要结果是场的运动方程 Euler-Lagrange 方程与 Noether 定理。此外，Hamilton 力学也是经典场论的重要组成部分，Hamilton 力学的核心是 Hamilton 正则方程，其等价表示 Poisson 括号常用来表示量子场论中的正则量子化。

#### 1.1.1 Lagrange 形式

我们用场量  $\phi(\mathbf{x}, t)$  标记一个场，它被视作场的广义坐标；一般来说，系统的 Lagrangian 有以下形式：

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (1.1)$$

其中  $L(t)$  称为 Lagrange 函数， $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$  成为 Lagrangian 密度，其是场量  $\phi$  与其微商  $\partial_\mu \phi$  的函数。

系统的作用量  $S$  是 Lagrangian 关于时间的积分，

$$S = \frac{1}{c} \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (1.2)$$

注意系统的 Lagrangian 与作用量都是场量  $\phi$  与其微商  $\partial_\mu \phi$  的函数，并不直接依赖于时空坐标  $x^\mu$ ，注意到  $d^4x$  是时空的体积元，在 Lorentz 变换下不变，而作用量  $S$  是 Lorentz 不变量，所以  $\mathcal{L}$  应当是一个标量。

**Theorem 1.1 (Hamilton 原理).** Hamilton 原理表明，一个真实的物理系统，其运动应当满足作用量的变分原理，即

$$\delta S = 0 \quad (1.3)$$

我们讨论作用量的变分  $\delta S$ ，假设坐标的改变为  $x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = x^\mu + \delta x^\mu$ ，则体积元的变换为  $d^4x^\mu \rightarrow d^4x^{\mu'} = J d^4x^\mu$ ；

其中  $J = \det\left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu}\right) = \det(g_\nu^\mu + \partial_\nu \delta x^\mu) \approx 1 + \partial_\mu \delta x^\mu$ ；

同时，场量  $\phi$  与 Lagrangian 密度  $\mathcal{L}$  按照如下方式变换

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(x) + \delta\phi(x) \quad (1.4)$$

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}(x) \quad (1.5)$$

我们记  $\bar{\delta}$  为坐标不变时，仅依赖于场量形式的变分，

$$\bar{\delta}\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x), \bar{\delta}\partial_\mu \phi = \partial_\mu \phi'(x) - \partial_\mu \phi(x) \quad (1.6)$$

Section 1. 量子场论的概念

Section 2. 群论

Section 3. 单位制与 Feynman 图

注意到

$$\delta \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}'(x') - \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}'(x') - \mathcal{L}(x') + \mathcal{L}(x') - \mathcal{L}(x) \quad (1.7)$$

就可以将其记作：

$$\delta \mathcal{L}(x) \approx \bar{\delta} \mathcal{L}(x') + \partial_\mu \mathcal{L}(x) \delta x^\mu \quad (1.8)$$

经过一些推导，就可以得到

$$\delta S = \frac{1}{c} \int d^4x \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \bar{\delta} \phi + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \bar{\delta} \phi + \mathcal{L} \delta x^\mu \right) \right] \quad (1.9)$$

**Definition 1.1 (Euler-Lagrange 方程).** 假定坐标没有改变即  $\delta x^\mu = 0$ ，只考虑场量的变分，作用量取极值的条件为：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} = 0 \quad (1.10)$$

称为 Euler-Lagrange 方程，是场的运动方程。

### 1.1.2 Hamilton 形式

按照经典力学的操作，定义场变量  $\phi(\mathbf{x}, t)$  共轭的正则动量为

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \quad (1.11)$$

则 Hamiltonian 的定义为

$$H = \int d^3x \pi(\mathbf{x}, t) \dot{\phi}(\mathbf{x}, t) - L = \int d^3x \mathcal{H} \quad (1.12)$$

其中  $\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}$ ，称为 Hamiltonian 密度。同时，可以给出 Hamilton 正则方程。

**Definition 1.2 (Hamilton 正则方程).** 在已知系统的 Hamiltonian 的情况下，系统的运动方程为

$$\dot{\pi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi}, \quad \dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} \quad (1.13)$$

这组运动方程称为 Hamilton 正则方程。

其与 Euler-Lagrange 方程是等价的，一般来说，由于广义动量的定义中出现了时间的一阶导数，导致实际上时间和空间不是平权的，不容易看出相对论的协变性，所以场论中我们通常用到的都是 Lagrange 形式。

## 1.2 量子场的模型

### 1.2.1 Klein-Gordon 场

在诸多场的模型中，一种最为简单的模型就是 Klein-Gordon 场。

**Definition 1.3 (Klein-Gordon 场).** Klein-Gordon 场的 Lagrangian 密度为

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2) \quad (1.14)$$

其可以用来描述  $\pi$  介子等标量介子。我们可以利用 Euler-Lagrange 方程，从 Klein-Gordon 场的 Lagrangian 密度导出 Klein-Gordon 场的运动方程。

Example (Klein-Gordon 场的运动方程). 分别

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} &= \frac{1}{2} \partial_\mu (\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu (\eta^{\mu\nu} \partial_\nu \phi + \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \delta_\nu^\mu) \\ &= \partial_\mu \partial^\mu \phi \end{aligned} \quad (1.16)$$

于是得到 Klein-Gordon 场的运动方程为

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi = 0 \quad (1.17)$$

Klein-Gordon 场实际上对应相对论性能量关系

$$E^2 = p^2 + m^2 \quad (1.18)$$

### 1.2.2 Dirac 场

对于电子、中微子等自旋为 1/2 的费米子，其对应的场称为旋量场，旋量场分为 Weyl 场、Dirac 场、Majorana 场等，在这里我们只讨论 Dirac 场的行为。

Definition 1.4 (Dirac 场). Dirac 场的 Lagrangian 密度为

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \quad (1.19)$$

其中  $\bar{\psi}$  称为 Dirac 旋量  $\psi$  的伴随场，其定义为：

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \quad (1.20)$$

这里额外引进  $\gamma$  矩阵：

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

这里的  $\sigma^i$  是 Pauli 矩阵，所以  $\gamma$  矩阵都是  $4 \times 4$  的矩阵。而 Dirac 旋量自身也是具有四个分量的矢量，事实上它是两个独立的 Weyl 旋量拼起来的。

Example (Dirac 场及其伴随场的运动). 利用 Euler-Lagrange 方程易知

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right) = 0 \quad (1.22)$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (1.23)$$

同理得到  $\psi$  伴随场的方程

$$\bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu + m) = 0 \quad (1.24)$$



Example (求解 Dirac 方程). 求解 Dirac 方程的本征解与本征态。

对于 Dirac 方程  $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$ , 可以写为:

$$\begin{pmatrix} E - m & 0 & -p_z & -p_x + ip_y \\ 0 & E - m & -p_x - ip_y & p_z \\ -p_z & -p_x + ip_y & E + m & 0 \\ -p_x - ip_y & p_z & 0 & E + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = 0 \quad (1.25)$$

上述方程有非平庸解的条件为行列式为 0, 易知

$$E_{\pm} = \pm \sqrt{p^2 + m^2} \quad (1.26)$$

矩阵的本征值  $\lambda$  为

$$\lambda_{\pm} = \pm p \quad (1.27)$$

因而能给出本征解

$$(a) E = E_+ \quad \lambda = \lambda_+ = p$$

$$(b) E = E_+ \quad \lambda = \lambda_- = -p$$

$$\psi_a = \begin{pmatrix} p + p_z \\ p_x + ip_y \\ \frac{p(p_z + p)}{E_+ + m} \\ \frac{p(p_x + ip_y)}{E_+ + m} \end{pmatrix} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - E_+ t)}$$

$$\psi_b = \begin{pmatrix} -(p - p_z) \\ p_x + ip_y \\ \frac{p(p - p_z)}{E_+ + m} \\ -\frac{p(p_x + ip_y)}{E_+ + m} \end{pmatrix} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - E_+ t)}$$

$$(c) E = E_- = -E_+ \quad \lambda = \lambda_+ = p$$

$$(d) E = E_- = -E_+ \quad \lambda = \lambda_- = -p$$

$$\psi_c = \begin{pmatrix} -\frac{p(p_z + p)}{E_+ + m} \\ \frac{p(p_x + ip_y)}{E_+ + m} \\ p + p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} + E_+ t)}$$

$$\psi_d = \begin{pmatrix} \frac{p(p - p_z)}{E_+ + m} \\ \frac{p(p_x + ip_y)}{E_+ + m} \\ -(p - p_z) \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} + E_+ t)}$$

### 1.2.3 Maxwell 场

Maxwell 场是自旋为 1 的场, 对应于经典的电磁场, 可以描述光子。

Definition 1.5 (Maxwell 场). Maxwell 场的 Lagrangian 密度为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - j^\mu A_\mu \quad (1.28)$$

其中电磁场张量  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ ,  $j^\mu$  为场源项。

从  $F^{\mu\nu}$  的定义易知其是反对称的, 这给出了一半的 Maxwell 方程。而另一半可以通过 Euler-Lagrange 方程给出, 留给读者自行完成。

## 2 群论

### 2.1 群论的基本概念

Section 1. 量子场论的概念  
Section 2. 群论  
Section 3. 单位制与 Feynman 图

Definition 2.1. (群) 设  $G = \{\dots g \dots\}$  是一非空集合，在  $G$  中定义了乘法运算，且  $G$  对乘法运算满足：

- 封闭性 (Closure):  $\forall g, h \in G, gh \in G$
  - 结合律 (Associativity):  $\forall f, g, h \in G, (fg)h = f(gh)$
  - 幺元:  $\exists e \in G$ , 使  $\forall g \in G, eg = g$ 。称  $e$  为幺元。
  - 逆元:  $\forall g \in G, \exists f \in G$ , 使  $fg = e$ 。此时称  $f$  为  $g$  的逆元。
- 则称  $G$  为一个群 (Group)。

如果仅满足封闭性和结合律，则称  $G$  是一个半群 (Semigroup)；如果仅满足封闭性、结合律并且有幺元，则称  $G$  是一个含幺半群 (Monoid)。

重整化群理论中的“群”是半群（仅有粗粒化变换，没有逆变换）。

一些概念：Abel 群、非 Abel 群、有限群、有限群的阶、无限群、连续群、复元素（复元素的乘法，一般来说复元素构成的集合对乘法而言不封闭）。此外，物理中还有许多常见的群，我们将在常见的群一节详细的讨论它们。

Theorem 2.1. (重排定理). 设群  $G = \{g_\alpha\}$ ,  $u \in G$ , 则当  $\alpha$  取遍所有可能值时，乘积  $ug_\alpha$  给出且仅给出一次  $G$  的所有元素。

通俗地说，即： $uG = \{ug_\alpha | g_\alpha \in G\}$  是  $G$  中元素的重新排序。

对于有限群，我们可以将元素的全部乘积结果排列出来，构成了一个表，称为群的乘法表 (Multiplication table)，我在这里懒一波，就不具体写了。

Definition 2.2. (子群). 设  $H$  是群  $G$  的一个子集，若对于与群  $G$  同样的乘法运算， $H$  也构成一个群，则称  $H$  为  $G$  的子群。

Definition 2.3. (左陪集、右陪集). 设  $H = \{h_\alpha\}$  是  $G$  的子群，由固定的  $g \in G, g \notin H$  生成的集合：

$$gH = \{gh_\alpha | h_\alpha \in H\} \quad (2.1)$$

称为子群  $H$  的左陪集。类似地，生成的集合：

$$Hg = \{h_\alpha g | h_\alpha \in H\} \quad (2.2)$$

称为子群  $H$  的右陪集。

Theorem 2.2. (陪集定理). 设  $H$  是  $G$  的子群，则  $H$  的两个左（或右）陪集或者完全相同，或者没有任何公共元素。

Theorem 2.3. (Lagrange 定理). 有限群的子群的阶，等于该有限群阶的因子。

Proof. 设  $G$  为  $n$  阶群  $|G| = n$ ,  $H$  是  $G$  的  $m$  阶子群  $|H| = m$ 。若  $G$  中有  $H$  之外的元素, 则取  $u_1 \in G, u_1 \notin H$ , 作左陪集  $u_1H$ ; 若  $G$  中还有  $H$  和  $u_1H$  之外的元素, 则再取  $u_2 \in G, u_2 \notin H, u_2 \notin u_1H$ , 作左陪集  $u_2H$ 。因为  $u_2 \notin u_1H, i.e. u_1^{-1}u_2 \notin H$ , 故由上述定理以及陪集定理,  $u_2H$  与之前的左陪集  $u_1H$  完全不同; 若  $G$  中还有  $H, u_1H$  和  $u_2H$  之外的元素, 则再取  $u_3 \in G, u_3 \notin H, u_3 \notin u_1H, u_3 \notin u_2H$ , 作左陪集  $u_3H$ 。继续这种做法, 由于  $G$  中元素个数有限, 故必定存在  $u_{j-1}$ , 使得子群的左陪集串:

$$H, u_1H, u_2H, \dots, u_{j-1}H \quad (2.3)$$

穷尽了整个  $G$ , 即:  $G = H \cup u_1H \cup u_2H \cup \dots \cup u_{j-1}H$

且这样得到的各个左陪集互不相同, 每个左陪集中所含元素个数都等于子群  $H$  的阶, 故  $n = m \times j$ 。

Q.E.D

□

Definition 2.4. (不变子群, 正规子群). 设  $H$  是  $G$  的子群, 若  $H$  的所有左陪集  $u_jH$  和右陪集  $Hu_j$  都对应相等, 则称  $H$  为**不变子群**, 或**正规子群**。

Theorem 2.4. 设  $H$  是  $G$  的不变子群, 则对任意固定元素  $g \in G$ , 当  $h_\alpha$  跑遍  $H$  的所有群元时,  $gh_\alpha g^{-1}$  一次且仅仅一次给出  $H$  的所有元素。

Definition 2.5. (群的中心). 群  $G$  中与任何元素都对易的全体元素集合, 称为**群的中心**。记作  $Z(G)$ 。即:

$$Z(G) := \{z | z \in G, \forall g \in G, zg = gz\} \quad (2.4)$$

Definition 2.6. (同构). 设  $G$  和  $F$  是两个群, 若存在从  $G$  到  $F$  的映射  $\phi: G \rightarrow F$ , 且该映射满足:

- $\phi$  是一个单映射;
- $\phi$  保持群的乘法结构不变, 即:

$$\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1) \phi(g_2) \quad (2.5)$$

则称  $\phi$  为  $G$  到  $F$  的**同构映射**。若进一步地,  $\phi$  还满足:

- $\phi$  是一个满映射.

也就是说,  $\phi$  是一个双射, 则称群  $G$  与  $F$  **同构**, 记作  $G \cong F$

同构是在数学对象之间定义的一类映射, 它能揭示出在这些对象的属性或者操作之间存在的关系。若两个数学结构之间存在同构映射, 那么这两个结构叫做是同构的。一般来说, 如果忽略掉同构的对象的属性或操作的具体定义, 单从结构上讲, 同构的对象是完全等价的。

Definition 2.7. (同态). 设  $G$  和  $F$  是两个群, 若存在从  $G$  到  $F$  的映射  $\phi: G \rightarrow F$ , 且该映射满足:

- $\phi$  保持群的乘法结构不变, 即:

$$\phi(g_1g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2) \tag{2.6}$$

则称  $\phi$  为  $G$  到  $F$  的**同态映射**。若进一步地,  $\phi$  还满足:

- $\phi$  是一个满映射。

则称群  $G$  与  $F$  **同态**, 记作  $G \sim F$ .

因为抽象代数研究带有能产生有意义的集合上的结构或者属性的运算的集合, 最有意义的函数就是能够保持这些运算不变的那些。它们被称为同态。同态是从一个代数结构到同类代数结构的映射, 它保持所有相关的结构不变; 也即, 所有诸如么元、逆元、和二元运算之类的属性不变。

在这一小节的最后, 我们引进来两个特殊的群。

Definition 2.8. (循环群,Cyclic Group).  $n$  阶**循环群**是由元素  $g$  及  $g$  的幂  $g^k$  组成,  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ , 且  $g^n = e$ . 循环群  $C_n$  记作:

$$G = \{g, g^2, g^3, \dots, g^n = e\} \tag{2.7}$$

Definition 2.9. (一般线性群, 线性变换群,General Linear Group). 定义两个线性变换的乘法为两个线性变换的相继作用, 则  $n$  维复线性空间  $V$  上的全体非奇异线性变换构成的集合在此乘法下构成一个群, 称  $n$  维复一般线性变换群, 简称**复一般线性群**, 记作  $GL(V, C)$  或  $GL(n, C)$ 。  $GL(V, C)$  的子群称为  $V$  上的线性变换群, 记作  $L(V, C)$  或  $L(n, C)$ 。

物理学中, 群 (group) 是用来表示对称性的直观观念的一种抽象数学工具, 群通过以下对应获得定义:

群 $\longrightarrow$ 对称变换的集合	元素 $a \longrightarrow$ 变换 $a$
$a, b \longrightarrow$ 相继变换, 先 $b$ 后 $a$	$e \longrightarrow$ 恒等变换
$a^{-1} \longrightarrow$ 变换 $a$ 逆变换	

在粒子物理与核物理中, 各种对称变换的集合构成各自的群, 按变换的性质分类:

1. 时空对称性群: 转动群, 空间反演群, 洛伦兹群
2. 同位旋 (自旋) $SU(2)$  群, 电荷规范变换群 ( $U(1)$  群), 色群 ( $SU(3)$  群) 等

物理量	B	S	Q	Y	$\vec{I}$	$\vec{J}$	P
群	$U(1)_B$	$U(1)_S$	$U(1)_Q$	$U(1)_Y$	$SU(n)$	$SU(n)$	空间反演群
求和方式	相加	相加	相加	相加	矢量相加	矢量相加	相乘
守恒性	强、电、弱	强	强、电、弱	强	强、电、弱	强、电、弱	强、电

## 2.2 群表示论

一个抽象变换如何作用在一个具体物理对象上，这是群表示论要解决的问题。

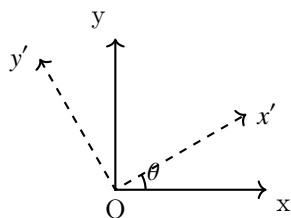
**Definition 2.10.** (群的线性表示). 若存在从群  $G$  到线性空间  $V$  上的某个线性变换群  $L(V, C)$  的同态映射，则该线性变换群  $L(V, C)$  称为群  $G$  的一个**线性表示**， $V$  称为表示空间， $n$  称为表示的维数。

类似于在 QM 中，物理量  $\rightarrow$  抽象算符  $\rightarrow$  在具体表象中，用矩阵表示。

一个群的表示原则上可以有无穷个，它们可分解或约化为有代表性的、最基本表示的组合（量子力学中，实际上我们有无数个表象，有意义的却只有坐标空间、动量空间、居位数空间等）。

**Example** ( $x-y$  平面的转动群). 转动群的群表示：

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \vec{e}_x' &= \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \\ \vec{e}_y' &= -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y \end{aligned}$$



一般而言，一个群会用很多种表示，分别给出不同的对象在同一变换下的变换方式。

**Definition 2.11.** (等价表示). 设  $D(G)$  和  $\bar{D}(G)$  是群  $G = g_\alpha$  的两个  $n$  维（矩阵）表示，若存在一个  $n$  阶可逆方阵  $X$ ，使得  $\forall g_\alpha \in G, \bar{D}(g_\alpha) = X^{-1} D(g_\alpha) X$ ，则称表示  $\bar{D}(G)$  与  $D(G)$  等价，记作

$$D(G) \sim \bar{D}(G) \quad (2.8)$$

等价的表示本质上可以看成是同一个表示，由于基的选取不同而具有的不同矩阵形式（这是由于相似变换的满秩特点）。

**Definition 2.12.** (可约表示、不可约表示). 设  $D(G)$  是群  $G$  的一个  $n$  维（矩阵）表示，若存在一个  $n$  阶可逆矩阵  $X$ ，使得

$$\forall g_\alpha \in G, X^{-1} D(g_\alpha) X = \begin{pmatrix} D^{(1)}(g_\alpha) & M(g_\alpha) \\ 0 & D^{(2)}(g_\alpha) \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

即存在一个共同的相似变换将所有群元的表示矩阵都化为相同的阶梯形式，则称表示  $D(G)$  是群  $G$  的一个**可约表示**。反之，若不存在这样一个相似变换，则称表示  $D(G)$  是一个**不可约表示**。

我们可以将可约表示变成不可约表示出现一定次数的形式，不可约表示的矩阵作为子矩阵被包括在可约表示的对角方块矩阵之中，一个可约表示可以写成组成它的不可约表示的直和，不可约表示在物理中具有重要意义。

Definition 2.13. 设  $P(G)$  是群  $G$  在内积空间  $V$  上的 (算符) 表示, 若  $\forall g \in G, P(g)$  都是  $V$  上的幺正变换, 则称  $P(G)$  是群  $G$  的酉表示。

Theorem 2.5. 两个等价的酉表示, 必定可通过幺正的相似变换相互联系。

Lemma 2.6. (舒尔引理 I). 设矩阵群  $D(G)$  是群  $G$  在复空间的一个不可约表示, 若矩阵  $M$  与全部群元的表示矩阵都对易, 则  $M$  必是常数矩阵。

舒尔引理 I 说明对于不可约表示, 一定不存在与所有群元的表示矩阵都对易的非常数矩阵。

Lemma 2.7. (舒尔引理 II). 设矩阵群  $D^{(1)}(G)$  和  $D^{(2)}(G)$  分别是群  $G$  的  $n_1$  维和  $n_2$  维不可约表示, 若存在一个  $n_1 \times n_2$  的矩阵  $M$  满足:

$$\forall g_\alpha \in G, D^{(1)}(g_\alpha)M = MD^{(2)}(g_\alpha) \quad (2.10)$$

则:

- 当  $M \neq 0$  时, 必有  $M$  可逆, 表示  $D^{(1)}$  和  $D^{(2)}$  必定等价;
- 当表示  $D^{(1)}$  和  $D^{(2)}$  不等价时, 必有  $M = 0$ 。

Definition 2.14. (分导表示). 设群  $G$  有某个子群  $H$ , 则在群  $G$  的不可约表示  $D(G)$  中, 将子群  $H$  中元素的表示矩阵挑出来, 显然构成子群  $H$  的一个表示, 称为群  $G$  表示  $D(G)$  关于子群  $H$  的分导表示, 记作  $D|_H$ .  $D|_H = \{D(g)|g \in H\}$

Definition 2.15. (诱导表示). 设群  $G$  有某个子群  $H$ , 群  $H$  的一个不可约表示为  $P(H)$ , 表示空间为  $V$ , 在  $V$  的一组基  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  下的表示矩阵记作  $B(H)$ 。则  $G$  可按照子群  $H$  及其陪集作分解:

$$G = k_1 H \cup k_2 H \cup \dots \cup k_m H, k_1 = e \quad (2.11)$$

$\forall g \in G, g$  必然属于且仅属于其中一个  $k_\alpha H$ 。

## 2.3 Lie 群

Definition 2.16. (拓扑群). 任意一个拓扑空间 (定义有某种开集结构的集合), 若同时具有群的结构, 且群运算都是连续映射, 则称为一个拓扑群。拓扑群的概念非常广泛, 其包含了离散群, 也包含了连续群。

Definition 2.17. (连续群). 连续群是拓扑群的一种。连续群首先是一个连续流形 (流形即每一点的开邻域都和  $\mathbb{R}^n$  的某开集同胚的、满足可分性的拓扑空间。另外, 在其上还具有群结构且群的乘法运算和逆运算都是参数的连续函数, 即:

$$g(\alpha)g(\beta) = g(f(\alpha, \beta)), g(\alpha)^{-1} = g(\tau(\alpha)) \quad (2.12)$$

其中  $f, \tau$  都是连续函数。这样的拓扑群称一个连续群。

**Definition 2.18.** (李群). 若进一步要求  $f, \tau$  不仅是连续函数, 而且是  $C^\infty$  函数 (光滑函数), 则称该拓扑群为一个  $C^\infty$  李群, 简称**李群**。

由于无穷小群元素在李群中处于特殊重要的地位, 我们来看一下无穷小群元素在线性表示中的对应, 即李群线性表示的无穷小生成元。

**Definition 2.19.** 设线性空间  $V$  上的线性变换群  $m$  给出了李群  $G$  的一个表示, 选取  $V$  的一组基后, 相应的矩阵表示为  $D(G)$ 。对无穷小群元  $g(\alpha) \in G$ , 其对应的表示为  $P(\alpha)$  和  $D(\alpha)$ 。由于  $P(0)$  和  $D(0)$  对应恒等变换  $E$  (为了与李群生成元区分, 下文中不再用  $I$  表示单位矩阵, 改用  $E$  表示), 故在恒元附近展开有:

$$P(\alpha) = E + \sum_j \alpha_j I_j, D(\alpha) = E + \sum_j \alpha_j I_j \quad (2.13)$$

其中

$$I_j = \left. \frac{\partial P(\alpha)}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha=0} \text{ or } I_j = \left. \frac{\partial D(\alpha)}{\partial \alpha_j} \right|_{\alpha=0} \quad (2.14)$$

称为李群线性表示的**无穷小生成元**, 简称**生成元**。

一些常见的李群如下:

**Example.** (时空平移群).

$$T(a)x^\mu = x^\mu + a^\mu \quad (2.15)$$

是 4 维 Abel 李群, 同构于 4 维实加法群  $R^4$ 。非紧致、连通、单连通。

**Example.** (一维仿射群).

$$x' = g(\alpha, \beta)x = \alpha x + \beta, \alpha \neq 0 \quad (2.16)$$

是 2 维非 Abel 李群。非紧致、不连通。有两个连通分支 (由  $\alpha$  的正负号确定), 每个连通叶都单连通。

**Example.** (一般线性群  $GL(n, C)$ ).

$$GL(n, C) = \{A | A \in C^{n \times n}, |A| \neq 0\} \quad (2.17)$$

是  $2n^2$  维李群 (也是  $n^2$  维复李群)。非紧致、连通、 $\infty$  度连通。

**Example.** (幺正变换群  $U(n)$ ).

$$U(n) = \{A | A \in GL(n, C), U^\dagger U = I\} \quad (2.18)$$

约束有:  $2 \times \frac{1}{2}n(n-1) + 1 \times n = n^2$  个, 是  $n^2$  维李群。  $U(n) = U(1) \otimes SU(n)$ 。紧致、连通、 $\infty$  度连通。

**Example.** (特殊幺正群  $SU(n)$ ).

$$SU(n) = \{A | A \in U(n), |U| = 1\} \quad (2.19)$$

$U(n)$  矩阵的行列式为  $e^{i\theta}$ , 故约束只有一个。是  $n^2 - 1$  维李群。紧致、连通、单连通。

Example. (复正交群  $O(n, C)$ ).

$$O(n, C) = \{A | A \in C^{n \times n}, A^T A = I\} \quad (2.20)$$

Example. (特殊正交群  $SO(n)$ ).

$$SO(n) = \{A | A \in R^{n \times n}, A^T A = I\} \quad (2.21)$$

Example. (Lorentz 群).

$$L = \{\Lambda | \Lambda \in R^{4 \times 4}, \Lambda^T \eta \Lambda = \eta, \eta = \text{diag}[1, -1, -, 1, -, 1]\} \quad (2.22)$$

通常也记作  $O(3, 1)$ , 因为其可等价定义为保持  $x^\mu x_\mu = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$  不变的线性变换.

Example. (Poincaré 群).

$$P(\Lambda, a)x^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \Lambda \in O(3, 1) \quad (2.23)$$

## 2.4 SU(2), SU(3) 群

### 2.4.1 定义

Definition 2.20. (幺正变换群  $U(n)$ ).

$$U(n) = \{A | A \in GL(n, C), U^\dagger U = I\} \quad (2.24)$$

约束有:  $2 \times \frac{1}{2}n(n-1) + 1 \times n = n^2$  个, 是  $n^2$  维李群。  $U(n) = U(1) \otimes SU(n)$ 。紧致、连通,  $\infty$  度连通。

Definition 2.21. (特殊幺正群  $SU(n)$ ).

$$SU(n) = \{A | A \in U(n), |U| = 1\} \quad (2.25)$$

$U(n)$  矩阵的行列式为  $e^{i\theta}$ , 故约束只有一个。是  $n^2 - 1$  维李群。紧致、连通、单连通。

Definition 2.22. (复正交群  $O(n, C)$ ).

$$O(n, C) = \{A | A \in C^{n \times n}, A^T A = I\} \quad (2.26)$$

Definition 2.23. (特殊正交群  $SO(n)$ ).

$$SO(n) = \{A | A \in R^{n \times n}, A^T A = I\} \quad (2.27)$$

### 2.4.2 表示

基础表示, 伴随表示

Definition 2.24 (基础表示, fundamental representation). 又称为**群表示的基**, 即群元素作用的对象。



Example (SU(2) 群). 自旋空间的转动变换对应的群。

核子:  $S = \frac{1}{2}$ , 本征态矢量  $\chi_{\uparrow} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \chi_{\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

称  $\chi_{\uparrow}, \chi_{\downarrow}$  为 SU(2) 群的基础表示, 表示的维数为 2, 简记为 {2}。

$\chi_{\uparrow}, \chi_{\downarrow}$  张开一个二维线性空间 (自旋空间), 基矢为  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 满足正交归一条件。

Definition 2.25 (伴随表示, adjoint representation). 以群的李代数为表示空间所得的表示; or: 群的生成元所属的表示称为伴随表示 (对我们更实用)

回忆 QM 中, 无穷小变换  $\rightarrow$  守恒量算符。

对于一个物理系统, 其对称性李群的生成元都与守恒量算符相对应。

空间平移变换:  $1 - \delta_r \vec{\nabla}$ , 空间转动变换:  $1 - \delta_L(\vec{r} \times \vec{\nabla})$ 。

$$D_z = e^{-iJ_z \delta_L / \hbar} \quad D_z(\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} [1 - \frac{i\sqrt{z}}{\hbar} (\frac{\phi}{N})]^N = e^{-iJ_z / \hbar}$$

可以证明, 它满足群的定义。

### 2.4.3 SU(2) 群的一些例子

自旋是内禀空间转动不变性对应的守恒量, 即, 自旋是内禀空间转动群的生成元, 该内禀空间我们也常称为**自旋空间**。

(自旋) 内禀空间对任意轴的转动可以表示为

$$R = e^{i\hat{\sigma} \cdot \hat{n} / 2} \quad \hat{n} \text{ 为空间矢量} \quad \frac{\hat{\sigma}}{2} \text{ 是自旋算符}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

对易关系:  $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$ , 李代数关系,  $\epsilon_{ijk}$  结构常数

小结:

变换  $R(\theta)$  的集合, 构成二维空间的 SU(2) 群,  $\vec{\sigma}/2$  称为 SU(2) 群的生成元

$\epsilon_{ijk}$  称为 SU(2) 群的结构常数

$(\sigma_0, \vec{\sigma})$  构成  $2 \times 2$  矩阵空间的基, 满足正交性、完备性, 构成 SU(2) 群的伴随表示, 任何一个幺模幺正矩阵可以由  $\sigma_0, \vec{\sigma}$  线性叠加构成。

应用到同位旋空间 SU(2) 群:

u、d 夸克为基础表示,  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  同位旋空间的矢量。

$\frac{\vec{\tau}}{2}$  为基础表示,  $(\tau_0, \vec{\tau})$  构成同位旋 SU(2) 群的伴随表示。

### 2.4.4 SU(3) 群

考虑 u, d, s 三种夸克, 作为味的三重态 (注意在 u, d 夸克情形, 称为同位旋二重态)

基础表示: u, d, s

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 构成三维味空间的基}$$

三维味空间的转动变换用 SU(3) 群来描述, 生成元是 Gell-Mann 矩阵  $\lambda_i (i = 1, \dots, 8)$ 。

变换矩阵  $U = e^{i\vec{\theta}\vec{\lambda} \cdot \vec{\lambda}/2}$ ,  $(\lambda_0, \lambda_i)$  构成 SU(3) 群的基础表示, 任何  $3 \times 3$  么模么正矩阵都可以由  $\lambda_0, \lambda_i$  线性叠加而成。

李代数关系 or 对易关系

$$[\lambda_i, \lambda_j] = 2if_{ijk}\lambda_k \quad \lambda_i, \lambda_j = \frac{4}{3}\delta_{ij} + 2d_{ijk}\lambda_k$$

$f_{ijk}$  称为全反对称常数,  $d_{ijk}$  称为对称系数

⇒ 用基础表示, 伴随表示解释强子分类: 夸克占据基础表示, 强子占据伴随表示

此处不做严格群论计算, 只进行必要的定性讨论。

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Example (核子). 核子  $S = \frac{1}{2}, \chi_\uparrow, \chi_\downarrow$  构成 SU(2) 群的基础表示  $\{2\}$ 。

两核子系统自旋波函数,  $\chi = \chi_1\chi_2$  (并矢)

$$\chi: \begin{cases} |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle \\ |\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle \end{cases} \longrightarrow \chi = a\chi_{S=0} + b\chi_{S=1} \begin{cases} \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}, |\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle & S=1 \text{ (三重态)} \\ \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} & S=0 \text{ (单态)} \end{cases}$$

量子力学: 二核子系统的自旋可以化为自旋三重态和自旋单态

群的符号:  $\{2\} \overset{\text{直积}}{\otimes} \{2\} = \{3\} \overset{\text{直和}}{\oplus} \{1\}$ , 角动量耦合, 按 C-G 系数不可约表示分解, 自旋为 0 称为标量 (恒等变换)。

两核子系统的同位旋, 情况相同:  $\{2\} \otimes \{2\} = \{3\} \oplus \{1\}$

推而广之, 核子反核子系统:  $\{2\} \otimes \{2\} = \{3\} \oplus \{1\}$

$$\text{介子: } \begin{cases} 2\text{味: } \{2\} \otimes \{\bar{2}\} = \{3\} \oplus \{1\} \\ 3\text{味: } \{3\} \otimes \{\bar{3}\} = \{8\} \oplus \{1\} \end{cases} \text{ 其中 } \{1\} \text{ 代表单位矩阵}$$

## 2.4.5 与味空间的对应

两味的情形 已经介绍过:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \otimes (\bar{u}, \bar{d}) = \begin{pmatrix} u\bar{u} & u\bar{d} \\ d\bar{u} & d\bar{d} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{llll} u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \bar{u} = (1, 0) & \bar{d} = (0, 1) \\ u\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & d\bar{u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & u\bar{d} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & d\bar{d} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \pi^+ = u\bar{d} = \frac{\tau_1 + i\tau_2}{2} = I_+ & \pi^- = d\bar{u} = \frac{\tau_1 - i\tau_2}{2} = I_- \\ \pi^0 = \frac{u\bar{u} - d\bar{d}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = I_3 & \eta = \frac{u\bar{u} + d\bar{d}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = I_0 \end{array}$$

$\left\{ \begin{array}{l} u, d \text{ 夸克占据基础表示} \\ \pi^+, \pi^-, \pi^0, \eta \text{ 占据 SU(2) 群伴随表示} \end{array} \right.$  一般而言, 复合粒子都占据伴随表示

三味的情形

$$\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \otimes (\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}) = \begin{pmatrix} u\bar{u} & u\bar{d} & u\bar{s} \\ d\bar{u} & d\bar{d} & d\bar{s} \\ s\bar{u} & s\bar{d} & s\bar{s} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \bar{u} = (1, 0, 0) & \bar{d} = (0, 1, 0) & \bar{s} = (0, 0, 1) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \pi^+ : u\bar{d} = \frac{\lambda_1 + i\lambda_2}{2} & \pi^- : d\bar{u} = \frac{\lambda_1 - i\lambda_2}{2} \\ K^+ : u\bar{s} = \frac{\lambda_4 + i\lambda_5}{2} & K^- : s\bar{u} = \frac{\lambda_4 - i\lambda_5}{2} \\ K^0 : d\bar{s} = \frac{\lambda_6 + i\lambda_7}{2} & \bar{K}^0 : s\bar{d} = \frac{\lambda_6 - i\lambda_7}{2} \\ \eta \quad \eta' \rightarrow \lambda_8 \quad \lambda_0 & \pi^0 \rightarrow \lambda_3 \end{array}$$

**重子** 味:  $\{3\} \otimes \{3\} \otimes \{3\} = \{10\} \oplus \{8\} \oplus \{8\} \oplus \{1\}$  按 C-G 系数分解, 查表

自旋:  $\{2\} \otimes \{2\} \otimes \{2\} = \{2\} \oplus \{2\} \oplus \{4\}$

总波函数应该满足泡利不相容原理。

### 3 单位制与 Feynman 图

#### 3.1 单位制

单位制：度量的标准。

七个基本单位：长度、时间、质量、电流、温度、物质的量和发光强度。

物理学的基础元素	空间 L	时间 t	物质 (能量)
国际单位制 (SI 单位制)	m	s	kg

Section 1. 量子场论的概念

Section 2. 群论

Section 3. 单位制与 Feynman 图

然而，在描述微观高速现象的核物理中这些单位使用不方便，如  $r_p \sim 10^{-15}m$ ,  $m_p \sim 1.67 \times 10^{-27}kg$ ,  $c = 299792.458 km/s$

- 狭义相对论：光速  $c = 299792.458 km \cdot s^{-1}$
- 量子力学：普朗克常量  $\hbar = 6.5821220 \times 10^{-22} Mev \cdot s$

科学家希望找到一种单位制，使得上述两个常数的数值比较简单。

**自然单位制**：NU 单位制，规定只有一个基本单位，选择能量为基本单位： $Mev$

$$\begin{aligned} c = 1 & \quad \text{长度单位与时间单位联系起来} & 1s = 299792.458 km \\ \hbar = 1 & \quad \text{能量 (质量) 单位与时间单位联系起来} & 1s^{-1} = 6.582122 \times 10^{-22} Mev \end{aligned}$$

$197.3 Mev \cdot fm = 1$  更常用。

理论计算时，常使用 NU 单位，实验中 SI 单位。

单位制转换问题：自然单位制  $\longleftrightarrow$  国际单位制 (如已经学过，可以不讲)

$$SI \xrightarrow{\hbar, c=1} NU \quad SI \xleftarrow{\text{找回}\hbar, c} NU$$

通过理论分析，在理论上找到  $\hbar, c$ ，再带入  $\hbar, c$ ，计算最后结果。

#### 3.2 单位制转换方法 NU→SI

所有物理量的量纲在自然单位制中，都具有能量的整数次幂的形式

$$L: [E]^{-1} \quad M: [E]^1 \quad t: [E]^{1-}$$

于是，物理量在 SI 单位制中的量纲要是  $[M]^p[L]^q[T]^r$ ，那么，在自然单位制中量纲为：  
 $[E]^{p-q-r}$

$$\text{两种单位之中的量纲: } [P_i] \quad [Q_i] \quad i = 1, 2, \dots, n \quad [Q_j] = q_j \prod_{i=1}^n [P_i]^{a_{ij}}$$

单位制转换公式推导：

$$\begin{aligned} X &= p \prod_{i=1}^n [P_i]^{\alpha_i} = q \prod_{j=1}^n [Q_j]^{\beta_j} \\ &= q \prod_{j=1}^n \left( q_j \prod_{i=1}^n [P_i]^{\alpha_{ij}} \right)^{\beta_j} = q \prod_{j=1}^n \left( q_i^{\beta_j} \prod_{i=1}^n [P_i]^{\alpha_{ij}\beta_j} \right) \end{aligned}$$

两边取对数

$$\begin{aligned}
 \ln p + \sum_i \alpha_i \ln[P_i] &= \ln q + \ln \left( \prod_{j=1}^n q_j^{\beta_j} \right) + \ln \left( \prod_{j=1, i=1}^n [P_i]^{\alpha_{ij} \beta_j} \right) \\
 &= \ln q + \sum_{j=1}^n \beta_j \ln q_j + \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} \beta_j \ln[P_i] \\
 &\Rightarrow \begin{cases} \ln p = \ln q + \sum_{j=1}^n \beta_j \ln q_j & \text{数值变换} \\ \sum_i \alpha_i = \sum_{ij} \alpha_{ij} \beta_j & \text{量纲变换} \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} p/q = \prod_{j=1}^n q_j^{\beta_j} \\ \sum_j \alpha_{ij} \beta_j = \alpha_i \end{cases}
 \end{aligned}$$

应用：

$$SI \rightarrow \alpha_i \quad [P_i] \quad NU \rightarrow \beta_i \quad [Q_i] \quad n = 3$$

已知：

$$\begin{aligned}
 [Gev] &= [M]^1 [L]^2 [T]^{-2} \\
 [\hbar] &= [M]^1 [L]^2 [T]^{-1} \\
 [c] &= [M]^0 [L]^1 [T]^{-1}
 \end{aligned}$$

$$[Q_i] = q_j \prod_{i=1}^n [P_i]^{\alpha_{ij}} \quad \sum_i \alpha_{ij} \beta_j = \alpha_i$$

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (a_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

已知 SI 中的  $\alpha_i$ ，如何求 NU 中的  $\beta_i$ ？

$$NU : E^2 = p^2 + m^2 \xrightarrow{?} SI E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

$$E : [M]^1 [L]^2 [T]^{-2} \quad \beta_j = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [Gev]$$

$$p : [M]^1 [L]^1 [T]^{-1} \quad \beta_j = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad [Gev][c]^{-1}$$

$$m : [M]^1 [L]^0 [T]^0 \quad \beta_j = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad [Gev][c]^{-2}$$

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( -\frac{\nabla^2}{2m} + U \right) \psi \quad M^{-1} L^{-2} T^0 \cdot M^2 L^4 T^{-2} \rightarrow M^1 L^2 T^{-2}$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0 \quad \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

- $SI : E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \xrightarrow{\text{easy}} NU : E^2 = p^2 + m^2$
- $NU : E^2 = p^2 + m^2 \xrightarrow{\text{easy too}} SI : E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$

$$\begin{array}{ll} E : [M]^1 [L]^2 [T]^{-2} & p : [M]^1 [L]^1 [T]^{-1} \\ m : [M]^1 & c : [L]^1 [T]^{-1} \\ \hbar : [M]^1 [L]^2 [T]^{-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} p^2 : [M]^2 [L]^2 [T]^{-2} & \xrightarrow{[L]^2 [T]^{-2} \quad c} E^2 : [M]^2 [L]^4 [T]^{-4} \\ m^2 : [M]^2 [L]^0 [T]^0 & \xrightarrow{[L]^4 [T]^{-4} \quad c^2} E^2 : [M]^2 [L]^4 [T]^{-4} \\ E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \end{array}$$

练习：

$$NU : i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( -\frac{\nabla^2}{2m} + U \right) \psi \quad \rightarrow \quad SI : i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( -\hbar^2 \frac{\nabla^2}{2m} + U \right) \psi$$

$$\begin{array}{ll} \frac{\nabla^2}{2m} : [M]^{-1} [L]^{-2} & \xrightarrow{[M]^2 [L]^4 \quad \hbar^2} E^2 : [M]^2 [L]^4 [T]^{-4} \\ \frac{\partial}{\partial t} : [T]^{-1} & \xrightarrow{[M]^1 [L]^2 [T]^{-1} \quad \hbar} E^2 : [M]^2 [L]^4 [T]^{-4} \end{array}$$

### 3.3 费曼图

**费曼图**是费曼在处理 QED 时提出的一种形象化方法，来描述粒子之间的相互作用；可以直观的表现粒子之间的散射、反应和转化等过程。

简言之，就是按照一定的规则（费曼规则），用减记的符号来代表物理过程。

在此，我们不做具体运算，只用于表示物理过程的示意图。

结合具体的费曼图来介绍电磁相互作用、弱相互作用和强相互作用。

**费曼规则：**

(1) 时间轴向上，沿时间方向为正粒子，反之为负粒子，下方为初态，上方为末态。

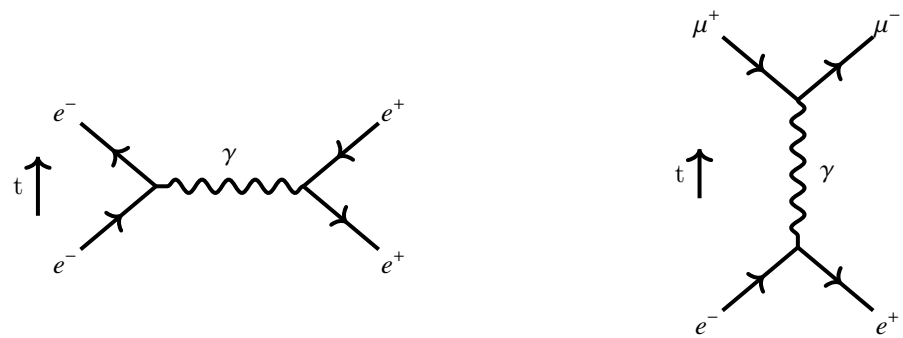
(2) ———— 实线表示初末态粒子；

~~~~~ 波浪线表示光子，传递电磁相互作用的规范玻色子；

----- 虚线表示  $Z, W^\pm$ ，传递弱相互作用的玻色子；

~~~~~ 螺旋线表示胶子，传递强相互作用的玻色子。

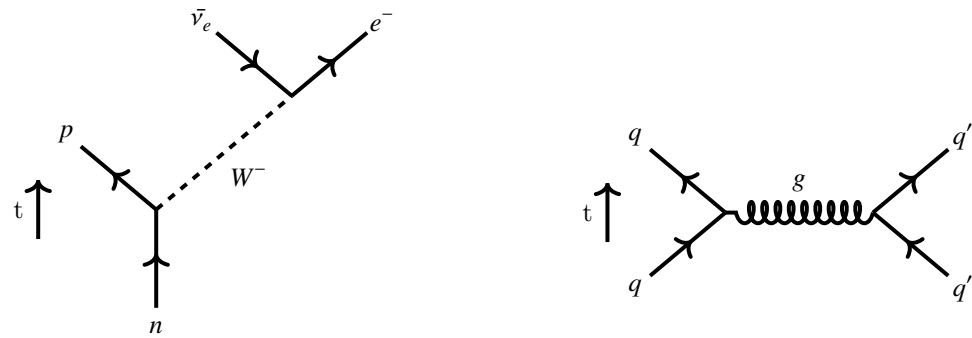
- (3) 一条直线与另一条直线的连接点，称为相互作用的顶点  $\Gamma$ 。
- 正粒子：朝向顶点为入态，离开顶点为出态；
- 反粒子：朝向顶点为出态，离开顶点为入态；
- 计算时，顶点  $\Gamma$  正比于耦合强度，如电磁力  $\Gamma \propto e^2/4\pi$ ，具体形式由体系的拉氏量给出。



$e^-e^+$  散射过程， $e^+$  是  $e^-$  的反粒子， $e^-$  发出一个光子， $e^+$  接收一个光子

$e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ ， $e^+e^-$  湮灭为  $\gamma$  光子，光子再衰变为  $\mu^-\mu^+$  对

图 0. 电磁相互作用



弱相互作用： $\beta$  衰变， $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$

强相互作用： $qq'$  弹性散射

# 强子性质

Definition 3.1 (强子). 强子 (hadron): 参与强相互作用的粒子, 它们都由夸克组成。分为两类:

- 重子: baryon ( $qqq$ )
- 介子: meson ( $q\bar{q}$ )

奇特重子: 5 夸克态, pentaquark,  $\Lambda_b^0[c\bar{c}uud]$

奇特介子: 4 夸克态,  $Z_c(3900), P_c(4450) \quad \pi c\bar{c} \quad Z_b(10610), Z_b(10650) \quad \pi b\bar{b}$

## 4 核子

Definition 4.1. 质子和中子统称为核子, 也是最早发现的强子, 名称由来, 见同位旋概念。

- 质子: H 原子核
- 中子: 查德威克, 英国人, 1932 年发现, 1935 年诺奖

Section ?? 核子  
Section ?? Pi 介子  
Section ?? K 介子  
Section 7 强子分类

### 4.1 质量、电荷、自旋、磁矩、寿命、同位旋、半径和形状因子

简单夸克模型: 认为核子只由三个组分夸克构成, 这是对核子复杂内部结构的粗糙近似, 仅适用于描述静态性质和低能碰撞过程, 后面的学习, 我们在进一步揭示“复杂内部结构”。

核子: Nucleon (N), 质子: Proton (p), 中子: Neutron (n)

#### 4.1.1 质量

实验结果

$$m_p = 938.2723 \text{ MeV} \quad m_n = 939.5656 \text{ MeV} \quad \frac{m_p - m_n}{(m_p + m_n)/2} = \frac{1.2933}{938.9189} \approx 10^{-3}$$

1fm 处, 电磁相互作用与强相互作用强度比值  $\sim 10^{-3}$ ,  $u, d$  夸克流质量不同, 以及不同的电磁效应。

简单夸克模型解释

$$p \equiv (uud) \quad n \equiv (udd)$$

组分夸克质量:  $m_u, m_d \approx 310 \text{ MeV}$

标准模型中给出的流夸克质量:  $u: 1.4 \sim 4.5 \text{ MeV} \quad d: 5 \sim 8.5 \text{ MeV}$

#### 4.1.2 电荷

实验结果

$$Q_p = (1 \pm 10^{-21})e \quad Q_n = (-0.4 \pm 1.1) \times 10^{-21}e$$



## 简单夸克模型解释

$$Q_u = \frac{2}{3}e \quad Q_d = -\frac{1}{3}e$$

$$Q_p = e \quad Q_n = 0$$

## 4.1.3 磁矩

## 实验结果

$$\mu_p = 2.792\mu_N \quad \mu_n = -1.913\mu_N \quad \mu_N = \frac{e}{2m_p} \quad \frac{\mu_n}{\mu_p} = -0.685$$

## Dirac 理论 (点粒子)

$$\begin{cases} \vec{\mu} = \frac{Q}{2m} g \vec{s} \\ \mu = \frac{Q}{2m} g s_{z+} \equiv \mu_{z+} \end{cases} \quad \text{与自旋对应的 } g_s = 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mu_p = 1\mu_N \\ \mu_n = 0 \end{cases}$$

通过对比实验结果，与狄拉克理论，可以得知，质子中子不是点粒子，有内部结构。

## 简单夸克模型解释

由核子波函数计算 (见后面的章节，A3.22a 式)

$$\mu_p = \frac{1}{3}(4\mu_u - \mu_d) \quad \mu_n = \frac{1}{3}(4\mu_d - \mu_u)$$

夸克是点粒子，根据狄拉克理论：

$$\mu_u = \frac{\frac{2}{3}e}{2m_q} = \frac{e}{3m_q} \approx 2\mu_N \quad \mu_d = -\mu_N$$

$$\mu_p = 3\mu_N \quad \mu_n = -2\mu_N \quad \frac{\mu_n}{\mu_d} = -\frac{2}{3}$$

## 4.1.4 自旋

理论值  $\frac{1}{2}$

1988 年，开始“质子自旋危机”，实验与理论有矛盾，至今未解决，RHIC 为此投入大量资金。

夸克自旋计算，见后面章节

$$S_{q=u,d}^z = \frac{1}{2}$$

## 4.1.5 同位旋

核子**同位旋算符**定义为 (其中  $\tau_i$  为同位旋空间的泡利矩阵)：

$$I_i = \frac{1}{2}\tau_i$$

在  $\tau_3$  表象之下，

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$I_3$  的本征函数:

$$|p\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

本征值:

$$I_3|p\rangle = \frac{1}{2}|p\rangle \quad I_3|n\rangle = -\frac{1}{2}|n\rangle$$

同位旋投影算符 (从混合态中找出质子态或是中子态):

$$I_p = \frac{1}{2} + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I_n = \frac{1}{2} - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

任意态:  $|\psi\rangle = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$I_p|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = a|p\rangle$$

$$I_n|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = b|n\rangle$$

多核子系统, 总同位旋——求和规则:

矢量求和, 设有 A 个核子:

$$\vec{I}_{\text{总}} = \sum_{i=1}^A \vec{I}(i) \quad I_3^{\text{总}} = \sum_{i=1}^A I_3(i)$$

$\vec{I}_{\text{总}}$  与自旋类似;  $I_3^{\text{总}}$  反应质子数与中子数之差。

$$A = Z + N \quad Q = Ze = \sum_{i=1}^A Q(i) = e \sum_{i=1}^A \left[ I_3(i) + \frac{1}{2} \right]$$

$$Z = \sum_{i=1}^A I_3(i) + \frac{A}{2} \quad I_3^{\text{总}} = \frac{Z - N}{2}$$

### 简单夸克模型解释

若  $u, d$  构成同位旋二重态,

$$I = \frac{1}{2} \quad I_3 = \pm \frac{1}{2} \quad I_3^d = -\frac{1}{2} \quad I_3^u = \frac{1}{2}$$

$$I_3^p = \frac{1}{2} \quad (uud) \quad I_3^n = -\frac{1}{2} \quad (udd)$$

强子的同位旋对称性, 反映了  $u, d$  夸克之间的同位旋对称性。

注意到:

$$Q_q = (I_3 + \frac{1}{6})e \quad Q_N = (I_3 + \frac{1}{2})e$$

### Comment

- 同位旋与自旋的相似只是数学形式上的相似, 物理本质截然不同。**自旋**是角动量, 与内禀空间的转动相关。而**同位旋**是无量纲的物理量, 同位旋空间是为了描述电荷状态

而人为想象的空间。

- 同位旋概念在讨论强子分类中起到重要作用。

#### 4.1.6 核子半径与形状因子 (form factor)

点粒子不必考虑核子半径与形状因子，但是根据磁矩测量，我们知道核子（质子、中子）都不是点粒子。

**电荷分布半径、磁矩分布半径和质量分布半径。**

以质子为例，介绍质子的电荷分布半径和电荷形状因子。

##### 理论方面

若质子有一定的体积，它的内部电荷分布记为  $\rho(r)$ ，质子电荷分布的概率密度。

满足归一化条件：

$$\int \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} = 1$$

电荷分布的方均半径：

$$\langle r^2 \rangle = \int r^2 \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} \xrightarrow{\text{球对称}} \langle r^2 \rangle = \int r^2 \rho(r) 4\pi r^2 dr$$

电荷形状因子：

$$F(\vec{q}) = \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} d^3\vec{r} \xrightarrow{\text{球对称}} F(q^2) = \int \frac{4\pi}{q} \rho(r) \sin(qr) r dr$$

电荷形状因子与电荷分布相关，是经过傅里叶变换，动量空间的电荷分布，但是  $\vec{q}$  是什么意思？

$\langle r^2 \rangle$  与  $F(q^2)$  有关系，在球对称情况：

$$\begin{aligned} F(q^2) &= \int \rho(r) 4\pi r^2 dr - \frac{q^2}{6} \int r^2 \rho(r) 4\pi r^2 dr + \dots \\ &= 1 - \frac{q^2}{6} \langle r^2 \rangle + O(q^2) \end{aligned}$$

对比得出：

$$\langle r^2 \rangle = -6 \left. \frac{dF(q^2)}{dq^2} \right|_{q^2 \rightarrow 0}$$

特别的，对于点粒子： $\rho(\vec{r}) = \delta(\vec{r} = 0)$

$$\langle r^2 \rangle = 0 \quad F(q^2) = 1 \quad \text{中子: } F(q^2) = 0$$

形状因子偏离 1，则体现非点粒子性质，即粒子内部有结构。

在实验上，探测粒子内部结构的方法：两体散射（两体碰撞）

##### 实验结果

质子寿命： $\tau_p \approx 2.1 \times 10^{29} a$  绝对稳定

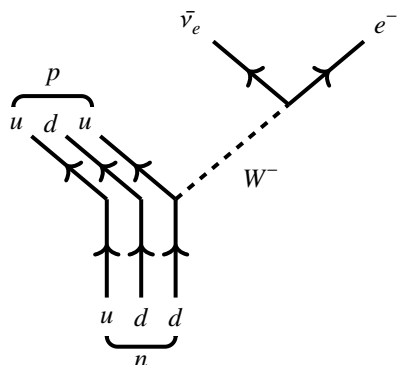
中子寿命： $\tau_n \approx 885.7 \pm 8 s$  稳定粒子

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad \beta \text{衰变}$$

注释：虽然中子的寿命不足 15min，但比起其他强子的典型寿命  $\approx 10^{-10}s$  长的多，视为稳定粒子。

通常把不通过强相互作用衰变的粒子都称为**长寿命粒子**或者  $\tau > 10^{-20}s$  称为**稳定粒子**。

### 简单夸克模型解释



## 4.2 小结

### 4.2.1 同位旋

核子的同位旋 (Isospin)  $\vec{I}(I_3)$  是“新的量子数”，强相互作用守恒，弱相互作用不守恒。

对比自旋 (spin)，数学结构相同。

1932 年，海森堡引入同位旋概念，对于强相互作用相同，而电荷不同的粒子，可以看做是相同粒子处于不同的电荷状态，用同位旋描述  $\vec{I}(I_3)$ 。

实验发现：核力具有电荷无关性， $n-n$ ， $p-p$ ， $n-p$  核力相同。

略去质子中子的质量差异，可以将质子中子当做全同粒子处理（强相互作用层次）。

质子和中子统称为核子，它们作为核子的两种电荷状态，即质子和中子是同位旋二重态。

与之形成对比的是，自旋为  $\frac{1}{2}$  的粒子， $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ ，二重态。

核子同位旋：

$$I = \frac{1}{2} \quad I_3 = \pm \frac{1}{2} \quad Q_N = (I_3 + \frac{1}{2})e$$

$$I_3^p = \frac{1}{2} \quad I_3^n = -\frac{1}{2}$$

### 4.2.2 形状因子

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{实}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{点}} |F(\vec{q})|^2 \quad (1)$$

$$F(\vec{q}) = \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} d^3\vec{r} \quad (2)$$

- 形状因子  $F(\vec{q})$  体现点粒子与非点粒子的差异。与粒子内部结构有一定关系，能否认为是体现了夸克的分布呢？答案是否定的，弹性散射的能量还不够高，还不足以见到夸克。
- 由电子-质子散射实验测量微分散射截面，根据 (1) 式求出质子的电荷形状因子  $F(\vec{q})$ ，进而拟合分布函数  $\rho(\vec{r})$  (根据 (2) 式)，以及求出  $\langle r^2 \rangle$ 。图 A1.5，PPT 显示，看图说话，描述图形。

- 中子形状因子的试验确定比较困难，中子靶不易制备，中子的寿命短。目前实验上，是利用电子与氘核散射，或是低能中子与原子核外电子散射来确定。

#### 4.2.3 两种常用的质子电荷分布

1.

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{1}{r} e^{-ar} \quad (\text{Yukawa 型}) \quad \rightarrow \quad F(q^2) = \left(1 + \frac{q^2}{\alpha^2}\right)^{-1}$$

2.

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-ar} \quad (\text{指数型}) \quad \rightarrow \quad F(q^2) = \left(1 + \frac{q^2}{\alpha^2}\right)^{-2}$$

### 4.3 实验方面

#### 4.3.1 概念复习

- **弹性散射**：又称为弹性碰撞，在碰撞中，如果两粒子之间只有能量、动量的交换，粒子的类型及其内部的运动状态并无改变，称为弹性散射。
- **非弹性散射**：又称为非弹性碰撞，如果在碰撞中，两粒子除了能量、动量的交换之外，粒子的类型及其内部的运动状态发生改变，称为非弹性散射。

#### 4.3.2 利用电磁相互作用测量电荷分布

实验：电子打靶实验，电子-质子弹性散射。

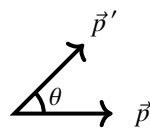
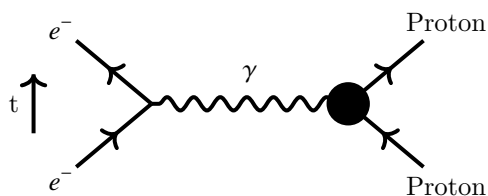


图 0.  $e-p$  弹性散射费曼图

图 0. 动量改变示意图

- (1) 质子尺寸： $\sim 1fm$   $197.3 Mev \cdot fm = 1$

实验所需的高能电子：几百 Mev 到几十 Gev。

- (2) 设入射电子能量为  $\vec{p}$ ，出射电子的能量为  $\vec{p}'$ ，出射角记为  $\theta$  则入射电子转移给靶质子的动量为  $\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}' = 2p \sin \frac{\theta}{2}$ ，假定靶静止。

- (3) 利用磁谱仪可以测量出电子的微分散射截面  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$

问题：

如何由实验测得的  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ ，得出形状因子半径  $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ ？

回答：

将粒子和非点粒子的情形相比，差别归结为形状因子。

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{实}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{点}} |F(\vec{q})|^2$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{实}} \text{ 实验测量, } \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{点}} \text{ 理论计算, } |F(\vec{q})|^2 \text{ 拟合实验数据}$$

把复杂的事情简单化 → 把简单的事情复杂化。

形状因子的实验基础如下：

$|\vec{q}| \rightarrow 0$ ,  $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{点}}$  与实验符合很好，但当  $|\vec{q}|$  较大时候， $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{点}} > \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{实}}$

$\vec{q}$  为光子的动量， $q$  增大，波长减小。

电子无法看到整个质子的电荷，而只是其中的一部分，不能把质子当做点粒子处理。

### 4.3.3 一个说明

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{实}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{点}} |F(\vec{q})|^2 \xrightarrow{\text{等价吗?}} F(\vec{q}) = \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} d^3\vec{r}$$

做一个简单的说明：电子-质子弹性散射，假设靶静止，只考虑库伦相互作用

玻恩近似：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\vec{q})|^2 \quad f(\vec{q}) = -\frac{m}{2\pi\hbar} \int V(\vec{r}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} d^3\vec{r}$$

点粒子球对称库仑势：

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

查表可知：

$$\int \frac{e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}}{r} d^3\vec{r} = \frac{4\pi}{q^2}$$

卢瑟福散射公式：

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Ru}} = \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{4T \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right]^2$$

其中  $T = \frac{p^2}{2m}$  为入射电子动能。

对于非点粒子，电荷分布为  $\rho(r)$ ，库仑势为

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{e^2 \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}'$$

此时， $f(\vec{q})$  为

$$f(\vec{q}) = -\frac{m}{2\pi\hbar} \iint -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2 \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} d^3\vec{r} d^3\vec{r}'$$

令  $\vec{r} - \vec{r}' = \vec{r}_1$

$$f(\vec{q}) = -\frac{m}{4\pi\hbar} \iint -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_1}}{|\vec{r}_1|} \rho(\vec{r}') e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}'} d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}'$$

已知

$$\int \frac{e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r} = \frac{4\pi}{q^2} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}'}$$

调整积分顺序可以得到

$$f(\vec{q}) = \left( -\frac{m}{4\pi\hbar} \int -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_1}}{|\vec{r}_1|} d^3\vec{r}_1 \right) \left( \int \rho(\vec{r}') e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}'} d^3\vec{r}' \right)$$

符合之前的定义

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Ru}} |F(\vec{q})|^2$$

#### 4.4 核子的电磁形状因子

核子的电磁形状因子：电子-核子的电荷作用 + 电子电流与核子磁矩的相互作用。

电子质子弹性散射可以确定电荷分布和磁矩分布。

电荷分布  $\Rightarrow$  电荷形状因子，磁矩分布  $\Rightarrow$  磁形状因子

点粒子情形：

(1) 两个自旋为 0 的点粒子库仑散射

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Ru}} = \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{4T \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right]^2 \quad \text{A1.10}$$

(2) 入射电子  $S = \frac{1}{2}$  的相对论点粒子，莫特 (Mott) 散射公式

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} = \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2 E}{2c^2 p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right]^2 \left[ 1 - \frac{c^2 p^2}{E^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad E^2 = p^2 + m^2 \quad \text{A1.11}$$

采用非相对论近似， $E \approx m + \frac{p^2}{2m}$  ( $p \ll m$ )， $\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}}$  回到  $\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Ru}}$

(3) 计入质子  $S = \frac{1}{2}$ ，Dirac 散射公式，即考虑质子的电荷，磁矩与电子电荷电流的相互作用。

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Dirac}} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \left[ 1 + \frac{q^2}{2m_q^2} \tan^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right] \quad \text{A1.12}$$

(4) 计入核子反常磁矩，实验值与 Dirac 点粒子理论之差， $\Delta\mu_p = 1.79$ ,  $\Delta\mu_n = -1.91$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \left[ 1 + \frac{q^2}{2m_p^2} (1 + \Delta\mu)^2 \tan^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) + \frac{q^2 (\Delta\mu)^2}{4m_p^2} \right] \quad \text{A1.22}$$

非点粒子情形，加入形状因子，Rosenbluth 公式，A1.23 式：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \left\{ F_1^2(q^2) + \frac{q^2}{2m_p^2} [F_1(q^2) + \Delta\mu F_2(q^2)]^2 \tan^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) + \frac{q^2}{4m_p^2} (\Delta\mu)^2 F_2^2(q^2) \right\}$$

$F_1(q^2)$  与电荷分布相关, 称为 Dirac 形状因子;  $F_2(q^2)$  与反常磁矩分布相关, 称为 Pauli 形状因子。

5  $\pi$  介子

5.1 历史介绍

|             |       |
|-------------|-------|
| Section ??. | 核子    |
| Section ??. | Pi 介子 |
| Section ??. | K 介子  |
| Section 7.  | 强子分类  |

1909 年, 盖格 (Geiger) 和马斯顿 (Marsden) 用  $\alpha$  粒子轰击金箔, 发现存在大角度散射事例。

- 1911 年, 卢瑟福 (Rutherford) 提出原子核式模型。
- 1919 年, 卢瑟福用  $\alpha$  粒子轰击氮核, 打出氢核, 命名为 Proton。 (五四运动)
- 1932 年, Chadwick 用  $\alpha$  粒子轰击铍核, 发现中性粒子, 命名为 Neutron。 (两年后, 开始长征)
- 至此, 人们认识到原子核是由质子和中子组成, 且核子之间存在核力 (强相互作用), 以平衡库伦斥力。
- 同时也开启了利用散射发现/研究基本粒子的时代 (粒子物理兴起)。
- 1935 年, 汤川秀树 (Hideki Yukawa) 从理论上预言了  $\pi$  介子的存在。
- 1947 年, 英国鲍威尔 (Powell) 等人用核乳胶方法在高空进行了宇宙射线研究, 发现汤川预言的  $\pi^0, \pi^\pm$ 。

1.  $\pi$  介子的理论预言
2.  $\pi$  介子的一般性质, 电荷, 同位旋, 质量, 寿命, 衰变方式, 自旋, 宇称, 形状因子。  
(实验结果 + 简单夸克模型解释)

5.2  $\pi$  介子的理论预言

类比电磁相互作用  
已知: 带电粒子间的相互作用 (电磁相互作用), 通过交换电磁场量子 (光子) 来传递  
类比: 核子间的核力 (强相互作用), 通过交换核子场量子 ( ? 中介粒子, 介子,  $\pi$  介子) 来传递

要考虑核力先从我们的熟悉的力, 例如引力、电磁力出发, 这些力可以延伸到无穷远, 它们的势函数与距离成反比。从数学上出发, 这是因为引力和电磁力都遵循拉普拉斯微分方程。  
不过, 拉普拉斯方程只适用于源是静态的, 更普遍的情况, 电磁场是由麦克斯韦方程组, 引力由爱因斯坦方程描述的。

⇒ 仿照经典电磁场理论建立介子场理论。

5.2.1 回顾电磁场理论

自由空间静电势  $\varphi(\vec{r})$  满足拉普拉斯方程, 静电势: static, 与时间无关

$$\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = 0$$

(5.1)

若存在电荷源, 电荷密度分布  $\rho(\vec{r})$ , 则



$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi(\vec{r}) &= -\frac{Q\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (\text{泊松方程}) \\ \xRightarrow{\text{解}} \quad \varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{Q\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r' \end{aligned} \quad (5.2)$$

例：点源 (单位点电荷)

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \delta(\vec{r}=0) \\ \varphi(\vec{r}) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \\ \vec{E} &= -\nabla\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \\ \text{电子} \quad V_{\text{库}} &= -e\varphi(\vec{r}) = -\frac{eQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (5.3)$$

### 5.2.2 建立介子场理论

**初步场论介绍** 电磁场量子化之后，场量子是质量为 0 的光子 (玻色子)

$$\begin{aligned} E^2 &= P^2 \\ E &\rightarrow i\frac{\partial}{\partial t} \quad \vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla} \end{aligned} \quad (5.4)$$

则光子波函数 (光子场) $\varphi(t, \vec{r})$  满足方程

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi + \nabla^2\varphi = 0 \quad \text{相对论薛定谔方程}$$

取静态时,  $\varphi$  与  $t$  无关则

$$\nabla^2\varphi = 0 \quad \text{相对论型定态薛定谔方程}$$

更一般化,  $E^2 = p^2 + m^2$

$$\Leftrightarrow -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi + \nabla^2\varphi = m^2\varphi \quad \text{标量场 Klein-Gorden 方程}$$

取静态情况

$$\nabla^2\varphi = m^2\varphi$$

### 介子场

仿照有源场, 建立有源场的方程

$$\nabla^2\psi(\vec{r}) = \frac{1}{R^2}\psi(\vec{r}) - g\rho(\vec{r})$$

$R = \frac{1}{m_\pi}$ , 是  $\pi$  介子的康普顿波长。 $g$  是场源强度。

$$\stackrel{\text{解}}{\Rightarrow} \quad \psi(\vec{r}) = \frac{g}{4\pi} \int \frac{e^{-|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \rho(\vec{r}') d^3 r' \quad \text{查数理方程}$$

Example. 点源  $\rho(\vec{r}) = \delta(\vec{r} = 0)$

$$\psi_\pi(\vec{r}) = \frac{g}{4\pi} \frac{e^{-r/R}}{r}, \quad R = \frac{1}{m_\pi}$$

这是描述介子场的汤川势, 实验发现核力是短程力, 即  $m_\pi \neq 0$ , 力程约  $1fm$ , 则  $m_\pi \approx 200MeV$

这是汤川理论, 在当时并不知道有这种粒子, 汤川大胆的预言了它的存在, 并命名为介子, 意思是它介于电子和核子之间, 1947 年, 实验发现, 诺奖。

**达朗贝尔 (d'Alembert) 方程** 达朗贝尔方程等价于麦克斯韦方程, 波动方程, 场方程

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= -\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

引入矢势  $\vec{A}$ , 标势  $\varphi$ ,  $\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ,  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{J} \\ \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \text{ 库仑规范}) \end{aligned}$$

无磁场情况, 仅考虑标势, 其中  $\rho(\vec{r})$  为核子密度

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \stackrel{\text{有质量情况}}{\Rightarrow} \quad \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = m^2 \varphi - g\rho(\vec{r})$$

取静态情形,  $\varphi$  与  $t$  无关

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{泊松方程}) \quad \stackrel{\text{有质量情况}}{\Rightarrow} \quad \nabla^2 \varphi = m^2 \varphi - g\rho(\vec{r})$$

无源情形

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (\text{拉普拉斯方程})$$

### 5.3 Pion 性质

**反粒子：**反粒子是相对于正粒子定义的，它们的质量、寿命和自旋都和正粒子相同；所有内部相加量子数，如电荷、重子数、奇异数、和轻子数等与正粒子大小相同，符号相反；相乘量子数，如宇称，规定为，正反费米子宇称相反，正反玻色子宇称相同。

**宇称：**描述粒子在空间反演变换下的性质，相乘量子数，包含空间宇称和内禀宇称，常用  $P$  表示，书中也用  $\pi$  表示，有两个值  $\pm 1$ 。

强、电磁相互作用，宇称守恒，弱相互作用，宇称不守恒 (1957 年，诺奖)。

量子力学中，波函数在坐标空间反演变换  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$  变换下，

- ① 改变符号，称为奇宇称
- ② 保持不变，称为偶宇称

**内禀宇称：**只有纯中性玻色子的内禀宇称才能由实验得出，测量，其他粒子 (所有费米子，非中性玻色子) 的内禀宇称都不唯一确定，能由实验决定的只是它们的相对宇称。

(1)  $p, n, \Lambda$  具有偶宇称，其他粒子的宇称相对于它们确定，见 PDG 表格。

(2) 费米子和反费米子具有相反宇称，正反玻色子内禀宇称相同。

宇称包含空间宇称和内禀宇称，由多粒子组成的系统，所具有的宇称，与粒子间的相对运动有关。例，内禀宇称分别为  $P_A, P_B$  的两粒子，相对角动量为  $l$  时，整个系统的宇称为  $P = P_A P_B (-1)^l$

#### 5.3.1 Pion 的电荷

**实验结果**  $\pi$  介子有三种电荷态

| $\pi$ | $\pi^0$ | $\pi^-$ | $\pi^+$ |
|-------|---------|---------|---------|
| 电荷    | 0       | $-e$    | $e$     |

**简单夸克模型**  $Q_u = \frac{2}{3}e$      $Q_{\bar{u}} = -\frac{2}{3}e$      $Q_d = -\frac{1}{3}e$      $Q_{\bar{d}} = \frac{1}{3}e$   
 $\pi^0 = (|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle) / \sqrt{2}$      $\pi^+ = |u\bar{d}\rangle$      $\pi^- = |d\bar{u}\rangle$   
 $Q_{\pi^0} = 0$      $Q_{\pi^+} = e$      $Q_{\pi^-} = -e$

#### 5.3.2 Pion 的质量

**实验结果** 质量 (实验上对  $\pi$  介子质量进行精确地测量)

$$m_{\pi^\pm} = 139.57018 \pm 0.00035 \text{ Mev} \quad m_{\pi_0} = 134.9766 \pm 0.0006 \text{ Mev}$$

$$m_{\pi^\pm} - m_{\pi_0} = 4.59358 \text{ Mev}$$

**简单夸克模型**  $m_N \approx 938 \text{ Mev}$  (3 夸克)     $m_\pi \approx 134 \text{ Mev}$  (两夸克)

$\pi$  介子是各种强子中质量最轻的粒子，这一点决定了  $\pi$  介子在强子物理和中高能物理中的特殊地位。见 Chapter 4。

#### 5.3.3 Pion 的同位旋

**实验结果** 忽略  $\pi^0, \pi^\pm$  的质量差异，它们构成了同位旋三重态。

$$I = 1 \quad I_3 = 0, \pm 1 \quad Q = I_3 e$$

### 简单夸克模型

$$\begin{cases} I_3^{(u)} = \frac{1}{2}, & I_3^{(d)} = -\frac{1}{2} \\ I_3^{(\bar{u})} = -\frac{1}{2}, & I_3^{(\bar{d})} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_3^{\pi_0} = 0 \\ I_3^{\pi^\pm} = \pm 1 \end{cases}$$

#### 5.3.4 Pion 的自旋、宇称

实验结果  $J^P = 0^-$ ，赝标量介子

$$\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}, \text{ 一般讨论基态, } L = 0, \hat{J} = \hat{S}$$

$S = 0$ ，称为洛伦兹标量， $S = 1$ ，称为，洛伦兹矢量。

简单夸克模型  $S_q = \frac{1}{2} \quad S_{\bar{q}} = \frac{1}{2}$

$$|q\bar{q}\rangle: \begin{cases} S_{\text{总}} = 0 & \pi^0, \pi^\pm \\ S_{\text{总}} = 1 & \rho, \omega \end{cases}$$

正反费米子宇称相反， $l = 0$

$$P = (-1)(-1)^0 = -1$$

### 5.4 正反粒子

$\pi^\pm$  互为正反粒子， $\pi_0$  反粒子是其本身。

根据简单夸克模型观察组分，也可以得出正反粒子。

#### 5.4.1 产生和衰变

产生  $\pi$  介子质量较轻，许多强子反应都可以产生

$$p + p \rightarrow \begin{cases} p + n + \pi^\pm \\ p + p + \pi^0 \\ p + p + \pi^+ + \pi^- \end{cases} \quad (5.6)$$

非弹性散射过程，交换的四动量  $Q^2 > m_\pi^2$  即可

衰变  $\pi^\pm$  主要通过弱相互作用衰变， $\tau \approx 2.6 \times 10^{-8}\text{s}$

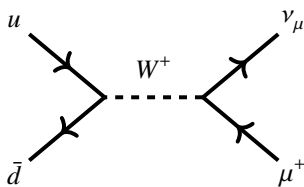


图 0.  $\pi^+$  衰变

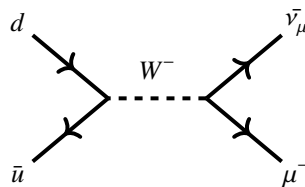


图 0.  $\pi^-$  衰变

| $\pi^+$                                 | $\pi^-$                                       | 衰变百分数     |
|---|---|-----------|
| $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$     | $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$     | 99.9877%  |
| $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$         | $\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$         | 0.0123%   |
| $\pi^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e$ | $\pi^- \rightarrow \pi^0 + e^- + \bar{\nu}_e$ | $10^{-8}$ |

当一种粒子有几种不同的衰变方式时，每种衰变方式都有一定的几率，称为**衰变百分数**  
 $\pi^0$  通过电磁作用衰变， $\tau \approx 0.8 \times 10^{-16} \text{ s}$ ，比  $\pi^\pm$  短得多。

$$\begin{aligned}\pi^0 &\rightarrow \gamma + \gamma (98.823\%) \\ \pi^0 &\rightarrow \gamma + e^+ + e^- (1.174\%) \end{aligned}$$

(5.7)

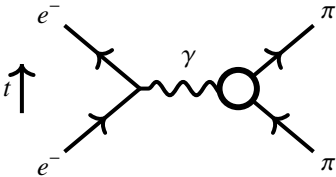
**电形状因子** 反映  $\pi$  介子内部电磁结构，反映弹性散射过程中，由粒子内部结构引起的，相对于点粒子的散射过程的偏移。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} |F(Q^2)|^2$$

(5.8)

**$e - \pi$  弹性散射**  $\pi$  介子寿命短，实验上无法制靶，只能利用高能反应时产生的  $\pi$  介子束轰击氢原子中的电子。

测量  $\pi^\pm + e^- \rightarrow \pi^\pm + e^-$



$$\langle r_\pi^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = (0.66 \pm 0.01) \text{ fm} \quad \langle r_\rho^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = 0.86 \text{ fm}$$

理论拟合： $F(Q^2) = \frac{1}{1+Q^2/m_\rho^2}$       $m_\rho = 768 \text{ Mev}$       $\rho(r) = \rho_0 \frac{1}{r} e^{-m_\rho r}$      汤川型

6 K 介子

6.1 K 介子和奇异粒子

已经介绍过的核子， $\pi$  介子，都是由 u, d 夸克以及它们的反粒子组成的，不包含奇异夸克 s。

今天介绍的 K 介子 (Kaon)，超子 (hyperon)，包含奇异夸克。

|             |       |
|-------------|-------|
| Section ??. | 核子    |
| Section ??. | Pi 介子 |
| Section ??. | K 介子  |
| Section 7.  | 强子分类  |

**Definition 6.1 (奇异粒子).** 组分中包含奇异夸克或者反奇异夸克的粒子，统称为奇异粒子。它们在强相互作用产生，弱相互作用衰变，当时认为很奇怪，因此称为奇异粒子。

s 夸克不同于 u, d 夸克，它带有奇异数，这是一种新的量子数。

**规定：**s 夸克带有奇异数  $S = -1$ ， $\bar{s}$  夸克带有奇异数  $S = 1$ ，其他夸克反夸克  $S = 0$ 。  
相加性量子数，强相互作用、电磁相互作用守恒，弱相互作用不守恒。用大写 S 表示，自旋用 J 表示。

6.1.1 4 种 K 介子

$$\text{反粒子} \left\{ \begin{array}{cc} K^+(u\bar{s}) & K^0(d\bar{s}) \\ K^-(\bar{u}s) & \bar{K}^0(\bar{d}s) \end{array} \right\} \text{反粒子}$$

$$\begin{aligned} S &= 1 \\ S &= -1 \end{aligned}$$

$$\text{同位旋二重态} \left\{ \begin{array}{cc} K^+(u\bar{s}) & K^-(\bar{u}s) \\ K^0(d\bar{s}) & \bar{K}^0(\bar{d}s) \end{array} \right\} \text{同位旋二重态}$$

$$\left\{ \begin{array}{cc} Q = I_3 + \frac{1}{2} & K^+, K^0 \\ Q = I_3 - \frac{1}{2} & K^-, \bar{K}^0 \end{array} \right\} \quad \langle r_{K^\pm}^2 \rangle = 0.34 \pm 0.05 fm^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{K^\pm} = 493.667 \pm 0.016 Mev \\ m_{K^0, \bar{K}^0} = 497.614 \pm 0.024 Mev \end{array} \right. \quad \tau_{K^\pm} = (1.238 \pm 0.0021) \times 10^{-8}$$

K 介子质量小于核子，大于  $\pi$  介子。

$K^0, \bar{K}^0$  是强相互作用本征态，奇异粒子通过弱相互作用衰变。

## 6.2 衰变

$$K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad (64\%)$$

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0 \quad (21\%)$$

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^- \quad (5.6\%)$$

$$K^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e \quad (5.07\%)$$

$K^0, \bar{K}^0$  衰变:

$$K_S^0 \left( \frac{d\bar{s} - s\bar{d}}{\sqrt{2}} \right) \quad \tau = (8.954 \pm 0.004) \times 10^{-11} \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi^+ + \pi^- \\ \pi^0 + \pi^0 \end{array} \right.$$

弱相互作用  $\left\{ \right.$

$$K_L^0 \left( \frac{d\bar{s} + s\bar{d}}{\sqrt{2}} \right) \quad \tau = (5.116 \pm 0.021) \times 10^{-8} \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi + e + \nu_e \\ \pi + \mu + \nu_\mu \\ \pi^0 + \pi^0 + \pi^0 \\ \pi^0 + \pi^+ + \pi^- \end{array} \right.$$

### 6.2.1 其他奇异粒子

超子，包含奇异夸克的重子，用 Y 表示

| Y               | 奇异数 S | Y               | 奇异数 S |
|-----------------|-------|-----------------|-------|
| $\Lambda(uds)$  | -1    | $\Xi^0(uss)$    | 2     |
| $\Sigma^+(uus)$ | -1    | $\Xi^-(dss)$    | 2     |
| $\Sigma^0(uds)$ | -1    | $\Omega^-(sss)$ | -3    |
| $\Sigma^-(dds)$ | -1    |                 |       |

奇异粒子的典型产生方式：协同产生，通过强相互作用成对出现，奇异数守恒。

$$\pi^- + p \rightarrow K^+ + \Sigma^- \quad \pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda \quad \pi^+ + p \rightarrow K^+ + \bar{K}^0 + p$$

$$\pi^+ + n \rightarrow K^+ + \lambda \quad \pi^- + n \rightarrow K^- + K^0 + n$$

奇异粒子弱衰变，奇异数不守恒，选择定则  $\Delta S = \pm 1$ 。

## 6.3 共振态 (Resonance)

### 6.3.1 基本概念

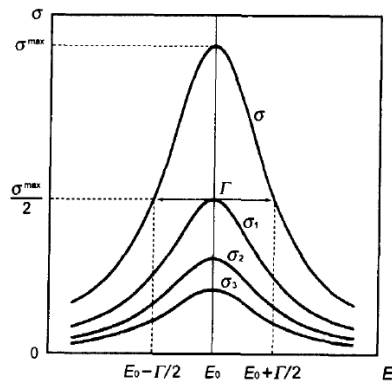
**Definition 6.2 (稳定粒子).** 稳定粒子指存活时间  $\tau > 10^{-20}s$  的态，它们是夸克束缚态的基态，主要通过弱相互作用，电磁相互作用衰变。

**Definition 6.3 (共振态).** 简称共振， $\tau \approx 10^{-20}s$   $\Gamma = \hbar/\tau \approx 100MeV$ ，它们是夸克束缚态的激发态。

像稳定粒子一样，共振态也具有相当稳定的质量，寿命，自旋，宇称，同位旋等量子数，所以亦称为共振粒子，它们主要通过强相互作用衰变，可分为介子共振和重子共振。

**基本概念：**共振态是一类强子的总称。研究原子核的散射和反应过程中发现的共振现象。当入射粒子的能量取某些确定值时，散射截面或反应截面迅速增大，截面数值随能量变化如图，满足 Breit-Wigner 分布，与经典物理里的共振现象一致。

振幅： $A = \frac{\Gamma}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma\omega^2}}$ ， $\omega_0$  是固有频率， $\gamma$  为阻尼系数，A 最大的状态，称为位移共振。



### 6.3.2 共振态的实验发现

$\pi N, pp, ep, \gamma p$  等散射过程

实际上，早在强子的夸克模型建立以前，就已经有很多不同的实验和理论确认共振态，包括利用  $\pi N, pp, ep, \gamma p$  等散射过程。历史上，第一个核子共振态是由费米与 1952 年利用  $\pi N$  散射实验发现的。现在，从  $1GeV$  到  $3GeV$  的能量范围里已确认大量的核子共振态。

表 A1.6 是已经确认的部分核子共振态一览表。

像稳定粒子一样, 共振态也具有相当稳定的质量, 寿命, 自旋, 宇称, 同位旋等量子数。一般来说, 越重的共振粒子其寿命越短, 相应宽度  $\Gamma = \hbar/\tau$  越大。即, 越高的激发态, 越容易跃迁到基态。

以  $\pi N$  散射为例, 统计量非常高, 以数万个,  $\pi N$  散射实验数据进行分波分析得出, A1.13 只是实验结果的简化图, 标出了几个主要的共振峰, 并标明了相应的核子共振态。

共振态寿命极短, 他们会很快衰变为其他较轻的粒子, 如

$$\Delta(1232) \rightarrow \begin{cases} N(939) + \pi & (99.4\%) \\ N(939) + \gamma \end{cases}$$

$N(939)$  是  $l = 1$  的核子激发态。

共振态寿命极短, 使得我们只能通过它们的衰变产物来研究它们的性质。

在  $\pi N$  散射中, 共振粒子的出现和衰变有两种不同的过程, 如图

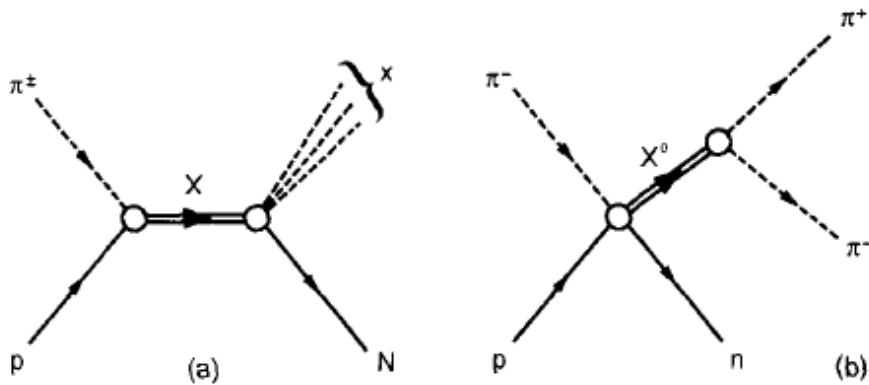


图 A1.14  $\pi N$  散射出现共振态的两种过程。(a)共振形成; (b)共振产生

### 6.3.3 共振粒子举例

#### (1) 重子共振 $\Delta(1232)$

$$\pi^+ + p \rightarrow \Delta^{++} \rightarrow \pi^+ + p$$

$$\pi^- + p \rightarrow \Delta \rightarrow \begin{cases} \pi^0 + n \\ \pi^- + p \end{cases}$$

|          |                |                |               |               |
|----------|----------------|----------------|---------------|---------------|
| $\Delta$ | $\Delta^-$     | $\Delta^0$     | $\Delta^+$    | $\Delta^{++}$ |
| $I_3$    | $-\frac{3}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ |

$$m_{\Delta} = 1232 \text{ Mev} \quad \Gamma = 126 \text{ Mev} \quad J^P = \frac{3}{2}^+ \quad l = 1 \quad P_{\Delta} = 1 \equiv P_{\pi} P_N (-1)^l$$

$$I_{\pi} = 1 \quad I_p = \frac{1}{2} \quad \begin{cases} I_{\Delta} = \frac{3}{2} & \Delta \text{共振} \\ I_N = \frac{1}{2} & \text{核子共振 } N(939) \end{cases}$$



## (2) 介子共振

 $\rho$  介子 矢量介子

$$J^P = 1^- \quad I = 1 \quad \rho^0 \rho^+ \rho^- \quad m_\rho = 771 \text{ Mev} \quad \Gamma = 149.2 \text{ Mev}$$

$$\text{主要衰变: } \rho \rightarrow 2\pi \quad (2\pi \text{ 衰变})$$

 $\omega$  介子

$$J^P = 1^- \quad I = 0 \quad m_\omega = 782.5 \text{ Mev} \quad \Gamma = 8.44 \text{ Mev}$$

$$\omega \rightarrow 3\pi \quad (3\pi \text{ 共振})$$

 $\sigma$  介子

$$J^P = 0^+ \quad I = 0 \quad m_\sigma = (400 \sim 1200) \text{ Mev} \quad \Gamma = (600 \sim 1000) \text{ Mev}$$

$$\sigma \rightarrow 2\pi \quad (\text{实验尚不明确})$$

 $\phi$  介子, 含  $(s\bar{s})$ , 矢量介子

$$J^P = 1^- \quad I = 0 \quad m_\phi = 1020 \text{ Mev} \quad \Gamma = 4.4 \text{ Mev}$$

$$\text{产生} \quad K^- + p \rightarrow \phi + \Lambda \quad \text{衰变} \quad \phi \rightarrow K^+ + K^- / K_L^0 + K_S^0$$

 $\eta(549), \eta'(958)$  介子, 赝标介子

$$J^P = 0^- \quad I = 0$$

通过电磁作用衰变, 寿命变长, 宽度几十  $keV$

$$\eta' \rightarrow \begin{cases} \pi^+ + \pi^- + \eta \\ \rho^0 + \gamma \\ \pi^0 + \pi^0 + \eta \end{cases} \quad \eta' \rightarrow \begin{cases} 2\gamma \\ 3\pi^0 \\ \pi^0 + \pi^+ + \pi^- \end{cases}$$

(3) 超子共振 (用  $Y^*$  表示, 超子用  $Y$  表示)

$$\begin{array}{ll} \uparrow \Sigma^+ + \pi^- & \uparrow \Lambda + \pi^0 \\ \pi^- + p \rightarrow \Lambda(1405) + K^0 & K^- + p \rightarrow \Sigma(1385) + \pi^0 \end{array}$$

## 7 强子分类

## 7.1 强子分类方式

## 7.1.1 重子-介子分类

Section ?? 核子  
Section ??  $\pi$  介子  
Section ??  $K$  介子  
Section 7. 强子分类

$$\text{强子} \begin{cases} \text{重子} \\ \text{介子} \end{cases}$$

### 7.1.2 稳定粒子-介子分类

$$\text{寿命} \begin{cases} \text{稳定粒子} & (\text{不通过强相互作用衰变的粒子}) \\ \text{介子} & (\text{通过强相互作用衰变的粒子}) \end{cases}$$

### 7.1.3 自旋宇称分类

按自旋宇称分类  $\mapsto$  按空间变换下的性质分类

标量-赝标量介子:  $J^P = 0^+, 0^-$

矢量-轴矢量 (赝矢量) 介子:  $J^P = 1^+, 1^-$

张量-赝张量介子:  $J^P = 2^+, 2^-$ ,  $J > 2$  以上都是张量, 只是阶数不同

### 7.1.4 经验分类

经验分类: 按实验给出的强子性质对强子进行分类。强子性质: 守恒荷 (守恒量), 守恒荷与对称性相对应。

强相互作用中守恒量:  $Q, I(I_3), J^P, S$

**Definition 7.1 (重子数  $B$ ).** 一种相加性量子数, 强, 电, 弱相互作用守恒。

规定: 重子的重子数  $B = 1$ , 介子的重子数  $B = 0$ , 反重子的重子数  $B = -1$

反中子 (1956), 反质子 (1955) 都已经发现。

**Definition 7.2 (超荷  $Y$ ).** 超荷  $Y$  是粒子与强相互作用相关的一种性质, 与类似的在电弱相互作用中发挥相似角色的弱超荷不是同一概念。超荷的概念结合并同一了同位旋和味, 使其成为一种荷。

$$Y = S + B \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} \text{重子、核子:} & \quad Q_N = I_3 + \frac{1}{2} \\ \text{介子:} & \quad \begin{cases} Q_\pi = I_3 \\ Q_K = I_3 \pm \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow Q = I_3 + \frac{Y}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} N: & B = 1, S = 0, Y = 1 \\ \pi: & B = 0, S = 0, Y = 0 \\ K^\pm: & B = 0, S = \pm 1, Y = \pm 1 \end{cases}$$

[盖尔曼-西岛 (Gell-Mann-Nishijima) 关系]  $Q = I_3 + \frac{Y}{2}$  称为盖尔曼-西岛 (Gell-Mann-Nishijima) 关系, 这是在未提出夸克概念之前总结的公式 (两人分别提出)

表明了强子的同位旋与超荷之间的关系, 这为将同位旋  $SU(2)$  群与超荷  $U(1)$  群合并成味空间  $SU(3)$  群提供线索和依据。

对于每一种强子，可以根据电荷数  $Q$  和同位旋  $I_3$  数值，定出超荷的量子数  $Y$ 。

$$m \quad J^P \quad Q \quad \overbrace{I \quad S \quad B}^{\text{内禀空间量子数}} \quad Y$$

$$\begin{cases} B+S=Y \\ I_3+\frac{Y}{2}=Q \end{cases} \Rightarrow \text{仅剩 2 个独立量子数}$$

经验分类：选择  $I_3$  作为自由变量。

## 7.2 经验分类

将能量最低的 18 种介子和 18 种重子，把  $J^P$  相同，质量相近的粒子分为一组按照  $I_3 - Y$  排列出强子多重态图 A1.18。

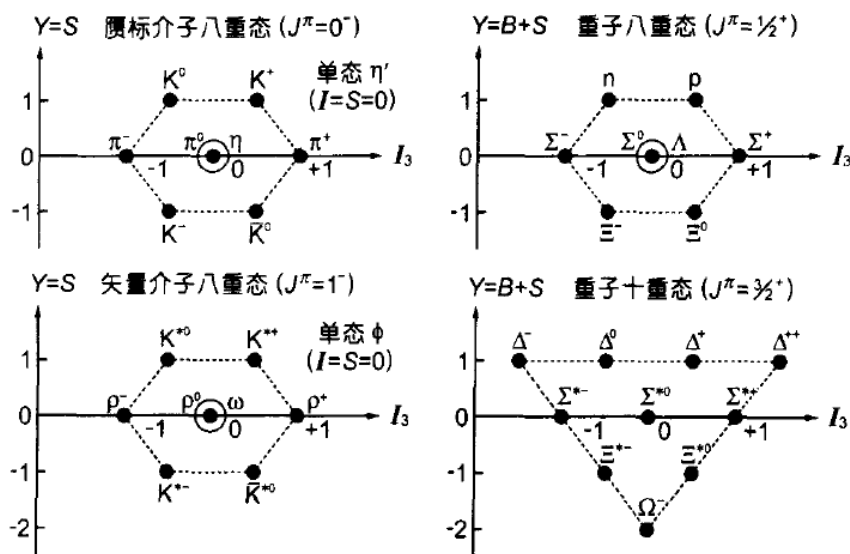


图 A1.18 强子按量子数  $Y$  和  $I_3$  的分类. (a) 赝标介子九重态 ( $1 \oplus 8$ ), (b) 矢量介子九重态 ( $1 \oplus 8$ ), (c) 重子八重态, (d) 重子十重态

- 高激发态不易分类
- 质量相近，忽略细节差异，找规律

(a) 赝标介子：八重态 + 单态  $J^P = 0^- \quad 8 \oplus 1 = 9$

(b) (轴) 矢量介子：八重态 + 单态  $J^P = 1^- \quad 8 \oplus 1 = 9$

(c) 重子八重态：  $J^P = \frac{1}{2}^+ \quad 8$

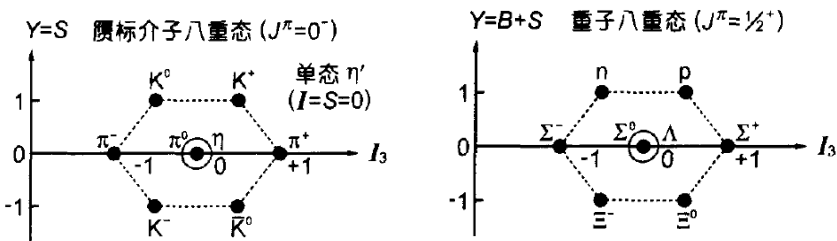
(d) 重子十重态：  $J^P = \frac{3}{2}^+ \quad 10$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right. \quad \text{介子宇称都是负} \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{array} \right. \quad \text{有混合}$$

赝标介子：  $\pi K, \eta, \eta' : I_3 = 0, \quad Y = 0$

|       | $\pi^0$ | $\pi^+$ | $\pi^-$ | $K^+$         | $K^-$          | $K^0$          | $\bar{K}^0$   |
|-------|---------|---------|---------|---------------|----------------|----------------|---------------|
| $I_3$ | 0       | 1       | -1      | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $Y=S$ | 0       | 0       | 0       | 1             | -1             | 1              | -1            |

矢量介子情况类似,  $\pi \rightarrow \rho \quad \eta \eta' \rightarrow \omega \phi \quad K \rightarrow K^*$



重子:  $J^P = \frac{1}{2}^+$   $N \Sigma \Xi \Lambda$

|         | p             | n              | $\Lambda$ | $\Sigma^+$ | $\Sigma^0$ | $\Sigma^-$ | $\Xi^0$       | $\Xi^-$        |
|---------|---------------|----------------|-----------|------------|------------|------------|---------------|----------------|
| $I_3$   | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0         | 1          | 0          | -1         | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ |
| $Y=S+1$ | 1             | 1              | 0         | 0          | 0          | 0          | -1            | -1             |

$J^P = \frac{3}{2}^+$

$$N \rightarrow \Delta \quad \Delta^- \Delta^0 \Delta^+ \Delta^{++}$$

$$\Sigma \rightarrow \Sigma^* \quad 3 \text{ 个} \quad \Xi \rightarrow \Xi^* \quad 2 \text{ 个} \quad \Omega \quad 1 \text{ 个?}$$

重子十重态的分类, 预言  $\Omega(sss)$  的存在, 1964 年, 实验发现, SU(3) 对称性的体现

Note:

- 1. 各图中, 位于平行于  $I_3$  轴的横线上的强子属于同一个同位旋多重态 (同位旋对称性)
- 2. 介子超多重态中, 有粒子和反粒子, 见量子数  $(I_3, Y) \leftrightarrow (-I_3, -Y)$
- 3. 重子超多重态中没有反重子, 反重子也有同样分类, 在此略去 这与正反物质不对称性 (正反粒子数目不相等) 无关

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} \quad Y = S + B$$

注意到 
$$\begin{cases} I_3, Y & \text{强守恒, 弱不守恒} \\ Q & \text{强, 弱都守恒} \end{cases}$$

- ① 核力的电磁无关性  $\rightarrow$  强相互作用具有 SU(2) 对称性 (I 与自旋有相同的结构)
- ② 当发现奇异粒子后 ( $K \Lambda$ ), 强相互作用中新的守恒量, U(1) 对称性。  
 $\Rightarrow$  寻找更高的对称性!!!

To find a large group, which contains  $SU(2) \otimes U(1)$  as a subgroup.

猜想:  $SU(3) \supseteq SU(2) \otimes U(1)$  同构.

7.3 夸克模型

以上分类显示出明显的 SU(3) 对称性，接下来我们根据强子的简单夸克模型和简单的群论知识来理解。

随着粒子的不断发现，人们开始怀疑“基本”粒子不再基本，而是具有内部结构，在这样的历史背景之下，夸克模型提出了 (Gell-Mann)

重子  $\equiv qqq$       介子  $\equiv q\bar{q}$

夸克有六种  $\left\{ \begin{array}{ll} uds & \text{质量轻, 常见} \\ c b t & \text{重味, heavy flavor, 本课程不提及, 提出夸克模型时,} \\ & \text{还没有发现它们} \end{array} \right.$

由于卡夸克禁闭在强子的内部，无法直接观测夸克的性质，只能有已知的强子的量子数简介确定夸克的量子数，见表 A1.7

表 A1.7 夸克和反夸克的量子数

| 名称                 | u             | d              | s              | $\bar{u}$      | $\bar{d}$      | $\bar{s}$      |
|--------------------|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $Q$                | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$  | $\frac{1}{3}$  |
| 自旋                 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$  | $\frac{1}{2}$  | $\frac{1}{2}$  | $\frac{1}{2}$  | $\frac{1}{2}$  |
| $I$                | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$  | 0              | $\frac{1}{2}$  | $\frac{1}{2}$  | 0              |
| $I_3$              | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0              | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$  | 0              |
| $S$                | 0             | 0              | -1             | 0              | 0              | 1              |
| $B$                | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$  | $\frac{1}{3}$  | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ |
| $Y$                | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$  | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$  |
| 有效质量<br>MeV/ $c^2$ | 300           | 300            | 500            | 300            | 300            | 500            |

- 1. 夸克电荷可以解释强子电荷情况
- 2. 夸克自旋为  $\frac{1}{2}$  才能保证最轻的重子自旋为  $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ ，最轻的介子自旋为 0 或 1
- 3. 重子的量子数  $B=1$ ，它由三个夸克构成，夸克重子数为  $\frac{1}{3}$
- 4. 夸克宇称为正，可以保证，最轻的重子宇称为正，最轻的介子宇称为负
- 5. 容易验证，盖尔曼-西岛关系对夸克也应该成立 (都是相加性量子数，应该无问题)

Example (利用夸克的量子数来解释强子的经验分类). SU(3) 对称性，夸克处于 SU(3) 群的基础表示，强子处于 SU(3) 群的伴随表示。

夸克的  $(I_3, Y)$  数值

$$\begin{array}{ll} u = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) & \bar{u} = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}) \\ d = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) & \bar{d} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}) \\ s = (0, -\frac{2}{3}) & \bar{s} = (0, \frac{2}{3}) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} u\bar{u}(0,0) & u\bar{d}(1,0) & u\bar{s}(\frac{1}{2},1) \\ d\bar{u}(-1,0) & d\bar{d}(0,0) & d\bar{s}(-\frac{1}{2},1) \\ s\bar{u}(-\frac{1}{2},-1) & s\bar{d}(\frac{1}{2},-1) & s\bar{s}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \otimes (\bar{u} \ \bar{d} \ \bar{s})$$

直积运算，并矢  $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$

# QCD 理论下的强子模型

## 8 QCD 的基本理论

量子色动力学（英语：Quantum Chromodynamics，简称 QCD）是一个描述夸克胶子之间强相互作用的标准动力学理论，它是粒子物理标准模型的一个基本组成部分。夸克是构成重子（质子、中子等）以及介子（ $\pi$ 、K 等）的基本单元，而胶子则传递夸克之间的相互作用，使它们相互结合，形成各种核子和介子，或者使它们相互分离，发生衰变等。多年来量子色动力学已经收集了庞大的实验证据。

量子色动力学是规范场论的一个成功运用，它所对应的规范群是非阿贝尔的  $SU(3)$  群，群量子数被称为“颜色”或者“色荷”。每一种夸克有三种颜色，对应着  $SU(3)$  群的基本表示。胶子是作用力的传播者，有八种，对应着  $SU(3)$  群的伴随表示。这个理论的动力学完全由它的  $SU(3)$  规范对称群决定。

QCD 具有特殊属性：

- 禁闭，这意味着当它们被分开时，夸克之间的力并不降低。因此，当你试图分开两个夸克时，在胶子场中的能量足够产生一个夸克对。所以夸克永远是以强子的方式束缚在一起，如形成质子和中子或  $\pi$  介子或 K 介子。虽然在解析上还未获得证明，但夸克禁闭被广泛地接受，因为它解释了为何寻找自由夸克一直失败，而这在格点量子色动力学中很容易展示出来。
- 渐近自由（反屏蔽效应），这意味着在非常高的能量反应中，夸克和胶子之间非常微弱的相互作用创造了夸克-胶子等离子体。量子色动力学的这一预测，在 1970 年代初由大卫·波利泽和弗兰克·维尔切克和大卫·格罗斯首次发现。因为这项工作，他们被授予 2004 年诺贝尔物理学奖。

Section ?? QCD 的基本理论  
Section ?? 夸克胶子动力学

Definition 8.1 (QCD 的 Lagrangian). QCD 的 Lagrangian 具有以下形式：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{QCD}} &= \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu (D_\mu)_{ij} - m\delta_{ij}) \psi_j - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \\ &= \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_i - g_s A_\mu^a \bar{\psi}_i \gamma^\mu T_{ij}^a \psi_j - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}\end{aligned}\quad (8.1)$$

其中

- $\psi_i$  是夸克场（下标  $ij$  表示不同的味）
- $D_\mu = \partial_\mu + ig_s T^a A_\mu^a$  是协变微分
- $g_s$  是  $SU(3)$  耦合常数
- $T^a$  是  $SU(3)$  的生成元盖尔曼矩阵（ $a=1, \dots, 8$  种）
- $A_\mu^a$  是胶子场
- $f^{abc}$  是  $SU(3)$  的结构常数

QCD 的基本参数是耦合常数  $g_s$ （或  $\alpha_s = g_s^2/4\pi$ ）和夸克的质量  $m_q$

背景  $\left\{ \begin{array}{l} \text{实验上提供了丰富的强子性质信息, 如强子质量, 自旋等} \\ \text{理论上, QCD 被公认为强相互作用的正确理论} \end{array} \right.$

期望  $\Rightarrow$  从夸克胶子的基本动力学理论——QCD 出发, 深入理解强子的结构。

However, 进程缓慢, 原因: QCD 跑动耦合常数

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{(11 - 2N_f/3)\ln(\frac{Q^2}{\Lambda^2})}, \quad \Lambda \approx 200 \text{ Mev}$$

强子尺寸  $\sim 1\text{fm} \sim 200\text{Mev}$ , 强子性质研究属于 QCD 非微扰区域。因此, 人们进行了两方面的努力:

$\left\{ \begin{array}{l} (1) \text{符合 QCD 基本精神的唯象模型和有效理论蓬勃发展——理论物理} \\ (2) \text{基于 QCD 第一原理的数值计算, 格点 QCD 进行计算——计算物理} \end{array} \right.$

A3 篇的势模型, 袋模型就是 (1) 的例子。

**势模型**: 一种唯象模型, 采用一种等效位势来描述价夸克 (组分夸克) 之间的相互作用。

讨论由夸克结合成的束缚态 (强子) 的性质, 包括相对论模型 (基于 Dirac 方程) 和非相对论模型 (基于薛定谔方程)

## 8.1 QCD 定性讨论

(1) 各种强子的性质以及强子分类可以从简单夸克模型给出定性的解释 (假设重子仅由三个自由组分夸克 (全同粒子) 构成)

(2) 高能电磁探针看到强子是由价夸克、海夸克和胶子组成。

强子中, 价夸克决定强子的类型和性质 (如简单夸克模型描述), 价夸克数目、种类确定; 但海夸克和胶子数目因为相互转化而不确定。

目前公认, 描述夸克-胶子相互作用的动力学理论是量子色动力学 (QCD), 它是非 Abel 规范理论 (属于量子场论)

**味自由度**: 夸克具有强子所具有的一些内禀量子数, 如电荷、同位旋、超荷等

分别为 u、d、s、c、b 和 t, 味性质是可以由实验观测到。

**色自由度**: 建立在实验的基础之上, 表征夸克的一种量子数, 如能量、动量和自旋等一样。

## 8.2 夸克的色自由度

### 8.2.1 实验基础

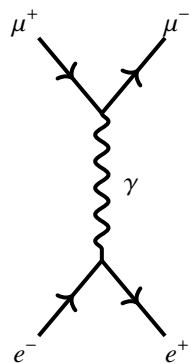
(1) **强子波函数** 之前介绍了, 基于夸克量子数的强子分类, 曾说明, 为了使禁闭在强子中的三个夸克波函数是反对称的, 要引入夸克色自由度, 且要求强子是色单态 (全反对称)。PPT 显示

(2) **正负电子对湮灭** 实验测量了下述两个过程的截面之比

$\sigma(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-)$  可查场论书籍

$$\sigma(e^+ e^- \rightarrow q \bar{q}) = N_c \sum_i e_i^2 \sigma(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-)$$





电磁作用

$$R = \frac{\sigma(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-)}{\sigma(e^+ e^- \rightarrow q \bar{q} \rightarrow \text{强子})}$$

$e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ : 电磁相互作用

$q \bar{q} \rightarrow \text{强子}$ : 强子化过程, 由色禁闭引起, 非微扰过程, 尚未解决

$e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ ,  $e^+ e^- \rightarrow q \bar{q}$  都是带电点粒子的电磁相互作用

带电: 与电荷相关 点: 没有形状因子 [ $F(q^2) = 1$ ]

其中  $i$  与夸克味自由度相关。

$$R = N_c \sum_i e_i^2$$

若质心系能量  $E_{cm} \sim 2 \text{ GeV}, \gg 2m_s$ , 则只能产生三种夸克 (u,d,s)

$$R = N_c \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \right] = \frac{2}{3} N_c$$

若质心系能量  $10 \text{ GeV} > E_{cm} > 2m_c$ , 则产生四种夸克 (u,d,s,c)

$$R = N_c \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \right] \times 2 = \frac{10}{9} N_c$$

若质心系能量  $E_{cm} > 10 \text{ GeV} > 2m_b$ , 则产生五种夸克 (u,d,s,c,b)

$$R = N_c \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 3 \right] = \frac{11}{9} N_c$$

表 0. 夸克质量和电荷的参考值

|    | $m_u$          | $m_d$           | $m_s$           | $m_c$          | $m_b$           | $m_t$          |
|----|----------------|-----------------|-----------------|----------------|-----------------|----------------|
| 质量 | 5 MeV          | 5 MeV           | 150 MeV         | 1 GeV          | 4 GeV           | 175 GeV        |
| 电荷 | $\frac{2}{3}e$ | $-\frac{1}{3}e$ | $-\frac{1}{3}e$ | $\frac{2}{3}e$ | $-\frac{1}{3}e$ | $\frac{2}{3}e$ |

对照实验数据: (PPT 显示, 图 2.15), 若无  $N_c$ , 显然低于实验数值, 要求  $N_c = 3$ , 为了, 拟合实验数值

$\Rightarrow$  夸克有三种颜色

3 是一个神奇的数字, 事不过三, 三人成虎, 三代夸克和轻子, 重要的事情说三遍

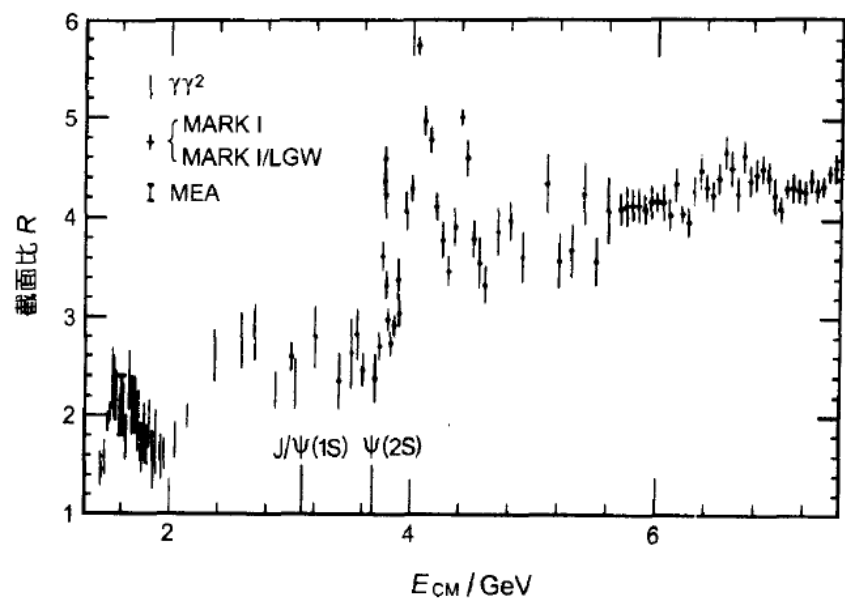


图 A2.15 实验测量的截面比  $R = \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{强子}) / \sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ . 数据引自 Review of Particle Properties; Phys. Rev., 1992, D45, No. 11

(3) 解释夸克结合的饱和性 引入色自由度, 还有利于解决夸克结合的饱和性问题, 目前已经发现的大量重子都由三个夸克组成, 介子都由一对正反夸克组成, 却没有发现由两夸克和四夸克组成的体系, 这表明夸克的结合是有饱和性的, 表述这种饱和性的一种方案就是结合成色单态 (色荷为 0) 是最稳定的

(4) 解释  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$  的衰变率

色 夸克所具有的一种内禀性质, 它不是通常意义之下的“颜色”, 只不过是借用的一个词汇, 用来表示夸克的一种内禀自由度。

引入这个自由度最初是为了解决强子模型中的统计困难。按照强子结构的夸克模型, 比较稳定的一批重子 ( $\frac{1}{2}^+$  八重态  $\frac{3}{2}^+$  十重态) 都是由三个夸克组成, 由此出发得到的大量结果都和实验符合的很好, 但却遇到了统计性质的困难, 夸克自旋为  $\frac{1}{2}$  应该遵循费米统计, 多粒子体系的波函数应该全反对称, 但是从目前已知的自由度看它们不可能全反对称, 引入自由度后, 色波函数反对称, 满足费米统计。

8.2.2 色自由度的数学描述  $\Rightarrow SU(3)_c$  群

夸克的色态只有三种, 用红、绿、蓝 ( $R, G, B$ ) 表示, 反夸克用反红、反绿、反蓝 ( $\bar{R}, \bar{G}, \bar{B}$ ) 表示

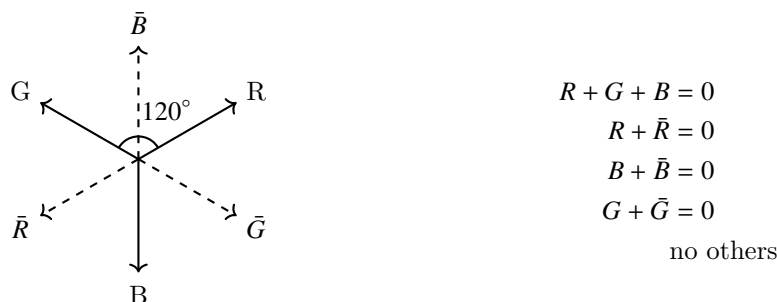
色量子数求和规则  $\rightarrow$  对称性  $SU(3)_{\text{色}}/SU(3)_c$

夸克的色只是借用光学中的名词, 内涵完全不同, 美术调色: 红 + 蓝 (1:1) = 紫色

色禁闭

- 实验基础: 实验上未观测到单个带色的夸克
- 数学定义: 一切可观测态都是色单态

这一命题尚未得到完全证明, 百万英镑难题



虽然色禁闭的机制现在尚不清楚，但人们普遍相信色禁闭的存在。

在强子层次，色禁闭表现为：强子是不带色的，色单态。

**重子** ( $qqq$ )：色空间的波函数， $[(RB - BR)G + (BG - GB)R + (GR - RG)B]/\sqrt{6}$

**介子** ( $q\bar{q}$ )： $(R\bar{R} + B\bar{B} + G\bar{G})/\sqrt{3}$

色禁闭允许  $qqq, q\bar{q}$  之类的组合，不允许  $qq, q\bar{q}\bar{q}, qq\bar{q}q$  之类的组合。如有发现则证明色禁闭机制不严格成立。

当然  $(qqq)^m, (q\bar{q})^n, m, n \geq 0$  整数，是被允许的，如奇特介子 ( $q\bar{q}qq\bar{q}$ )，奇特重子 ( $qqqqq\bar{q}$ )，重子态中混有 ( $qqqqq\bar{q}$ ) 等，都是正在讨论的问题。

小结：

我们知道：夸克有 6 种味道，u、d、s、c、b 和 t，当前课程仅涉及 u、d 和 s，构成味空间 SU(3) 对称性。

现在又知道：每种夸克有且仅有三种颜色 R、G 和 B，也称为三元色。若将

三元色作为基矢，构成一个三维的色空间， $\psi_c = \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$ ，色态的变化可以通过色空

间的转动来表现，即可以用 SU(3) 群来描述，称为色群/SU(3)<sub>c</sub>。

注意：

(1) 色，味自由度是相互独立的自由度，分别由色 SU(3) 群 (严格) 和味 SU(3) 群 (近似) 来保证各自的守恒。凡是定义或是引进一个量子数，必然有与之相对应的守恒律 (对称性) 来保证它是一个好量子数

(2) 同一种颜色的夸克可以有不同的味道，同一种味道的夸克可以有不同的颜色。所以对称性是  $SU(3)_c \otimes SU(3)_f$

(3) 味可测量 (由实验)，色不可测量 (色禁闭)。

色 SU(3) 对称性 → 体现为胶子的色相互作用

味 SU(3) 对称性 → 体现为强相互作用的手征对称性及其自发破缺 (A4)

## 8.3 带色的胶子

### 8.3.1 胶子

简介

胶子 (gluon)：传递强相互作用的玻色子，形象的比喻将夸克粘在一起，形成强子。

$m = 0 \quad S = 1$  类似于光子。夸克带色，强子无色，胶子带色。

让我们举个例子说明：重子的色波函数

$$(qqq)_{\text{单态}} = [(RB - BR)G + (BG - GB)R + (GR - RG)B]/\sqrt{6}$$

按照 QM, 每个夸克都有一定的概率处于 R、G、B 态, 概率是  $\frac{1}{3}$

夸克转变颜色的原因? 胶子

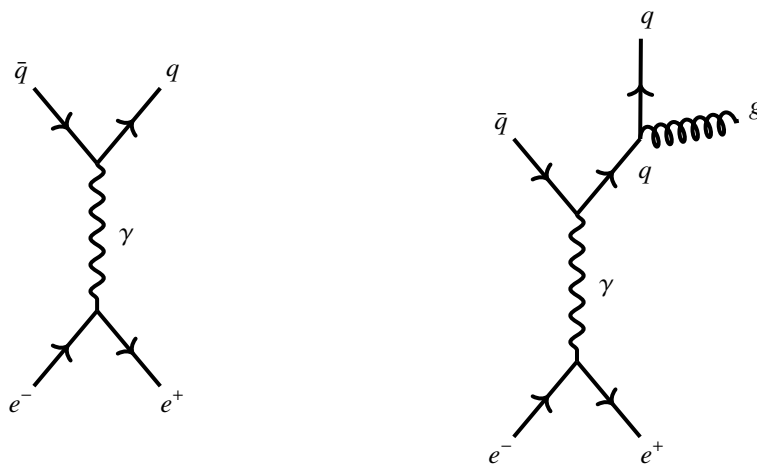
QCD: 夸克间的强相互作用是通过胶子来传递的, 称夸克间的强相互作用为色相互作用, 夸克的色量子数为色荷。

QED: 电子间的电磁相互作用是通过光子传递的, 称电子之间的电磁相互作用为味相互作用, 电子的味量子数为电荷。

Gell-mann QCD 出现以前, 所有的动力学称之为味动力学。

### 胶子存在的实验基础

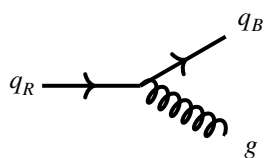
三喷注事件, DIS(1968),  $e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow q\bar{q}$



1968 年, DIS 实验 ( $e^-p$ ), 显示: 质子的能量只有一半被带电的点状粒子 (夸克) 携带, 另一半由中性无电磁相互作用的组分 (胶子) 所携带

1979 年, 高能正负电子对撞实验发现三喷注现象, 进一步显示胶子的存在。

在正反夸克的能量足够高的时候, 会产生方向相反的的两组强子喷注; 在少数情况下, 也会观察到三组强子喷注, 三喷注之间的角度关系与胶子的自旋为 1 相一致。



顶点处色荷守恒

夸克颜色变化  $R \rightarrow B$

胶子:  $R\bar{B}$  (在夸克处拿来 R, 并给予夸克 B)

胶子带复合色:  $R\bar{R}, R\bar{B}, R\bar{G}, B\bar{R}, B\bar{B}, B\bar{G}, G\bar{R}, G\bar{B}, G\bar{G}$

九种可能。

按群理解:  $\{3\} \otimes \{3\} = \{8\} \oplus \{1\}$

胶子性质 带复合色的胶子有 8 种,  $g_i (i = 1, \dots, 8)$  处于 SU(3) 群的伴随表示。(回忆强子)

八重态:

$$g_1 = R\bar{G} \quad g_2 = R\bar{B} \quad g_3 = G\bar{R} \quad g_4 = G\bar{B} \quad g_5 = B\bar{R} \quad g_6 = B\bar{G}$$

$$g_7 = (R\bar{R} - G\bar{G})/\sqrt{2} \quad g_8 = (R\bar{R} + G\bar{G} - 2B\bar{B})/\sqrt{6}$$

单态:

$$g_0 = (R\bar{R} + B\bar{B} + G\bar{G})/\sqrt{3}$$

色单态夸克不存在, 由于色单态的胶子不违反色禁闭, 它应该能够以自由粒子的形式存在, 并传递强子之间的相互作用, 如  $n-p$  作用, 它将导致强相互作用是一种长程力。但事实上, 核力是一种短程力。

除颜色自由度之外, 胶子不带电, 无质量, 自旋为 1  $\Rightarrow$  胶子有色无味。

$$\left. \begin{array}{l} \text{胶子无味} \Rightarrow \text{色相互作用的味无关性} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{夸克层次: 每种 (味) 夸克都可具有 R、G、B} \\ \text{三种颜色, 并通过胶子传递相同} \\ \text{的色相互作用} \\ \text{强子层次: 核力的味 (电荷) 无关性,} \\ \text{nn、pp、np 核力相同 (实验结果)} \end{array}$$

胶子无静止质量  $\Rightarrow$  夸克之间的色相互作用属于长程力 ( $> 1fm$  即称为长程力), 可以用色库仑势  $\propto \frac{1}{r}$  表示, 类似于光子。

胶子带色  $\Rightarrow$  胶子之间存在色相互作用, 即相互耦合, 不同于光子。

**色禁闭**的要求: 带色的单个胶子无法观测, 由几个胶子构成的无色束缚态 (饺子球) 可以存在; However, 无味, 难以测量。

理论上可以考虑胶球对于体系性质的影响, 再与实验相比较, 但原因不唯一, 目前并没有确切的证据。

**注意:** 色禁闭是一种长程的性质, 长程是指强子的尺度范围  $\sim fm$  量级。

## 8.4 渐进自由

QCD 的重要性质, 2004 年诺奖, Asymptotic Freedom

Frank Wilczek, David Gross, David Politzer (1973)

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{(11 - 2N_f/3)\ln(\frac{Q^2}{\Lambda^2})}$$

$\Lambda$  称为 QCD 标度参数, 由实验确定  $\Lambda_{QCD} \approx 200 Mev$

QCD 耦合常数**随能标跑动** (running coupling constant), 高能或是近距离时, 耦合弱; 低能或是远距离时, 耦合强。

形象理解: 夸克之间的相互作用, 像弹簧一样, 拉的远, 相互作用强, 两个夸克永远不能被分开。

高能相对论重离子碰撞实验可能实现渐进自由的物质, 称为夸克-胶子等离子体, 又称为物质的第五态 (固态、液态、气态、电磁等离子体)。

**渐进自由**又称为**反屏蔽现象**

对比于 QED 中, 电磁相互作用耦合常数, 随距离变化, 远距离衰减, 近距离增强。

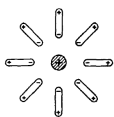


图 A2.19 电介质中的极化现象

例: 电介质中的正电荷, 它周围的电介质会有一定的取向, 这种极化分子存在着屏蔽效应, 测量得到的电荷值 (有效电荷  $Q_{eff}$ ) 将小于原来的值。

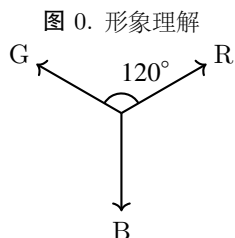
## 8.5 小结

### 夸克的色自由度

夸克的色态有三种： $R, G, B$   $R + G + B = 0$  "0" 指无色态，或色单态

反夸克的色态有三种： $\bar{R}, \bar{G}, \bar{B}$   $R + \bar{R} = 0, G + \bar{G} = 0, B + \bar{B} = 0$

$R, G, B$  构成  $SU(3)_c$  群的基础表示。



定义变换  $\hat{O}$

$$\hat{O}\psi_R = \begin{cases} \psi_G \\ \psi_B \\ \psi_R \end{cases}$$

### 胶子的色自由度

夸克颜色转变的原因是胶子，胶子带复合色，8 种颜色，处于  $SU(3)_c$  伴随表示

$$g_1 = R\bar{G} \quad g_2 = R\bar{B} \quad g_3 = G\bar{R} \quad g_4 = G\bar{B} \quad g_5 = B\bar{R} \quad g_6 = B\bar{G}$$

$$g_7 = (R\bar{R} - G\bar{G})/\sqrt{2} \quad g_8 = (R\bar{R} + G\bar{G} - 2B\bar{B})/\sqrt{6}$$

与八个 Gell-mann 矩阵相对应。

### 色禁闭

一切可观测的态都是色单态或称为无色态。QCD 的重要性质。

QCD 的另一个重要性质是**渐进自由**，见前文。

### 简单夸克模型

强子由自由的组分夸克构成。

重子 ( $qqq$ )  $\Rightarrow$

$$\psi_{\text{重}}^c = [(RB - BR)G + (BG - GB)R + (GR - RG)B]/\sqrt{6}$$

介子 ( $q\bar{q}$ )  $\Rightarrow$

$$\psi_{\text{介}}^c = (R\bar{R} + B\bar{B} + G\bar{G})/\sqrt{3}$$

### 量子场论

Yang-Mills 规范理论，成熟分支：QED 发展中分支：QCD(Gell-mann 起的名字)

QED  
量子电动力学

QCD  
量子色动力学

U(1) 规范理论

电磁相互作用

基础表示：电子

伴随表示：光子 ( $m=0, s=1$ , 无色无味)

电子-电子相互作用由光子传递

光子-光子无相互作用，无电荷禁忌

屏蔽现象

SU(3) 规范理论

强相互作用，对称色相互作用

基础表示：夸克

伴随表示：胶子 ( $m=0, s=1$  有色无味)

夸克-夸克相互作用由胶子传递

胶子-胶子之间有相互作用，色禁闭

反屏蔽现象 (渐进自由)

QCD 和 QED 都是根据实验现象，总结提升至理论层次，进而上升为动力学理论。

QED 建立的更早，在描述强相互作用时，经常模仿电磁相互作用，例如 Yukawa $\pi$  介子。

类比电子之间的电磁相互作用——电荷之间的作用势  $\Rightarrow$

夸克之间的色相互作用——色荷之间的作用势

电子之间的库仑势  $\Rightarrow$

夸克之间的色库仑势，单胶子交换过程： $V = C \frac{\alpha_s}{r}$

注意到，若  $\alpha_s$  为常数，则  $r \rightarrow \infty, V \rightarrow 0$  没由色禁闭

强子中，夸克色相互作用的唯象势： $V = C \frac{\alpha_s}{r} + Ar$ ，其中  $Ar$  是线性项，称为**康奈尔势**，它的正确性得到了 LQCD 的支持。

利用强子中夸克色相互作用来研究强子性质，这是强子势模型。

## 8.6 非相对论势模型

### 8.6.1 两个基本假设

(1) 束缚在强子内部的组分夸克做非相对论运动，服从薛定谔方程  $H\psi = E\psi$ ——运动学

夸克运动速度  $v \ll 1$  时， $E = \sqrt{p^2 + m^2} \approx m(1 + \frac{p^2}{2m^2}), E \approx m$ ，能量本征值，约为强子质量。

Note that: 这个近似在多大程度上成立？严格来说，应在相对论的框架之下计算  $v^2/c^2$  的期望值，已完成的计算表明，至少对于重夸克体系  $(c\bar{c}, b\bar{b}, t\bar{t})$ ， $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$  是满足的。

(2) 夸克之间的相互作用通过势函数来描述，并且利用二体势之和表示势能项——动力学

所以，哈密顿量

$$\mathcal{H} = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + \sum_{i < j} V_{ij}(\vec{r}_{ij})$$

QCD 中，夸克相互作用由胶子传递  $\xrightarrow{\text{替换为}}$  势 (夸克、胶子的运动分离，夸克处于势场中)

不同的势模型仅仅是采用夸克势函数  $V(\vec{r}_{ij})$  的具体形式不同，都必须满足 QCD 渐进自由和色禁闭的要求。

## 8.7 常用的势函数

(1) 采用跑动耦合常数  $\alpha_s(r)$

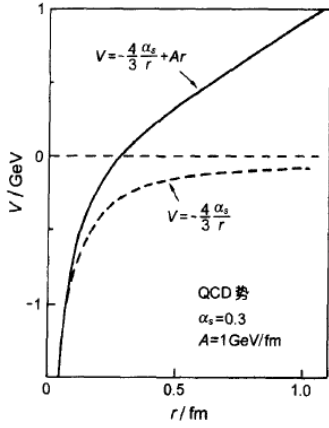


图 A3.1 夸克势 (A3.3) 式的形式. 其中取  $\alpha_s = 0.3$ ,  $A = 1 \text{ GeV/fm}$

渐进自由 (小尺寸): 仅考虑单胶子交换势

$$V^{OGEP} = C \frac{\alpha_s}{r}$$

one gluon exchange potential 色库仑势

色禁闭 (大尺寸):  $V^{conf} = Ar$

中间距离,  $V(r)$  采用内插法。

如最简单的情形:  $V(r) = C \frac{\alpha_s}{r} + Ar$

康奈尔势图 A3.1

如: Richardson 势:

$$V(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} V(\vec{q}) d^3\vec{q}$$

$$V(\vec{q}) = -\frac{4}{3} \frac{(4\pi)^2}{11 - 2/3N_f} \frac{1}{q^2 \ln(1 + q^2/\Lambda^2)}$$

$$\text{类似于 } \alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{11 - 2/3N_f} \frac{1}{\ln(Q^2/\Lambda^2)}$$

$$\text{当 } q^2 \ll \Lambda^2, \text{ 即 } r \rightarrow \infty, \quad \frac{1}{q^2 \ln(1 + q^2/\Lambda^2)} \approx \frac{1}{q^2 \ln(q^2/\Lambda^2)} \xrightarrow{\text{傅里叶变换}} \propto r$$

$$\text{当 } q^2 \gg \Lambda^2, \text{ 即 } r \rightarrow 0, \quad \frac{1}{q^2 \ln(1 + q^2/\Lambda^2)} \approx \frac{1}{q^2 \ln(q^2/\Lambda^2)} \xrightarrow{\text{傅里叶变换}} \propto \frac{1}{r}$$

可以证明, 它满足渐进自由和色禁闭的要求。

## 9 夸克胶子动力学讨论

**高能探针:** 高能电子束,  $\mu$  子束或是中微子束等。要求它们能量 (动能) 足够高, 以保证探针足够“细”。即, 德布罗意物质波  $\lambda$  非常短, ( $\lambda = h/p$ )

$$\lambda = \hbar c [(E + m_e c^2)^2 - (m_e c^2)^2]^{-\frac{1}{2}}$$

能量 = 动能 + 静止能量

高能情况, 可忽略静止质量,  $\lambda = \hbar c / \sqrt{E}$

例:  $E = 1 \text{ GeV}$   $\lambda = 0.2 \text{ fm}$

质子的电荷半径:  $0.85 \text{ fm}$   $\pi$  介子电荷半径:  $0.66 \text{ fm}$

$\Rightarrow E \gg 1 \text{ GeV}$  电子探针足以看到质子内部结构的细节。

为了从实验上检测核子内部的夸克结构, 已经用高能电子,  $\mu$  子, 中微子作为探针进行过很多高能实验。

通过比较不同散射和反应的结果, 可以得到比较完整的关于核子内部结构的信息。如, 结构常数, 味不对称性等。

电子重子共振, 反重子的寿命太短, 实验上更关注于质子, 中子和  $\pi$  介子的结构信息。



## 9.1 核子的结构常数

(1) 任何散射过程，一定包含弹性散射和非弹性散射

(2) 在低动量转移时，通过  $e-N$  弹性散射，研究了核子的电磁形状因子，并得到核子的电磁半径

(3) 当入射电子的能量提高，转移给核子的能量增加，非弹性散射逐渐变得重要（原子物理中，非弹性散射是指一个核子碰撞原子核，并使之破裂，类似于非弹性碰撞）

### 9.1.1 深度非弹性散射 (Deep Inelastic Scattering, DIS)

进一步提高入射电子的动量，交换的四动量  $Q^2 > 1 \text{ GeV}^2$  时，就进入了深度非弹性散射的区域。

这是电子的能量如此之高，可以深入质子内部，甚至可以激发正反粒子对 ( $q\bar{q}$ )，末态产生其他种类的强子。

DIS——1990 诺奖，J.I.Freedman, H.W.Kendall, R.E.Taylor(杨的博士导师)

电子-质子非弹性散射使粒子物理与核物理进入了夸克-胶子的时代，正式对大量  $e-p$  DIS 的研究，费曼等人建立了部分子模型。而 QCD 正是从这个模型基础之上发展而来的。在弹性散射的过程中，对于确定的入射能量，确定的散射角，出射电子的能量是固定

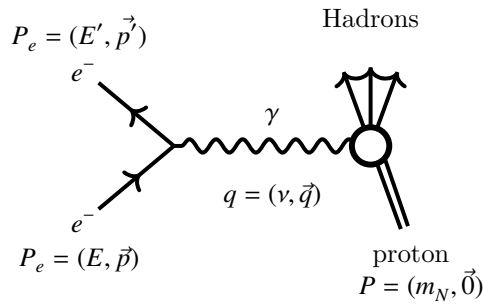


图 0.  $e-p$  DIS 费曼图

的。在 DIS 过程中，出射电子的能量  $E'$  是不固定的，而是有一定的能量范围。

实验上测得双微分散射截面  $\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'}$ ，它与能量间隔  $E' \sim E' + dE'$  发生散射的概率成正比。

类似于形状因子：

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \left[ W_1(Q^2, \nu) + 2W_2(Q^2, \nu) \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (9.1)$$

$W_1, W_2$  称为结构常数，量纲为  $[E^{-1}]$ ，与  $Q^2, \nu$  有关， $Q^2, \nu$  各自独立。（不看末态产物，与弹性散射具有相同的费曼图，有时也称为非弹性散射形状因子）。

虽然定义： $Q^2 = -\nu^2 + \vec{q}^2$ ，虚光子，无需满足  $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ 。

末态不变质量： $M^2 = (p + q)^2 = M_N^2 - Q^2 + 2m_N\nu$

弹性散射： $M = m_N$   $Q^2 = 2m_N\nu$ ，末态仅一个核子。

非弹性散射： $M > m_N \Rightarrow 2m_N\nu - Q^2 > 0$   $Q^2, \nu$  为独立变量 末态可以是质子的激发态。

可以从正反夸克对产生的角度理解  $M > m_N$ 。

第一次 DIS 实验, 20 世纪 60 年代左右, 在 SLAC(Stanford Linear Accelerator Center) 用直线电子加速器完成 (1990 年诺奖)

$$\frac{d\sigma^2}{d\Omega dE'} / \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} \quad (9.2)$$

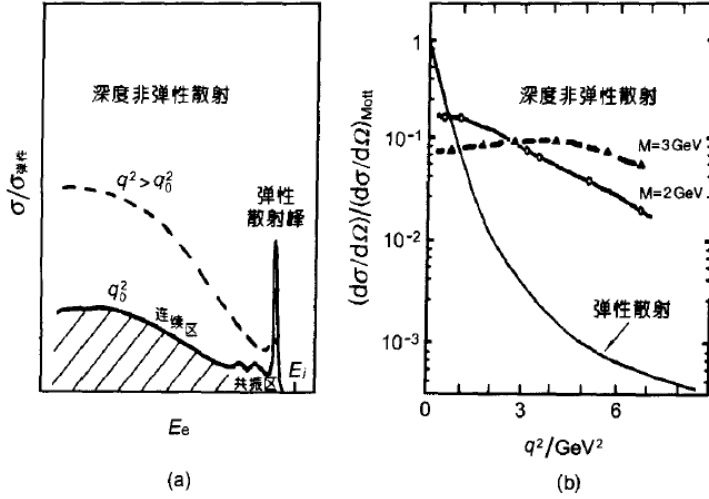


图 0. 弹性散射和非弹性散射截面的比较, 入射电子能量 4 ~ 18 Gev

结果:

(1) 弹性非弹性散射差异较大。

(2)  $M > 3 \text{ GeV}/c^2$ ,  $\frac{d\sigma^2}{d\Omega dE'} / \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott}$ , 几乎与  $Q^2$  无关。

通过分析大量高精度的实验数据, 为了比较不同高能 DIS 实验结果定义

Bjorken Scaling Variable (标度变量)  $x = \frac{Q^2}{2m_N \nu}$

对于非弹性散射:  $0 < x < 1$ , 弹性散射:  $x = 1$ ,  $x$  越小, 越 deep, 看到更深层次的内部结构;  $x$  越大, 越接近弹性散射。

$$\nu = E - E' \quad Q^2 = 4EE' \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad E' < E$$

$$x = \frac{4EE' \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2m_N(E - E')} \quad E' \uparrow, x \uparrow \quad E' < E$$

定义无量纲的结构函数:

$$F_1(x, Q^2) = m_N W_1(x, Q^2) \quad F_2(x, Q^2) = \nu W_2(x, Q^2)$$

实验发现:

(1)  $F_2(x, Q^2)$ , 给定  $x$ , 与  $Q^2$  几乎无关, 庄书 Fig7.4 和 A2.3, 显示于 PPT

(2)  $F_2(x, Q^2) = 2xF_1(x, Q^2)$ , 称为 Callan-Gross relation。

实验结论:

(1) Nucleon has a sub-structure made up of free point-like constituents. 费曼称之为部分子 (Parton), 现在认为, parton 包括 quark 和 gluon。

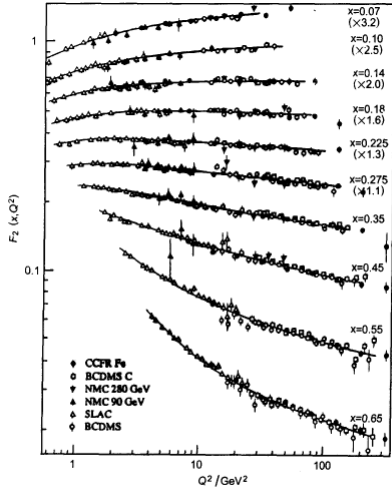


图 A2.3 对十个不同的  $x$  值由靶测量得到的核子结构函数  $F_2(x, Q^2)$  随转移动量  $Q^2$  的变化。图中数据是各家实验结果的综合(取自文献[4])

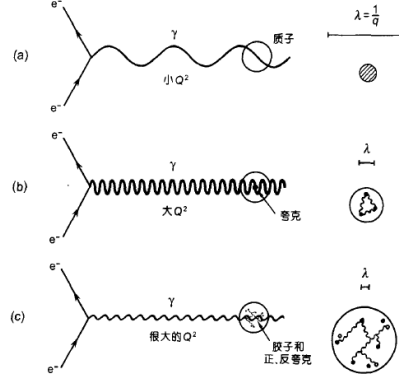


图 A2.9 不同  $Q^2$  下虚光子分辨本领示意图。(a) 小  $Q^2$  (虚光子波长  $\lambda$  较长), 只能看到核子整体; (b) 大  $Q^2$  ( $\lambda$  小), 可分辨核子内的夸克; (c) 很大的  $Q^2$  (很短的  $\lambda$ ), 可分辨核子内胶子的产生、湮没和正反夸克对(●夸克, 反夸克)

(2) The point-like constituents of the nucleon have spin  $\frac{1}{2}$ , 夸克自旋  $\frac{1}{2}$ , 实验证据理解: 回忆形状因子

$$F(q^2) = \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} d\vec{r} \quad \text{点粒子: } \rho(\vec{r}) = \delta(\vec{r}) \Rightarrow F(q^2) = \text{Constant} \quad (9.3)$$

以 (1) 结论为基础, 入射电子与质子内的部分子点粒子散射 (费曼 idea), 所发生的散射必定是弹性散射。则: 将 e-p 散射, 当做 e-部分子散射, 把非弹性散射过程, 近似的处理为弹性散射。

自旋为  $\frac{1}{2}$  的粒子的散射公式:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} (1 + 2\tau \tan^2 \frac{\theta}{2}) \\ \Rightarrow \frac{W_1}{W_2} &= \tau \quad \tau = \frac{Q^2}{4m_t^2} \quad m_t \text{ 为靶粒子质量} \\ F_1 &= m_N \cdot W_1 \quad F_2 = \nu W_2 \\ \Rightarrow \frac{F_1}{m_N} \cdot \frac{\nu}{F_2} &= \tau \\ \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} &= \tau \cdot \frac{m_N}{\nu} = \frac{Q^2}{4m_t^2} \cdot \frac{m_N}{\nu} = \frac{Q^2}{4m_N \nu} \cdot \frac{m_N^2}{m_t^2} = \frac{x m_N^2}{2 m_t^2} \\ \text{弹性散射: } \nu &= \frac{Q^2}{2m_t} \quad x = \frac{Q^2}{2m_N \nu} = \frac{Q^2}{2m_N \cdot \frac{Q^2}{2m_t}} = \frac{m_t}{m_N} \\ \therefore \frac{F_1}{F_2} &= \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2x} \end{aligned} \quad (9.4)$$

DIS 实验为核子内存在夸克提供了最早的实验证据。

1969 年, 费曼提出了部分子模型, 认为强子是由许多带点点粒子构成的, 这些粒子称为部分子。

布约肯利用流代数求和规则对实验结果进行分析, 并解释了标度无关性, 但由于流代数是抽象的数学方法, 他的工作一直未得到人们的理解, 直到费曼提出部分子模型, 上述介绍是费曼的部分子模型。

**实验发现：**

(3) 标度不变性的破坏。

$F_2(x, Q^2)$  并不是完全不随着  $Q^2$  的平方发生变化，而是缓慢而明显的改变。图 A2.3

$x < 0.2$ ,  $F_2$  随  $Q^2$  增加而增加,  $x > .2$ ,  $F_2$  随  $Q^2$  增加而减小。

由此得出, point-like 结论并不会完全准确。

**实验结论：**

(3)  $Q^2$  增加, 虚光子的分辨率逐渐增加, 德布罗意波长减少, 可以依次分辨出核子结构的细节, 图 A2.9, 能标不同看世界的分辨率不同。

定性上说:

图 (b) 对应着标度不变性的物理图像。

图 (c) 对应于 DIS 实验, 当  $Q^2$  很大时, 明显表现出, 标度不变性被破坏的现象。即在  $Q^2$  很大的情况之下, 虚光子可以探知核子内部夸克之间的相互作用, 包括胶子的发射和吸收, 以及正反夸克对的产生。

**总结：**

现代物理认为, 核子的夸克结构并不简单, 它是三个价夸克 + 正反夸克对 + 胶子构成的复合体。

**9.2 强子的质量和磁矩****9.2.1 强子的质量**

组成强子系统的夸克都具有“色荷”, 可以想象与夸克自旋对应的形成一个具有强相互作用特征的“色矩”。这种色矩与构成强子的夸克 (反夸克) 的自旋态直接相关, 它们的相互作用形式。

$$\Delta E = A \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{m_1 m_2}, A = \frac{8}{9} \alpha_s (4\pi) |\Psi_{n00}(0)|^2 \quad (9.5)$$

$$\Delta E = A' \left( \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{m_1 m_2} + \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_3}{m_1 m_3} + \frac{\vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3}{m_2 m_3} \right), A = \frac{4}{9} \alpha_s (4\pi) |\Psi_{n00}(0)|^2 \quad (9.6)$$

简单认为, 强子的质量是由构成它的夸克的质量再加上上述附加能:

$$M_{meson} = m_1 + m_2 + A \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{m_1 m_2} \quad (9.7)$$

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{1}{2} (J^2 - S_1^2 - S_2^2) = [J(J+1) - S_1(S_1+1) - S_2(S_2+1)] \frac{\hbar^2}{2} = \begin{cases} +\frac{\hbar^2}{4}, J=1 \\ -\frac{3\hbar^2}{4}, J=0 \end{cases} \quad (9.8)$$

组成夸克的质量分别选为:

$$m_u = m_d = 310 \text{ MeV}/c^2, m_s = 483 \text{ MeV}/c^2 \quad (9.9)$$

由上式和实验测得的介子质量拟合, 给出参数:

$$A = \left( \frac{2m_u}{\hbar} \right)^2 160 \text{ MeV}/c^2 \quad (9.10)$$

同理

$$M_{baryon} = m_1 + m_2 + m_3 + A' \left( \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{m_1 m_2} + \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_3}{m_1 m_3} + \frac{\vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3}{m_2 m_3} \right), A = \frac{4}{9} \alpha_s (4\pi) |\Psi_{n00}(0)|^2 \quad (9.11)$$

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_3 + \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3 = \frac{1}{2} (J^2 - S_1^2 - S_2^2 - S_3^2) \quad (9.12)$$

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_3 + \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3 = \frac{\hbar^2}{2} (J(J+1) - \frac{9}{4}) = \begin{cases} \frac{3}{4} \hbar^2, J = \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{4} \hbar^2, J = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (9.13)$$

组成夸克的质量分别选为:

$$m_u = m_d = m_n = 363 \text{ MeV}/c^2, m_s = 583 \text{ MeV}/c^2 \quad (9.14)$$

$$A' = \left( \frac{2m_u}{\hbar} \right)^2 50 \text{ MeV}/c^2 \quad (9.15)$$

### 9.2.2 强子的磁矩

(略)

# 手征对称性

## 10 守恒流与 Nöther 定理

**Definition 10.1 (Nöther 定理).** 对于每个局部作用下的可微对称性，存在一个对应的守恒流。

**Proof.** 考虑场量  $\phi(\mathbf{x}, t)$  是运动方程的解，则作用量变分  $\delta S$  满足：

$$\delta S = \frac{1}{c} \int d^4x \partial_\mu j^\mu \quad (10.1)$$

其中

$$j^\mu = \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \phi + \mathcal{L} \delta x^\mu \right) \quad (10.2)$$

我们称之为 Nöther 定理流。Nöther 在 1918 年得到了重要结论：若场的一个连续变换  $\phi(x) \rightarrow \phi'(x')$  保持作用量  $S$  不变，则存在一个与此变换相应的守恒流  $j^\mu$  使得满足

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (10.3)$$

□

事实上，由于

$$\bar{\delta} \phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) = [\phi'(x) - \phi(x)] - [\phi'(x) - \phi(x')] \approx \delta \phi - \partial_\nu \phi \delta x^\nu \quad (10.4)$$

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \phi - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\nu \phi - \mathcal{L} g_\nu^\mu \right) \delta x^\nu \quad (10.5)$$

注意到上述式子中  $\delta \phi \delta x^\mu$  已经不是任意的变分，而是保持 Euler-Lagrange 方程不变情况下的，一般的来说第一项与旋转与 boost 有关，第二项与时空的平移有关，我们将在讨论 Lorentz 群的部分进行详细的讨论。对于守恒流  $j^\mu(x)$  在全空间中积分，

$$\int d^3x \frac{\partial}{\partial t} j^0(x) + \int d^3x \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (10.6)$$

利用 Gauss 定理，将第二项换成在无限远处的面积分，则这一部分趋近于零，我们得到了一个守恒荷  $Q = \int d^3x j^0(x)$  作为一个典型，我们考察四维时空的平移不变性，则我们得到的守恒流是我们很熟悉的能量-动量张量

$$T_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\nu \phi - g_\nu^\mu \mathcal{L} \quad (10.7)$$

Noether 定理的另外一种典型的例子是所谓的  $U(1)$  整体规范不变，

以复 Klein-Gordon 场为例，其 Lagrangian 具有形式

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^2 \quad (10.8)$$

U(1) 整体规范不变保证了在做下列规范变换时，系统的 Lagrangian 不变

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{iq}\phi \quad (10.9)$$

$$\delta\mathcal{L} = iq\partial_\mu[\phi^*\partial^\mu\phi - (\partial^\mu\phi^*)\phi] \quad (10.10)$$

于是可以构造

$$j^\mu = iq[\phi^*\partial^\mu\phi - (\partial^\mu\phi^*)\phi] \quad (10.11)$$

与之对应的是一个守恒荷 Q，如果我们将其理解为电荷，那么这个复 Klein-Gordon 场则可以描述携带电荷的标量粒子。这种做法也可以用于描述电子的 Dirac 场上去，这就是我们理解电子携带电荷的机制。我们来普遍的讨论场所对应的流：

自由粒子的 Schrödinger Equation

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\varphi + \frac{\nabla^2}{2m}\varphi &= 0 \\ i\frac{\partial}{\partial t}\varphi^* + \frac{\nabla^2}{2m}\varphi^* &= 0 \quad (1) \\ -i\varphi\frac{\partial}{\partial t}\varphi^* + \varphi\frac{\nabla^2}{2m}\varphi^* &= 0 \quad (2) \end{aligned}$$

(1) - (2)

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\varphi\varphi^* + \frac{\nabla^2}{2m}\varphi\varphi^* - \varphi\frac{\nabla^2}{2m}\varphi^* &= 0 \\ i\frac{\partial}{\partial t}\varphi\varphi^* + \frac{\vec{\nabla}}{2m}[(\vec{\nabla}\varphi)\varphi^* - \varphi(\vec{\nabla}\varphi^*)] &= 0 \end{aligned}$$

如果记作：

$$\rho = \varphi\varphi^* \quad \vec{j} = \frac{-i}{2m}[(\vec{\nabla}\varphi)\varphi^* - \varphi(\vec{\nabla}\varphi^*)]$$

则可以得到如下方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

连续性方程，粒子数守恒，U(1) 对称性

$$\partial_\mu j_\mu = 0$$

自由粒子的 Dirac Equation

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi &= 0 \\ \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu + m) &= 0 \quad \text{伴随方程} \\ \bar{\psi}(i\gamma^\mu\overrightarrow{\partial}_\mu - m)\psi &= 0 \quad (1)' \\ \bar{\psi}(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m)\psi &= 0 \quad (2)' \end{aligned}$$

(1)' + (2)'

$$\begin{aligned} \bar{\psi}i\gamma^\mu\overrightarrow{\partial}_\mu\psi + \bar{\psi}i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu\psi &= 0 \\ i\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) &= 0 \end{aligned}$$

如果记作：

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

则可以得到如下方程

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

粒子数密度： $j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi = \rho$

粒子流： $\vec{j} = \bar{\psi}\vec{\gamma}\psi$

粒子数守恒，U(1) 对称性。

$j^\mu$  称为流密度或矢量流密度

$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  为双线性算符，是洛伦兹变换下的矢量

**轴矢流** 可以定义轴矢流:  $\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$  或  $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5 \quad (\gamma^5)^2 = I_{4\times 4}$$

$$j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$$

$$\begin{aligned} i\partial_\mu j_5^\mu &= i(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu\gamma^5\psi + i\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5(\partial_\mu\psi) \\ &= i(\partial_\mu \bar{\psi})\gamma^\mu\gamma^5\psi - m\bar{\psi}\gamma^5\psi \\ &= -m\bar{\psi}\gamma^5\psi - m\bar{\psi}\gamma^5\psi \\ &= -2m\bar{\psi}\gamma^5\psi \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0 \\ \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu + m) = 0 \end{cases}$$

当粒子质量为 0 时,  $i\partial_\mu j_5^\mu = 0$

轴矢流守恒  $\rightarrow$  对称性: **手征对称性**

## 11 手征对称性

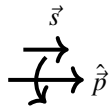
### 11.1 手征

**Definition 11.1 (手征).** 指自旋为  $\frac{1}{2}$  的粒子有两种独立的状态, 对于这两种状态的一种相对论不变的区别, 称为**手征**。两种自旋状态称为左旋和右旋。

对于以光速运动的零质量粒子, 左旋和右旋的物理意义分别为粒子的自旋与运动方向相反和相同。

$$\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\rho|} = \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \quad \text{手征算符} \quad [\vec{\sigma} \cdot \hat{p}, H] = 0 \quad \text{守恒量} \quad (11.1)$$

正手征  $\Leftrightarrow$  右旋



负手征  $\Leftrightarrow$  左旋

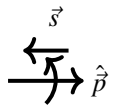


图 0. 旋转方向垂直直面向外

图 0. 旋转方向垂直直面向内

(1) 质量为零: 螺旋度算符  $\rightarrow$  手征算符;

Dirac 方程的解:  $\lambda_+ \rightarrow$  右旋  $\lambda_- \rightarrow$  左旋

(2) 一般情况 ( $m = 0, m \neq 0$ ) 手征算符定义为  $\gamma^5$

$$\gamma^5 \begin{pmatrix} \varphi \\ \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \varphi \\ \varphi \end{pmatrix}$$

当  $m = 0$  时,

$$\begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \varphi \\ \varphi \end{pmatrix}$$



两种定义一致,  $\gamma^5$  只有手征算符的定义, 并推广到  $m \neq 0$  中使用。

对应于前面的守恒流  $j_5^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi$

定义手征变换  $U = e^{i\theta\gamma^5}$

## 11.2 $\gamma^5$ 的本征值, 本征态

$$\gamma^5 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \lambda_5 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \pm 1 \quad \text{二重简并}$$

$$\text{本征态: } u_5^+ = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \\ b \end{pmatrix} \quad u_5^- = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -a \\ -b \end{pmatrix}$$

$$\text{令 } \phi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{则} \quad \begin{pmatrix} \phi \\ \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ -\phi \end{pmatrix}$$

$\phi$  的具体形式无法确定, 与二重简并相关

定义手征投影算符

$$P_L = \frac{1 - \gamma^5}{2} \quad P_R = \frac{1 + \gamma^5}{2} \quad P_L + P_R = 1$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

验证投影算符定义

任意四分波函数  $u = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$

$$u_R = P_R u = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varphi + \chi \\ \varphi + \chi \end{pmatrix} \quad \gamma^5 \text{ 的本征态, 本征值为 } 1$$

$$u_L = P_L u = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varphi - \chi \\ \varphi - \chi \end{pmatrix} \quad \gamma^5 \text{ 的本征态, 本征值为 } -1$$

$\gamma^5$  的本征值为  $\pm 1$  本征态  $u_L, u_R$

## 11.3 手征变换

$$U(\theta) = e^{i\theta\gamma^5} \rightarrow j_5^\mu = \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi \quad (11.2)$$

自由狄拉克方程具有手征对称性? 对应的守恒流是什么?

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5 \quad \gamma^5 \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^5 \quad (11.3)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \vec{\partial}_\mu - m)\psi \\
\psi &\rightarrow \psi' = e^{i\theta\gamma^5}\psi \\
\bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{i\theta\gamma^5} \\
\mathcal{L}' &= \bar{\psi}e^{i\theta\gamma^5}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)e^{i\theta\gamma^5}\psi \\
&= \bar{\psi}i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}e^{i\theta\gamma^5}e^{i\theta\gamma^5}\psi
\end{aligned} \tag{11.4}$$

当  $m = 0$ ,  $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$ , 称为体系具有手征对称性

当  $m \neq 0$ ,  $\mathcal{L}' \neq \mathcal{L}$ , 称为体系手征对称性明显破缺  $\left\{ \begin{array}{l} (1) m \text{较小时候, 称为近似的} \\ \text{手征对称性} \\ (2) m \text{较大时候, 无手征对称性} \end{array} \right.$

$$\begin{aligned}
\text{Dirac} \Delta\psi &= i\theta\gamma^5\psi \\
j^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \psi)} \Delta\psi \\
&= \bar{\psi}i\gamma^\mu i\theta\gamma^5\psi \\
&= \theta\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi
\end{aligned} \tag{11.5}$$

对应于之前讨论的  $j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$

**结论：**零质量 Dirac 粒子具有手征对称性，轴矢流 ( $j_5^\mu C$ ) 守恒。

夸克： $S = \frac{1}{2}$ ，是 Dirac 粒子，手征对称性如何？

## 11.4 夸克体系的手征对称性

$$m_u \approx m_d = 5 \text{ Mev} \quad m_s \approx 175 \text{ Mev} \quad m_c \approx 1 \text{ GeV} \tag{11.6}$$

仅考虑轻质量夸克 u、d 和 s 时，称夸克具有近似的手征对称性。

夸克具有**色、味、手征**自由度。

(1)(u,d) 两味夸克体系，忽略 u、d 夸克的流质量，则体系具有手征对称性和同位旋对称性

$$\begin{array}{ll}
u\text{夸克: } u_L & u_R \\
d\text{夸克: } d_L & d_R
\end{array} \quad \text{且} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \text{构成同位旋二重态}$$

$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \end{pmatrix}$  左旋，右旋夸克分别独立的按照 SU(2) 味群变换。

$$SU(2)_L \otimes SU(2)_R \xrightarrow{\text{对应的变换}} U(\theta) = e^{i\gamma^5 \vec{\tau} \cdot \vec{\theta}/2} \tag{11.7}$$

$\vec{\tau}$  为同位旋算符。

**注：** $\gamma^5, \vec{\tau}$  作用于 Dirac 空间和同位旋空间，二者并无关系 (并矢)

(2)(u,d,s) 三味体系

$$SU(3)_L \otimes SU(3)_R \Rightarrow U(\theta) = e^{i\gamma^5 \vec{\lambda} \cdot \vec{\theta}/2} \tag{11.8}$$

$\vec{\lambda}$  为 Gell-mann 矩阵。

文献中将  $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ ,  $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$  简称为手征对称性 (近似的) 手征对称性, 色禁闭, 渐进自由是 QCD 的三个基本特征。

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_q + \mathcal{L}_q g + \mathcal{L}_g \quad (11.9)$$

仅包含 u、d 和 s 时, QCD 拉氏密度具有手征对称性。

However, 实验上 (如强子质量) 并未出现手征对称性  $\rightarrow$  左旋夸克和右旋夸克构成的介子相同。

具体来说: 未发现具有相反宇称的多重简并强子。(应该从双线性算符解释, 超出课程讲解范围, 见 ch-4“粒子与场”)

原因: 手征对称性自发破缺

小结: 强相互作用

当  $m_u = m_d = m_s = 0$ ,  $\mathcal{L}_{QCD}$  具有严格的手征对称性。

标准模型里:  $m_u, m_d, m_s \neq 0$ ,  $\mathcal{L}_{QCD}$  的手征对称性“小小”的明显破缺, 称为近似的手征对称性。

实验上, 未体现近似的手征对称性, 手征对称性自发破缺。

## 12 对称性自发破缺

1. 诺特定理的说明: 为计算简单 (后面应用方便), 考虑的是与时空无关的变换, 更一般的说明, 见发下的讲义“附录 A 诺特定理”
2. 手征对称性自发破缺: 理论上, QCD 具有 (近似的) 手征对称性, 但是, 实验上未发现具有相反宇称的多重简并介子态。(应该从双线性算符解释, 超出课程讲解范围, 见 ch-4“粒子与场”)

与之对应的物理问题:  $m_\pi \ll m_N$ ,  $m_q \gg m_0$

可以这样进行说明:

标量:  $\bar{\psi}\psi \equiv A$

赝标量:  $\bar{\psi}\gamma^5\psi \equiv B$  例如  $\pi$  介子,  $\bar{\psi}\gamma^5\tau\psi$

对 A 进行手征变换 (无穷小变换)

$$\bar{\psi}(1 + i\theta\gamma^5)(1 + i\theta\gamma^5) \approx \bar{\psi}\psi + 2i\theta\bar{\psi}\gamma^5\psi \equiv A + 2i\theta B \equiv C$$

A 和 B 质量相同, 若体系具有手征对称性, A 和 C 简并, 质量相同  $\Rightarrow$  注意到 A 和 B 宇称相反。

Dirac 方程:

$$i\gamma^\mu\partial_\mu - m\psi = 0$$

$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\vec{\partial}_\mu - m)\psi$  为什么不为 0?

## 12.1 对称性自发破缺的描述

### 12.1.1 量子力学

以 QM 语言:

$$\langle \varphi | \hat{H} | \varphi \rangle \quad \text{观测量} \quad \text{量子平均} + \text{量子平统计}$$

$\hat{H}$  具有对称性, 观测量不一定体现对称性, 还要看  $|\varphi\rangle$  是否具有对称性, 若  $UHU^\dagger = H, U|\varphi\rangle = |\varphi\rangle$  称为**严格的对称性**, 若  $UHU^\dagger \neq H$  称为**对称性明显破缺**, 若  $UHU^\dagger = H, U|\varphi\rangle \neq |\varphi\rangle$  称为**对称性自发破缺**。

### 12.1.2 力学

再举一个力学中最直观的例子:

若在酒瓶底部有一个小玻璃球 (图 A4.3, PPT 显示)

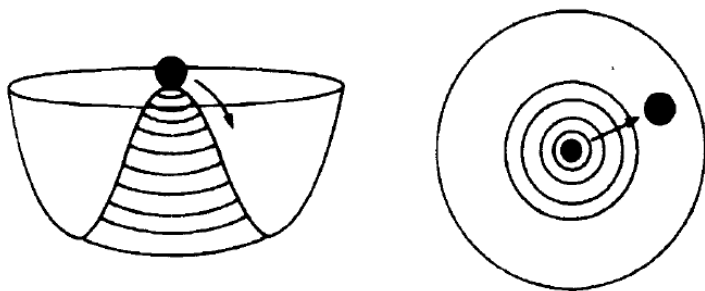


图 A4.3 小球初始位置是对称的, 但能量并非最小, 某种小的扰动将会破坏转动对称性, 使系统变到能量最低的态

若小球位于瓶底突起顶部的中心位置, 显然体系具有转动对称性, 然而这并不是体系的能量基态, 一个小的扰动就会使小球滚落到势能最低处, 此时为基态, 但体系处于基态时候, 不再具有转动对称性。

$$\left. \begin{array}{l} \text{势能} \rightarrow \text{转动对称性} \\ \text{基态} \rightarrow \text{不具有转动对称性} \end{array} \right\} \quad \text{这称为对称性的自发破缺}$$

### 12.1.3 量子场论

对称性自发破缺的定义是: 尽管体系的拉氏密度  $\mathcal{L}$  具有对称性, 但体系的基态 (真空态) 是不对称的。

任何粒子都是对应场的量子, 场的基态 (又称真空态) 是能量最低的态。有些场, 能量最低态对应场的平均值为 0; 有些场, 能量最低态对应场的平均值不为 0。

例:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V \quad V = \frac{\mu^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4$$

$\mu^2, \lambda$  为势能项中的参数, 且  $\lambda > 0$ , 以保证势能存在最低值。

$\phi^2$  项对应于质量项,  $\phi^4$  代表相互作用。

由拉氏密度可知, 当  $\phi \rightarrow -\phi$  时,  $\mathcal{L}$  不变。基态  $\rightarrow$ ,  $E$  最小。

为简单计算, 考虑时空均匀的经典实标量场

$$E = \langle H \rangle_{\text{量子统计平均}} \quad H = T + V$$

对于时空均匀场,  $\partial_\mu = 0$

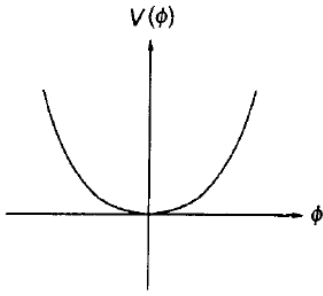
$$E = \langle V \rangle_{\min} = \left( \frac{\mu^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4 \right)_{\min} \quad \langle \phi \rangle = \phi \quad \text{经典场}$$

寻找  $E = \frac{\mu^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4$  的最小值, 对应的状态, 即是体系的基态。

当  $\mu^2 > 0$  时

$$V|_{\min} = V(\phi = 0)$$

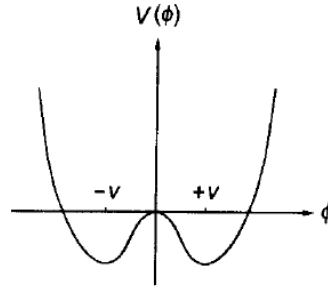
基态具有对称性, 严格的对称性



当  $\mu^2 < 0$  时

$$V|_{\min} = V(\phi^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda})$$

基态不具有对称性, 称为对称性自发破缺



一旦根据物理解确定了真空态, 如  $\phi = \phi_+$  形象的, 放了一个小球在  $\phi_+$  处, 体系就不再具有对称性。

以上关于经典场的情况可以推广到量子场, 经典场可以视为量子场的极限情况。

$$\phi = \begin{cases} 0 & (\mu^2 > 0) \\ \phi_{\pm} & (\mu^2 < 0) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \langle \phi \rangle = \begin{cases} 0 & (\mu^2 > 0) \\ \phi_{\pm} & (\mu^2 < 0) \end{cases}$$

在  $\langle \phi \rangle$  中  $\phi$  为量子场, 即具有算符的定义;  $\langle \phi \rangle$  是场的基态期望值, 场的基态平均值, 场的真空期望场, 场的凝聚 (condensate)

**最后强调:** 对称性自发破缺的概念: 拉氏密度 (哈密顿密度) 具有对称性, (真空态) 基态不具有对称性。

#### 12.1.4 Goldstone 定理

**Definition 12.1 (Goldstone 定理).** 如果某种连续整体对称性自发破缺, 则一定对应存在零质量的玻色子, 称为 Goldstone 粒子。

#### 12.1.5 经典场说明

以经典复标量场为例, 说明 Goldstone 定理。(严格证明, 请自己查书自学)

时空无关的经典复标量场拉氏密度

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - [\mu^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2]$$

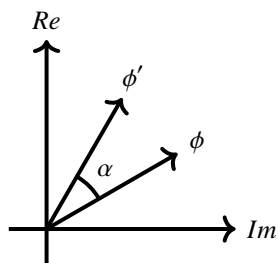
$$\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}, \quad \lambda > 0$$

具体写来

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_2 + \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_1) - \left[ \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 \right]$$

考虑变换, ( $\alpha$  是与时空无关的连续变量, 称为**整体变换**)

$$U(\alpha) = e^{i\alpha}$$



$$\begin{cases} \phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha} \phi \\ \phi^* \rightarrow (\phi^*)' = e^{-i\alpha} \phi^* \end{cases}$$

$$\phi' = (\cos \alpha + i \sin \alpha) \phi$$

令

$$\phi' = (\phi'_1 + i\phi'_2)/\sqrt{2} \quad \phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$$

则

$$\begin{cases} \phi'_1 = \cos \alpha \phi_1 - \sin \alpha \phi_2 \\ \phi'_2 = \sin \alpha \phi_1 + \cos \alpha \phi_2 \end{cases}$$

基态, 势能  $V$  最小值

$$\begin{aligned} V &= \mu^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2 \\ &= \frac{1}{2} \mu^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{\lambda}{4} (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 \\ &\equiv \frac{\mu^2}{2} |\phi|^2 + \frac{\lambda}{4} (|\phi|^2)^2 \end{aligned}$$

见 PPT“Mexican Hat”

1. 当  $\mu^2 > 0$  时,  $|\phi|^2 = 0$  对应势能最小值, 基态有对称性。
2. 当  $\mu^2 < 0$  时,  $|\phi|^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} = v^2$ , 对应于势能最小值, 复平面圆周上任意一点都是能量的最低点, 一旦选定基态, 如  $\phi_1 = v, \phi_2 = 0$ , 则该基态不具有对称性, 在此时, 对称性自发破缺。

#### 12.1.6 粒子质量

粒子质量的定义:

$$m^2 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right|_{\phi \text{ 取基态值}}$$

根据拉氏密度  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2$ ，可以验证。  
对于上述经典复标量场

有凝聚场

$$m_{\phi_1}^2 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_1^2} \right|_{\phi_1=v, \phi_2=0} = \mu^2 + \lambda(3\phi_1^2 + \phi_2^2) \Big|_{\phi_1=v, \phi_2=0} = -2\mu^2 > 0$$

无凝聚场，Goldstone

$$m_{\phi_2}^2 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_2^2} \right|_{\phi_1=v, \phi_2=0} = \mu^2 + \lambda(3\phi_2^2 + \phi_1^2) \Big|_{\phi_1=v, \phi_2=0} = 0$$

当选定基态，即对称性自发破缺时，对应存在 0 质量粒子，即为 Goldstone 粒子。  
在拉氏密度中，两粒子  $\phi_1, \phi_2$  具有相同的质量——对称性

选定基态，两粒子不再具有相同质量  $\begin{cases} \text{Goldstone 粒子, 0 质量} \\ \text{Higgs 模式, 非 0 质量} \end{cases}$   
形象理解：势场中粒子的运动分为两种模式

1. 绕原点的圆周运动，不耗能  $\rightarrow$  Goldstone 模式
2. 沿径向的运动，耗能  $\rightarrow$  Higgs 模式

推广到量子场，只要将拉氏量中的  $\phi_1, \phi_2$  理解为量子场， $|\phi|^2 = |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2$  理解为场的凝聚，所有计算相同。

以上是对 Goldstone 定理的举例说明，希望大家有一个清晰的图像 (“Mexican Hat”)

## 12.2 Higgs 机制

**Definition 12.2 (Higgs 机制).** 连续规范对称性的自发破缺，零质量规范场将获得质量。

更具体或是形象的理解：

连续对称性的自发破缺，必定产生 0 质量的 Goldstone 粒子，若体系中存在传递相互作用的规范场 (规范粒子)，如光子，胶子，规范场可以“吃掉”Goldstone 粒子，从而获得质量，这称为 Higgs 机制 (迈斯纳效应)

**以超导为例：**

QED 具有 U(1) 规范性，U(1) 规范性自发破缺，光子 (规范场) 获得质量，取法进入超导体内部。

又如

**(两味) 手征对称性：** 整体对称性  $e^{i\gamma^5 \vec{\tau} \cdot \vec{\theta}/2}$

手征对称性自发破缺，对应的 Goldstone 粒子是 Pion 介子。

手征凝聚为夸克贡献质量，使组分夸克质量大于流夸克质量。

## 12.3 手征对称性自发破缺

- 若体系的拉氏密度满足对称性，基态也满足对称性，称为**严格的对称性**

- 若体系的拉氏密度满足对称性，基态也满足对称性，称为**对称性自发破缺**

强相互作用，手征对称性自发破缺：

- 强子层次：解释  $m_\pi \approx 134 \text{ Mev} \ll m_N = 938 \text{ Mev}$
- 夸克层次：解释组分质量  $\gg$  流夸克质量

低能时，QCD 微扰困难，具有 QCD 对称性的有效模型应运而生；

- 强子层次： $\sigma$  模型 (线性，非线性)，手征微扰模论
- 夸克层次：夸克-介子模型，Nambu-Jona-Lasinio 模型

为简单举例，且与前面所讲的实标量场，复标量场的理论接近，本课程以线性  $\sigma$  模型为例。

手征极限：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\partial_\nu \vec{\pi} \partial^\nu \vec{\pi} + \partial_\nu \sigma \partial^\nu \sigma] - \left[ \frac{\mu^2}{2} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) + \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2 \right] \quad (12.1)$$

其中  $\vec{\pi} = \pi_1, \pi_2, \pi_3$   $\mu^2 < 0, \lambda > 0, O(4) = O(3, 1)$

非手征极限：

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\sigma + h\sigma$$

其中  $h\sigma$  明显破缺手征对称性。

分为两步介绍：

1.  $\mathcal{L}_\sigma$  具有手征对称性， $SU(2)_L \otimes SU(2)_R \simeq SU(2)_V \otimes SU(2)_A$ ， $SU(2)_V$  是同位旋对称性， $SU(2)_A$  是手征对称性
2. 真空中手征对称性自发破缺

## 12.4 $\mathcal{L}$ 手征对称性说明 (无穷小变换)

同位旋变换：

$$\begin{aligned} U_A &= e^{-i\gamma^5 \vec{\tau} \cdot \vec{\theta}/2} \\ \psi &\rightarrow \psi' = e^{-i\gamma^5 \vec{\tau} \cdot \vec{\theta}/2} \psi \simeq (1 - i\gamma^5 \vec{\tau} \cdot \vec{\theta}/2) \psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{-i\gamma^5 \vec{\tau} \cdot \vec{\theta}/2} \simeq \bar{\psi} (1 - i\gamma^5 \vec{\tau} \cdot \vec{\theta}/2) \end{aligned}$$

**介子场：**具有与介子相同量子数，夸克组成的复合场

$$\begin{array}{ll} \vec{\pi} = i\bar{\psi}\gamma^5\vec{\tau}\psi & \sigma = \bar{\psi}\psi \\ \vec{\pi} \xrightarrow{U_V} \vec{\pi} + \vec{\theta} \times \vec{\pi} & \sigma \xrightarrow{U_V} \sigma \\ \vec{\pi} \xrightarrow{U_A} \vec{\pi} + \vec{\theta}\sigma & \sigma \xrightarrow{U_A} \sigma - \vec{\theta} \cdot \vec{\pi} \\ (\vec{\pi})^2 \xrightarrow{U_V} (\vec{\pi})^2 & \sigma^2 \xrightarrow{U_V} \sigma^2 \\ (\vec{\pi})^2 \xrightarrow{U_A} (\vec{\pi})^2 + (2\sigma)\vec{\theta} \cdot \vec{\pi} & \sigma^2 \xrightarrow{U_A} \sigma^2 - 2\vec{\theta} \cdot \vec{\pi}\sigma \end{array}$$



经过简单计算，便可以证明， $\mathcal{L}_\sigma$  具有手征对称性， $\phi = (\vec{\pi}, \sigma)$  四分量场。

熟悉群论：

$$SU(2)_L \rightarrow e^{-i\frac{1+\gamma^5}{2}\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}/2} \quad SU(2)_R \rightarrow e^{-i\frac{1-\gamma^5}{2}\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}/2}$$

$$SU(2)_L \otimes SU(2)_R \simeq SU(2)_V \otimes SU(2)_A \simeq SO(3, 1)$$

$$U_L(1) \otimes U_R(1) \otimes U_V(1) \otimes U_A(1) \simeq O(3, 1)$$

## 12.5 真空中对称性自发破缺

### 12.5.1 手征极限的情况

真空：  $T = 0$   $\mu = 0$   $n = 0$

令  $\sigma = \langle \sigma \rangle$ ，手征凝聚： $\vec{\pi} = \langle \vec{\pi} \rangle$ ， $\vec{\pi}$  凝聚。

将拉氏场中的量子场做经典近似，即令场量等于它的平均值。

基态由势能的最小值确定：

$$V = \frac{\mu^2}{2} (\langle \sigma \rangle^2 + \langle \vec{\pi} \rangle^2) + \frac{\lambda}{4} (\langle \sigma \rangle^2 + \langle \vec{\pi} \rangle^2)^2 \quad (12.2)$$

$\langle \vec{\pi} \rangle^2 = \langle \pi_1 \rangle^2 + \langle \pi_2 \rangle^2 + \langle \pi_3 \rangle^2$  三个兼并的  $\pi$  介子。

$V(\langle \sigma \rangle, \langle \vec{\pi} \rangle)$  函数，求解函数极值，

能隙方程，正定的行列式

$$\frac{\partial V}{\partial \langle \sigma \rangle} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial \langle \vec{\pi} \rangle} = 0$$

求导得到

$$\begin{cases} \langle \sigma \rangle [\mu^2 + \lambda(\langle \sigma \rangle^2 + \langle \vec{\pi} \rangle^2)] = 0 \\ \langle \vec{\pi} \rangle [\mu^2 + \lambda(\langle \sigma \rangle^2 + \langle \vec{\pi} \rangle^2)] = 0 \end{cases}$$

方程组可以有三个解

$$\begin{cases} (1) \langle \sigma \rangle = 0, & \langle \vec{\pi} \rangle = 0 & V = 0 \\ (2) \langle \sigma \rangle = 0, & \langle \vec{\pi} \rangle^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} & V = -\frac{\mu^4}{2\lambda} + \frac{\lambda \mu^4}{4\lambda^2} = -\frac{1}{4} \frac{\mu^4}{\lambda} \\ (3) \langle \vec{\pi} \rangle = 0 & \langle \sigma \rangle^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} & V = -\frac{1}{4} \frac{\mu^4}{\lambda} \end{cases}$$

基态： $\langle \sigma \rangle^2 + \langle \vec{\pi} \rangle^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}$

选定基态，考虑真空的宇称为 +， $\pi$  宇称为 -， $\sigma$  宇称为 +，那么

$$\langle \vec{\pi} \rangle = 0 \quad \langle \sigma \rangle = -\frac{\mu^2}{\lambda} \quad (12.3)$$

此时，圆圈上的其他状态不是体系的基态，即基态不具有手征对称性。

## 介子质量

$$m_\sigma^2 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} \right|_{\text{基态解}} = \mu^2 + \lambda(3\langle\sigma\rangle^2 + \langle\vec{\pi}\rangle^2) = -2\mu^2$$

$$m_\pi^2 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2} \right|_{\text{基态解}} = \mu^2 + \lambda(\langle\sigma\rangle^2 + 3\langle\vec{\pi}\rangle^2) = 0$$

$m_\pi$  代表 Goldstone 粒子, 3 个,  $\pi^+, \pi^-, \pi^0$ ,  $SU(2)_A$  有三个生成元。  
 $\langle\sigma\rangle$  场算符的平均值, 场的凝聚, 场的真空期望值, 场的基态期望值。

### 12.5.2 非手征极限的情况

$$V = \frac{\mu^2}{2} (\langle\sigma\rangle^2 + \langle\vec{\pi}\rangle^2) + \frac{\lambda}{4} (\langle\sigma\rangle^2 + \langle\vec{\pi}\rangle^2)^2 + h\sigma$$

$h\sigma$  中  $h < 0$ , 能隙方程为:

$$\langle\sigma\rangle[\lambda(\langle\sigma\rangle^2 + \langle\vec{\pi}\rangle^2) + \mu^2] + h = 0$$

$$\langle\vec{\pi}\rangle[\lambda(\langle\sigma\rangle^2 + \langle\vec{\pi}\rangle^2) + \mu^2] = 0$$

基态:  $\langle\vec{\pi}\rangle = 0$   $\langle\sigma\rangle(\lambda\langle\sigma\rangle^2 + \mu^2) + h = 0$ , 这与真空宇称为 + 相一致。

## 介子质量

$$m_\pi^2 = -\frac{h}{\langle\sigma\rangle} \neq 0 \quad (12.4)$$

$m_\pi^2$  对 0 的偏离与  $h$  相关,  $h$  越大, 偏离越大。

小小对称性明显破缺, 导致 Goldstone 玻色子, 获得小质量, 又称为赝 Goldstone 玻色子。

## 12.6 加入核子自由度的线性 $\sigma$ 模型

$$\mathcal{L}_{N\sigma} = \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_\sigma \quad (12.5)$$

$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{1}{2} [\partial_\nu \vec{\pi} \partial^\nu \vec{\pi} + \partial_\nu \sigma \partial^\nu \sigma] - \left[ \frac{\mu^2}{2} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) + \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2 \right]$$

$$\mathcal{L}_N = i\bar{N}\gamma^\mu \partial_\mu N - g\bar{N}\Sigma N$$

其中  $\Sigma = \sigma + i\gamma^5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}$ ,  $N$  表示核子场。  $g\bar{N}\Sigma N$  代表 Yukawa 耦合。

接下来我们需要做的是:

1. 证明  $\mathcal{L}_{N\sigma}$  具有手征对称性。
2. 基态手征对称性自发破缺

### 12.6.1 手征对称性的证明

$\mathcal{L}_\sigma$  上一节已经证明满足手征对称性。

核子自旋为  $\frac{1}{2}$ ,  $i\bar{N}\gamma^\mu \partial_\mu$  满足手征对称性 (见 Dirac 方程章节)。

现在仅需要说明  $g\bar{N}\Sigma N$  具有手征对称性。

## 同位旋变换

$$U_V = e^{-i\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}/2}$$

$$\psi \rightarrow (1 - i\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}/2)\psi$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}(1 + i\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}/2)$$

$$N \rightarrow (1 - i\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}/2)N$$

$$\bar{N} \rightarrow \bar{N}(1 + i\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}/2)$$

$$\sigma \rightarrow \sigma$$

$$\vec{\pi} \rightarrow \vec{\pi} + \vec{\theta} \times \vec{\pi}$$

## 手征变换

$$U_A = e^{-i\gamma^5 \vec{\tau} \cdot \vec{\theta}/2}$$

$$\psi \rightarrow (1 - i\gamma^5 \vec{\tau} \cdot \vec{\theta}/2)\psi$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}(1 + i\gamma^5 \vec{\tau} \cdot \vec{\theta}/2)$$

$$N \rightarrow (1 - i\gamma^5 \vec{\tau} \cdot \vec{\theta}/2)N$$

$$\bar{N} \rightarrow \bar{N}(1 + i\gamma^5 \vec{\tau} \cdot \vec{\theta}/2)$$

$$\sigma \rightarrow \sigma - \text{vec}\theta \times \vec{\pi}$$

$$\vec{\pi} \rightarrow \vec{\pi} + \text{vec}\theta \cdot \sigma$$

同位旋变换  $U_V$ 

$$\bar{N}'\Sigma'N' = \bar{N}(1 + i\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}/2) \left[ \sigma + i\gamma^5 \vec{\tau} \cdot (\vec{\pi} + \vec{\theta} \times \vec{\pi}) \right] (1 - i\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}/2)N \quad (12.6)$$

证明有些繁琐，可是可以得出  $\bar{N}'\Sigma'N' = \bar{N}\Sigma N$

手征变换  $U_A$ 

$$\bar{N}'\Sigma'N' = \bar{N}(1 + i\gamma^5 \vec{\tau} \cdot \vec{\theta}/2) \left[ (\sigma - \vec{\theta} \cdot \vec{\pi}) + i\gamma^5 \vec{\tau} \cdot (\vec{\pi} + \vec{\theta}\sigma) \right] (1 - i\gamma^5 \vec{\tau} \cdot \vec{\theta}/2)N \quad (12.7)$$

## 12.6.2 讨论基态手征对称性的自发破缺

先考虑经典近似：

$$\sigma \rightarrow \langle \sigma \rangle \quad \vec{\pi} \rightarrow \langle \vec{\pi} \rangle$$

注意  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  简并

拉氏密度：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{N\sigma} = & \bar{N}i\gamma^\mu \partial_\mu N - g\langle \sigma \rangle \bar{N}N \\ & + \frac{1}{2} [\partial_\nu \langle \vec{\pi} \rangle \partial^\nu \langle \vec{\pi} \rangle + \partial_\nu \langle \sigma \rangle \partial^\nu \langle \sigma \rangle] - \left[ \frac{\mu^2}{2} (\langle \sigma \rangle^2 + \langle \vec{\pi} \rangle^2) + \frac{\lambda}{4} (\langle \sigma \rangle^2 + \langle \vec{\pi} \rangle^2)^2 \right] \end{aligned}$$

再考虑经典近似：

$$N \rightarrow \langle N \rangle \quad \bar{N} \rightarrow \langle \bar{N} \rangle \quad (12.8)$$

拉氏密度：

$$\mathcal{L}_{N\sigma} \rightarrow \langle \bar{N} \rangle i\gamma^\mu \partial_\mu \langle N \rangle - g\langle \sigma \rangle \langle \bar{N} \rangle \langle N \rangle = 0 \quad \text{Dirac 方程} \quad (12.9)$$

所以，能量的形式为：

$$V = \frac{1}{2}\mu^2(\langle \sigma \rangle^2 + \langle \vec{\pi} \rangle^2) + \frac{\lambda}{4}(\langle \sigma \rangle^2 + \langle \vec{\pi} \rangle^2)^2$$

$$V|_{min} : \quad \frac{\partial V}{\partial \langle \sigma \rangle} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial \langle \vec{\pi} \rangle} = 0$$

$$\langle \sigma \rangle^2 + \langle \vec{\pi} \rangle^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}$$

考虑宇称，Goldst 粒子的因素之后，选定基态：

$$\langle \sigma \rangle^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} \quad \langle \vec{\pi} \rangle^2 = 0 \quad (12.10)$$

基态不再具有手征对称性。

$$m_\sigma^2 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \langle \sigma \rangle^2} \right|_{\text{基态解}} = -2\mu^2$$

$$m_\pi^2 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \langle \vec{\pi} \rangle^2} \right|_{\text{基态解}} = 0 \quad \text{Goldstone Mode}$$

$$m_N = g\langle \sigma \rangle = g\sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}} \quad \sigma \text{ 凝聚使核子产生质量，又称为手征凝聚}$$

以上的讨论是对于**手征极限**。

对于**非手征极限**的情况（先向学生提问，看是否有回答）：

$$\mathcal{L}'_{N\sigma} = \mathcal{L}_{N\sigma} + \mathcal{L}_{SB} \quad \mathcal{L}_{SB} = f_\pi m_\pi^2 \sigma \quad \text{正比于} \sigma \quad (12.11)$$

$f_\pi$  是  $\pi$  介子衰变常数， $m_\pi$  是  $\pi$  介子质量

$\sigma, \pi, N$  在  $U_V, U_A$  变换之下呈现线性变换，因此称之为**线性  $\sigma$  模型**。当  $\sigma$  粒子的质量趋向于无穷时候，上述  $\sigma$  模型过渡为**非线性  $\sigma$  模型**（感兴趣可以自己查找文献）。

将核子替换为夸克，称为**夸克-介子模型**

$$\mathcal{L}_{QM} = \mathcal{L}_q + \mathcal{L}_\sigma \quad (12.12)$$

$$\mathcal{L}_q = \bar{q} i \gamma^\mu \partial_\mu q - g \bar{q} \Sigma q \quad \Sigma = \sigma + i \gamma^5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \quad (12.13)$$

与  $\mathcal{L}_{N\sigma}$  形式相同。同样的：

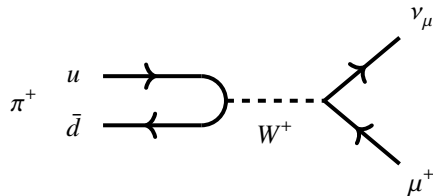
$$m_q = g\langle \sigma \rangle$$

即手征凝聚为夸克贡献质量——组分夸克。

## 12.7 介绍几个关系式

$\pi$  介子质量  $m_\pi$ ， $\pi$  介子衰变常数  $f_\pi$  是低能强子物理中的两个重要参数。

### 12.7.1 $\pi$ 介子衰变常数 $f_\pi$ 的试验确定



$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu\mu$  过程的寿命  $\tau = 2.6 \times 10^{-8} s$ , 衰变宽度  $\Gamma = \hbar/\tau$

$$\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu\mu) = \frac{G_W^2}{4\pi} \frac{m_\mu^2 f_\pi^2}{m_\pi^3} (m_\pi^2 - m_\mu^2)^2 \quad (12.14)$$

弱相互作用过程:  $G_W = 1.15 \times 10^{-5} \text{ GeV}$ , 弱相互作用耦合常数。

由此定出,  $f_\pi \simeq 93.2 \text{ MeV} = 0.668 m_{\pi^+}$

## 12.8 PCAC(Partially Conserved Axial-vector Current) 轴矢流部分守恒

$$\partial_\mu j_5^\mu = f_\pi m_\pi^2 \phi_\pi \quad \text{其中 } \phi_\pi \text{ 是 } \pi \text{ 介子场}$$

轴矢流守恒与  $\pi$  介子性质相关。

$$m_\pi = 0 \quad \partial_\mu j_5^\mu = 0 \quad (12.15)$$

$$\partial_\mu j_5^\mu = 2m_0 \bar{\psi} \gamma^5 \psi \quad \text{已知: } m_0 = 0, \quad \partial_\mu j_5^\mu = 0$$

$m_\pi$  与  $m_0$  地位相当, 这是手征对称性明显破缺的度量。

### 12.8.1 GOR(Gell-Mann-Oakes-Renter) 关系

$$2m_0 \langle \bar{q}q \rangle = -m_\pi^2 f_\pi^2 \quad m_0 \Leftrightarrow m_\pi \quad \langle \bar{q}q \rangle \Leftrightarrow f_\pi \quad (12.16)$$

$\langle \bar{q}q \rangle$  与  $f_\pi$  地位相当, 是手征对称性自发破缺的度量。

## 12.9 小结

### 手征对称性

- 明显破缺,  $m_0 \neq 0$

- 自发破缺, Goldstone 粒子  $\begin{cases} 2 \text{ 味: } \pi_+, \pi_-, \pi_0 & 3 \text{ 个} \\ 3 \text{ 味: 赝标八重态} & 8 \text{ 个} \end{cases}$

### 更一般的情况

- 明显破缺
- Goldstone 定理, Higgs 机制