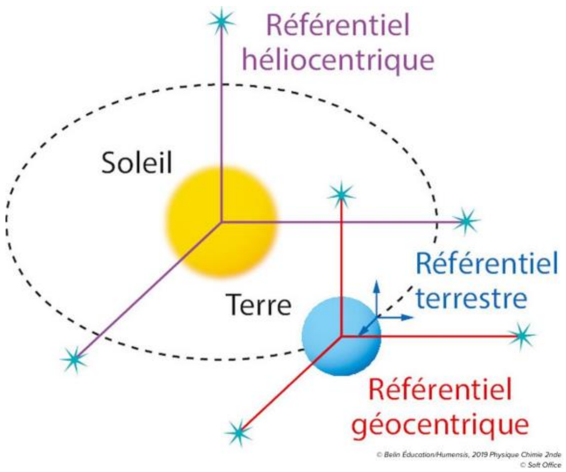
DECRIRE UN MOUVEMENT

I. Etude cinématique

La **cinématique** est l'étude du mouvement indépendamment des causes qui le provoquent.



1 Référentiel et repère

Le référentiel est un endroit de référence par rapport auquel on étudie le mouvement d'un mobile.

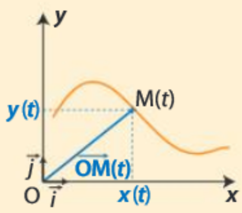
A chaque référentiel est associé :

- un repère **d'espace** pour quantifier la position
- un repère **de temps** pour associer une date à chaque position.

2 Vecteur position

• Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ lié au référentiel d'étude, la position d'un point M est donnée par le **vecteur position** $\overrightarrow{OM}(t)$: $\overrightarrow{OM}(t)\begin{cases}x(t)\\y(t)\end{cases}$.

• $x(t)$ et $y(t)$, ou plus simplement x et y, sont les coordonnées cartésiennes du point M à l'instant t.



3 Vecteur vitesse

• Le vecteur vitesse moyenne $\vec{v}_i = \dfrac{\overrightarrow{M_iM_{i+1}}}{t_{i+1}-t_i}$ s'écrit aussi $\vec{v}_i = \dfrac{(\Delta\overrightarrow{OM})_{i\to i+1}}{\Delta t}$

car $\overrightarrow{M_iM_{i+1}} = \overrightarrow{OM}_{i+1} - \overrightarrow{OM}_i = (\Delta\overrightarrow{OM})_{i\to i+1}$.

• Le vecteur vitesse d'un point en une position M_i est la limite de $\vec{v}_i = \dfrac{(\Delta\overrightarrow{OM})_{i\to i+1}}{\Delta t}$ lorsque Δt tend vers zéro.

Cette limite est la dérivée par rapport au temps du vecteur position à l'instant t_i : $\vec{v}_i = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{(\Delta\overrightarrow{OM})_{i\to i+1}}{\Delta t} = \left(\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{t_i}$

En classe de Première, nous avons assimilé le vecteur vitesse $\vec{v}_i$ d'un point M, en une position M_i de la trajectoire, au vecteur vitesse moyenne obtenu pour une durée Δt extrêmement courte :

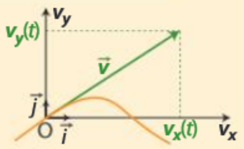
$$\vec{v}_i = \frac{\overrightarrow{M_iM_{i+1}}}{t_{i+1}-t_i} = \frac{\overrightarrow{M_iM_{i+1}}}{\Delta t}$$

• Dans un référentiel donné, le **vecteur vitesse** d'un point M à l'instant t est égal à la dérivée, par rapport au temps, du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ à cet instant :

Valeur en m·s⁻¹ — Valeur en m — t en s

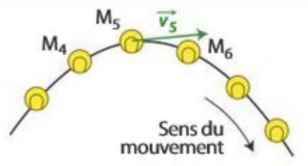
$$\vec{v}(t) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_t \quad \text{noté plus simplement} \quad \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

• Les coordonnées cartésiennes du vecteur vitesse $v_x(t)$ et $v_y(t)$ sont obtenues en dérivant, par rapport au temps, celles $x(t)$ et $y(t)$ du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$:



$$\vec{v}(t)\begin{cases}v_x(t) = \left(\dfrac{dx}{dt}\right)_t\\[2mm] v_y(t) = \left(\dfrac{dy}{dt}\right)_t\end{cases} \quad \text{ou plus simplement} \quad \vec{v}\begin{cases}v_x = \dfrac{dx}{dt}\\[2mm] v_y = \dfrac{dy}{dt}\end{cases}$$

A **Vecteur vitesse de M dans la position M_5**



> Le vecteur $\vec{v_5}$ est tangent à la trajectoire en M_5.

Remarques :

- v_x est aussi le coefficient directeur de la tangente à la courbe $x = f(t)$ tracée à cette date t. Il en est de même pour v_y et la tangente à la courbe $y = g(t)$.
- On obtient la valeur v du vecteur vitesse à partir de la relation : $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.
- Le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire et dirigé dans le sens du mouvement (construction **A**).

Exercice :

La position d'un mobile M au cours du temps est donnée par le vecteur :

$$\overrightarrow{OM}(t)\begin{pmatrix} x(t) = 2t - 1 \\ y(t) = -5t^2 + 10t + 2 \end{pmatrix}$$

a) Représenter sa trajectoire dans un repère entre 0 et 3 s.
b) Pourquoi peut-on parler d'un mouvement plan ?
c) Déterminer l'expression du vecteur vitesse du mobile en fonction du temps.
d) Déterminer la valeur de la vitesse du mobile à la date t = 2,0 s.

4 Vecteur accélération

- Le vecteur accélération caractérise la variation du vecteur vitesse en fonction du temps.
- Par analogie avec le vecteur vitesse, on peut déterminer le vecteur accélération à un instant t_{i+1} : $\vec{a}_{i+1} = \dfrac{(\Delta\vec{v})_{i\to i+1}}{\Delta t}$ (construction B).
- Lorsque Δt tend vers zéro, le vecteur accélération à l'instant t_{i+1} s'écrit :

$$\vec{a}_{i+1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\Delta\vec{v})_{i\to i+1}}{\Delta t} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{t_{i+1}}$$

• Dans un référentiel donné, le **vecteur accélération** d'un point M est égal à la dérivée, par rapport au temps, du vecteur vitesse $\vec{v}$ à cet instant :

$$\underbrace{\vec{a}(t)}_{\text{Valeur en m·s}^{-2}} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_t \quad \text{noté plus simplement} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

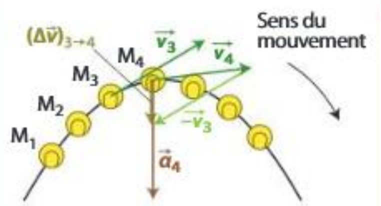
Valeur en m·s^{-1} ; t en s

• Les coordonnées cartésiennes du vecteur accélération $a_x(t)$ et $a_y(t)$ sont obtenues en dérivant, par rapport au temps, celles $v_x(t)$ et $v_y(t)$ du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$:

$$\vec{a}(t) \begin{cases} a_x(t) = \left(\dfrac{dv_x}{dt}\right)_t \\ a_y(t) = \left(\dfrac{dv_y}{dt}\right)_t \end{cases} \quad \text{ou plus simplement} \quad \vec{a} \begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} \end{cases}$$

Remarques :
- a_x est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $v_x = f(t)$ tracée à la date t considérée. Il en est de même pour a_y et la tangente à la courbe $v_y = g(t)$.
- La valeur du vecteur accélération est donnée par : $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.
- Le vecteur accélération $\vec{a}$ est colinéaire et de même sens que le vecteur variation de vitesse $\Delta\vec{v}$ (construction B).

B Vecteur variation de vitesse et vecteur accélération



> Le vecteur variation de vitesse $(\Delta\vec{v})_{3\to4}$ et le vecteur accélération $\vec{a}_4$ ont même direction et même sens.

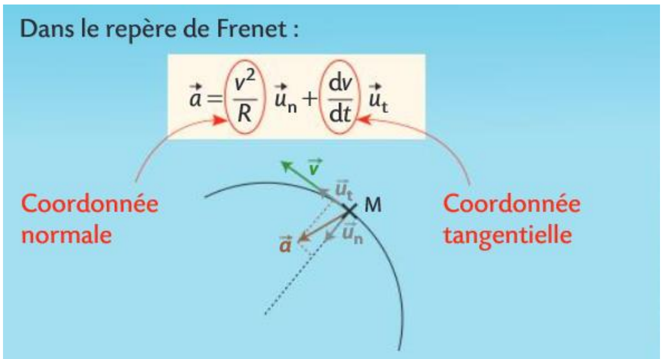
Exercice : La position d'un mobile M au cours du temps est donnée par le vecteur :

$$\overrightarrow{OM}(t) \begin{pmatrix} x(t) = 2t - 1 \\ y(t) = -5t^2 + 10t + 2 \\ z(t) = 0 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer l'expression du vecteur accélération $a(t)$ en fonction du temps.
b) Calculer la valeur de l'accélération subie par le mobile à la date $t = 2{,}7$ s.

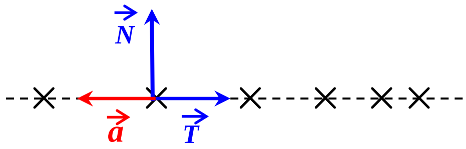
II - Le mouvement.

La base de Frenet



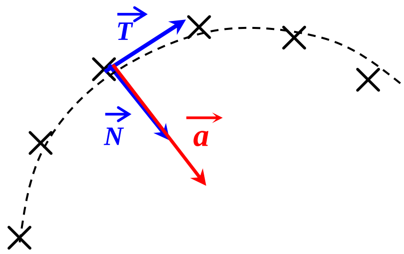
- Le mouvement rectiligne uniforme est caractérisé par une accélération nulle ($\boldsymbol{a_N = a_T = 0}$) car le vecteur vitesse du mobile est constant.

- Le mouvement rectiligne uniformément accéléré est caractérisé par :
  - une accélération normale nulle ($a_N = 0$)
  - une accélération tangentielle non nulle ($a_T \neq 0$)



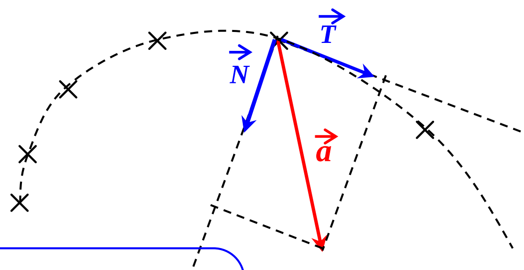
D'une manière générale, le mouvement rectiligne implique une accélération normale nulle.

- Le mouvement curviligne uniforme est caractérisé par :
  - une accélération normale non nulle ($a_N \neq 0$)
  - une accélération tangentielle nulle ($a_T = 0$)



D'une manière générale, le mouvement uniforme implique une accélération tangentielle nulle.

- Le mouvement curviligne varié est caractérisé par une accélération normale et une accélération tangentielle non nulles. ($a_T \neq 0$ et $a_N \neq 0$)



Conclusions :

- $a_T = 0$ ⇔ mouvement rectiligne ou curviligne UNIFORME
- $a_N = 0$ ⇔ mouvement RECTILIGNE uniforme ou varié

12, 13, 14, 28 p 260