Mesures et incertitudes

Comment peut-on estimer les erreurs ?
Comment peut-on estimer les incertitudes, lorsqu'on manipule et que l'on réalise des mesures ?

1. Le vocabulaire utilisé lors des mesures

Le mesurage (mesure) est l'ensemble des opérations permettant de déterminer expérimentalement une ou plusieurs valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à une grandeur.
Quand on mesure la valeur de la résistance R, la grandeur est la résistance R de ce dipôle et le mesurage est effectué avec un ohmmètre.
La valeur vraie (R_{vrai}) d'une grandeur est la valeur que l'on obtiendrait si le mesurage était parfait. Un mesurage n'étant jamais parfait, cette valeur est toujours inconnue.
Le mot « mesure » a, dans la langue française courante, plusieurs significations. C'est la raison pour laquelle le mot « mesurage » a été introduit pour qualifier l'action de mesurer.

2. Quelles peuvent être les sources d'erreurs ?

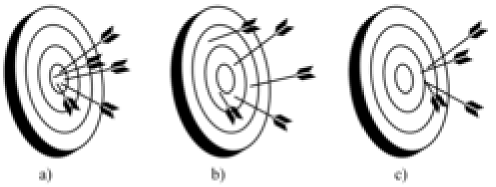
Qu'est-ce qu'une erreur aléatoire ?

C'est l'erreur qui peut apparaître lorsqu'on réalise un grand nombre de mesures dans les mêmes conditions d'une grandeur. Une mesure *mi* parmi les *n* valeurs est différente de la valeur moyenne $\overline{m}$. La différence $m_i - \overline{m}$ est appelée erreur aléatoire.
Comme l'on ne peut faire qu'un nombre fini de mesures, il est seulement possible de déterminer une estimation de l'erreur aléatoire.
Les origines de l'erreur aléatoire sont multiples : ce peut être dû à l'opérateur, ou à la mesure, ou être lié au phénomène mesuré (instabilité ou variabilité en fonction de la température, par exemple).

Qu'est-ce qu'une erreur systématique ?

C'est une erreur qui prend toujours la même valeur, qui est inconnue, lors de chaque mesure. Elle peut provenir par exemple d'un appareil défectueux ou d'un défaut de protocole expérimental.
Si on compare les mesures avec des flèches que l'on tire sur une cible, la valeur vraie est au centre de la cible

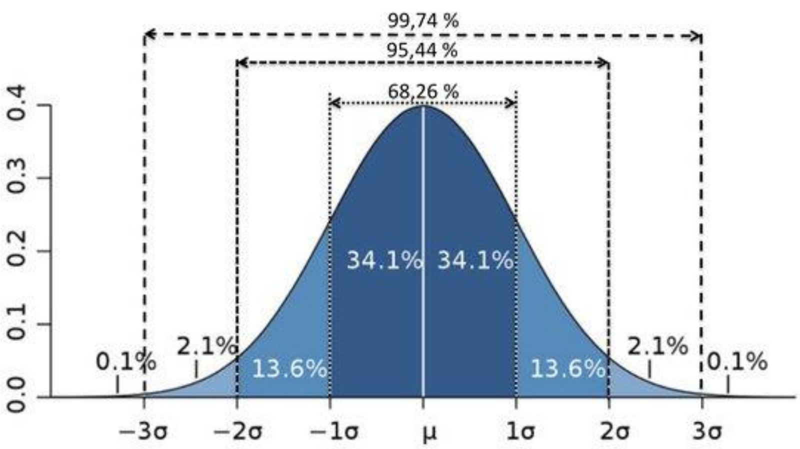
a) Les flèches sont proches du centre : les erreurs aléatoires et les erreurs systématiques sont faibles.
b) Les flèches sont éloignées du centre, mais centrées : les erreurs aléatoires sont importantes et les erreurs systématiques faibles.
c) Les flèches sont groupées loin du centre : les erreurs aléatoires sont faibles et les erreurs systématiques grandes.



*La bonne estimation des erreurs doit conduire à exprimer le résultat de la mesure **x** d'une grandeur **X** sous la forme :*

X = x ± ΔX
x ***: résultat de la mesure***

ΔX : incertitude absolue



- *On peut comparer la **précision** de chacune des mesures en calculant une **incertitude relative** : ainsi l'incertitude relative va renseigner sur la **précision** de la mesure.*

*L'incertitude **relative** est souvent exprimée sous forme d'un **pourcentage**.*

- *Faire une incertitude de 0,1 cm sur une longueur de 5,0 cm est beaucoup **moins précis** que d'en avoir une de 0,1 cm sur une longueur de 50,0 cm...*

Exemple : $\frac{\Delta L}{L} = \frac{0,1}{8,2} \approx 0,012$, soit 1,2 %

Exercice : Calculer l'incertitude relative d'une incertitude de 0,1 cm sur une mesure de 5,0 cm et une incertitude de 0,1 cm sur une mesure de 50,0 cm.

NB :

Notations ministère éducation nationale et norme internationale.

On mesure une grandeur M. L'incertitude associée à cette mesure peut se noter U(M). La notation U vient de l'anglais « uncertainty ».

Incertitude	Notations MEN	Norme internationale
Incertitude-type	s	u
Incertitude-type élargie ou incertitude de la mesure	ΔM	U
Écart-type expérimental	s_{exp}	u_{exp} ou s_x ou σ_{n-1}

3. Comment estimer une incertitude de répétabilité (type A)?

Quand plusieurs élèves ou groupe d'élèves effectuent une mesure, ils obtiennent des résultats voisins mais différents. Sur la série de mesures, on peut déterminer la valeur moyenne et l'incertitude sur la valeur moyenne.

Méthode :

Lors d'une séance expérimentale, on a obtenu n mesures de x : x_1 , x_2 , x_3 , …….x_n .

1. On calcule de la valeur moyenne de x notée $\bar{x}$: $\boxed{\bar{x} = \frac{\sum_1^n x_i}{n}}$

2.On détermine l'écart-type $\boldsymbol{\sigma_{n-1}}(x)$ sur la valeur moyenne $\bar{x}$: $\boxed{\boldsymbol{\sigma_{n-1}}(x) = \sqrt{\frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}}$

3. On en déduit l'incertitude type $u(x) = \frac{\sigma_{n-1}(x)}{\sqrt{n}}$

4 . puis l'incertitude U(x) sur la valeur moyenne $\bar{x}$: $\boxed{U(x) = \boldsymbol{k}\, u(x) = \boldsymbol{k} \frac{\sigma_{n-1}(x)}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}}$

Rq : ***incertitude type*** : $u(x) = \frac{\sigma_{n-1}(x)}{\sqrt{n}}$ *et* **incertitude** $\boldsymbol{U(x) = k} \frac{\sigma_{n-1}(x)}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}$

● k est le **facteur d’élargissement**, il est déterminé par rapport au nombre de mesure et à la précision souhaitée à l’aide de tables :

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k_{(95\%)}$	12,7	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26
$k_{(99\%)}$	63,7	9,93	5,84	4,60	4,03	3,71	3,50	3,36	3,25

n	12	14	16	18	20	30	50	100	∞
$k_{(95\%)}$	2,20	2,16	2,13	2,11	2,09	2,04	2,01	1,98	1,96
$k_{(99\%)}$	3,11	3,01	2,95	2,90	2,86	2,76	2,68	2,63	2,57

4. On notera à la fin des calculs le résultat sous la forme : $\boldsymbol{x} = \overline{\boldsymbol{x}} \pm \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})$

Ex : Mesure d’une longueur l en m :

Mesure	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
Valeur	*52,41*	*52,35*	*52,30*	*52,47*	*52,29*	*52,34*	*52,38*	*52,30*	*52,36*	*52,40*

Comment évaluer des incertitudes sur une mesure unique (type B) ?

Lorsque la mesure n'est pas reproduite plusieurs fois, il faut analyser les différentes sources d'erreurs liées aux instruments de mesure. Le niveau de confiance est de 95 %. Ces différentes formules seront données si nécessaire.

- ***Simple lecture sur un appareil avec graduation***

L'incertitude de la mesure liée à la lecture est estimée à : $\Delta M = 2 \times s = 2 \times \frac{1\,\text{graduation}}{\sqrt{12}}$

Par exemple, c'est le cas pour une lecture de la température sur un thermomètre.

- ***Double lecture sur un appareil avec graduation***

L'incertitude liée à la lecture est estimée à : $\Delta M = 2 \times s = 2 \times \frac{1\,\text{graduation}}{\sqrt{12}} \times \sqrt{2}$

Par exemple, c'est le cas pour une lecture d'une période sur l'oscilloscope

- ***Utilisation d'un appareil de tolérance connue***

L'incertitude liée à l'utilisation d'un appareil sur lequel est notée la tolérance donnée par le constructeur ($\pm t$) est estimée à : $\Delta M = 2 \times s = 2 \times \frac{t}{\sqrt{3}}$
.
Par exemple, on utilise une pipette jaugée de 10 mL avec une tolérance de $\pm$ 0,02 mL.