1 Vocabulaire

- La valeur réelle, exacte, d'une grandeur physique, appelée sa **valeur vraie**, n'est **jamais accessible**.
- La valeur accessible d'une grandeur est sa **valeur mesurée** dans le cadre d'un protocole expérimental et à l'aide d'instruments de mesure donnés.
- **L'incertitude-type** fournit une **estimation de l'étendue des valeurs** que l'on peut raisonnablement attribuer à la grandeur.
- Si X est la valeur mesurée d'une grandeur, le résultat de la mesure peut être noté :
  X avec une incertitude-type $u(X)$
  ou
  $X \pm u(X)$.

REMARQUE

Dans un souci de simplification, le résultat de la mesure et la valeur mesurée sont notés avec la même lettre, X par exemple.

Exemple Le résultat de la mesure de la longueur L d'un stylo avec une règle au millimètre peut être noté :
$L = 14{,}60$ cm avec une incertitude-type $u(L) = 0{,}03$ cm
ou
$L = (14{,}60 \pm 0{,}03)$ cm.

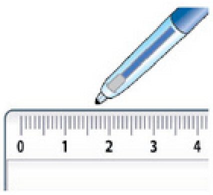
PRÉSENTATION DU RÉSULTAT

Le résultat d'une mesure doit comporter :
– la valeur mesurée ;
– l'incertitude-type de mesure ;
– le symbole de l'unité.

- **L'incertitude relative** donne la **précision de la mesure** effectuée et s'exprime en pourcentage.
  Elle s'écrit $p_X = \dfrac{u(X)}{|X|}$, avec X la valeur mesurée et $u(X)$ l'incertitude-type de la mesure.

  Plus l'incertitude relative est faible, plus la mesure est précise.

Exemples
• L'incertitude relative de la mesure précédente de la longueur du stylo est : $p_L = \dfrac{0{,}03 \text{ cm}}{14{,}60 \text{ cm}} = 0{,}2\ \%$.
• Le résultat d'une mesure de l'épaisseur d'une gomme avec le même protocole est : $e = 1{,}10$ cm avec une incertitude-type $u(e) = 0{,}03$ cm.
L'incertitude relative de cette mesure vaut :
$$p_e = \frac{0{,}03 \text{ cm}}{1{,}10 \text{ cm}} = 3\ \%.$$



Il est donc plus précis de mesurer avec une même règle la longueur L du stylo que l'épaisseur e de la gomme.

2 Deux approches pour évaluer une incertitude-type

Valeur mesurée : X
↓
Évaluation de l'incertitude-type $u(X)$

- La valeur mesurée est la valeur moyenne d'une série de mesures* → Évaluation de l'incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A)
- La valeur mesurée est une mesure unique → Évaluation de l'incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B)

3 Incertitude-type lors d'une série de mesures

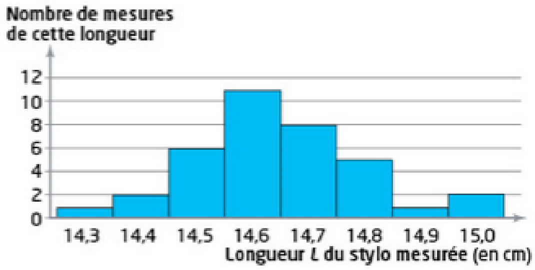
- Lorsque la **même mesure** est réalisée indépendamment **plusieurs fois** dans les mêmes conditions d'évaluation, la mesure est affectée aléatoirement dans un sens ou dans un autre par rapport à une valeur moyenne : c'est la **variabilité de la mesure** d'une grandeur physique.
- **Le meilleur estimateur de la valeur mesurée** est la valeur moyenne algébrique de la série de mesures, appelée plus simplement **valeur moyenne**.
- Pour un échantillon de n mesures indépendantes de la même grandeur X, il est ici possible de :
  – représenter un histogramme ;
  – calculer la valeur moyenne $\overline{X}$;
  – calculer l'écart-type s ;
  – calculer l'incertitude-type $u(\overline{X}) = \dfrac{s}{\sqrt{n}}$.

REMARQUE

Les calculs statistiques de la valeur moyenne, de l'écart-type et de l'incertitude-type peuvent être effectués avec un tableur (➜ **Point numérique 3**), un programme Python (➜ **Point numérique 1**) ou une calculatrice (➜ **Points maths 8, 9 et 10**).

Exemple Une série de $n = 36$ mesures indépendantes de la longueur L d'un stylo avec une règle mesurée au millimètre a été réalisée.

Longueur mesurée L_j du stylo	Nombre de mesures de cette longueur
$L_1 = 14{,}3$ cm	1
$L_2 = 14{,}4$ cm	2
$L_3 = 14{,}5$ cm	6
$L_4 = 14{,}6$ cm	11
$L_5 = 14{,}7$ cm	8
$L_6 = 14{,}8$ cm	5
$L_7 = 14{,}9$ cm	1
$L_8 = 15{,}0$ cm	2



• Un tableur ou une calculatrice donne :
– la valeur moyenne de la longueur du stylo : $\bar{L} = 14{,}64$ cm ;
– l'écart-type : $s = 0{,}16$ cm ;
– l'incertitude-type : $u(\bar{L}) = \dfrac{0{,}16 \text{ cm}}{\sqrt{36}} = 0{,}026$ cm.

• En Terminale, **un seul chiffre significatif** est conservé en général pour l'incertitude-type, ainsi : $u(\bar{L}) = 0{,}03$ cm.

Le résultat de la mesure est donc : $\bar{L} = 14{,}64$ cm avec l'incertitude-type $u(\bar{L}) = 0{,}03$ cm.

REMARQUE

Au lycée, on calcule de cette façon l'incertitude-type d'une série de mesures d'une même grandeur réalisée par plusieurs groupes d'élèves différents car les mesures sont considérées comme indépendantes les unes des autres. En effet, la même grandeur a été mesurée par des expérimentateurs différents utilisant des instruments de mesure différents, mais équivalents.

POINT MATHS

La **valeur moyenne arithmétique** $\bar{L}$, ou **valeur moyenne**, d'une série de mesures est égale au quotient de la somme de toutes les valeurs de cette série par l'effectif total. Dans le cas de la série ci-dessus de $n = 36$ mesures indépendantes de la longueur L d'un stylo :

$$\bar{L} = \frac{\sum_{j=1}^{n} L_j}{n} = \frac{1 \times 14{,}3 + 2 \times 14{,}4 + 6 \times 14{,}5 + 11 \times 14{,}6 + 8 \times 14{,}7 + 5 \times 14{,}8 + 1 \times 14{,}9 + 2 \times 15{,}0}{36} = 14{,}64 \text{ cm.}$$

L'écart-type s d'une série de mesures, considérée comme un échantillon, est égal à : $s = \sqrt{\dfrac{\sum_{j=1}^{n}\left(L_j - \bar{L}\right)^2}{n-1}}$

En reprenant l'exemple précédent :

$$s = \sqrt{\frac{1 \times (14{,}3 - 14{,}64)^2 + 2 \times (14{,}4 - 14{,}64)^2 + 6 \times (14{,}5 - 14{,}64)^2 + \dots + 1 \times (14{,}9 - 14{,}64)^2 + 2 \times (15{,}0 - 14{,}64)^2}{36 - 1}} = 0{,}16 \text{ cm.}$$

En statistique, si les mesures sont indépendantes, environ 95 % des valeurs mesurées devraient se situer à moins de deux écarts-types s de la moyenne $\bar{L}$.

4 Incertitude-type lors d'une mesure unique

L'incertitude-type d'une mesure unique est due à la qualité de l'instrument de mesure, au protocole de mesure, à l'expérimentateur lorsqu'il réalise la mesure, etc.

Exemple

L'incertitude-type due à un instrument de mesure vaut $u(X) = \dfrac{\delta}{\sqrt{3}}$, avec δ la tolérance, appelée aussi précision, de l'instrument de mesure.

Le fabricant indique une tolérance pour cette fiole jaugée égale à : $\delta = 0{,}10$ mL.

Application :

L'absorbance A d'une solution colorée est mesurée avec un spectrophotomètre. La valeur lue sur l'écran de l'appareil est : 0,115. La précision, appelée tolérance, de cet appareil est : $\delta = 0{,}002$.

Avec $\delta = 0{,}002$, l'incertitude-type vaut : $u(A) = \dfrac{0{,}002}{\sqrt{3}} = 0{,}001$.

En Terminale, l'incertitude-type est le plus souvent donnée avec **un chiffre significatif**.

Le résultat de la mesure est donc : $A = 0{,}115$ avec une incertitude-type $u(A) = 0{,}001$.

5 Incertitude-type composée

L'estimation de l'incertitude-type est un peu plus compliquée lorsqu'il y a plusieurs sources d'erreurs.
Pour simplifier les calculs, il faut d'abord prévoir s'il est possible de négliger certaines incertitudes-types devant d'autres afin de calculer une seule incertitude-type comme précédemment.
S'il y a plusieurs sources d'erreurs, les formules des calculs à effectuer pour déterminer une incertitude-type composée dépendent des relations qui existent entre les grandeurs.

- Si $Y=\frac{X_1}{X_2}$ ou si $Y=X_1X_2$, l'incertitude-type $u(Y)$ est calculée avec la relation :

$$\frac{u(Y)}{Y}=\sqrt{\left(\frac{u(X_1)}{X_1}\right)^2+\left(\frac{u(X_2)}{X_2}\right)^2}$$

Exemple Le résultat d'un dosage par titrage acide-base est donné par la relation : $c_A=\frac{c_B\,V_{B,\text{éqv}}}{V_A}$.
L'incertitude-type associée est calculée avec la relation suivante :

$$\frac{u(c_A)}{c_A}=\sqrt{\left(\frac{u(c_B)}{c_B}\right)^2+\left(\frac{u(V_{B,\text{éqv}})}{V_{B,\text{éqv}}}\right)^2+\left(\frac{u(V_A)}{V_A}\right)^2}$$

- Si $Y=X_1+X_2$ ou $Y=X_1-X_2$, l'incertitude-type $u(Y)$ est calculée avec la relation :

$$u(Y)=\sqrt{u^2(X_1)+u^2(X_2)}$$

Exemple

Les longueurs de deux stylos sont mesurées avec une règle graduée au millimètre. Les valeurs lues sur la règle graduée sont $L_1=14{,}6$ cm et $L_2=14{,}8$ cm. La longueur $L=L_1+L_2$ des deux stylos placés bout à bout est $L=29{,}4$ cm. La précision, ou tolérance, de cette règle vaut : $\delta=0{,}5$ mm $=0{,}05$ cm (précision correspondant à une demi-graduation).

L'incertitude-type pour chacune des deux mesures est : $u=\frac{\delta}{\sqrt{3}}$.

L'incertitude-type $u(L)$ due à ces deux sources d'erreurs est calculée avec la relation suivante :

$$u(L)=\sqrt{u^2+u^2}=\sqrt{2u^2}=\sqrt{2}\,u=\sqrt{2}\times\frac{\delta}{\sqrt{3}}$$

$u(L)=\sqrt{2}\times\frac{0{,}5\text{ mm}}{\sqrt{3}}=0{,}4\text{ mm}=0{,}04\text{ cm}$.

Le résultat de la mesure est : $L=29{,}40$ cm avec une incertitude-type $u(L)=0{,}04$ cm.

REMARQUE La simulation d'un processus aléatoire grâce à un programme Python permet également de déterminer une incertitude-type composée (➜ p. 543).

REMARQUE La relation est étendue pour le quotient ou le produit de plus de deux grandeurs $X_1, X_2, ..., X_k$.

6 Comparaison à une valeur de référence

- La compatibilité ou la non compatibilité entre le résultat d'une mesure et une valeur de référence dépend de l'**incertitude-type**, qui fournit une **estimation de l'étendue des valeurs** que l'on peut raisonnablement attribuer à la grandeur physique mesurée.
- Une comparaison quantitative entre le résultat d'une mesure X_{mes} et une valeur de référence $X_{réf}$ peut être effectuée en utilisant le quotient $\frac{|X_{mes}-X_{réf}|}{u(X)}$, où $u(X)$ est l'incertitude-type associée au résultat.
  Si $\frac{|X_{mes}-X_{réf}|}{u(X)}\leqslant 2$, c'est-à-dire si l'écart entre le résultat de la mesure X_{mes} et la valeur de référence $X_{réf}$ est inférieur ou égal à deux incertitudes-types, il est possible de considérer le plus souvent en Terminale que le résultat de la mesure est compatible avec la valeur de référence.

REMARQUE S'il n'y a pas compatibilité entre la valeur expérimentale mesurée et la valeur de référence ou si la mesure n'est pas assez précise, il faut analyser les sources d'erreurs (un protocole ou un instrument de mesure non adapté, un mauvais choix de calibre, un nombre de mesures trop faible, etc.) pour être capable de modifier le protocole expérimental ou l'instrument de mesure en conséquence.

7 Chiffres significatifs

7.1. Précision et écriture d'une valeur numérique

- Les valeurs numériques des données et les résultats d'un calcul sont toujours arrondis en tenant compte des incertitudes sur les mesures.
  En l'absence d'autres indications, l'incertitude d'une valeur numérique porte sur le dernier chiffre exprimé ; elle est estimée à une demi-unité de ce chiffre.