Les lois de Kepler

Rappels :

Le vecteur accélération s'écrit dans la base de Frenet : $\vec{a} = a_N \cdot \vec{N} + a_T \cdot \vec{T}$
avec a_N **l'accélération normale** et a_T **l'accélération tangentielle.**

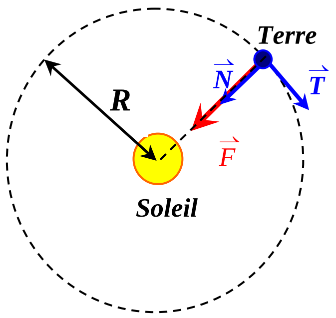
- Si a_N est nulle, le mouvement est rectiligne.
- Si a_T est nulle, le mouvement est uniforme.

L'accélération dans la base de Frenet s'écrit : $\boxed{\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = a_N \cdot \vec{N} + a_T \cdot \vec{T}}$

Avec $\boxed{a_N = \dfrac{v^2}{R}}$ et $\boxed{a_T = \dfrac{dv}{dt}}$

I. Nature du mouvement

Le mouvement d'un objet en orbite autour d'un astre est toujours une ellipse. Dans certains cas cette ellipse est un cercle ou s'en approche fortement, comme par exemple pour l'orbite de la Terre dans le référentiel héliocentrique. (voir TP)



Considérons le mouvement circulaire de la Terre autour du Soleil :

Système étudié : Terre de masse M_T

Référentiel d'étude : héliocentrique supposé galiléen

Inventaire des forces extérieures : Force de gravité $\vec{F}$ exercée par le Soleil sur la Terre.

Comme la masse de la Terre est constante, d'après la deuxième loi de Newton on a :

$$\Sigma\vec{F} = \vec{F} = M_T \cdot \vec{a}$$

Or la force de gravité exercée par le Soleil de masse M_S sur la Terre a pour expression :

$$\boxed{\vec{F} = G \cdot \frac{M_T M_S}{R^2} \cdot \vec{N}}$$

G = constante de gravitation universelle

F en N
M en kg
R en m
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $S.I.$

Donc $\vec{F} = M_T\vec{a} \Leftrightarrow G \cdot \dfrac{M_T M_S}{R^2} \cdot \vec{N} = M_T \left(a_N \cdot \vec{N} + a_T \cdot \vec{T}\right)$

$$\Leftrightarrow \boxed{G \cdot \frac{M_T M_S}{R^2}} \cdot \vec{N} = \boxed{M_T a_N} \cdot \vec{N} + \boxed{M_T a_T} \cdot \vec{T}$$

Donc, par identification : $\begin{cases} M_T a_N = G \cdot \dfrac{M_T M_S}{R^2} \\ M_T a_T = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_N = G \cdot \dfrac{M_S}{R^2} \\ a_T = 0 \end{cases}$

Or si $a_T = 0$ alors : $\dfrac{dv}{dt} = 0$ car par définition $a_T = \dfrac{dv}{dt}$

Et si $\dfrac{dv}{dt} = 0$ alors : $v = \|\vec{v}\| = cste$.

Ainsi, **si la trajectoire d'un objet en orbite gravitationnelle est circulaire alors son mouvement est nécessairement uniforme.**

Exemples :

- La Terre ayant une orbite quasi-circulaire, sa vitesse reste toujours égale.
- La comète de Halley ayant une orbite très elliptique, sa vitesse varie énormément (de 1 à 55 *km/s*)

II. Détermination de la vitesse

D'après la partie précédente on a : $a_N = G \cdot \dfrac{M_S}{R^2}$

Or, par définition : $a_N = \dfrac{v^2}{R}$

D'où : $\dfrac{v^2}{R} = G \cdot \dfrac{M_S}{R^2} \Leftrightarrow \boxed{v = \sqrt{G \cdot \dfrac{M_S}{R}}}$

v en *m/s*
M_S en *kg*
R en *m*
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ *S.I.*

Question :

Rechercher la vitesse de rotation de la terre autour du soleil.

III. Période de révolution

La période de révolution T est le temps nécessaire à l'objet (ici la Terre) pour faire un tour sur son orbite.
La longueur L d'une orbite est égale au périmètre du cercle, soit : $L = 2\pi R$

D'où : $v = \dfrac{d}{\Delta t} = \dfrac{L}{T} = \dfrac{2\pi R}{T}$

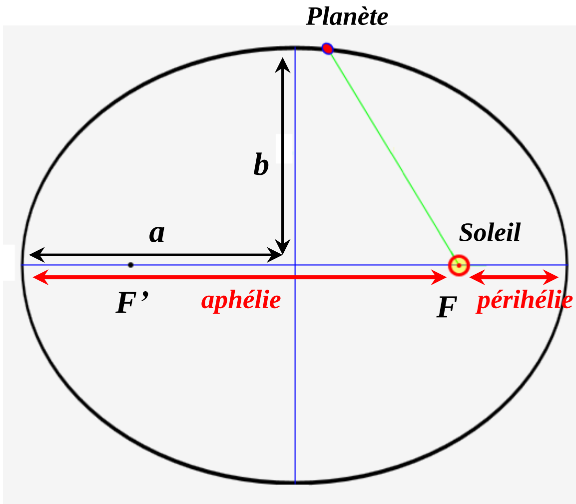
En utilisant l'expression du II :

$$\sqrt{G \cdot \frac{M_S}{R}} = \frac{2\pi R}{T} \Leftrightarrow \boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM_S}}}$$

Question :

Rechercher l'altitude h à laquelle sont placés les satellites géostationnaires.

IV. Les lois de Kepler



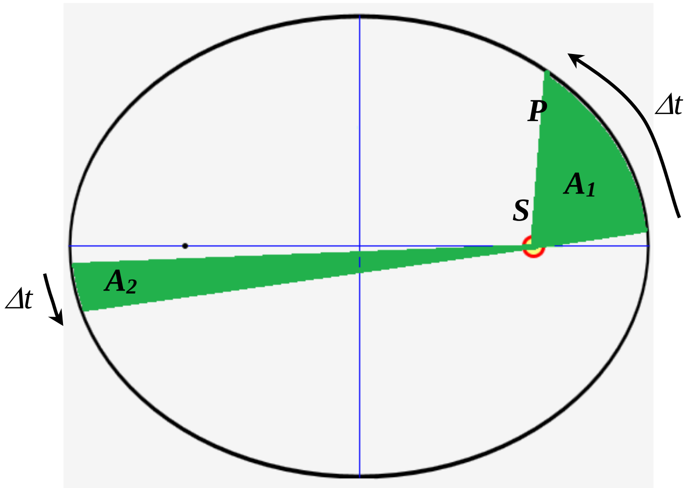
Première loi : **loi des orbites** (1609)

Dans le référentiel héliocentrique, la trajectoire des planètes est une ellipse dont l'un des foyers est le centre du Soleil.

A noter :

- Le péricentre est le point de l'orbite le plus proche de l'astre central.
  Si l'astre central est le Soleil on parle de périhélie. Pour la Terre, c'est le périgée.
- L'apocentre est le point de l'orbite le plus éloigné de l'astre central.
  Si l'astre central est le Soleil on parle d'aphélie. Pour la Terre, c'est l'apogée.

a est le **demi-grand axe** et ***b*** est le **demi-petit axe**.



Deuxième loi : **loi des aires** (1609)
Le segment [SP] (ou rayon vecteur) qui relie le centre du Soleil au centre de la planète balaie des aires égales pendant des durées égales.

A noter :

Cette loi implique que plus la planète s'approche du Soleil plus sa vitesse augmente. De même, plus elle s'en éloigne, plus sa vitesse diminue.

Troisième loi : **loi des périodes** (1618)

Le carré de la période de révolution d'une planète est proportionnel au cube du demi-grand axe de son orbite.

$$\boxed{T^2 = k \times a^3} \Leftrightarrow \boxed{\frac{T^2}{a^3} = k}$$

Feuille exos