

Activité 6 : Lois de Kepler

VERIFICATIONS NUMERIQUES DES LOIS DE KEPLER

1. MOUVEMENT HELIOCENTRIQUE DE MARS ET DEUXIEME LOI DE KEPLER

1.1. Coordonnées du centre d'une planète par rapport au référentiel héliocentrique

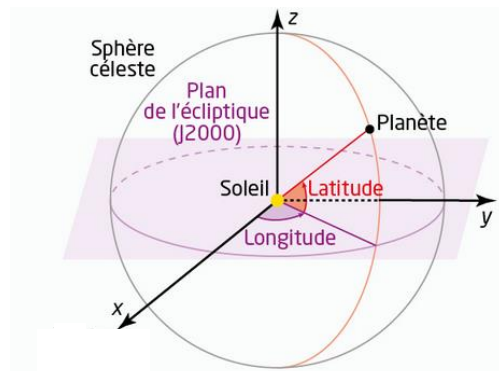
Le **plan de l'écliptique** désigné ci-contre par **(Sx, Sy)** est le plan contenant le centre S du Soleil et la trajectoire du centre de la Terre par rapport au référentiel héliocentrique.

Dans le repère (Sx, Sy, Sz), la position d'une planète par rapport au Soleil est caractérisée par :

- ses coordonnées « rectangulaires » ou cartésiennes **(x, y, z)** ;
- ses coordonnées dites « sphériques » : **(d, λ, θ)**

où $\begin{cases} d \text{ est la distance entre S et le centre P de la planète} \\ \lambda \text{ la longitude et } \theta \text{ la latitude sont des angles.} \end{cases}$

Pour information : $x = d \times \cos(\theta) \times \cos(\lambda)$ $y = d \times \cos(\theta) \times \sin(\lambda)$ $z = d \times \sin(\theta)$



Les données orbitales du mouvement des planètes du système solaire sont accessibles grâce au simulateur *Miriade* de l'IMCCE (Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Ephémérides) à l'adresse suivante.

<http://vo.imcce.fr/webservices/miriade/?forms>

Par exemple, pour connaître les coordonnées de Mars à partir du 1^{er} août 2022 tous les 30 jours sur environ 12 mois, il faut sélectionner :

- ♦ cible (target) : Mars (planet)
 - ♦ date (epoch) : **2022-08-01** puis Number of Dates : **13** et Computation step : **30 days**
 - ♦ référentiel (Reference center) : le référentiel héliocentrique (**heliocenter**)
 - ♦ paramètres avancés (Advanced parameters) : INPOP (Planet theory), Ecliptic (Reference Plane), rectangular (Type of coordinates), Astrometric J2000 (Type of ephemeris)
- puis cliquer sur Compute Ephemeris : le simulateur calcule et affiche, pour chaque date, les **coordonnées rectangulaires** de Mars.

Extrait	Target	Date	X au	Y au	Z au
	Mars	2022-08-01T00:00:00.00	1.3918919843780	0.0428211353867	-0.0332451433439
	Mars	2022-08-31T00:00:00.00	1.3279280999859	0.4890025526003	-0.0223249600944
	Mars	2022-09-30T00:00:00.00	1.1402253322632	0.8900343501873	-0.0093157310707
	Mars	2022-10-30T00:00:00.00	0.8527201226942	1.2137273354718	0.0045207172291
	Mars	2022-11-29T00:00:00.00	0.4957482505572	1.4393085261618	0.0180048645095

Unité de distance : unité astronomique au (ou ua) : **1 au = 1,496x10⁸ km**

Paramétrer le simulateur *Miriade* de l'IMCCE comme indiqué ci-dessus et afficher les **coordonnées rectangulaires** de Mars par rapport au plan de l'écliptique (Astrometric J2000).

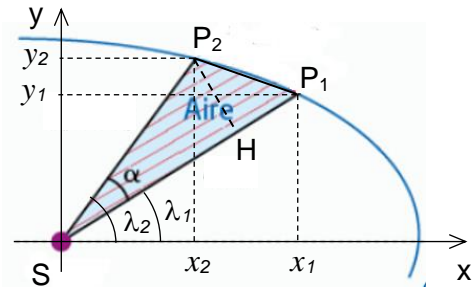
Attention ! Valider chacun des paramètres avant de cliquer sur Compute.

1.2. Calcul approchée de l'aire balayée par le segment Soleil-planète

Pour simplifier, on suppose que le centre de la planète se déplace dans le plan de l'écliptique soit $z = 0$ et $\theta = 0$.

L'aire A balayée par le segment Soleil-planète lorsque la planète se déplace de P_1 vers P_2 le long de sa trajectoire elliptique de foyer S peut être **approchée** par l'aire du triangle SP_1P_2 :

$$A \approx \frac{d_1 \times d_2 \times \sin(\alpha)}{2} \quad \text{avec } d_1 = SP_1 \text{ et } d_2 = SP_2$$



a) La formule donnant l'aire d'un triangle est $A = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$. Justifier l'expression proposée pour l'aire du triangle SP_1P_2 .

b) Exprimer $d_1 = SP_1$ en fonction des coordonnées (x_1, y_1) de P_1 .

c) Exprimer $\tan \lambda_1$ en fonction de x_1 et y_1 et en déduire comment calculer α à partir des coordonnées (x_1, y_1) de P_1 et (x_2, y_2) de P_2 .

d) A partir des données de *Miriade* (arrondies à 3 chiffres après la virgule), calculer la valeur approchée de l'aire balayée par le segment Soleil-Mars entre le 1^{er} et le 31 août 2022, en ua^2 .

1.3. Programmation du calcul de l'aire balayée

A partir des données de l'IMCC, on propose d'utiliser un programme en langage Python pour calculer l'aire balayée par le segment Soleil-Mars tous les 30 jours.

Ouvrir le lien : <https://replit.com/@yannickzanella/K2-1>

a) Saisir les valeurs des coordonnées (arrondies à 3 chiffres après la virgule) dans les listes x et y puis compléter les lignes 20 et 21.

Donnée : syntaxe d'écriture d'une puissance en Python : `**` ; par exemple, x^2 s'écrit `x**2`.

b) Lancer le programme et décrire les tâches effectuées.

c) Compte tenu des approximations effectuées, la deuxième loi de Kepler est-elle validée pour la planète Mars ? Justifier brièvement la réponse.

2. MOUVEMENT DES SATELLITES DE JUPITER ET TROISIEME LOI DE KEPLER

La généralisation de la troisième loi de Kepler au cas des satellites en mouvement autour de Jupiter se traduit par :

$$\frac{T^2}{a^3} = K_J = \frac{4\pi^2}{G.M_J} \quad \text{avec } G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \text{ et } M_J \text{ masse de Jupiter}$$

où a est le demi-grand axe et T la période de révolution d'un satellite de Jupiter.

Données : demi-grand axe a et période de révolution (ou période orbitale) des 4 principaux satellites de Jupiter par rapport au référentiel jovicentrique (centré sur Jupiter)

Satellite	Ganymède	Callisto	Io	Europe
a (million de km)	1.0704	1.8827	0.4218	0.6711
T (jours)	7.16	16.69	1.77	3.55

On propose d'utiliser un programme en langage Python pour tracer un graphe permettant de vérifier la validité de la troisième loi de Kepler pour ces satellites.

a) Lequel des graphes suivants est-il pertinent de tracer pour montrer la validité de la troisième loi de Kepler pour les satellites de Jupiter dans le référentiel jovi-centrique ? Justifier brièvement la réponse.

☐ $T = f(a)$

☐ $T^2 = f(a)$

☐ $T = f(a^3)$

☐ $T^2 = f(a^3)$

Ouvrir le lien

<https://replit.com/@yannickzanella/K3-1>

b) Compléter les liste a et T avec les valeurs précédentes (dans les unités proposées) puis compléter les lignes 23 et 24 pour afficher le graphe prévu avec les unités SI en abscisse et en ordonnée.

c) Lancer le programme et conclure.

d) Noter la valeur de la constante K_J obtenue par modélisation, en unité SI, et en déduire la masse de Jupiter.

Annexe 2 : Code associée à la vérification de la troisième loi de Kepler

```
import os
os.environ['MPLCONFIGDIR'] = os.getcwd() + "/configs/"
from matplotlib import pyplot as plt
from scipy import stats

# Valeurs du demi-grand axe et de la période de révolution de différents satellites en orbite autour d'un
même astre central
a=[]
T=[]

# Définition d'un programme permettant de modéliser une courbe  $y = f(x)$  par une droite d'équation  $y = Kx + b$ 
def RegLin(x,y):
    modele=[]
    K, b, r, p, u_K = stats.linregress(x,y)
    for i in range(len(x)):
        modele.append(K*x[i]+b)
    print("Modélisation de  $T^2 = f(a^3)$ ")
    print("Coefficient directeur K =", '%.3e'%K, 'unité SI')
    return modele

a_cube=[]
T_carre=[]
for i in range (0,len(T)) :
    a_cube.append(.....)
    T_carre.append(.....)

plt.scatter(a_cube,T_carre,s=20,c="blue",marker="o",linewidth=2)
plt.title("Vérification de la troisième loi de Kepler")
plt.xlabel("Cube du demi-grand axe en  $m^3$ ")
plt.ylabel("Carré de la période de révolution en  $s^2$ ")
plt.grid()

# Modélisation de la courbe  $T^2 = f(a^3)$ 
modele=RegLin(a_cube,T_carre)

# Tracé de la droite modèle
plt.plot(a_cube,modele,c='red',linewidth = 1)

plt.savefig("graphique")
plt.show()
```

Annexe 1 : Code associé au calcul approché d'aire balayée

```
import os
os.environ['MPLCONFIGDIR'] = os.getcwd() + "/configs/"
# importation des fonctions racine carré, sinus et arctangente.
from math import sqrt, sin, atan
import matplotlib.pyplot as plt

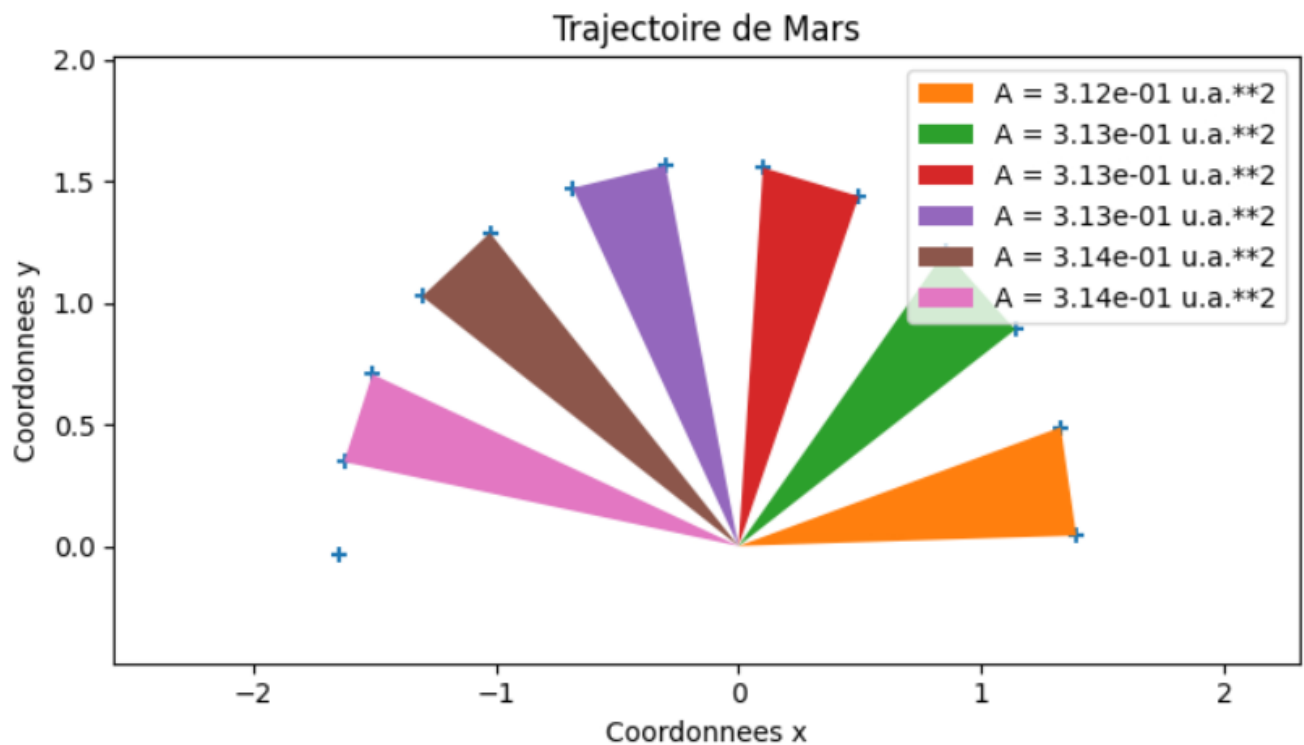
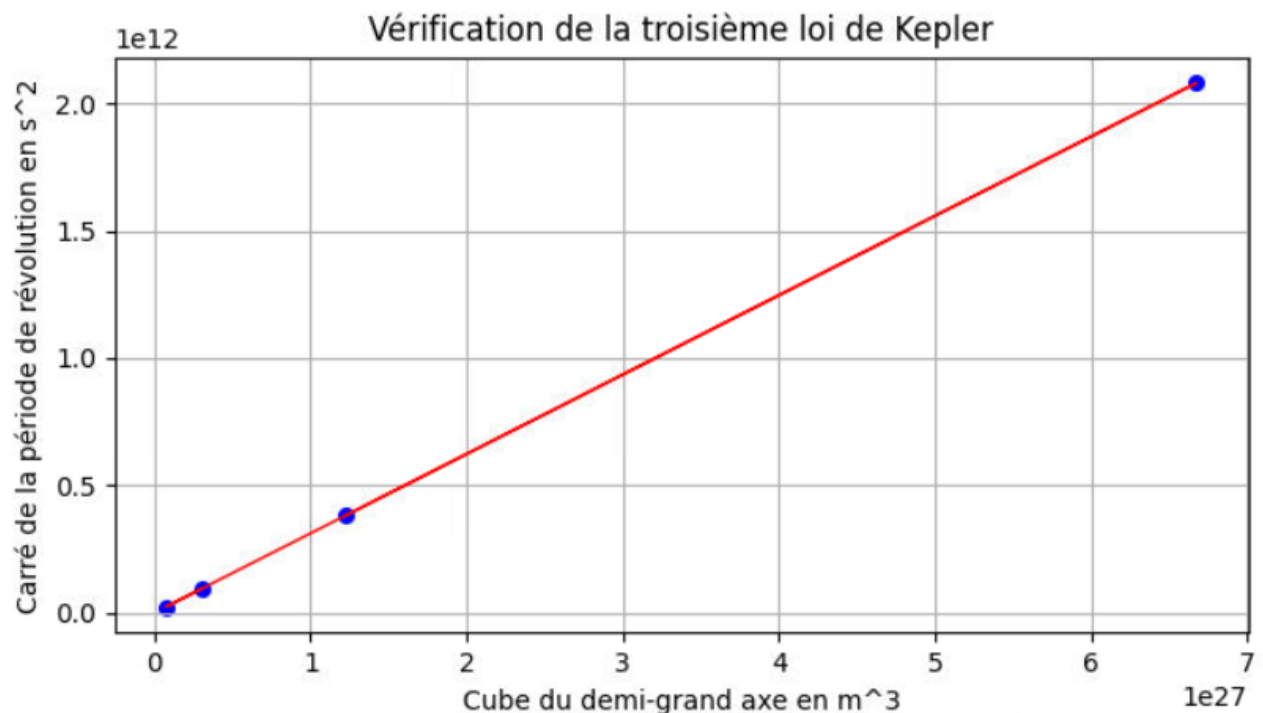
t = [0,30,60,90,120,150,180,210,240,270,300,330,360]
x = []
y = []

plt.xlabel('Coordonnees x')
plt.ylabel('Coordonnees y')
plt.title('Trajectoire de Mars')
plt.scatter(x, y, marker = '+')
plt.axis('equal')

i=1
while i < len(t) :
    # Calcul de l'aire balayée lorsque la planète se déplace de la position i-1 vers la
    position i
    alpha = atan(y[i]/x[i]) - atan(y[i-1]/x[i-1])
    di = .....
    di_1 = .....
    A = di*di_1*sin(alpha)/2
    plt.fill([x[i], x[i-1], 0], [y[i], y[i-1], 0], label='A = ' + "%.2e"%A + ' u.a.**2')
    i = i+2
plt.legend()
plt.show()
```

Activité 6 : Lois de Kepler

VERIFICATIONS NUMERIQUES DES LOIS DE KEPLER

1. MOUVEMENT HELIOCENTRIQUE DE MARS ET DEUXIEME LOI DE KEPLER2. MOUVEMENT DES SATELLITES DE JUPITER ET TROISIEME LOI DE KEPLER

Modélisation de $T^2 = f(T^3)$
Coefficient directeur $K = 3.116e-16$ unité SI

Target	Date	X au	Y au	Z au	Xp au/day	Yp au/day	
Mars	2022-08-01T00:00:00.00	1.3918919843780	0.0428211353867	-0.0332451433439	0.0001053529812	0.0151843990345	0.000
Mars	2022-08-31T00:00:00.00	1.3279280999859	0.4890025526003	-0.0223249600944	-0.0043002955169	0.0143286911454	0.000
Mars	2022-09-30T00:00:00.00	1.1402253322632	0.8900343501873	-0.0093157310707	-0.0080770080026	0.0122266743101	0.000
Mars	2022-10-30T00:00:00.00	0.8527201226942	1.2137273354718	0.0045207172291	-0.0109187120714	0.0092377988113	0.000
Mars	2022-11-29T00:00:00.00	0.4957482505572	1.4393085261618	0.0180048645095	-0.0127004454074	0.0057478270702	0.000
Mars	2022-12-29T00:00:00.00	0.1012000679193	1.5570098965310	0.0301497345010	-0.0134341494497	0.0020965596210	0.000
Mars	2023-01-28T00:00:00.00	-0.3007368870134	1.5661711401055	0.0402010018778	-0.0132126055929	-0.0014502567955	0.000
Mars	2023-02-27T00:00:00.00	-0.6832911475074	1.4729930688748	0.0476319861376	-0.0121647748337	-0.0046991242128	0.000
Mars	2023-03-29T00:00:00.00	-1.0237384813720	1.2885799354008	0.0521180511366	-0.0104282729771	-0.0075136709836	0.000
Mars	2023-04-28T00:00:00.00	-1.3034369208845	1.0274932209413	0.0535070682287	-0.0081364521265	-0.0097969678452	-0.000
Mars	2023-05-28T00:00:00.00	-1.5076355906897	0.7068040518135	0.0517949622384	-0.0054154689690	-0.0114764804617	-0.000
Mars	2023-06-27T00:00:00.00	-1.6252914460891	0.3455333658617	0.0471095052264	-0.0023871911262	-0.0124933216777	-0.000
Mars	2023-07-27T00:00:00.00	-1.6490317944821	-0.0356509037870	0.0397029918878	0.0008242406456	-0.0127958937036	-0.000

- Type of coordinates: Ecliptic rectangular
- Reference frame: Astrometric J2000
- Frame center: Heliocenter