Marco Bayesiano para el análisis de datos,
calibración de parámetros y modelamiento inverso

Introducción a la Teoría de Probabilidades

02

Universidad Industrial de Santander
U18 Fest

23–26 de septiembre de 2019

Ud. es el modelador

- Como toda teoría matemática, la teoría de probabilidades no representa realidades físicas. En cambio, es útil para representar conceptos
- Nuestro objetivo es *modelar* información de manera consistente y fácil de interpretar
- El modelador, ud., juega un rol fundamental
- El modelador toma decisiones subjetivas
- La validez de éstas suposiciones está en la utilidad de los resultados

Elementos de la teoría probabilidades

Experimento

Resultados Ω	**Variables aleatorias** $X\colon \Omega \to C$
Eventos $\mathcal{F}$	**Probabilidades** $P\colon \mathcal{F} \to [0,1]$

Resultados

Resultado: *Posible resultado de un experimento aleatorio*

Espacio de resultados Ω: "Conjunto" de resultados

Ejemplos

- Lanzar una moneda

$$\Omega = \{\text{cara}, \text{sello}\}$$

- Lanzar un dado

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Lanzar dos monedas

$$\Omega = \{(\text{cara}, \text{cara}), (\text{cara}, \text{sello}), (\text{sello}, \text{cara}), (\text{sello}, \text{sello})\}$$

Resultados

El espacio de resultados puede ser...

- **Finito contable**
  Ejemplo: Elegir un número de 1 a 10

$$\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$$

- **Infinito contable**
  Ejemplo: Elegir un número de 0 a infinito

$$\Omega = \mathbb{N}^0 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

- **Incontable**
  Ejemplo: Elegir un número real no negativo

$$\Omega = \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$$

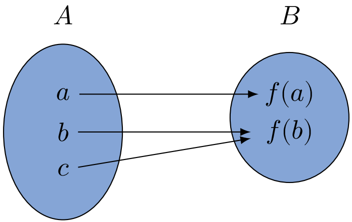
Variables aleatorias

Definición: Funciones

La notación

$$f\colon A \to B$$

define la función $f(\cdot)$ que asigna un elemento de B a un elemento A. E.g., $f(a) = b$ indica que la función asocia $b \in B$ a $a \in A$



Variables aleatorias

Funciones de los resultados que representan cantidades asociadas al resultado del experimento

$$X \colon \Omega \to C$$

Ejemplos

- Lanzar dos dados

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),\dots,(2,1),(2,2),\dots(6,6)\}$$
$$\omega \in \Omega, \quad \omega = (\omega_1, \omega_2)$$

Variable aleatoria: Suma de los dos dados

$$X \colon \Omega \to \mathbb{N}, \quad X(\omega) = \omega_1 + \omega_2$$

Ejemplos

- Suma de dos dados: $X\colon \Omega \to \mathbb{N}$, $X(\omega) = \omega_1 + \omega_2$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Variables aleatorias

Pueden ser *discretas* o *contínuas Ejemplo:* Altura, ingreso y género de una población

$$\Omega = \{\text{personas en la población}\}$$

- **Discreta**: Género

$$G\colon \Omega \to \{\text{masc.}, \text{fem.}, \dots\}$$

- **Contínua**: Altura

$$A\colon \Omega \to \mathbb{R}$$

- Ingreso: Variable contínua o discreta?

Eventos

Evento: *Subconjunto de resultados del experimento*

Campo de eventos $\mathcal{F}$: "Conjunto" de eventos

Definición: Conjunto-poder

Para Ω *contable*, una selección común de campo de eventos es el conjunto-poder 2^Ω, que contiene los siguientes eventos:

- Cada resultado (evento elemental)
- Todos los subconjuntos de Ω
- Todos los resultados (osea Ω)
- Ningún resultado (conjunto vacío, $\emptyset$)

Eventos

Ejemplo: Lanzar un dado

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Algunos eventos en el conjunto-poder $\mathscr{F} = 2^{\Omega}$:

- El número 3
- Un número par
- Un número menor a 4
- Un número entre 2 y 5
- Cualquier número (Ω)
- Ningún número ($\emptyset$)

Eventos

Ejemplo: Lanzar dos dados

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Ambos dados menor o igual a 4

Eventos

Ejemplo: Lanzar dos dados

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Dado # 1...

- E_1: Menor a 3
- E_2: Mayor a 6

Eventos E_1 y E_2 son *Mutuamente excluyentes*

Eventos

También es posible definir eventos en términos de los valores de variables aleatorias

Ejemplo: Lanzar dos dados, suma $X(\omega) = \omega_1 + \omega_2$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Suma X mayor o igual a 7

Eventos

También es posible definir eventos en términos de los valores de variables aleatorias

Ejemplo: Lanzar dos dados

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Suma mayor o igual a 7, pero el dado # 2 es 3 o mayor

Definición: Axiomas de probabilidades

Las probabilidades son...

1. ... cantidades reales no negativas asociadas a cada evento en $\mathcal{F}$...

$$P \colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$$

2. ... aditivas sobre eventos mutuamente exclusivos

Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

3. ... que suman a 1 sobre el conjunto de resultados

$$P(\Omega) = 1$$

Probabilidades

Definición: Axiomas de probabilidades

Las probabilidades son...

1. ... cantidades reales no negativas asociadas a cada evento en $\mathcal{F}$...

$$P\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$$

2. ... aditivas sobre eventos mutuamente exclusivos

Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

3. ... que suman a 1 sobre el conjunto de resultados

$$P(\Omega) = 1$$

Los axiomas implican que $0 \leq P(E) \leq 1$ para $E \in \mathcal{F}$

Probabilidades

Ejemplo: Lanzar dos dados, suma $X(\omega) = \omega_1 + \omega_2$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

- E_i, $i \in [1, 36]$: Eventos elementales
- $P(E_i) = 1/36 \approx 2.8\%$
- $P(X \geq 7) = 21/36 \approx 58\%$

Probabilidades

- Hasta ahora probabilidades se han definido de manera enteramente *abstracta*
- Probabilidad es una *medida*: “Área” o “masa” asociada a una región (evento) del espacio de resultados
- Qué significa que un evento tenga probabilidad de 58%?

Probabilidades

- Interpretación *frecuentista*: Si el experimento se ejecuta n veces, se observará un 58% de las veces el evento en cuestión

Probabilidades

- Interpretación *frecuentista*: Si el experimento se ejecuta n veces, se observará un 58% de las veces el evento en cuestión
- Cuál es la interpretación adecuada para la probabilidad de eventos que sólo ocurren una vez?
- E.g. el evento “llover mañana”: Sólo hay –un– mañana!

Probabilidades

- Interpretación *frecuentista*: Si el experimento se ejecuta n veces, se observará un 58% de las veces el evento en cuestión
- Cuál es la interpretación adecuada para la probabilidad de eventos que sólo ocurren una vez?
- E.g. el evento "llover mañana": Sólo hay –un– mañana!
- **Probabilidades como medida de (in)certidumbre**

Eventos asociados a variables aleatorias contínuas

Considérese la variable aleatoria contínua

$$A\colon \Omega \to C$$

Eventos asociados a variables aleatorias contínuas

Considérese la variable aleatoria contínua

$$A\colon \Omega \to C$$

Qué eventos podemos definir en términos de los valores de A?

Para $C \equiv \mathbb{R}$ y cierto valor $a \in C$...

- $P(A \leq a)$, $P(A > a)$, $P(a \leq A \leq b)$, etc.
- $P(A = a)$?
  En general, $A = a$ es un evento con probabilidad trivial $(= 0)$
- Revisaremos éste aspecto luego