

*Marco Bayesiano para el análisis de datos,  
calibración de parámetros y modelamiento inverso*

# Introducción a la Teoría de Probabilidades

Universidad Industrial de Santander  
U18 Fest

# Ud. es el modelador

- Como toda teoría matemática, la teoría de probabilidades no representa realidades físicas. En cambio, es útil para representar conceptos
- Nuestro objetivo es *modelar* información de manera consistente y fácil de interpretar
- El modelador, ud., juega un rol fundamental
- El modelador toma decisiones subjetivas
- La validez de éstas suposiciones está en la utilidad de los resultados

# Elementos de la teoría probabilidades

## Experimento

**Resultados**

$$\Omega$$

**Variables aleatorias**

$$X: \Omega \rightarrow C$$

**Eventos**

$$\mathcal{F}$$

**Probabilidades**

$$P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$$

**Resultado:** *Posible resultado de un experimento aleatorio*

**Espacio de resultados  $\Omega$ :** “Conjunto” de resultados

## Ejemplos

- Lanzar una moneda

$$\Omega = \{\text{cara}, \text{sello}\}$$

- Lanzar un dado

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Lanzar dos monedas

$$\Omega = \{(\text{cara}, \text{cara}), (\text{cara}, \text{sello}), (\text{sello}, \text{cara}), (\text{sello}, \text{sello})\}$$

El espacio de resultados puede ser...

- **Finito contable**

*Ejemplo:* Elegir un número de 1 a 10

$$\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$$

- **Infinito contable**

*Ejemplo:* Elegir un número de 0 a infinito

$$\Omega = \mathbb{N}^0 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

- **Incontable**

*Ejemplo:* Elegir un número real no negativo

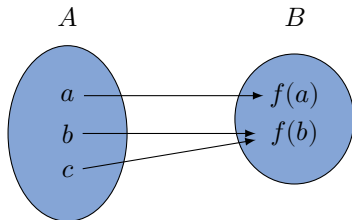
$$\Omega = \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$$

## Definición: Funciones

La notación

$$f: A \rightarrow B$$

define la función  $f(\cdot)$  que asigna un elemento de  $B$  a un elemento  $A$ . E.g.,  $f(a) = b$  indica que la función asocia  $b \in B$  a  $a \in A$



# Variables aleatorias

*Funciones de los resultados que representan cantidades asociadas al resultado del experimento*

$$X: \Omega \rightarrow C$$

## Ejemplos

- Lanzar dos dados

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (2, 1), (2, 2), \dots (6, 6)\}$$

$$\omega \in \Omega, \quad \omega = (\omega_1, \omega_2)$$

Variable aleatoria: Suma de los dos dados

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{N}, \quad X(\omega) = \omega_1 + \omega_2$$

# Variables aleatorias

## Ejemplos

- Suma de dos dados:  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $X(\omega) = \omega_1 + \omega_2$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12



# Variables aleatorias

Pueden ser *discretas* o *contínuas* Ejemplo: Altura, ingreso y género de una población

$$\Omega = \{\text{personas en la población}\}$$

- **Discreta:** Género

$$G: \Omega \rightarrow \{\text{masc., fem., ...}\}$$

- **Contínua:** Altura

$$A: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

- Ingreso: Variable continúa o discreta?

**Evento:** *Subconjunto de resultados del experimento*

---

**Campo de eventos  $\mathcal{F}$ :** “Conjunto” de eventos

## Definición: Conjunto-poder

Para  $\Omega$  *contable*, una selección común de campo de eventos es el conjunto-poder  $2^\Omega$ , que contiene los siguientes eventos:

- Cada resultado (evento elemental)
- Todos los subconjuntos de  $\Omega$
- Todos los resultados (osea  $\Omega$ )
- Ningún resultado (conjunto vacío,  $\emptyset$ )

*Ejemplo:* Lanzar un dado

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Algunos eventos en el conjunto-poder  $\mathcal{F} = 2^\Omega$ :

- El número 3
- Un número par
- Un número menor a 4
- Un número entre 2 y 5
- Cualquier número ( $\Omega$ )
- Ningún número ( $\emptyset$ )

*Ejemplo:* Lanzar dos dados

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Ambos dados menor o igual a 4

*Ejemplo:* Lanzar dos dados

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Dado # 1...

■  $E_1$ : Menor a 3

■  $E_2$ : Mayor a 6

Eventos  $E_1$  y  $E_2$  son  
*Mutuamente excluyentes*

# Eventos

También es posible definir eventos en términos de los valores de variables aleatorias

*Ejemplo:* Lanzar dos dados, suma  $X(\omega) = \omega_1 + \omega_2$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Suma  $X$  mayor o igual a 7

# Eventos

También es posible definir eventos en términos de los valores de variables aleatorias

*Ejemplo:* Lanzar dos dados

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Suma mayor o igual a 7, pero el dado # 2 es 3 o mayor

## Definición: Axiomas de probabilidades

Las probabilidades son...

1. ... cantidades reales no negativas asociadas a cada evento en  $\mathcal{F}$ ...

$$P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

2. ... aditivas sobre eventos mutuamente exclusivos

$$\text{Si } A \cap B = \emptyset, \text{ entonces } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

3. ... que suman a 1 sobre el conjunto de resultados

$$P(\Omega) = 1$$



## Definición: Axiomas de probabilidades

Las probabilidades son...

1. ... cantidades reales no negativas asociadas a cada evento en  $\mathcal{F}$ ...

$$P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

2. ... aditivas sobre eventos mutuamente exclusivos

$$\text{Si } A \cap B = \emptyset, \text{ entonces } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

3. ... que suman a 1 sobre el conjunto de resultados

$$P(\Omega) = 1$$

Los axiomas implican que  $0 \leq P(E) \leq 1$  para  $E \in \mathcal{F}$

# Probabilidades

*Ejemplo:* Lanzar dos dados, suma  $X(\omega) = \omega_1 + \omega_2$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

■  $E_i, i \in [1, 36]$ : Eventos elementales

■  $P(E_i) = 1/36 \approx 2.8\%$

■  $P(X \geq 7) = 21/36 \approx 58\%$

- Hasta ahora probabilidades se han definido de manera enteramente *abstracta*
- Probabilidad es una *medida*: “Área” o “masa” asociada a una región (evento) del espacio de resultados
- Qué significa que un evento tenga probabilidad de 58%?

- Interpretación *frecuentista*: Si el experimento se ejecuta  $n$  veces, se observará un 58% de las veces el evento en cuestión

- Interpretación *frecuentista*: Si el experimento se ejecuta  $n$  veces, se observará un 58% de las veces el evento en cuestión
- Cuál es la interpretación adecuada para la probabilidad de eventos que sólo ocurren una vez?
- E.g. el evento “llover mañana”: Sólo hay –un– mañana!

- Interpretación *frecuentista*: Si el experimento se ejecuta  $n$  veces, se observará un 58% de las veces el evento en cuestión
- Cuál es la interpretación adecuada para la probabilidad de eventos que sólo ocurren una vez?
- E.g. el evento “llover mañana”: Sólo hay –un– mañana!
- **Probabilidades como medida de (in)certidumbre**

# Eventos asociados a variables aleatorias continuas

Considérese la variable aleatoria continua

$$A: \Omega \rightarrow \mathcal{C}$$

# Eventos asociados a variables aleatorias continuas

Considérese la variable aleatoria continua

$$A: \Omega \rightarrow C$$

Qué eventos podemos definir en términos de los valores de  $A$ ?

Para  $C \equiv \mathbb{R}$  y cierto valor  $a \in C$ ...

- $P(A \leq a)$ ,  $P(A > a)$ ,  $P(a \leq A \leq b)$ , etc.

- $P(A = a)$ ?

En general,  $A = a$  es un evento con probabilidad trivial ( $= 0$ )

- Revisaremos éste aspecto luego