

*Marco Bayesiano para el análisis de datos,  
calibración de parámetros y modelamiento inverso*

# Probabilidad conjunta y condicional

04

Universidad Industrial de Santander  
U18 Fest

# Resultados de un referendo en dos regiones

		Región 1	
		Gana $G_1$	Pierde $P_1$
Región 2	Gana $G_2$	$A$ 0.2	$B$ 0.1
	Pierde $P_2$	$C$ 0.4	$D$ 0.3

Podemos pensar en términos de eventos

- $P(G_1) = P(A) + P(C) = 0.6$
- $P(P_1) = P(B) + P(D) = 0.4$
- Etc.

# Resultados de un referendo en dos regiones

		Región 1	
		Gana $Y_1 = 1$	Pierde $Y_1 = 0$
Región 2	Gana $Y_2 = 1$	(1, 1) 0.2	(0, 1) 0.1
	Pierde $Y_2 = 0$	(1, 0) 0.4	(0, 0) 0.3

O podemos pensar en variables aleatorias

- $Y_1$ : Resultado en la región 1
- $Y_2$ : Resultado en la región 2
- Variable vectorial

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$$

equivalente a  $Y = [Y_1, Y_2]^\top$

# Resultados de un referendo en dos regiones

		Región 1	
		Gana $Y_1 = 1$	Pierde $Y_1 = 0$
Región 2	Gana $Y_2 = 1$	(1, 1) 0.2	(0, 1) 0.1
	Pierde $Y_2 = 0$	(1, 0) 0.4	(0, 0) 0.3

Introducimos la *pmf conjunta*

$$\begin{aligned}p_Y(y) &= p_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2) \\ &= P(\{Y_1 = y_1\} \cup \{Y_2 = y_2\})\end{aligned}$$

- $p_{Y_1 Y_2}(1, 0) = 0.4$
- $p_{Y_1 Y_2}(0, 0) = 0.3$
- Etc.

# Probabilidad conjunta y marginal

Considérese las dos variables aleatorias

$$X: \Omega \rightarrow C_X, \quad Y: \Omega \rightarrow C_Y$$

## ■ pmf conjunta

$$p_{XY}(x, y) = P(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$$

# Probabilidad conjunta y marginal

Considérese las dos variables aleatorias

$$X: \Omega \rightarrow C_X, \quad Y: \Omega \rightarrow C_Y$$

## ■ pmf conjunta

$$p_{XY}(x, y) = P(\{X = x\} \cup \{Y = y\})$$

La pmf conjunta completamente define la distribución de probabilidad de ambas variables aleatorias

# Probabilidad conjunta y marginal

Considérese las dos variables aleatorias

$$X: \Omega \rightarrow C_X, \quad Y: \Omega \rightarrow C_Y$$

## ■ pmf conjunta

$$p_{XY}(x, y) = P(\{X = x\} \cup \{Y = y\})$$

La pmf conjunta completamente define la distribución de probabilidad de ambas variables aleatorias

## ■ pmfs marginales

$$p_X(x) = \sum_{y \in C_Y} p_{XY}(x, y), \quad p_Y(y) = \sum_{x \in C_X} p_{XY}(x, y)$$

# Resultados de un referendo en dos regiones

		Región 1	
		Gana $Y_1 = 1$	Pierde $Y_1 = 0$
Región 2	Gana $Y_2 = 1$	(1, 1) 0.2	(0, 1) 0.1
	Pierde $Y_2 = 0$	(1, 0) 0.4	(0, 0) 0.3

pmf marginal de  $Y_1$

$$\begin{aligned}p_{Y_1}(1) &= \sum_{y_2} p_{Y_1 Y_2}(1, y_2) \\&= p_{Y_1 Y_2}(1, 1) + p_{Y_1 Y_2}(1, 0) \\&= 0.2 + 0.4 = 0.6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_{Y_1}(0) &= \sum_{y_2} p_{Y_1 Y_2}(0, y_2) \\&= p_{Y_1 Y_2}(0, 1) + p_{Y_1 Y_2}(0, 0) \\&= 0.1 + 0.3 = 0.4\end{aligned}$$



# Independencia

Dos variables aleatorias son independientes si y sólo si

$$p(x, y) = p(x)p(y) \text{ para todo } x \in C_X, y \in C_Y$$

i.e., si la pmf conjunta se factoriza en términos de las pmfs marginales

- Independencia implica que observar una variable aleatoria no provee información acerca del valor de la otra variable aleatoria

# Resultados de un referendo en dos regiones

		Región 1	
		Gana $Y_1 = 1$	Pierde $Y_1 = 0$
Región 2	Gana $Y_2 = 1$	(1, 1) 0.2	(0, 1) 0.05
	Pierde $Y_2 = 0$	(1, 0) 0.1	(0, 0) 0.65

■  $p_{Y_1}(1) = 0.3$

■  $p_{Y_2}(1) = 0.25$

■  $p_{Y_1 Y_2}(1, 1) = 0.2 \neq 0.3 \times 0.25$

... por lo tanto,  $Y_1$  y  $Y_2$  **no** son independientes

# Probabilidad condicional

Introducimos la *pmf condicional*  $p_{X|Y}(x | y)$

- Indica la probabilidad de  $X = x$  dado que se ha observado que  $Y = y$
- Relacionada con la pmf conjunta y las pmfs marginales a través de la relación

$$p_{XY}(x, y) = p_{X|Y}(x | y)p_Y(y)$$

- Naturalmente,

$$p_{XY}(x, y) = p_{Y|X}(y | x)p_X(x)$$

# Resultados de un referendo en dos regiones

		Región 1	
		Gana $Y_1 = 1$	Pierde $Y_1 = 0$
Región 2	Gana $Y_2 = 1$	(1, 1) 0.2	(0, 1) 0.05
	Pierde $Y_2 = 0$	(1, 0) 0.1	(0, 0) 0.65

Se observa que el referendo *gana* en la región 2.Cuál es la probabilidad de ganar en la región 1?

$$\begin{aligned}p_{Y_1|Y_2}(1 | 1) &= \frac{p_{Y_1Y_2}(1, 1)}{p_{Y_2}(1)} \\&= \frac{0.2}{0.25} \approx 0.8\end{aligned}$$

# Resultados de un referendo en dos regiones

		Región 1	
		Gana $Y_1 = 1$	Pierde $Y_1 = 0$
Región 2	Gana $Y_2 = 1$	(1, 1) 0.2	(0, 1) 0.05
	Pierde $Y_2 = 0$	(1, 0) 0.1	(0, 0) 0.65

Se observa que el referendo *gana* en la región 2. Cuál es la probabilidad de ganar en la región 1?

$$\begin{aligned} p_{Y_1|Y_2}(1 | 1) &= \frac{p_{Y_1 Y_2}(1, 1)}{p_{Y_2}(1)} \\ &= \frac{0.2}{0.25} \approx 0.8 \end{aligned}$$

Compárese:

■  $p_{Y_1}(1) = 0.3$

■  $p_{Y_1|Y_2}(1 | 1) = 0.8$

# Resultados de un referendo en dos regiones

		Región 1	
		Gana $Y_1 = 1$	Pierde $Y_1 = 0$
Región 2	Gana $Y_2 = 1$	(1, 1) 0.2	(0, 1) 0.05
	Pierde $Y_2 = 0$	(1, 0) 0.1	(0, 0) 0.65

Se observa que el referendo *gana* en la región 2. Cuál es la probabilidad de ganar en la región 1?

$$\begin{aligned} p_{Y_1|Y_2}(1 | 1) &= \frac{p_{Y_1 Y_2}(1, 1)}{p_{Y_2}(1)} \\ &= \frac{0.2}{0.25} \approx 0.8 \end{aligned}$$

Compárese:

■  $p_{Y_1}(1) = 0.3$

■  $p_{Y_1|Y_2}(1 | 1) = 0.8$

Observar  $Y_2$  provee información acerca de  $Y_1$

# Independencia

Para dos variables aleatorias independientes,

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$$

Por lo tanto,

$$p_{X|Y}(x | y) = \frac{p_{XY}(x, y)}{p_Y(y)} = \frac{p_X(x)p_Y(y)}{p_Y(y)} = p_X(x)$$

i.e, la probabilidad de  $X = x$  es independiente del valor de  $Y$

# Variables aleatorias continuas

Considérese dos variables aleatorias continuas

$$X: \Omega \rightarrow C_X, \quad Y: \Omega \rightarrow C_Y$$

- **pdf conjunta**  $p_{XY}(x, y)$

Generaliza el concepto de pmf conjunta a variables continuas

- **pdf marginales**

$$p_X(x) = \int_{C_Y} p_{XY}(x, y) \, dy, \quad p_Y(y) = \int_{C_X} p_{XY}(x, y) \, dx$$



# Variables aleatorias continuas

*Ejemplo:* Variable aleatoria normal multivariante ( $n$ -variante)

$$Y = [Y_1, Y_2, \dots, Y_n]^\top, \quad Y \sim \mathcal{N}(\mu, C),$$

donde

- $\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n]^\top$  es el vector de medias
- $C$  es la matrix  $n \times n$  de *covarianza*

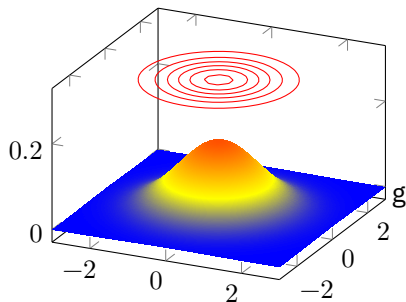
En el caso bivalente,

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

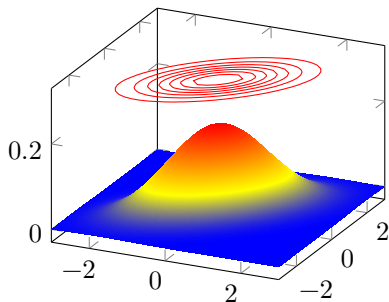
donde  $\rho$  denota la correlación entre  $Y_1$  y  $Y_2$

# Variables aleatorias continuas

*Ejemplo:* Variable aleatoria normal bivalente



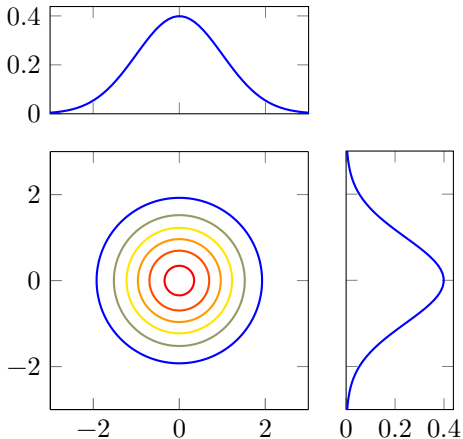
$\rho = 0.0$



$\rho = 0.6$

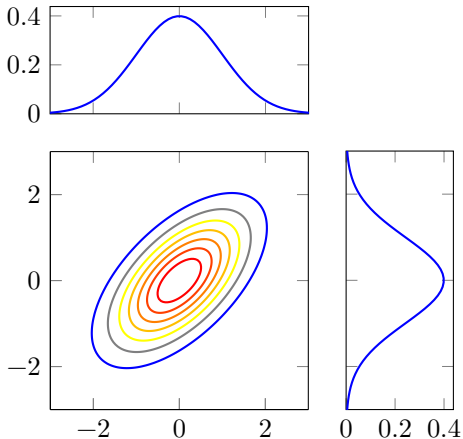
# Variables aleatorias continuas

*Ejemplo:* Variable aleatoria normal bivalente con  $\rho = 0.0$



# Variables aleatorias continuas

*Ejemplo:* Variable aleatoria normal bivalente con  $\rho = 0.6$



# Lanzar una moneda cargada

- Se lanza una moneda cargada  $n$  (e.g.,  $n = 100$ ) veces
- Se observa un número  $y$  (e.g.,  $y = 43$ ) de caras
- Cuál es la probabilidad  $\theta$  de obtener cara?

# Lanzar una moneda cargada

- Se lanza una moneda cargada  $n$  (e.g.,  $n = 100$ ) veces
- Se observa un número  $y$  (e.g.,  $y = 43$ ) de caras
- Cuál es la probabilidad  $\theta$  de obtener cara?

Cómo podemos resolver éste problema?

- *Frecuentista*: Estimador de máxima verosimilitud

$$\hat{\theta} = \frac{y}{n} = \frac{43}{100} = 0.43$$

# Lanzar una moneda cargada

- Se lanza una moneda cargada  $n$  (e.g.,  $n = 100$ ) veces
- Se observa un número  $y$  (e.g.,  $y = 43$ ) de caras
- Cuál es la probabilidad  $\theta$  de obtener cara?

Cómo podemos resolver éste problema?

- *Frecuentista*: Estimador de máxima verosimilitud

$$\hat{\theta} = \frac{y}{n} = \frac{43}{100} = 0.43$$

- *Bayesiano*

# Lanzar una moneda cargada

## *Análisis Bayesiano*

1. Tratamos a  $y$  y  $\theta$  como variables aleatorias  $Y$  y  $\Theta$
2. Observamos  $Y$  y buscamos calcular la distribución de  $P$  condicional a la observación de  $Y$

$$p_{\Theta|Y}(\theta | y) = \frac{p_{Y\Theta}(y, \theta)}{p_Y(y)} = \frac{p_{Y\Theta}(y, \theta)}{\int p_{Y\Theta}(y, \theta) dy}$$



# Lanzar una moneda cargada

## *Análisis Bayesiano*

1. Tratamos a  $y$  y  $\theta$  como variables aleatorias  $Y$  y  $\Theta$
2. Observamos  $Y$  y buscamos calcular la distribución de  $P$  condicional a la observación de  $Y$

$$p_{\Theta|Y}(\theta | y) = \frac{p_{Y\Theta}(y, \theta)}{p_Y(y)} = \frac{p_{Y\Theta}(y, \theta)}{\int p_{Y\Theta}(y, \theta) dy}$$

Necesitamos especificar la densidad conjunta  $p_{Y\Theta}(y, \theta)$

# Lanzar una moneda cargada

Cómo especificar la densidad conjunta  $p_{Y\Theta}(y, \theta)$ ?

- Si se conoce  $\theta$ , podemos modelar la densidad de  $Y$

$$p_{Y|\Theta}(y | \theta) = \text{Binomial}(y | \theta)$$

En otras palabras, podemos modelar la densidad condicional  $p_{Y|\Theta}(y | \theta)$

# Lanzar una moneda cargada

Cómo especificar la densidad conjunta  $p_{Y\Theta}(y, \theta)$ ?

- Si se conoce  $\theta$ , podemos modelar la densidad de  $Y$

$$p_{Y|\Theta}(y | \theta) = \text{Binomial}(y | \theta)$$

En otras palabras, podemos modelar la densidad condicional  $p_{Y|\Theta}(y | \theta)$

- Dada la definición de probabilidad condicional,

$$p_{Y\Theta}(y, \theta) = p_{Y|\Theta}(y | \theta)p_{\Theta}(\theta)$$

En otras palabras, hace falta especificar  $p_{\Theta}(\theta)$

# Lanzar una moneda cargada

Cómo especificar la densidad conjunta  $p_{Y\Theta}(y, \theta)$ ?

- Si se conoce  $\theta$ , podemos modelar la densidad de  $Y$

$$p_{Y|\Theta}(y | \theta) = \text{Binomial}(y | \theta)$$

En otras palabras, podemos modelar la densidad condicional  $p_{Y|\Theta}(y | \theta)$

- Dada la definición de probabilidad condicional,

$$p_{Y\Theta}(y, \theta) = p_{Y|\Theta}(y | \theta)p_{\Theta}(\theta)$$

En otras palabras, hace falta especificar  $p_{\Theta}(\theta)$

# Lanzar una moneda cargada

Cómo especificar  $p_{\Theta}(\theta)$ ?

- Antes de observar  $Y$  no sabemos mucho de la distribución de los valores de  $\Theta$ . Es decir, no sabemos qué valores de  $\Theta$  son más probables que otros...
- ...pero sabemos que  $\Theta \in [0, 1]$

# Lanzar una moneda cargada

Cómo especificar  $p_{\Theta}(\theta)$ ?

- Antes de observar  $Y$  no sabemos mucho de la distribución de los valores de  $\Theta$ . Es decir, no sabemos qué valores de  $\Theta$  son más probables que otros...
- ...pero sabemos que  $\Theta \in [0, 1]$
- Entonces podemos asumir que  $\Theta \sim U(0, 1)$

# Lanzar una moneda cargada

Cómo especificar  $p_{\Theta}(\theta)$ ?

- Antes de observar  $Y$  no sabemos mucho de la distribución de los valores de  $\Theta$ . Es decir, no sabemos qué valores de  $\Theta$  son más probables que otros...
- ...pero sabemos que  $\Theta \in [0, 1]$
- Entonces podemos asumir que  $\Theta \sim U(0, 1)$

Acá utilizamos el concepto de probabilidad como medida de **(in)certidumbre**

- La suposición  $\Theta \sim U(0, 1)$  codifica nuestro nivel de certidumbre acerca del valor de  $\Theta$

# Lanzar una moneda cargada

$$p_{\Theta|Y}(\theta | y) = \frac{P_{Y|\Theta}(y | \theta)p_{\Theta}(\theta)}{\int p_{Y|\Theta}(y | \theta)p_{\Theta}(\theta) d\theta}$$

- Tenemos  $p_{Y|\Theta}(y | \theta) = \text{Binomial}(y | \theta)$
- Tenemos  $p_{\Theta}(\theta) = U(\theta | 0, 1)$
- Listo! Podemos evaluar la integral del denominador y ya...
- ...pero no vamos a hacer eso



$$p_{\Theta|Y}(\theta | y) = \frac{P_{Y|\Theta}(y | \theta)p_{\Theta}(\theta)}{\int p_{Y|\Theta}(y | \theta)p_{\Theta}(\theta) d\theta}$$

- Calcular la integral en el denominador (*función de partición*) es sencillo cuando son pocos parámetros pero es muy costoso computacionalmente cuando son muchos parámetros
- Utilizaremos una familia de algoritmos, **Monte Carlo de cadenas de Markov (MCMC)** para generar directamente muestras de la distribución  $p_{\Theta|Y}(\theta | y)$  sin tener que calcular la integral

# Monte Carlo de cadenas de Markov (MCMC)

- Se generan una o varias “cadenas” de números
- En el límite de convergencia, las cadenas corresponden a conjuntos de muestras de la distribución condicional  $p_{\Theta|Y}(\theta | y)$
- Es el algoritmo de cálculos Bayesianos más costoso y más general

