



دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده فیزیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد فیزیک
گرایش فیزیک آماری و سامانه‌های پیچیده

یادگیری ماشین کوانتومی با همولوژی تداوم

نگارنده

نرگس اقبالی

استاد راهنما

دکتر سید محمد صادق موحد

استاد مشاور

بهروز عسکری

تابستان ۱۴۰۲

تقدیم به

مامان متین، بابا حمید، عادل جونی و همه‌ی دوستای عزیزم که از دور و نزدیک همیشه قوت قلبم بودن و هستن مخصوصاً مائده دهنوی، هدی طائب، فاطمه درخشنان، الهه برات وکیلی، سپیده علی اکبری و مهرناز جاوید پور عزیز.

تشکر و قدردانی

از جناب آقای دکتر سید محمد صادق موحد، بهروز عسکری عزیز و هم‌هی دوستانی که در شکل گیری این پایان نامه مرا یاری

نموده‌اند، صمیمانه تشکر می‌کنم.

چکیده

جبر ماتریسی به همراه ماهیت تقارنی و پادمتقارنی تابع موج سیستم‌های بس ذره‌ای منجر به ایجاد رهیافتی جدید در کنار فیزیک کلاسیک یعنی مکانیک کوانتومی شد. با الهام از رویکردهای مطرح شده در کوانتوم از یک سو و از سویی دیگر تلاش برای ساخت رایانه‌های کوانتومی، الگوریتم‌هایی با اهدافی نظیر بهینه‌سازی و حل مسائل پیچیده از طریق رایانه‌ها در بستر برنامه‌های محاسباتی توسعه یافته‌اند. در این پایان‌نامه با تکیه بر خاصیت خودمتشابهی یک کلاس جهانی به نام سری‌های زمانی مدل‌سازی شده بر مبنای حرکت براونی کسری که توسط نمای هارست مشخصه یا بی می‌شوند، تلاش می‌کنیم کاربست تحلیل مبتنی بر توپولوژی مستخرج از توپولوژی جبری که نسبت به نویفه‌ها و روندها مقاوم است را در بستر یادگیری ماشین کوانتومی برای طبقه‌بندی سری‌های زمانی fBm به کار بیندیم. برای این کار 200 سری زمانی از نوع حرکت براونی کسری، در ده کلاس نمای هارست به صورت $H \in [0, 1]$, $\Delta H = 0.1$ تولید کردیم که از 0.75 درصد آن‌ها برای آموزش و مابقی برای آزمودن مدل استفاده کردیم. از روی هر یک از سری‌های زمانی با استفاده از ابزار همولوژی تداوم، هفت ویژگی که شامل تعداد جفت‌های تداوم بتی یک، آنتروپی جفت‌های تداوم بتی صفر و یک، شعاع ظهرور، بیشینه و ناپدیدشدن در منحنی بتی و سطح زیر نمودار بتی است را استخراج کردیم و با روش کدبندی دامنه کوانتومی به حالت‌های کوانتومی تبدیل کردیم. برای ساخت مدل دسته‌بندی کوانتومی هم از یک مدار کوانتومی شش لایه که متشکل از دروازه‌های چرخشی (که زاویه‌های آن‌ها همان پارامترهای قابل آموزش مدل هستند) و دروازه‌های وارونگر کنترلی (که امکان دسترسی به حالت‌های درهم‌تنیده را ایجاد می‌کند) به تعداد کلاس‌های نمای هارست که ده تا هستند، استفاده کردیم. تابع هزینه‌ی مدل‌مان را هم مربع مقدار چشم‌داشتی ماتریس پائولی Z قرار دادیم چون مقدار آن بین صفر و یک است و مفهوم احتمال را می‌رساند. درنهایت مدل ساخته شده را برای بهینه‌سازی به یک بهینه‌ساز کلاسیکی تحويل دادیم و بهترین دقت برای مدل هایمان ۸۷ درصد بود که این نتیجه مستقل از مقدار نمای هارست بوده است.

واژگان کلیدی: یادگیری ماشین کوانتومی، بهینه سازی کوانتومی، تحلیل داده مبتنی بر توپولوژی، حرکت براونی کسری

فهرست مطالب

۱	۱ مدار کوانتومی	۱
۱	۱ بیت کوانتومی یا کیوبیت	۱
۳	۲.۱ دروازه‌های کوانتومی	۲.۱
۳	۱.۲.۱ دروازه‌های کوانتومی تک کیوبیتی	۱.۲.۱
۴	۱.۱.۲.۱ دروازه‌ی وارونگر کوانتومی	۱.۱.۲.۱
۴	۲.۱.۲.۱ دروازه ادامار کوانتومی	۲.۱.۲.۱
۴	۳.۱.۲.۱ دروازه کوانتومی Z	۳.۱.۲.۱
۵	۲.۲.۱ دروازه‌های کوانتومی چند کیوبیتی	۲.۲.۱
۵	۱.۲.۲.۱ دروازه‌ی وارونگر کنترل شده	۱.۲.۲.۱
۶	۳.۱ مدارهای کوانتومی	۳.۱
۹	۱.۳.۱ مفهوم اندازه‌گیری در مدار	۱.۳.۱
۱۱	۲ الگوریتم‌های کوانتومی	۲
۱۱	۱.۲ مقدمه	۱.۲
۱۲	۲.۱ الگوریتم دویچ	۲.۱
۱۳	۱.۲.۲ راه حل کلاسیکی	۱.۲.۲
۱۳	۲.۲.۲ راه حل کوانتومی	۲.۲.۲

١٥	الگوریتم دویچ-جوزا	٣.٢
١٥	راه حل کلاسیکی	١.٣.٢
١٥	راه حل کوانتمومی	٢.٣.٢
١٨	الگوریتم پس زدن فاز	٤.٢
٢٠	الگوریتم گرور	٥.٢
٢٠	نحوه‌ی کارکرد الگوریتم جستجو گرور	١.٥.٢
٢٣	پیاده‌سازی الگوریتم جستجوی گرور روی یک دایره‌ی واحد	٢.٥.٢
٢٦	پیاده‌سازی الگوریتم گرور با استفاده از مدار کوانتمومی و حل مسئله‌ی گراف دوبخشی	٣.٥.٢
٢٦	گراف دوبخشی	١.٣.٥.٢
٢٨	پیاده‌سازی الگوریتم گرور با استفاده از مدار کوانتمومی	٢.٣.٥.٢
٣٢	یادگیری ماشین کلاسیکی و کوانتمومی	٣
٣٢	مقدمه	١.٣
٣٢	یادگیری ماشین کلاسیکی	٢.٣
٣٣	مراحل یادگیری ماشین کلاسیکی	١.٢.٣
٣٨	یادگیری با نظرارت	٣.٣
٣٩	رگرسیون خطی	١.٣.٣
٤١	رگرسیون لجستیک	٢.٣.٣
٤١	دسته بندی دو کلاسه	١.٢.٣.٣
٤٤	یادگیری ماشین کوانتمومی	٤.٣
٤٤	مقدمه	١.٤.٣
٤٧	کدبندی کوانتمومی	٢.٤.٣
٥٠	پردازش	٣.٤.٣
٥٠	اندازه‌گیری	٤.٤.٣

۵۲	۵.۴.۳	بهینه‌سازی کوانتومی
۵۳	۶.۴.۳	الگوریتم بهینه‌سازی تقریبی کوانتومی
۵۴	۷.۴.۳	دسته‌بندی کوانتومی
۵۵	۸.۴.۳	رگرسیون کوانتومی
۵۸		۴	همولوژی تداوم
۵۸	۱۰.۴	مقدمه
۵۹	۱.۴	تعریف پایه در همولوژی تداوم
۶۱	۲.۴	همسان ریختی: توپولوژی در مقابل هندسه
۶۳	۳.۴	غوطه‌ورسازی تاخیر زمانی
۶۳	۴.۴	ساخت مجتمع‌های سادکی در فضای ابرداده
۶۵	۵.۴	ناوردای توپولوژیکی
۶۵	۶.۴	بارکد تداوم
۶۶	۷.۴	منحنی بتی
۶۸	۵	طبقه‌بندی سری‌های زمانی کلاس حرکت بروانی کسری
۶۸		۱.۵	مقدمه
۶۹	۲.۵	سری‌های زمانی حرکت بروانی کسری
۷۰	۳.۵	ساخت بردار ویژگی
۷۲	۴.۵	ساخت مدل دسته‌بندی کوانتومی و نتایج
۷۶	۵.۵	نتیجه‌گیری
۷۷		۶	جمع‌بندی و نتیجه‌گیری
۷۷	۱.۶	جمع‌بندی
۷۹	۲.۶	گام‌های پیش رو

فهرست تصاویر

۱.۱	نمایش یک بیت کوانتمی در کره‌ی بلاخ [۲]	۲
۲.۱	مدار کوانتمی شماره ۱	۶
۳.۱	مدار کوانتمی شماره ۲	۷
۴.۱	مدار کوانتمی شماره ۳	۷
۵.۱	مدار کوانتمی شماره ۴	۸
۶.۱	مدار کوانتمی شماره ۵	۹
۱.۲	مدار کوانتمی مربوط به الگوریتم دویچ	۱۳
۲.۲	مدار مربوط به الگوریتم دویچ-جوزا	۱۶
۳.۲	مدار مربوط به الگوریتم پس زدن فاز	۱۸
۴.۲	یک فهرست با هشت عضو که مقدار تمام داده‌های آن در ابتدا ۱ است	۲۱
۵.۲	یک فهرست با هشت عضو که عضو شماره ۴ آن چون در دسته‌ی علامت‌گذاری شده‌ها قرار دارد بعد از اعمال مرحله‌ی پرس و جوی گرور قرینه شده است	۲۲
۶.۲	اعمال مرحله‌ی وارونگی الگوریتم گرو روی یک فهرست هشتایی با یک عضو علامت‌گذاری شده	۲۲
۷.۲	اعمال مرحله‌ی وارونگی الگوریتم گرو روی یک فهرست هشتایی با یک عضو علامت‌گذاری شده	۲۳
۸.۲	نمایش یک بردار دارای اعضای علامت‌گذاری شده و علامت‌گذاری نشده در دایره‌ی واحد با بردارهای پایه علامت‌گذاری شده و علامت‌گذاری نشده	۲۵
۹.۲	اعمال دو مرحله‌ی پرس و جو وارونگی الگوریتم گرور روی بردار u	۲۵

۱۰.۲	بردار اولیه u را با 0 نشان داده‌ایم و بعد از هر مرحله اعمال الگوریتم گرور آن را با $.., 2, 3, 1$ نشان داده‌ایم.
۲۶	همچنین در شکل $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, .., 1$ قرینه‌های بردارهای $.., 2, 3, 1$ نسبت به بردار <i>unmarked</i> هستند
۲۷	۱۱.۲ مثالی از یک گراف دو بخشی
۲۷	۱۲.۲ مثالی از یک گراف دو بخشی
۲۷	۱۳.۲ مدار کوانتومی برای تشخیص دو بخشی بودن یا نبودن گرافی با رنگ‌آمیزی شکل ۱۴.۲ ..
۲۸	۱۴.۲ مثالی از حالت غیر دو بخشی برای رنگ‌آمیزی گراف شکل ۱۲.۲
۲۹	۱۵.۲ پیاده‌سازی الگوریتم گرور برای تشخیص رنگ‌آمیزی صحیح برای گراف شکل ۱۲.۲
۲۹	۱۶.۲ دروازه‌های معادل بخش وارونگی در الگوریتم گرور
۳۱	۱۷.۲ اعمال دو مرتبه الگوریتم گرور روی گراف شکل ۱۲.۲ برای پیدا کردن رنگ‌آمیزی یا رنگ‌آمیزی‌هایی که گراف را به گراف دو بخشی، تبدیل می‌کند.
۳۳	۱.۳ هوش مصنوعی و زیر مجموعه‌های آن
۳۴	۲.۳ یادگیری ماشین و دسته‌بندی آن
۳۷	۳.۳ نمایشی ازتابع هزینه بر حسب یک پارامتر θ و نقاط بینیمه و کمینه موضعی و مطلق
	نمایشی از نحوه‌ی عملکرد روش بهینه‌سازی گرادیان کاهش که حالت اولیه را با دایره سیز و شماره ۱ نشان داده‌ایم و بعد از هر بار بهروز رسانی پارامتر با روش بهینه‌سازی گرادیان کاهشی آن را با اعداد ۲ و ۳ و .. نشان داده‌ایم. نمودار رسم شده تابع هزینه $C(\theta)$ بر حسب پارامتر θ است.
۳۹	۵.۳ نمایش داده‌های قیمت ۲۵ خانه بر اساس متراژ آن‌ها
۴۰	۶.۳ نمایش یک خط برای مدل کردن و پیش‌بینی داده‌های قیمت ۲۵ خانه بر اساس متراژ آن‌ها
۴۰	۷.۳ نمایش چند نمونه از خطوطی که می‌توان برای مدل کردن خط داده‌های قیمت ۲۵ خانه بر اساس متراژ آن‌ها
۴۲	۸.۳ برآذش مدل رگرسیون خطی برای یک مسئله‌ی رگرسیون خطی
	نتخاب یک مدل خط خمیده به جای مدل خطی برای مدل کردن داده‌های دو کلاسه و حل مسئله‌ی دسته‌بندی

۱۰.۳	رسم تابع منفی لگاریتم تابع درست نمایی به منظور شان دادن اینکه این تابع دارای مینیمم مطلق است و روش گرادیان کاهاشی برای بهینه‌سازی آن مناسب است.	۴۴
۱۱.۳	مدار کوانتوسی .	۴۵
۱۲.۳	مدار کوانتوسی وردشی	۴۶
۱۳.۳	شکل یک مدار کوانتوسی وردشی و اجزای کوانتوسی و کلاسیکی آن	۴۶
۱۴.۳	چهار رویکرد مختلف برای ترکیب محاسبات کوانتوسی و یادگیری ماشین [۱], [۱۱].	۴۷
۱۵.۳	شکلی نمادین از مفهوم کدبندی کوانتوسی	۴۷
۱۶.۳	روش کدبندی زاویه‌ای برای بردار X	۴۹
۱۷.۳	چند نمونه از مدارهای پارامتری شده [۱۲]	۵۰
۱۸.۳	چند نمونه از مدارهای پارامتری شده [۱۲]	۵۱
۱۹.۳	نمونه‌ای از یک مدار حل کننده ویژه مقدار کوانتوسی وردشی	۵۳
۲۰.۳	مدار مربوط به الگوریتم بهینه‌سازی QAOA	۵۴
۲۱.۳	پیاده‌سازی یک مدل دسته‌بندی کوانتوسی با استفاده از مدار کوانتوسی پارامتری شده و یک بهینه‌ساز کلاسیکی برای پیدا کردن مقدار بهینه‌ی پارامترها برای یک مسئله دو کلاسه با	۵۶
۲۲.۳	پیاده‌سازی یک مدار کوانتوسی برای انجام رگرسیون خطی کوانتوسی	۵۷
۲۳.۳	پیاده‌سازی یک مدار کوانتوسی برای انجام رگرسیون خطی کوانتوسی	۵۷
۱.۴	نمونه از نمودار تداوم	۶۰
۲.۴	مثال‌هایی از فضاهای توپولوژیکی همسان ریخت [۲۴]	۶۲
۳.۴	نمونه‌ای از غوطه ورسازی تاخیر زمانی را برای $D = 3$ نشان می‌دهد [۲۶]	۶۳
۴.۴	نمونه‌ای از تبدیل یک ابر داده به مجتمع سادکی [۲۴]	۶۴
۵.۴	مجموعه نقاط متناهی در R^2 برای ($\epsilon = 0$) و مجموعه‌ای از فضاهای تو در تو که با افزایش ϵ ساخته شده است و بارکد حاصل از این فضاهای تو در تو، خط پیوسته تعداد مولفه‌های همبند و خط گسسته تعداد حفره‌ها را نشان می‌دهد. [۲۷]	۶۶

۶۷	۶.۴ شکل منحنی بتی صفر که از روی جفت‌های تداوم مربوط به بتی صفر در نمودار بارکد تداوم رسم می‌شود . . .
۶۷	۷.۴ شکل منحنی بتی یک که از روی جفت‌های تداوم مربوط به بتی یک در نمودار بارکد تداوم رسم می‌شود . . .
۷۱	۱.۵ سری‌های زمانی حرکت بروانی کسری با نماهای هارست مختلف
۷۱	۲.۵ نمونه‌ای از بارکد تداوم که هر یک از پاره خط‌ها جفت تداوم (PP) می‌نامند که یک نقطه‌ی شروع (ϵ_{start}) و پایان (ϵ_{end}) دارد که در شکل نشان داده شده است. همچنین ϵ شعاع همان کره‌ها در فیلتراسیون است که به آن پارامتر مجاورت هم می‌گویند.
۷۲	۳.۵ نمایش $\epsilon_{appear}, \epsilon_{maximum}, \epsilon_{didappear}$ در منحنی بتی
۷۳	۴.۵ نمایش یک لایه که در مدار دسته بندی کوانتوسی نمای هارست سری‌های زمانی fBm به کارخواهد رفت. . .
۷۳	۵.۵ مدار پارامتری شده برای حل مسئله تشخیص نمای هارست سری زمانی‌های fBm برای تشخیص یک کلاس . . .
۷۴	۶.۵ مدل کامل دسته‌بندی کوانتوسی پارامتری شده برای حل مسئله تشخیص نمای هارست سری زمانی‌های fBm . . .
۷۴	۷.۵ بررسی تغییرات دقیق مدل دسته‌بندی سری زمانی حرکت بروانی کسری برای تغییر تعداد لایه‌های مدل . . .
۷۵	۸.۵ بررسی تغییرات دقیق مدل دسته‌بندی سری زمانی حرکت بروانی کسری برای پارامتر ازاد تعداد دفعات تکرار اجرای مدل و بهینه‌سازی پارامترهای مدار
۷۵	۹.۵ بررسی تغییرات دقیق مدل دسته‌بندی سری زمانی حرکت بروانی کسری برای پارامتر ازاد نرخ یادگیری در بهینه‌سازی

پیشگفتار

در دهه‌های اخیر جهان علم و فناوری با گام‌های بلندی به پیش رفته است. به طوری که انسان‌ها از اختراعاتی برخوردار شده‌اند که تا سال‌ها خیالی و غیر ممکن تلقی می‌شدند، از جمله این تصورات هیجان‌انگیز می‌توان به ترکیب توانمندی‌های قوانین مکانیک کوانتومی با تکنیک‌های پیشرفته‌ی یادگیری ماشین و خلق یک زمینه پژوهشی به نام یادگیری ماشین کوانتومی به منظور کشف ابعاد جدید از تجزیه و تحلیل داده‌ها و مسائل پیچیده نام برد. در طول چند دهه گذشته، اثرات کوانتومی باعث پیشرفت زمینه‌های مختلف علم اطلاعات، مانند محاسبات، رمزگاری و ارتباط امن شده‌اند. اما این بار، علم کوانتوم در خدمت هوش مصنوعی قرار گرفته است. بنابر مقاله‌ای که در ژورنال *Physical Review Letters* منتشر شد، اثرات کوانتومی می‌توانند یادگیری ماشین (زیرشاخه‌ای از علم هوش مصنوعی) را بهبود ببخشند [۱]. یادگیری ماشین، به قدرت پردازش، وابسته بوده و در واقع بر آن متکی است. به این معنا که هرچه قدرت پردازشی ماشین، بالاتر باشد، میزان یادگیری آن نیز بیشتر خواهد بود. از طرفی می‌توان این قدرت پردازشی را به کمک اثرات کوانتومی بهبود بخشید. از آنجایی که تکنولوژی‌های کوانتومی به شدت در حال پیشرفت هستند، می‌توان نتیجه گرفت که یادگیری ماشین کوانتومی نیز نقش مهمی را در آینده دنیا بازی خواهد کرد. درک بهتر تغییرات آب و هوا، کمک به توسعه دارو و درمان‌های تازه و همچنین ماشین‌های اتوماتیک و کارخانه‌های هوشمند، از جمله مواردی هستند که به کمک یادگیری ماشین کوانتومی، امکان پذیر خواهند بود.

همچنین با پیشرفت علم و فناوری، دنیای ما با حجم عظیمی از داده‌ها و اطلاعات پر شده است. در این محیط پویا و پیچیده، تحلیل دقیق و بهره‌برداری از اطلاعات از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این میان تحلیل داده مبتنی بر توپولوژی با قابلیت‌های بی‌نظیر خود به عنوان یک ابزار قدرتمند برای مدیریت داده‌های پیچیده و بعد بالا، ظهرور کرده است. این ابزار، قدرت خود را در مقابل اطلاعات ناقص و نوافه‌ها اثبات کرده است و به ما امکان می‌دهد تا حتی در شرایطی که داده‌ها با این مشکلات مواجه هستند، نتایج معنادار و قابل پیش‌بینی را ارائه دهیم. علاوه بر این، تحلیل داده مبتنی بر توپولوژی به مفاهیم توپولوژیکی داده‌ها، شکل و ساختارهای زیربنایی آن‌ها در فضای ابر داده توجه می‌کند و قادر است ویژگی‌هایی مانند خوش‌ها، سوراخ‌ها، حلقه‌ها و تونل‌ها را در فضای ابر داده شناسایی و تحلیل کند در حالی که از طریق روش‌های دیگر به راحتی قابل تشخیص نیستند.

داده‌هایی که قرار است در این پایان نامه مورد بررسی قرار دهیم یک کلاس شناخته شده از سری‌های زمانی خود متشابه غیر مانا حرکت براونی کسری است که بسیاری از فرایندهای تصادفی حاضر در طبیعت، حوزه‌های مالی مثل مدیریت ریسک و همچنین بسیاری از پدیده‌ها در علم فیزیک از این نوع داده هستند. یکی از مشخصه‌های این مدل سری زمانی این است که با یک کمیت

معروف به نام نمای هارست، ویژگی‌هایشان تعیین می‌شوند، بنابراین تشخیص این نمای هارست کلاس جهانی آن‌ها را مشخص و به پیش‌بینی رفتار آن‌ها کمک می‌کند.

در این پایان نامه، در فصل اول با مفاهیم پایه‌ای مثل بیت کوانتمی، دروازه‌های کوانتمی و اعمال کردن آن‌ها روی بیت‌های کوانتمی و سپس ساخت مدارهای کوانتمی آشنا خواهید شد. در فصل دوم به سراغ تعدادی از الگوریتم‌های کوانتمی مثل الگوریتم گروور خواهیم رفت و نشان خواهیم داد، هر یک چگونه یک مسئله را سریع‌تر از الگوریتم‌های کلاسیکی حل می‌کند. در فصل سوم ابتدا یادگیری ماشین کلاسیکی را بررسی خواهیم کرد و خواهیم گفت از چه بخش‌هایی تشکیل شده است و دو مدل معروف دسته‌بندی و رگرسیون را بررسی خواهیم کرد در ادامه این فصل مانسته کوانتمی این دو مدل مهم را خواهیم ساخت و هر بخش آن را به طور مجزا بررسی خواهیم کرد. در فصل چهارم کمی درباره ایزار تحلیل داده مبتنی بر توپولوژی توضیح خواهیم داد و با مفهومی به نام همولوژی تداوم آشنا خواهیم شد و یاد خواهیم گرفت چه گونه با استفاده از این ایزار تعدادی ویژگی توپولوژیکی می‌توان استخراج کرد. در فصل پنجم به تفضیل با داده‌های سری زمانی حرکت براونی کسری آشنا خواهیم شد و از آن‌ها با ایزار گفته شده در فصل پنجم، هفت ویژگی توپولوژیکی استخراج خواهیم کرد و با استفاده از آن‌ها به آموزش مدل دسته‌بندی کوانتمی ای که ساخته‌ایم، خواهیم پرداخت. در فصل آخر، برایم تا نتایج حاصل از مدلمان را بررسی کنیم و با مانسته‌ی کلاسیکی اش مقایسه کنیم.

فصل ۱

مدار کوانتومی

۱.۱ بیت کوانتومی یا کیوبیت

یک بیت، واحد بنیادی اطلاعات در رایانه است که محاسبات توسط آن و بر اساس دستگاه اعداد دودویی^۱ میسر می‌شود. بدون توجه به شکل تحقق فیزیکی آن، یک بیت در هر لحظه باید نشان دهنده صفر یا یک باشد؛ مانند یک چراغ که می‌توان حالت روشن آن را برابر یک و حالت خاموشش را برابر صفر فرض کرد. یک بیت کوانتومی^۲ به بیت کلاسیک شباهت‌هایی دارد، اما در کل ماهیتی بسیار متفاوت دارد. از نظر فیزیکی، بیت کوانتومی، یک سامانه کوانتومی دو حالتی است، یعنی سیستمی که توسط مکانیک کوانتومی به درستی قابل توصیف است و هنگام اندازه‌گیری یکی از دو حالت ممکن خود را اختیار می‌کند، مانند قطبش یک فوتون که در اینجا، جهت قطبش عمودی و جهت قطبش افقی دو حالت ممکن برای سامانه هستند، اما اصل برهم‌نہی^۳ در مکانیک کوانتومی به بیت کوانتومی اجازه می‌دهند که در علاوه بر این دو حالت، حالتی را که برابر با برهم‌نہی این دو حالت است را نیز اختیار کند. درواقع همین پدیده، تفاوت اصلی بین بیت‌های کلاسیک و بیت‌های کوانتومی است. دو حالتی که در آن، مقدار یک بیت کوانتومی ممکن است اندازه‌گیری شود، حالت‌های پایه (یا بردارهای پایه) نامیده می‌شوند. مرسوم است که حالت‌های کوانتومی را، مانند حالت‌های بیت‌های کوانتومی، با نمادگذاری برا-کت دیراک نمایش می‌دهند. دو حالت پایه‌ی بیت‌های کوانتومی، به

¹Binary

²Qbit

³Superposition

صورت $|0\rangle$ و $|1\rangle$ نمایش داده می‌شوند و کت^۱ یک و کت^۲ صفر خوانده می‌شود. نمایش ماتریسی این دو حالت به صورت زیر است:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

همچنین نمایش یک بیت کوانتومی به طوری کلی به صورت برهم‌نهی حالت‌های پایه است و به صورت زیر نمایش داده

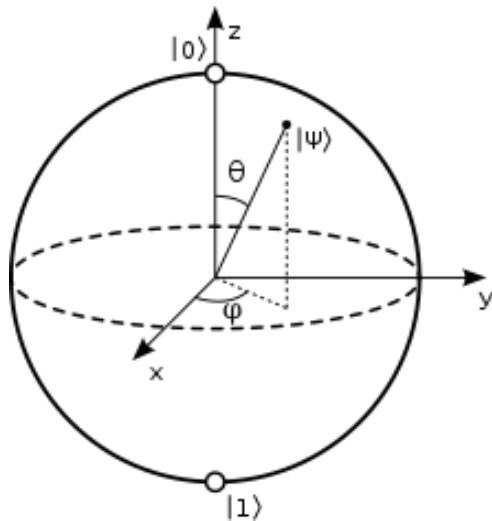
می‌شود:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (2.1)$$

که در آن α, β در حالت کلی، اعدادی مختلط هستند. هنگامی که مقدار این کیوبیت را در مبنای استاندارد اندازه می‌گیریم، احتمال مشاهده حالت $|0\rangle$ برابر است با $|\alpha|^2$ و احتمال مشاهده حالت $|1\rangle$ برابر است با $|\beta|^2$ و نتیجه آزمایش نیز یکی از دو حالت یاد شده خواهد بود همچنین مربع قدر مطلق دامنه‌ها برابر با احتمال است و رابطه زیر بین α, β برقرار است:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (3.1)$$

حالات‌های ممکن برای یک بیت کوانتومی را می‌توان با استفاده از کره بلاخ نیز نمایش داد (تصویر ۱.۱ را ببینید). یک بیت



شکل ۱.۱: نمایش یک بیت کوانتومی در کره‌ی بلاخ [۲]

کلاسیکی تنها می‌تواند در قطب شمال یا قطب جنوب کره قرار گیرد و بقیه نقاط کره برای آن در دسترس نیست اما نمایش یک حالت بیت کوانتومی می‌تواند هر نقطه روی کره باشد. رابطه‌ی پارامترهای موجود در شکل ۱.۱ و ضرایب موجود در رابطه‌ی

برای نمایش یک کیوبیت به صورت زیر است :

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\phi}|1\rangle \quad (4.1)$$

۲.۱ دروازه‌های کوانتومی

همانطور که در سیستم‌های کلاسیک، ما وضعیت بیت‌ها را از طرق مختلف دستکاری می‌کنیم در کوانتوم هم با اعمال دروازه‌های کوانتومی^۴ حالت بیت‌های کوانتومی را می‌توانیم تغییر دهیم. این دروازه‌های کوانتومی درواقع عملگرها‌ی یکانی^۵ و برگشت‌پذیر^۶ هستند. عملگرها‌ی یکانی (U)، بعد از عمل کردن روی یک بیت کوانتومی اندازه‌ی آن را تغییر نمی‌دهند و نمایش آن‌ها به صورت ماتریس‌هایی می‌باشد که ماتریس وارون آن‌ها با ماتریس ترانهاد همیوغ آن‌ها برابر است، یعنی:

$$U = U^\dagger \quad (5.1)$$

و عملگر برگشت‌پذیر یعنی اگر دوبار روی یک حالت کوانتومی اثر کنند، حالت نهایی همان حالت اولیه باشد. دروازه‌های کوانتومی با اثر کردن روی بیت کوانتومی باعث چرخش بردار آن در کره‌ی بلاخ می‌شوند و برای نمایش ماتریسی این دروازه‌های کوانتومی از ماتریس‌های مربعی با ابعاد $2^n \times 2^n$ برای اثر کردن روی یک حالت کوانتومی با ابعاد 2^n استفاده می‌شود. دروازه‌های کوانتومی به طور کلی به دو دسته تقسیم می‌شوند:

- دروازه‌های کوانتومی تک کیوبیتی^۷

- دروازه‌های کوانتومی چند کیوبیتی^۸

۱.۲.۱ دروازه‌های کوانتومی تک کیوبیتی

این دروازه‌های کوانتومی تنها روی یک بیت کوانتومی اثر می‌کنند. در ادامه چند نمونه از پرکاربردترین آن‌ها را بررسی می‌کنیم

⁴Quantum gates

⁵Unitary gates

⁶Reversible

⁷Single-Qubit quantum Gates

⁸Multi-Qubit quantum Gates

۱.۱.۲.۱ دروازه‌ی وارونگر کوانتومی

دروازه‌ی کلاسیکی وارونگر درواقع، بیت ۰ را به بیت ۱ تبدیل می‌کند و برعکس. دروازه‌ی وارونگر کوانتومی^۹ که با نماد X نشان داده می‌شود، اگر روی حالت $|0\rangle$ اثر کند حالت $|1\rangle$ را می‌دهد و برعکس. نمایش ماتریسی این عملکر به صورت زیر است:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} X|0\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle \\ X|1\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle \end{aligned} \quad (7.1)$$

به طور کلی می‌توان گفت اگر دروازه‌ی وارونگر روی یک بیت کوانتومی در حالت کلی اثر کند جای دامنه‌ی حالت $|0\rangle$ و $|1\rangle$ را عوض می‌کند.

$$H|\psi\rangle = H(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \beta|0\rangle + \alpha|0\rangle \quad (8.1)$$

۲.۱.۲.۱ دروازه ادامار کوانتومی

دروازه ادامار کوانتومی^{۱۰} اگر روی حالت‌های پایه اثر کند آن‌ها را به صورت زیر درخواهد آورد:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

يعنى:

$$\begin{aligned} H|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |+\rangle \\ H|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = |-\rangle \end{aligned} \quad (10.1)$$

۳.۱.۲.۱ دروازه کوانتومی Z

دروازه‌ی کوانتومی^{۱۱} Z روی حالت $|0\rangle$ اثری ندارد ولی حالت $|1\rangle$ را به $-|1\rangle$ می‌برد. نمایش ماتریسی آن به صورت زیر است:

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (11.1)$$

⁹Quantum Not gate

¹⁰Quantum Hadamard gate

¹¹Quantum Z gate

$$Z |0\rangle = |0\rangle \quad (12.1)$$

$$Z |1\rangle = -|1\rangle$$

۲.۲.۱ دروازه های کوانتومی چند کیوبیتی

دروازه های کوانتومی هم زمان، دو یا چند کیوبیت را برای اثر کردن درگیر می کنند که در ادامه یکی از مهم ترین آن ها را بررسی می کنیم.

۱.۲.۲.۱ دروازه ی وارونگر کنترل شده

دروازه وارونگر کنترل شده^{۱۲} هم زمان روی دو بیت کوانتومی عمل می کند که به بیت کوانتومی اول بیت کنترلی می گویند. این دروازه کوانتومی بیت کنترلی را اصلًا تغییر نمی دهد ولی بیت کوانتومی دوم را اگر بیت کوانتومی اول $|0\rangle$ باشد هیچ تغییری نمی دهد ولی اگر بیت کوانتومی اول $|1\rangle$ باشد روی بیت کوانتومی دوم عملگر وارونگر را اعمال می کند. جدول درستی این عملگر برای حالت دو بیتی در جدول ۱.۱ نشان داده شده است که در هر یک از این حالت های کوانتومی که دارای دو بیت کوانتومی هستند، بیت اول بیت کنترلی و بیت دوم، بیت کوانتومی ای است که عملگر وارونگر با توجه به مقدار بیت کوانتومی اول روی آن اعمال می شود.

table truth CNOT	
After	Before
$ 00\rangle$	$ 00\rangle$
$ 01\rangle$	$ 01\rangle$
$ 11\rangle$	$ 10\rangle$
$ 10\rangle$	$ 11\rangle$

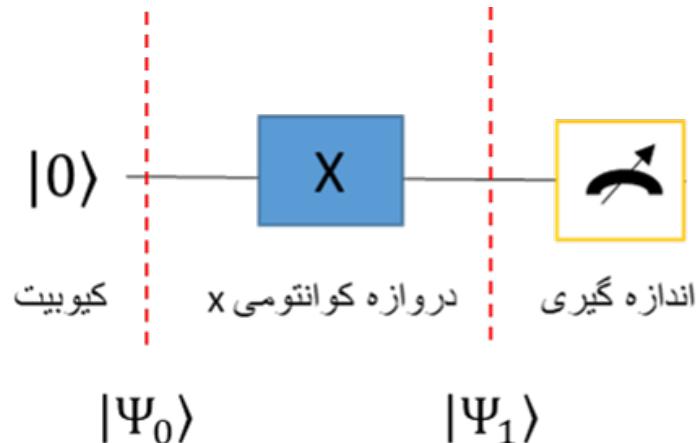
جدول ۱.۱: جدول درستی دروازه کوانتومی وارونگر کنترل شده

حال که با مفهوم بیت کوانتومی و دروازه های کوانتومی آشنا شدیم وقت آن رسیده است که به سراغ مدارهای کوانتومی برویم.

¹²Control NOT (CNOT)

۳.۱ مدارهای کوانتومی

مدار کوانتومی مجموعه‌ای از دروازه‌های کوانتومی است که به عنوان عملگر روی یک یا چند بیت کوانتومی عمل می‌کنند و در نهایت روی آن‌ها اندازه‌گیری انجام می‌شود. در ادامه به بررسی چند مدار کوانتومی ساده می‌پردازیم. در هر مدار، حالت کل مدار قبل از اعمال دروازه(ها) را با $|\psi_0\rangle$ و حالت کل مدار بعد از اعمال دروازه(ها) را با $|\psi_1\rangle$ نشان خواهیم داد. ابتدا به سراغ مدار شکل ۱.۱ خواهیم رفت.



شکل ۲.۱: مدار کوانتومی شماره ۱

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle \quad (13.1)$$

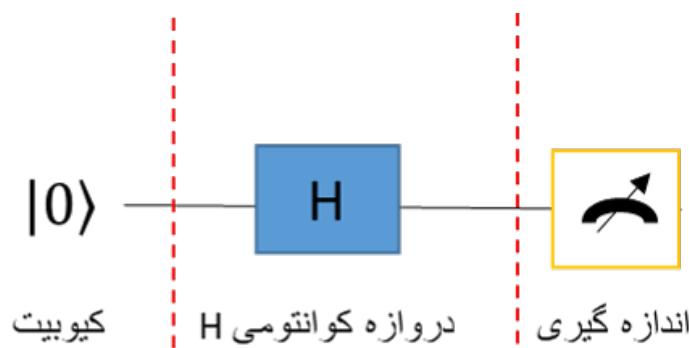
$$|_1\rangle = X |0\rangle = |1\rangle$$

در معادله ۱۳.۱ حالت‌های ابتدا و انتهای مدار ۱.۱ را نشان داده شده است. همان طور که می‌بینید در قسمت اندازه‌گیری حالت $|\psi_1\rangle$ مشاهده شده است و اگر این کار را ۱۰۰ بار هم تکرار کنیم هر ۱۰۰ دفعه، شاهد حالت $|1\rangle$ خواهیم بود. برای شکل ۳.۱ می‌توان معادلات ۱۴.۱ را نوشت.

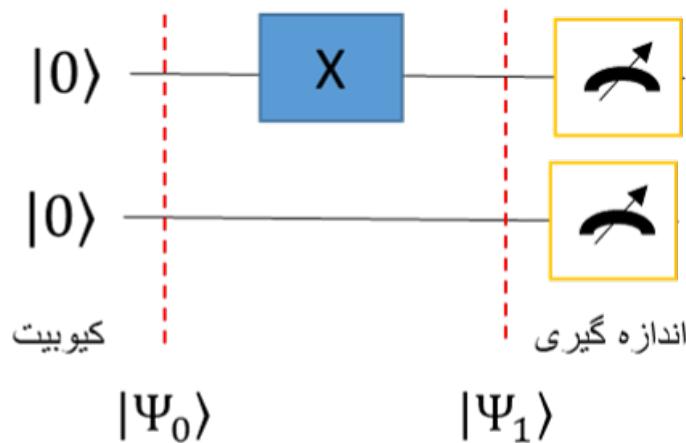
$$|\psi_0\rangle = |0\rangle \quad (14.1)$$

$$|\psi_1\rangle = H |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

در بخش اندازه‌گیری $|1\rangle$ و $|0\rangle$ هر دفعه به صورت تصادفی مشاهده می‌شود ولی چون دامنه‌ی احتمال این دو حالت با توجه به رابطه ۱۴.۱ برابر است اگر این کار را ۱۰۰ بار هم تکرار کنیم ۵۰ دفعه حالت $|1\rangle$ و ۵۰ دفعه حالت $|0\rangle$ را مشاهده خواهیم کرد.



شکل ۳.۱: مدار کوانتومی شماره ۲۵۰

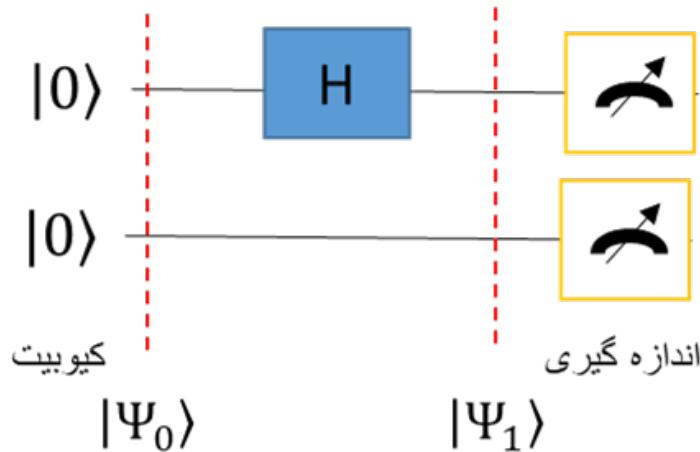


شکل ۴.۱: مدار کوانتومی شماره ۳

$$|\psi_0\rangle = |00\rangle \quad (15.1)$$

$$|\psi_1\rangle = X|00\rangle = X|0\rangle \otimes |0\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle = |10\rangle$$

معادله‌ی ۱۵.۱ مربوط به مدار شکل ۴.۱ است و منظور از $|0\rangle$ (کت صفر برجسته شده) بیت کوانتومی سیم اول و $|0\rangle$ بیت کوانتومی سیم دوم است. در مدار ۴.۱ اگر در اخر مدار اندازه‌گیری انجام دهیم حالت $|10\rangle$ را مشاهده خواهیم کرد و اگر این کار را ۱۰۰ بار هم تکرار کنیم هر ۱۰۰ بار حالت $|10\rangle$ را مشاهده خواهیم کرد.



شکل ۵.۱: مدار کوانتومی شماره ۴

$$|\psi_0\rangle = |00\rangle$$

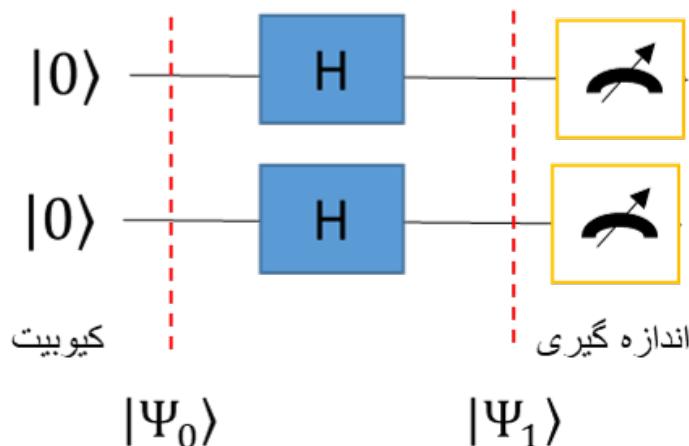
$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= H|00\rangle = H|0\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle) \end{aligned} \quad (۱۶.۱)$$

حالت‌های کوانتومی هر یک از بخش‌های مدار ۱۶.۱ در معادله‌ی ۱۶.۱ نوشته شده است. حال اگر در اخر مدار ۱۶.۱ اندازه‌گیری انجام دهیم، حالت‌های $\langle 00 |$ و $\langle 10 |$ هر دفعه به صورت تصادفی مشاهده می‌شوند ولی چون دامنه‌ی احتمال این دو حالت با توجه به رابطه ۱۶.۱ برابر است اگر این کار را ۱۰۰ بار هم تکرار کنیم ۵۰ دفعه حالت $\langle 00 |$ و ۵۰ دفعه حالت $\langle 10 |$ را مشاهده خواهیم کرد.

$$|\psi_0\rangle = |00\rangle$$

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= HH|00\rangle = H|0\rangle \otimes H|0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(|00\rangle + |10\rangle + |01\rangle + |11\rangle) \end{aligned} \quad (۱۷.۱)$$

معادله‌ی ۱۷.۱ مربوط به مدار شکل ۱۶.۱ است و اگر در اخر مدار اندازه‌گیری انجام دهیم، هر یک از حالت‌های $|00\rangle$, $|10\rangle$, $|01\rangle$, $|11\rangle$ برای این هر دفعه به صورت تصادفی مشاهده می‌شوند ولی چون دامنه‌ی احتمال این چهار حالت با توجه به رابطه ۱۷.۱ برابر است اگر این



شکل ۱.۶: مدار کوانتومی شماره ۵

کار را 100 بار هم تکرار کنیم 25 دفعه حالت $|00\rangle$ ، 25 دفعه حالت $|01\rangle$ ، 25 دفعه حالت $|10\rangle$ و 25 دفعه حالت $|11\rangle$ را مشاهده خواهیم کرد

اگر به هر یک از حالت‌های خروجی در برهم‌نهی معادله ۱۷.۱ توجه کنید، متوجه‌می‌شوید که آن‌ها، نمایش دودویی اعداد $[0, 1, 2, \dots, 2^n - 1]$ هستند و اگر بخواهیم در جایی تابعی با دامنه‌ی مشخص را بررسی کنیم با قرار دادن n بیت کوانتومی $|0\rangle$ و اعمال دروازه ادامارد روی تمام آن‌ها به برهم‌نهی دامنه $[1 - 2^n, 1]$ برای آن تابع دست پیدامی کنیم.

۱.۳.۱ مفهوم اندازه‌گیری در مدار

منظور از اندازه‌گیری در مدار، مشاهده‌ی حالت آن قسمت از مدار در آن لحظه است. همان طور که دیدیم اگر حالت آن قسمت از مدار به شکل برهم‌نهی از چند حالت باشد با تکرار اندازه‌گیری، هر یک از آن حالت‌ها که در حالت بر هم نهی مشاهده می‌شوند، با احتمالی که برابر است با مجذور دامنه‌ی آن‌ها مشاهده می‌شوند، اما یکی از مهمترین کاربردهای اندازه‌گیری، تشخیص همین دامنه احتمال‌ها است. برای مثال اگر بخواهیم بدانیم $|\psi_1\rangle$ در شکل ۱.۶ به چه صورت است، باید این حالت مدار را در این قسمت 25 بار اندازه‌گیری کنیم. نتیجه‌ی مشاهدات به این صورت خواهد بود که حالت‌های $|11\rangle$ ، $|10\rangle$ ، $|01\rangle$ ، $|00\rangle$ هر کدام 100 بار مشاهده خواهند شد، پس حالت سیستم در آن قسمت، برهم‌نهی این چهار حالت است به شکل زیر:

$$|\psi_1\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \omega|11\rangle \quad (18.1)$$

حال برای به دست آوردن مقادیر ω, β, γ که دامنه احتمال هستند و می‌دانیم که از روی جذر احتمال که برابر است با تعداد دفعات دیده شدن هر حالت تقسیم بر تعداد کل مشاهدات به دست می‌آیند، خواهیم داشت:

$$|\alpha|^2 = \frac{25}{100} \quad |\beta|^2 = \frac{25}{100} \quad |\gamma|^2 = \frac{25}{100} \quad |\omega|^2 = \frac{25}{100} \quad (19.1)$$

در نتیجه از عبارت بالا، مقادیر دامنه احتمال به ترتیب $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}, \omega = \frac{1}{2}$ و حالت کل سیستم در قسمتی که اندازه‌گیری شده است به صورت زیر خواهد بود :

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |10\rangle + |01\rangle + |11\rangle) \quad (20.1)$$

این نتیجه با پیش‌بینی نظری نیز سازگاری دارد.

حالا که با مفاهیم پایه‌ای در محاسبات کوانتومی و مدارهای کوانتومی آشنا شدیم وقت آن رسیده است که در فصل بعد، کمی درباره الگوریتم‌های کوانتومی و قدرت آن‌ها برای حل برخی از مسائل نسبت به الگوریتم‌های کلاسیکی یادبگیریم.

فصل ۲

الگوریتم‌های کوانتومی

۱.۲ مقدمه

در فصل گذشته درباره‌ی مفاهیم پایه‌ای در محاسبات کوانتومی مثل بیت کوانتومی پرداختیم و سپس به معرفی چند عملگر تک کیوبیتی و چند کیوبیتی و نحوه‌ی عمل کردن آن‌ها روی بیت‌های کوانتومی پرداختیم، سپس چگونگی تشکیل یک مدار کوانتومی و اجزای آن را به طور مفصل بررسی کردیم. در این فصل به بررسی چند الگوریتم کوانتومی می‌پردازیم و با حل چند مثال میزان قدرت آنها را در مقایسه با الگوریتم‌های کلاسیکی مشابه که همان کار را انجام میدهند، محقق می‌زنیم. محاسبات کوانتومی که یک مدل محاسباتی جدید است، می‌تواند اطلاعات را با استفاده از ویژگی‌های خاص مکانیک کوانتومی یعنی برهمنه^۱، تداخل^۲ و درهم تنیدگی^۳ ذخیره، پردازش و انتقال دهد. محاسبات کوانتومی، اولین بار توسط فاینمن در سال ۱۹۸۲ مطرح شد و از آن زمان، به یک موضوع داغ تبدیل شد^[۴]. در سال‌های بعد از آن شاهد یک سری تحولات نظری و تجربی دلگرم کننده بوده ایم که از جمله مهم ترین دستاوردهای آن‌ها ارائه‌ی یک الگوریتم فاکتورسازی اعداد صحیح کوانتومی برای یافتن رمزگذاری کلید مخفی الگوریتم RSA در مدت زمانی از مرتبه چند جمله‌ای توسط شور^[۵] در سال ۱۹۹۴ و نیز ارائه‌ی یک الگوریتم جستجوی کوانتومی برای جستجو در پایگاه‌های داده نامرتب با n عضو با مرتبه محاسباتی $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ که در کامپیوتراهای کلاسیکی از مرتبه‌ی خطی کمتر نمی‌شد، توسط گرور^[۶] در سال ۱۹۹۶ بود. بعد از این دو الگوریتم کوانتومی بسیار موفق که بر اساس ویژگی‌های

¹Superposition

²Interference

³Entanglement

مکانیک کوانتومی کار می‌کردند، محققین زیادی به این حوزه علاقه‌مند شدند و محاسبات کوانتومی به یک کاندیدای جدی برای

غلبه بر محدودیت‌های محاسبات کلاسیکی در نظر گرفته شد.

در محاسبات کوانتومی، بسیاری از الگوریتم‌ها بر مدل محاسباتی اوراکل^۴ تکیه می‌کنند. اوراکل به طور ساده یک جعبه‌ی

سیاه است که قادر به تولید پاسخی برای هر نمونه از یک مسئله محاسباتی است و هدف این است که برای حل این مسائل کمترین

پرسش را از اوراکل داشته باشیم. در ادامه چند نمونه از مهمترین الگوریتم‌های کوانتومی را معرفی خواهیم کرد تا میزان کارایی این

الگوریتم‌ها بیشتر مشخص شود.

۲.۲ الگوریتم دویچ

الگوریتم دویچ^۵ اولین الگوریتم کوانتومی است که سریعتر از یک الگوریتم کلاسیک کار می‌کند. دیوید دویچ در سال ۱۹۸۵

این الگوریتم را پیشنهاد داد. این الگوریتم کاربردی در دنیای واقعی ندارد ولی اولین مثالی بود که نشان داد یک الگوریتم کوانتومی

سریعتر از یک الگوریتم کلاسیکی کارمی کند [۶]. در این مسئله توابعی از نوع ، توابع بولی^۶ $\{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$: f بررسی

می‌شوند و همان طور که از تعریف آن‌ها مشخص است، ورودی و خروجی آن‌ها فقط می‌توانند صفر یا یک باشد؛ این توابع می‌توانند

با توجه به خروجی‌هایشان در یکی از چهار دسته‌ی زیر قرار گیرند:

$$f(0) = 0 \quad , \quad f(1) = 0 \quad \bullet$$

$$f(0) = 0 \quad , \quad f(1) = 1 \quad \bullet$$

$$f(0) = 1 \quad , \quad f(1) = 0 \quad \bullet$$

$$f(0) = 1 \quad , \quad f(1) = 1 \quad \bullet$$

اگر f تابع f را تابع ثابت^۷ و اگر $f(0) \neq f(1)$ تابع f را تابع متوازن^۸ می‌نامیم. توابع دسته‌ی اول و چهارم از

فهرست بالا یک خروجی برای همه ورودی‌ها دارند پس توابعی ثابت هستند و توابع دسته‌ی دوم و سوم از فهرست بالا توابعی متوازن

⁴Oracle

⁵Deutsch's Algorithm

⁶Boolean functions

⁷Constant

⁸Balanced

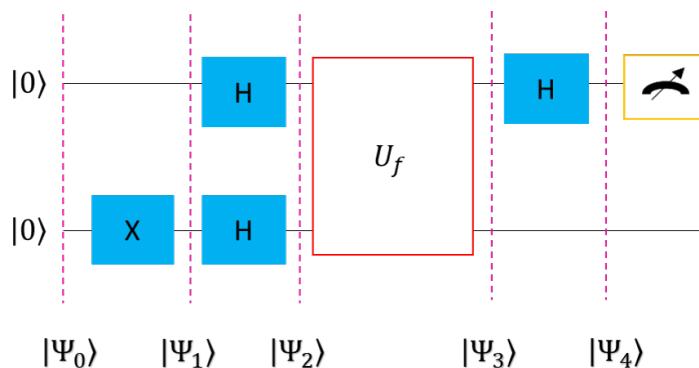
خوانده می‌شوند زیرا خروجی برای نیمی از ورودی‌ها صفر و برای نیمی دیگر یک است. سؤالی که در الگوریتم دویچ به آن پاسخ داده می‌شود این است که یک تابع چند بار باید مورد پرسش قرار بگیرد تا مشخص شود آن تابع، ثابت است یا متوازن.

۱.۲.۲ راه حل کلاسیکی

در روش کلاسیکی باید حداقل دو پرسش از تابع f انجام شود تا مشخص شود تابع f ثابت است یا متوازن. برای مثال در روش کلاسیکی اگر ورودی صفر باشد و خروجی تابع صفر شود نمی‌توانیم تشخیص دهیم تابع f از دسته‌ی اول از فهرست بالا است یا دسته‌ی دوم و باید یک پرسش دیگر ($f(1)$) از تابع f صورت بگیرد تا متوجه شویم، تابع f در نهایت ثابت است یا متوازن. در مورد ورودی یک هم، به همین ترتیب دو بار پرسش از تابع لازم است، در حالی که در تحلیل کوانتومی با یک بار پرسش می‌توانیم تشخیص دهیم که تابع ثابت است یا متوازن.

۲.۲.۲ راه حل کوانتومی

در این روش ادعا می‌شود که تنها با یک بار پرسش می‌توان تشخیص داد تابع ثابت است یا متوازن. از آنجایی که هر تابع منطقی کلاسیکی f را می‌توان با یک عملگر واحد معادل U_f ساخت در الگوریتم دویچ مداری کوانتومی مانند شکل ۱.۲ طراحی شده است، به طوری که با یک بار اندازه‌گیری مشخص می‌کند تابعی که با اوراکل U_f نمایش داده شده است از نوع تابع ثابت است یا متوازن [۶]. در این بخش تک تک قسمت‌های مدار کوانتومی ۱.۲ را از ابتدای مدار بررسی می‌کنیم. حالت اولیه کل



شکل ۱.۲: مدار کوانتومی مربوط به الگوریتم دویچ

مدار به صورت $\langle \psi_1 | \psi_0 \rangle = |0\rangle \langle 0|$ است و بعد با اعمال یک دروازه‌ی وارونگر روی بیت کوانتومی دوم به شکل $\langle 1 | \psi_1 \rangle = |0\rangle \langle 0|$ درخواهد آمد. در مرحله‌ی بعد دو دروازه ادامار روی هر دو بیت کوانتومی اعمال می‌کنیم و حالت کوانتومی کل مدار به صورت زیر

خواهد بود:

$$|\psi_2\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \right) |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle |-\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle |-\rangle \quad (1.2)$$

سپس U_f را روی $|\psi_2\rangle$ اثر می‌دهیم تا $|\psi_3\rangle$ به صورت زیر بدست بیاید:

$$|\psi_3\rangle = U_f \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle |-\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle |-\rangle \right) \quad (2.2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} U_f |0\rangle |-\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} U_f |1\rangle |-\rangle \quad (3.2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (-1)^{f(0)} |0\rangle |-\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} (-1)^{f(1)} |1\rangle |-\rangle \quad (4.2)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (-1)^{f(0)} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} (-1)^{f(1)} |1\rangle \right) |-\rangle \quad (5.2)$$

حال اگر در حالت $|\psi_3\rangle$ فقط به قسمت مربوط به بیت کوانتومی اول نگاه کنیم حالت زیر را خواهیم داشت:

$$|\psi_{3,1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (-1)^{f(0)} \\ (-1)^{f(1)} \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

در مرحله‌ی بعد دروازه‌ی ادامارد را روی بیت کوانتومی شماره ۱ به صورت زیر اثر می‌دهیم:

$$|\psi_{4,1}\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{f(0)} \\ (-1)^{f(1)} \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)} \\ (-1)^{f(0)} - (-1)^{f(1)} \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

حال اگر تابع f تابع ثابت باشد یعنی $f(0) = f(1)$ آنگاه:

$$|\psi_{4,1}\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle \quad (9.2)$$

می‌شود و در اندازه‌گیری فقط حالت $|0\rangle$ مشاهده می‌شود و اگر تابع متوازن باشد یعنی $f(0) \neq f(1)$ آنگاه:

$$|\psi_{4,1}\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle \quad (10.2)$$

می‌شود و تنها حالت $|1\rangle$ مشاهده می‌شود. پس می‌توان تنها با یک بار پرسش یا همان اندازه‌گیری بیت کوانتومی شماره ۱ دریافت تابع f ثابت یا متوازن است.

۳.۲ الگوریتم دویج-جوزا

دویج و جوزا در سال ۱۹۹۲ شکل کلی تری از الگوریتم دویج را پیشنهاد دادند که به نام الگوریتم دویج-جوزا^۹ شناخته می‌شود.

در الگوریتم دویج تابعی تک متغیره $\{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ بررسی می‌شد و هدف این بود که مشخص کنیم، این تابع ثابت است یا متوازن. در الگوریتم دویج-جوزا با توابعی n متغیره که به صورت $\{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ تعریف می‌شوند سروکار خواهیم داشت و مسئله شبیه قسمت قبل تشخیص ثابت یا متوازن بودن تابع f است.

۱.۳.۲ راه حل کلاسیکی

در روش کلاسیکی برای یک تابع n متغیره که هر متغیر دو حالت $\{0, 1\}$ داشته باشد 2^n ورودی متفاوت خواهیم داشت. برای تشخیص ثابت یا متوازن بودن تابع در بهترین حالت می‌توان با 2^n پرسش و در بدترین حالت با $1 - 2^n$ پرسش به نوع تابع پی‌برد. همان طور که مشخص است، تعداد سوال‌ها با افزایش تعداد متغیرهای ورودی به صورت نمایی افزایش می‌یابد در حالی که در تحلیل کوانتومی با یک سوال می‌توانیم دریابیم که تابع ثابت یا متوازن است [۴].

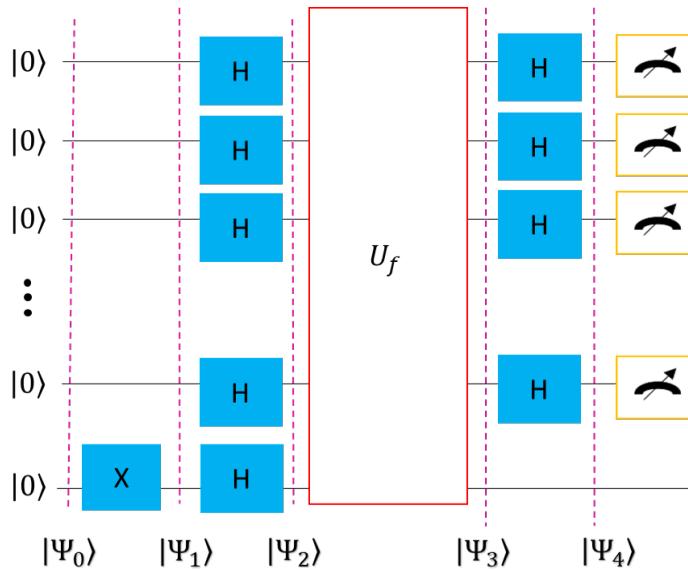
۲.۳.۲ راه حل کوانتومی

مداری که برای الگوریتم دویج-جوزا پیشنهاد شده است به صورت شکل ۲.۲ است. در این الگوریتم ورودی به جای $\{0, 1\}$ رشته‌هایی به طول n هستند که اعضای آن می‌توانند $\{0, 1\}$ باشند. این نمایش همان نمایش دودویی اعداد است، درنتیجه می‌توان گفت این الگوریتم به بررسی ثابت یا متوازن بودن توابع با بازه دامنه $\{0, 2^n - 1\}$ می‌پردازد [۵]. برای تولید این بازه دامنه قبلاً در فصل ۱ نشاندادیم که اگر n تا بیت کوانتومی $|0\rangle$ داشته باشیم و روی تمام آنها دروازه‌ی ادامار اثر دهیم، برهم‌نگرانی به صورت زیر خواهیم داشت:

$$H^{\otimes n} |0\rangle^{\otimes n} = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle \quad (11.2)$$

قبل از بررسی مرحله‌ی مدار کوانتومی دیج-جوزا یک چیز دیگر را لازم است بررسی کنیم. فرض کنید یک حالت $|0\rangle$ داریم و روی آن دروازه ادامار می‌زنیم حاصل به صورت $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ می‌شود و اگر این دروازه را روی $|1\rangle$ بزنیم حاصل $(|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$

⁹Deutsch–Jozsa algorithm



شکل ۲: مدار مربوط به الگوریتم دویج-جوژا

می‌شود. پس می‌توان نتیجه گرفت:

$$H|x_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + (-1)^{x_1}|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{z \in \{0,1\}} (-1)^{x_1 z} |z\rangle \quad (12.2)$$

حال اگر روی حالت دلخواه $|x\rangle$ عمل بالا را بخواهیم تکرار کنیم باید با توجه به طول $|x\rangle$ دروازه‌ی ادامار اعمال کنیم و حاصل به صورت زیر خواهد شد:

$$H^{\otimes n}|x\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{z_1 \in \{0,1\}} (-1)^{x_1 z_1} |z_1\rangle \right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{z_2 \in \{0,1\}} (-1)^{x_2 z_2} |z_2\rangle \right) \otimes \cdots \otimes \quad (13.2)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{z_n \in \{0,1\}} (-1)^{x_n z_n} |z_n\rangle \right) = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{z=0}^{2^n-1} (-1)^{x \cdot z} |z\rangle \quad (14.2)$$

در معادله‌ی ۱۳.۲

$$\{0, 1\} |z\rangle = |z_1 \cdots z_n\rangle, |x\rangle = |x_1 \cdots x_n\rangle$$

را داشته باشند و همچنین $x \cdot z = \sum_{i=1}^n x_i \cdot z_i \pmod{2}$

می‌پردازیم. فرض کنید حالت اولیه مدار به صورت زیر باشد:

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle^{\otimes n} |0\rangle$$

سپس روی بیت کوانتومی اخر یک دروازه‌ی وارونگر اعمال می‌کنیم:

$$|\psi_1\rangle = |0\rangle^{\otimes n} |1\rangle$$

و سپس روی تمام بیت‌های کوانتومی مدار، دروازه‌ی ادامار اعمال می‌کنیم. پس خواهیم داشت:

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle \otimes |- \rangle \quad (15.2)$$

بعد از اعمال عملگر U_f طبق الگوریتم ضربه برگشتی فاز که در بخش قبل توضیح دادیم حالت کل مدار کوانتومی به صورت زیر

خواهد بود:

$$|\psi_3\rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x)} |x\rangle \right] \otimes |- \rangle. \quad (16.2)$$

حالا اگر به تمام بیت‌های کوانتومی به جز بیت اخر نگاه کنیم حالت کوانتومی مدار به صورت زیر خواهد بود:

$$|\psi_{3,0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x)} |x\rangle \quad (17.2)$$

و اگر روی $|\psi_{3,0}\rangle$ طبق رابطه‌ی ۱۳.۲ دروازه‌های ادامار اعمال کنیم، حالت مدار به صورت زیر می‌شود:

$$|\psi_{4,0}\rangle = \frac{1}{2^n} \sum_{x=0}^{2^n-1} \sum_{z=0}^{2^n-1} (-1)^{x \cdot z + f(x)} |z\rangle \quad (18.2)$$

و از آنجایی که احتمال مشاهده‌ی هریک از حالت‌ها در حالت برهمنه‌ی بالا برابر با مربع دامنه اش است، ما یک حالت خاص

را در نظر می‌گیریم که دامنه‌اش برابر است با:

$$A = \frac{1}{2^n} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x)} \quad (19.2)$$

اگر تابع f تابع ثابت باشد احتمال مشاهده‌ی حالت $|0\rangle^{\otimes n} = z$ با توجه به دامنه‌اش برابر با یک است، چون تمام f ‌ها یا صفر

هستند یا یک. یعنی اگر تابع f ثابت باشد با احتمال ۱۰۰ درصد، فقط حالت $|0\rangle^{\otimes n} = z$ مشاهده می‌شود و اگر تابعی متوازن

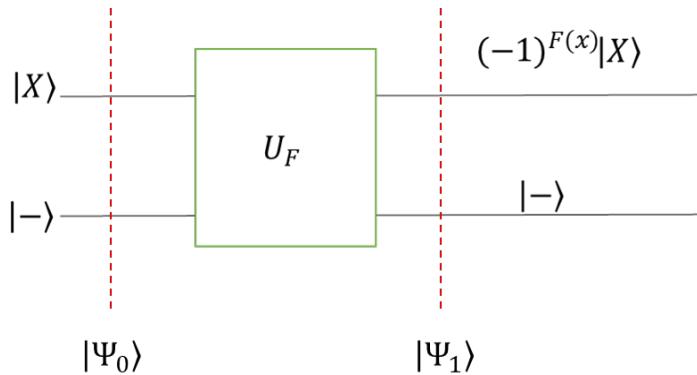
باشد چون تعداد $-1, 0, 1$ در دامنه برابر است مقدار دامنه ۰ می‌شود و احتمال مشاهده‌ی حالت $|0\rangle^{\otimes n} = z$ برابر ۰ می‌شود.

پس در روش کوانتومی با یک بار اندازه‌گیری n بیت کوانتومی اول در مداری مطابق مدار شکل ۲.۲ اگر حالت $|0\rangle^{\otimes n} = z$

مشاهده شد تابع ثابت و اگر هر حالتی بجز $|0\rangle^{\otimes n} = z$ مشاهده شد یعنی تابع متوازن است.

۴.۲ الگوریتم پس زدن فاز

محاسبات کوانتومی مملو از ترفندهای هوشمندانه‌ای است که به ما کمک می‌کند تا مسائلی را که حل آنها با محاسبات صرفاً کلاسیک سال‌ها طول می‌کشد را حل کنیم. این ترفندها معمولاً شامل یک مدار نسبتاً کوچک است که یک کار خاص را در یک الگوریتم بسیار بزرگ‌تر انجام می‌دهد. در واقع، محاسبات کوانتومی در مورد یادگیری نحوه استفاده از ترفندهای عجیب و غریب در مکانیک کوانتومی برای حل مسائل محاسباتی است. الگوریتم پس زدن فاز برخلاف دو الگوریتم قبلی که توضیح دادیم به طور مستقیم به عنوان الگوریتمی کوانتومی استفاده نمی‌شود بلکه معمولاً به عنوان بخشی از بسیاری از الگوریتم‌های کوانتومی مورد استفاده قرار می‌گیرد. هدف در الگوریتم پس زدن فاز پیدا کردن مقدار تابع $f(X)$ از طریق اندازه‌گیری فاز ایجاد شده در یک برهم‌نهی است. در این الگوریتم از مداری مانند شکل ۳.۲ استفاده می‌شود: برای درک بهتر این الگوریتم بهتر است هر مرحله از



شکل ۳.۲: مدار مربوط به الگوریتم پس زدن فاز

مدار را به طور جداگانه بررسی کنیم. فرض کنید که:

$$|\psi_0\rangle = |x\rangle |-1\rangle \quad (20.2)$$

سپس $\langle\psi_0|\psi\rangle$ را به عنوان ورودی به تابع U_F می‌دهیم و خروجی به صورت زیر خواهد بود:

$$U_f : |x\rangle |y\rangle \mapsto |x\rangle |y \oplus f(x)\rangle \quad (21.2)$$

در معادله ۲۱.۲ حالت $\langle y | \text{همان} \rangle = \langle - | \text{است و علامت } \oplus \text{ جمع دودویی است. پس می‌توان عبارت بالا را دوباره به شکل زیر باز}$

نویسی کرد.

$$U_f |x\rangle |-\rangle = U_f |x\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \quad (22.2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(U_f |x\rangle |0\rangle - U_f |x\rangle |1\rangle) \quad (23.2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle |f(x) \oplus 0\rangle - |x\rangle |f(x) \oplus 1\rangle) \quad (24.2)$$

حال یک بار $f(x) = 0$ در نظر می‌گیریم:

$$U_f |x\rangle |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |x\rangle (|f(x) \oplus 0\rangle - |f(x) \oplus 1\rangle) \quad (25.2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} |x\rangle (|0 \oplus 0\rangle - |0 \oplus 1\rangle) \quad (26.2)$$

$$= |x\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \quad (27.2)$$

و اگر $f(x) = 1$ باشد:

$$U_f |x\rangle |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |x\rangle (|f(x) \oplus 0\rangle - |f(x) \oplus 1\rangle) \quad (28.2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} |x\rangle (|1 \oplus 0\rangle - |1 \oplus 1\rangle) \quad (29.2)$$

$$= |x\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |0\rangle) \quad (30.2)$$

که می‌توان این دو حالت را به شکل کلی زیر هم نوشت:

$$U_f |x\rangle |-\rangle = (-1)^{f(x)} |x\rangle |-\rangle \quad (31.2)$$

در واقع در این روش مقادیر تابع $f(X)$ را به فاز سرآسری مدار منتقل کردیم و باید توجه داشته باشیم که در این روش مقادیر $f(x)$

به طور مستقیم قابل اندازه‌گیری نیست بلکه به صورت فاز روی دامنه احتمال‌ها اثر می‌گذارد. در بخش‌های بعد استفاده از این

الگوریتم را نشان خواهیم داد.

۵.۲ الگوریتم گرور

لتو گرور، الگوریتم جستجو گِزُور^{۱۰} را در سال ۱۹۹۶ مطرح کرد. این الگوریتم یک الگوریتم کوانتومی برای جستجو در یک پایگاه داده نامرتب دارای N عضو، با تعداد محاسبات $\mathcal{O}(\sqrt{N})$ و در فضای ذخیره‌سازی $\mathcal{O}(\log N)$ است و به طور حدی، سریع‌ترین الگوریتم قابل پیاده‌سازی برای جستجوی پایگاه داده نامرتب روی یک رایانه کوانتومی است [۵]. برای توضیح الگوریتم جستجوی گرور ابتدا یک مثال ساده ارائه می‌کنیم تا با نحوه‌ی کارکرد خود الگوریتم گرور بیشتر آشنا شویم، سپس به سراغ پیاده‌سازی این الگوریتم روی یک دایره‌ی واحد می‌روم، تا کم کم آماده‌ی پیاده‌سازیه این الگوریتم با استفاده از بیت‌های کوانتومی و مدارهای کوانتومی شوید و در اخر هم به حل یک مسئله‌ی واقعی یعنی گراف دوبخشی^{۱۱} با استفاده از الگوریتم جستجوی گِزُور می‌رویم تا قابلیت این الگوریتم را نشان دهیم [۹].

۱.۵.۲ نحوه‌ی کارکرد الگوریتم جستجو گرور

با یک مثال شروع می‌کنم. یک فهرست L هشت تایی را در نظر بگیرید که تمام آن‌ها دارای مقدار یک هستند. در این الگوریتم همیشه داده‌ها در یکی از دو دسته‌ی :

۱. علامت‌گذاری شده^{۱۲} :

۲. علامت‌گذاری نشده^{۱۳} :

قرار می‌گیرند. جواب یا جواب‌هایی که به دنبالشان هستیم در دسته‌ی علامت‌گذاری شده‌ها قرار دارند که در این مثال، مثلاً عضو شماره چهار را فقط در دسته‌ی علامت‌گذاری شده‌ها قرار می‌دهیم و بقیه در دسته‌ی علامت‌گذاری نشده‌ها قرار می‌گیرند. این الگوریتم به طور کلی از دو بخش پرس و جو^{۱۴} و وارونگی^{۱۵} تشکیل شده است که این دو بخش تا پیدا شدن جواب تکرار می‌شوند.

• پرس و جو: در این مرحله از تمام اعضاء (علامت‌گذاری شده و نشده) درباره‌ی قرارگیری در دسته‌ی علامت‌گذاری شده‌ها

سوال می‌شود و تنها عضو یا اعضاء علامت‌گذاری شده، قرینه می‌شوند.

¹⁰Grover's algorithm

¹¹Bipartite graph

¹²Marked

¹³Unmarked

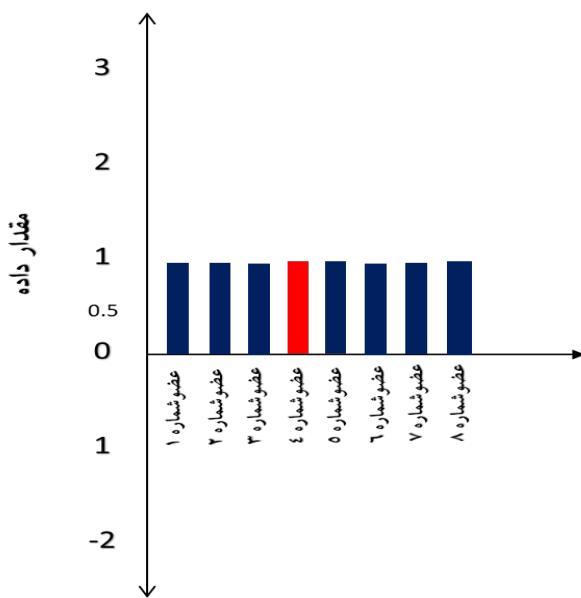
¹⁴Query

¹⁵Inversion

- وارونگی: در این مرحله، مقدار هر عنصر را نسبت به میانگین همه مقادیر (بعد از آن که اعضای دسته‌ی علامت‌گذاری شده

قرینه شدند) تصویر می‌کنیم.

در مثالی که مطرح کردیم، در ابتدا مقدار تمام داده‌ها یک است و می‌توان به صورت شکل ۴.۲ آن‌ها را نشان داد. حال یک



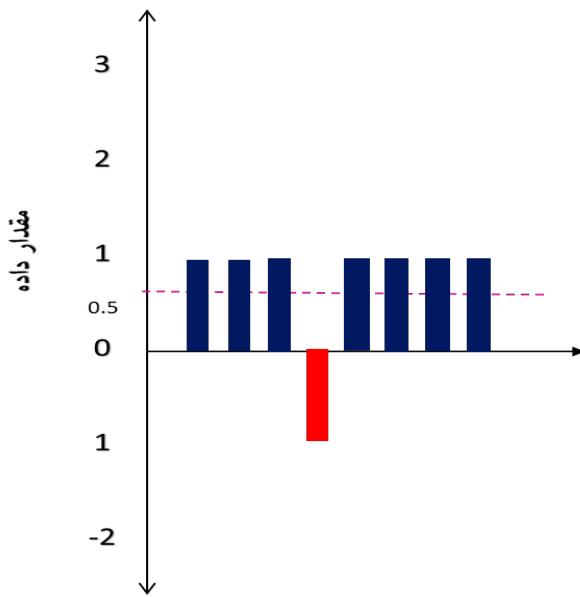
شکل ۴.۲: یک فهرست با هشت عضو که مقدار تمام داده‌های آن در ابتدا ۱ است

بار، دو مرحله‌ی الگوریتم گرور را روی اعضای فهرست اعمال می‌کنیم. در مرحله‌ی پرس و جو عضو چهارم که در دسته‌ی علامت‌گذاری شده‌ها قرار دارد، مطابق شکل ۵.۲ قرینه می‌شود. در مرحله‌ی بعد الگوریتم گرور که وارونگی نام دارد، تمام اعضای فهرست نبیست به میانگین که در رابطه‌ی ۳۸.۲ مقدار آن را حساب کرده‌ایم، با استفاده از رابطه‌ی ۲۲.۲ قرینه می‌شوند. این مرحله را در شکل ۶.۲ نشان داده ایم.

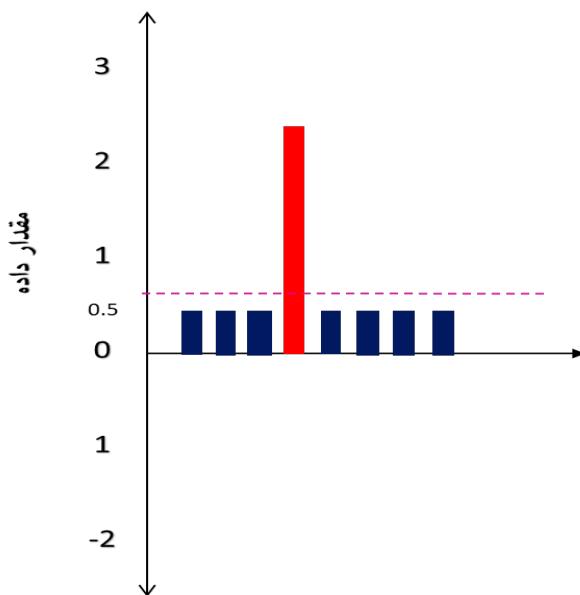
$$M = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{8} = \frac{1 + 1 + 1 + (-1) + 1 + 1 + 1 + 1}{8} = 0.75 \quad (۳۲.۲)$$

$$\acute{x}_i = M - (x_i - M) \quad (۳۳.۲)$$

همان طور که ملاحظه می‌شود، داده‌ی علامت‌گذاری شده دارای مقدار بیشتری شده است و از بقیه‌ی اعضا قابل تشخیص است. اما سوالی که در این جا پیش می‌اید این است که چند دفعه باید این دو مرحله را تکرار کرد تا اعضای علامت‌گذاری شده بیشترین تمایز را از اعضای علامت‌گذاری نشده داشته باشند؟ برای پاسخ به این سوال، برای مثال بیست دفعه الگوریتم گرور را روی همان



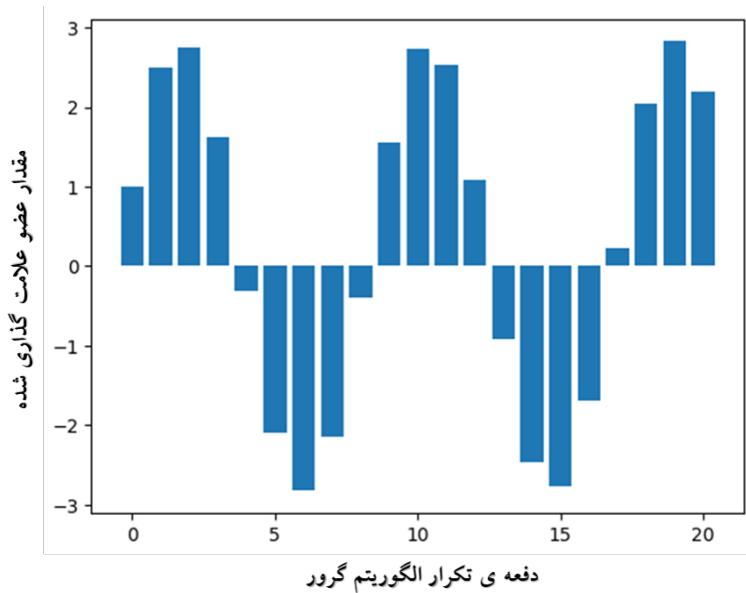
شکل ۵.۲: یک فهرست با هشت عضو که عضو شماره ۴ آن چون در دسته‌ی علامت‌گذاری شده‌ها قرار دارد بعد از اعمال مرحله‌ی پرس و جوی گرور قرینه شده است



شکل ۶.۲: اعمال مرحله‌ی وارونگی الگوریتم گرو روی یک فهرست هشتگانه با یک عضو علامت‌گذاری شده

فهرست هشتگانه با یک عضو علامت‌گذاری شده تکرار می‌کنیم و فقط مقدار عضو علامت‌گذاری شده را ذخیره می‌کنیم که شکل ۷.۲ حاصل می‌شود.

همان طور که می‌بینید تکرار الگوریتم تا یک جایی باعث افزایش تمایز بین اعضای علامت‌گذاری شده و نشده می‌شود و از آن به بعد اثر معکوس دارد. در کل مقدار عضو علامت‌گذاری شده در طول دفعات تکرار الگوریتم از خود رفتار دوره‌ای نشان می‌دهد. در



شکل ۷.۲: اعمال مرحله‌ی وارونگی الگوریتم گرو روی یک فهرست هشت‌تایی با یک عضو علامت‌گذاری شده

مثال بالا، که یک فهرست هشت عضوی با یک عضو علامت‌گذاری شده بود، تعداد دفعات مناسب برای تکرار الگوریتم گرور با توجه به شکل ۷.۲ سه مرتبه است، که تقریباً برابر است با \sqrt{N} یا همان $\sqrt{8}$ که N تعداد اعضای فهرست است و برای یک حالت کلی که فهرستی با N عضو که K عضو علامت‌گذاری شده داشته باشد با تکرار $\sqrt{\frac{N}{K}}$ دفعه الگوریتم گرور اعضای علامت‌گذاری شده بیشترین تمایز را از سایر اعضای فهرست پیدا خواهند کرد. شاید این سوال مطرح شود که در این مثال از اول جواب را می‌دانستیم و مجهولی وجود نداشته، اما باید تایید کنم که، تا اینجا فقط یک مثال ساده برای آشنایی با نحوه‌ی کار کرد الگوریتم گرور دیدیم و در ادامه در قسمت گراف دوبخشی، به حل مسئله‌ای می‌پردازیم که جواب را نمی‌دانیم و با کمک الگوریتم گرور جواب را سریع‌تر از روش‌های کلاسیکی پیدا خواهیم کرد.

۲.۵.۲ پیاده‌سازی الگوریتم جستجوی گرور روی یک دایره‌ی واحد

هدف اصلی در این بخش تبدیل آموخته‌هایمان در بخش قبل به زبان مدارهای کوانتومی است تا بتوانیم در بخش بعدی، الگوریتم جستجوی گرور را برای یک مسئله‌ی واقعی با استفاده از مدارهای کوانتومی پیاده‌سازی کنیم. فرض کنید یک بردار واحد

به صورت زیر داریم که عضو سوم، چهارم و هفتم آن علامت‌گذاری شده باشند:

$$|u\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (34.2)$$

این بردار را می‌توان به صورت حاصل جمع دو قسمت علامت‌گذاری شده و علامت‌گذاری نشده نوشت:

$$|u\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (35.2)$$

ضرب داخلی دو بردار بالا در معادله ۳۵.۲ صفر می‌شود و نشان می‌دهد این دو بردار برهم عمودند اما اگر یکه هم شوند می‌توانیم

بردار $\langle u |$ را در یک دایره با شعاع واحد طبق معادله ۳۶.۲ که بردارهای یکه و عمود علامت‌گذاری شده و علامت‌گذاری نشده محورهای

آن هستند. این دایره‌ی واحد را در شکل ۸.۲ نمایش داده‌ام.

$$|u\rangle = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} |u_{marked}\rangle + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}} |u_{unmarked}\rangle \quad (36.2)$$

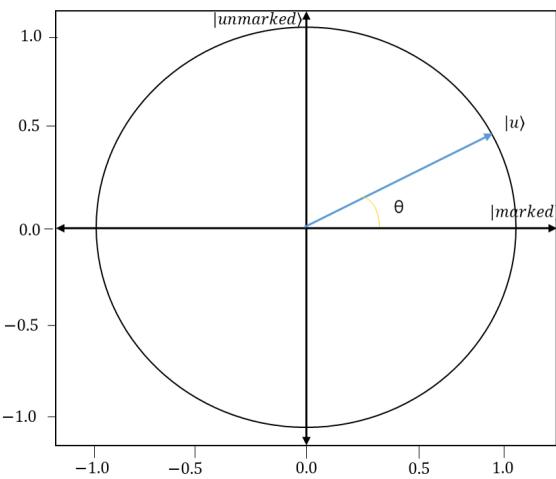
در شکل ۸.۲ مقدار θ از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$|u\rangle = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} |u_{marked}\rangle + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}} |u_{unmarked}\rangle \quad \theta = \arctan \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}}{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}}} \right) \quad (37.2)$$

حال که توانستیم بردار $\langle u |$ را در پایه‌های اعضای علامت‌گذاری شده و علامت‌گذاری نشده نشان دهیم وقت آن رسیده است که دو

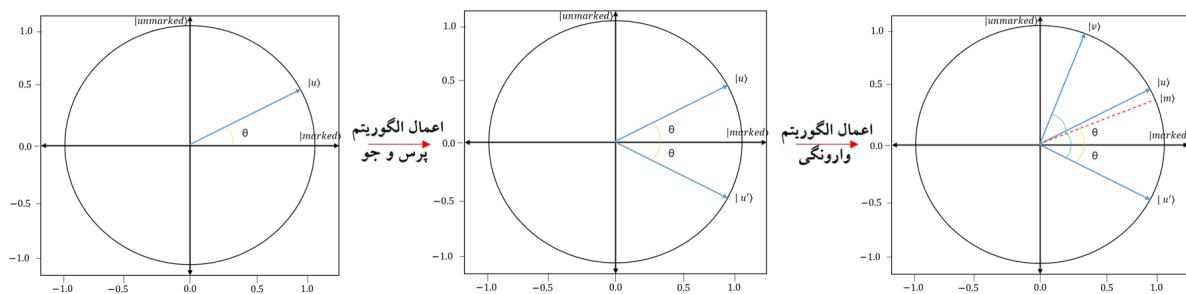
مرحله‌ی تشکیل دهنده‌ی الگوریتم گرو را پیاده‌سازی کنیم. مرحله‌ی اول پرس و جو است که اعضای علامت‌گذاری شده را قرینه

می‌کند و این باعث می‌شود بردار $\langle u |$ نسبت به محور علامت‌گذاری نشده‌ها قرینه شوند و آن را با $\langle \bar{u} |$ نشان می‌دهیم. مرحله‌ی



شکل ۸.۲: نمایش یک بردار دارای اعضای علامت‌گذاری شده و علامت‌گذاری نشده در دایره‌ی واحد با بردارهای پایه علامت‌گذاری شده و علامت‌گذاری نشده

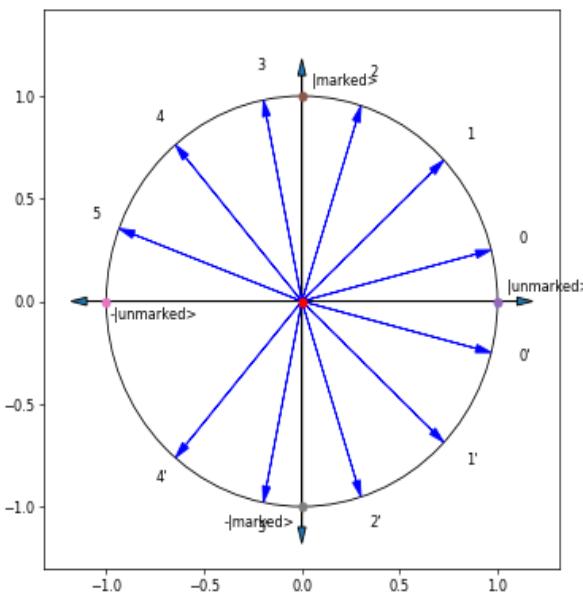
دوم وارونگی است که بردار $|u\rangle$ نسبت به بردار یکه $|m\rangle$ که اعضای آن حاصل میانگین‌گیری روی اعضای بردار $|u\rangle$ هست، قرینه می‌شود و آن را $|v\rangle$ می‌نامیم. این دو مرحله در شکل ۹.۲ نشان داده شده است.



شکل ۹.۲: اعمال دو مرحله‌ی پرس و جو وارونگی الگوریتم گرور روی بردار u

دو مرحله‌ی بالا را پنج بار تکرار کرده‌ایم و شکل بردار $|u\rangle$ را بعد از هر مرحله در شکل ۱۰.۲ رسم کرده‌ایم تا ببینیم چه تغییری کرده است.

همان طور که در شکل ۱۰.۲ ملاحظه می‌شود، بردار شماره سه که حاصل اعمال سه بار الگوریتم گرور روی بردار $|u\rangle$ است دارای بیشترین تصویر روی محور $|u_{\text{marked}}\rangle$ می‌باشد. این یعنی احتمال بخش علامت‌گذاری شده در بردار شماره سه نسبت به حالت اولیه‌ی $|u\rangle$ افزایش یافته است و این همان چیزی بود که از الگوریتم گرور انتظار داشتیم. همچنین نتیجه می‌گیریم تعداد دفعات مناسب برای اعمال این الگوریتم برای رسیدن به بهترین نتیجه برابر با سه است.



شکل ۱۰.۲: بردار اولیه u را با ۰ نشان داده‌ایم و بعد از هر مرحله اعمال الگوریتم گرور آن را با .., ۳, ۲, ۱, ۰ نشان داده‌ایم. همچنین در شکل .., ۱, ۲, ۳, .. قرینه‌های بردارهای .., ۲, ۳, ۱ نسبت به بردار $u_{unmarked}$ هستند.

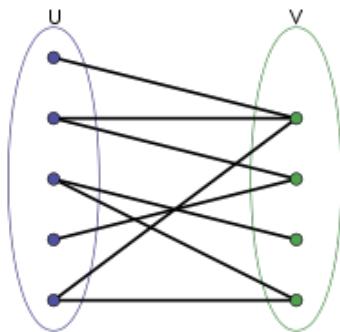
۳.۵.۲ پیاده‌سازی الگوریتم گرور با استفاده از مدار کوانتومی و حل مسئله‌ی گراف دوبخشی

در این بخش ابتدا مسئله گراف دوبخشی را توضیح می‌دهیم، سپس برای حل آن با استفاده از الگوریتم گرور، پیاده‌سازی الگوریتم گرور با استفاده از مدارهای کوانتومی را مطرح خواهیم کرد.

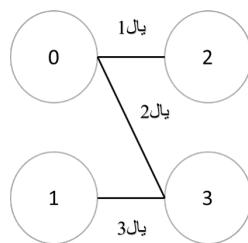
۱.۳.۵.۲ گراف دوبخشی

گراف دوبخشی، گرافی است که می‌توان رأس‌هایش را به دو دسته‌ی U و V تقسیم کرد به طوری که هر یال، یک رأس از دسته‌ی U را به یک رأس از دسته‌ی V وصل کند. فرض کنید گرافی مانند شکل ۱۲.۲ داریم و هدفمان این است رأس‌هایش را طوری رنگ‌آمیزی کنیم که گرافمان دوبخشی شود.

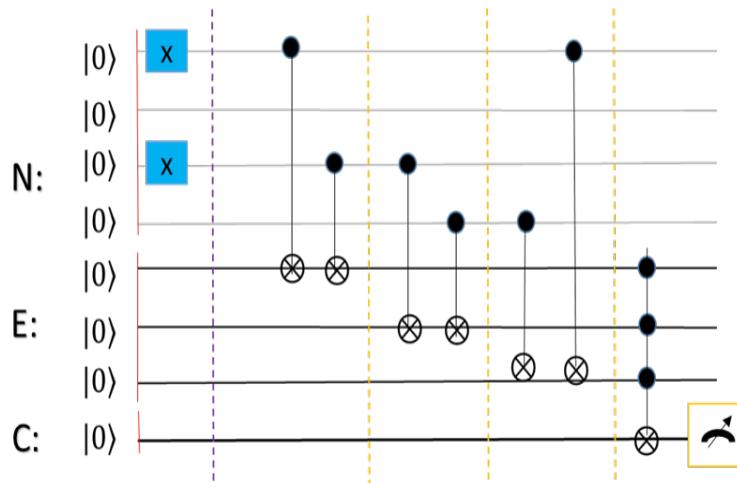
در این بخش هدفمان طراحی مدار کوانتومی ای است که اگر یک گراف با رنگ‌آمیزی مشخص به آن بدهیم و رنگ‌آمیزی، گراف را به گراف دوبخشی تبدیل کرده بود خروجی مدار در بخش اندازه‌گیری $\langle 1 |$ شود و در غیر این صورت $\langle 0 |$ شود. مداری که برای این کار استفاده می‌شود مطابق شکل ۱۳.۲ خواهد بود. برای درک بهتر مدار ۱۳.۲ هر قسمت آن را جدا گانه بررسی می‌کنیم. تعداد بیت‌های کوانتومی اولیه طبق شکل، هشت تا می‌باشد که شامل چهار تا بیت کوانتومی برای نمایش رأس‌ها، سه بیت کوانتومی به تعداد یال‌ها که مقدار هر یک از آن‌ها متفاوت بودن یا نبودن رنگ دوسر هر یال را نشان خواهد داد و یک بیت کوانتومی که در نهایت



شکل ۱۱.۲: مثالی از یک گراف دوبخشی

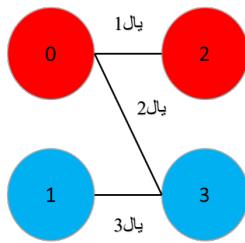


شکل ۱۲.۲: مثالی از یک گراف دوبخشی



شکل ۱۳.۲: مدار کوانتومی برای تشخیص دوبخشی بودن یا نبودن گرافی با رنگ‌آمیزی شکل ۱۴.۲

اندازه‌گیری آن مشخص خواهد کرد که رنگ‌آمیزی ما منجر به گراف دوبخشی شده است یا نه. برای وارد کردن رنگ‌آمیزی به مدار قرار داد می‌کنیم رنگ قرمز را با $|1\rangle$ و رنگ آبی را با $|0\rangle$ نشان دهیم پس برای وارد کردن رنگ‌آمیزی شکل ۱۴.۲ باید روی بیت‌های کوانتومی شماره ۰ و ۲ عملگر وارونگر اعمال کنیم چون رنگ این دو رأس قرمز است. سپس برای نمایش یال شماره ۱ که دوسر



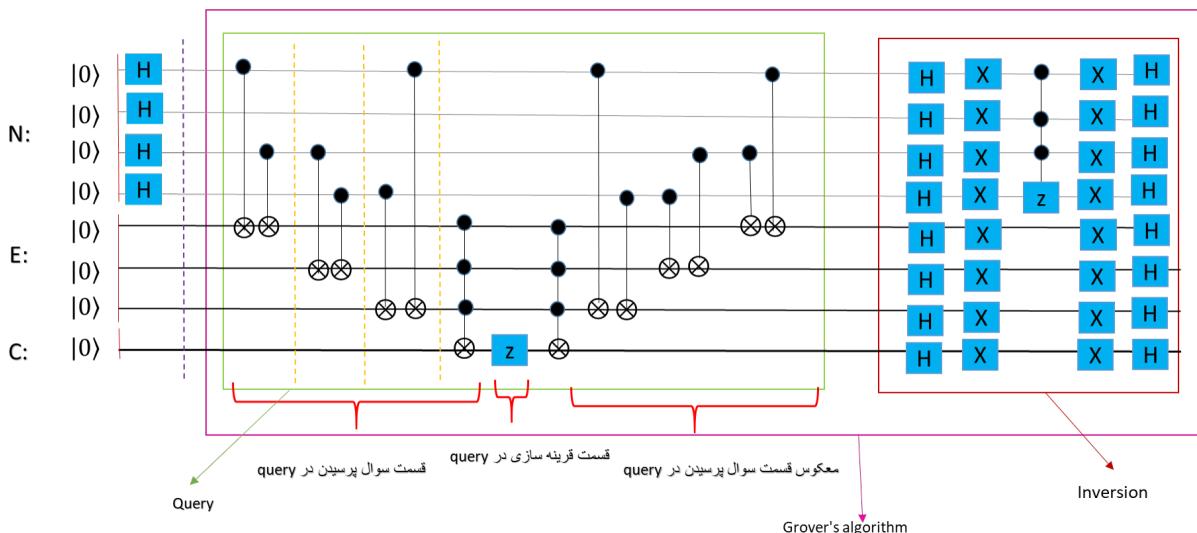
شکل ۱۴.۲: مثالی از حالت غیر دوبخشی برای رنگ‌آمیزی گراف شکل ۱۲.۲

آن رأس‌های شماره ۰ و ۲ وجود دارد یک عملگر وارونگر کنترلی از بیت کوانتومی شماره ۰ به بیت کوانتومی شماره ۵ و یکی هم از بیت کوانتومی شماره ۲ به بیت کوانتومی شماره ۵ وصل می‌کنیم. در واقع این کار باعث می‌شود اگر رنگ‌های رأس‌های شماره ۰ و ۲ با هم فرق کند مقدار بیت کوانتومی شماره ۵ که نمایانگر یال شماره ۱ است، یک اندازه‌گیری شود. این کار را برای دو یال دیگر هم انجام می‌دهیم. سپس یک دروازه کنترلی سه تایی که بیت‌های کنترلی آن بیت‌های شماره ۷, ۶, ۵ است، همان‌هایی که مشخص می‌کرد رنگ دو سر یال متفاوت هست یا خیر. در واقع اگر هر سه بیت کوانتومی مقدارشان یک باشد یعنی تمام یال‌ها رنگ رأس‌های دوسرشان متفاوت است و این دروازه یک عملگر وارونگر روی بیت کوانتومی اخیر در این شرایط اعمال می‌کند و آن را مقدار آن را یک می‌کند. چون ورودی مدار ما گراف شکل ۱۴.۲ است، پس در قسمت اندازه‌گیری مقدار صفر اندازه‌گیری می‌شود که به این معنا است که رنگ‌آمیزی مربوط به یک گراف غیر دوبخشی است.

۲.۳.۵.۲ پیاده‌سازی الگوریتم گرور با استفاده از مدار کوانتومی

حال وقت آن رسیده اولاً به جای دادن جواب درست، تمام حالت‌های ممکن برای رنگ‌آمیزی رأس‌ها در مدار کوانتومی را با اعمال دروازه‌های ادامار روی تمام بیت‌های کوانتومی مربوط به رأس‌ها به عنوان ورودی، وارد مدار کنیم و با اعمال الگوریتم گرور رنگ‌آمیزی یا رنگ‌آمیزی‌هایی که منجر به گراف دوبخشی شدن گراف شکل ۱۲.۲ می‌شوند را پیدا کنیم. الگوریتم گرور از دوبخش پرس و جو و وارونگی تشکیل شده است. بخش پس و جو با توجه به نوع مسئله مشخص می‌شود و در واقع نوعی اورکل است که باید شامل دو بخش پرسیدن سوال که همان مداری است که در شکل ۱۳.۲ نشان دادیم و از ورودی سوال می‌پرسید آیا دوبخشی هست یا خیر و قرینه‌سازی که در واقع با اعمال یک دروازه‌ی ۲ روی سیم آخر مدار این کار را انجام می‌دهد. درواقع قرار بود بخش قرینه ساز رنگ‌آمیزی‌های صحیح را قرینه کند و چون آن‌هایی که رنگ‌آمیزی صحیح دارند در سیم اخر دارای مقدیک می‌شوند و دروازه‌ی ۲ هم فقط حالت $\langle 1 |$ را به $| 1 \rangle$ تبدیل می‌کند باعث می‌شود حالت مربوط به رنگ‌آمیزی صحیح قرینه شود. این بخش را در شکل ۱۵.۲ در کادر سبز رنگ قرارداده‌ایم. بخش وارونگی هم که قرار است بردار قرینه‌شده بعد از اعمال پرس و جو را نسبت

به بردار میانگین، دوران دهد را در کادر قرمز رنگ در شکل ۱۵.۲ نشان داده‌ایم. همان طور که در شکل ۱۵.۲ دیدید برای نمایش

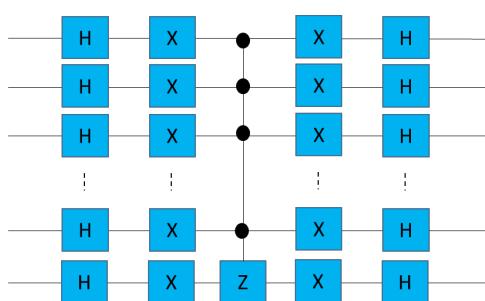


شکل ۱۵.۲: پیاده‌سازی الگوریتم گرور برای تشخیص رنگ‌آمیزی صحیح برای گراف شکل ۱۲.۲

بخش وارونگی که مسئول قرینه سازی حالت سیستم نسبت به حالتی که اجزای آن همان اجزای تشکیل دهنده‌ی حالت سیستم هستند(حالاتی که برابر است با برهمنهی تمام حالت‌های ممکن برای رنگ‌آمیزی ولی به دلیل اعمال الگوریتم پرس و جو دامنه‌ی حالت‌های مربوط به رنگ‌آمیزی صحیح در آن قرینه شده اند) ولی با دامنه‌هایی برابر و مساوی با میانگین تمام دامنه‌ها. نمایش عملگری و ماتریسی بخش وارونگی به ترتیب معده ۳۸.۲ و شکل ۱۳.۲ است.

$$I - 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{N} & \dots & \frac{1}{N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{N} & \dots & \frac{1}{N} \end{pmatrix} \quad (38.2)$$

درواقع برای گرافی با چهار رأس در کل $N = 16$ حالت مختلف رنگ‌آمیزی داریم و ما دنبال $K = 4$ رنگ خاص هستیم که



شکل ۱۶.۲: دروازه‌های معادل بخش وارونگی در الگوریتم گرور

باعث شود گرافمان دوبخشی شود، پس باید روی تمام حالت‌های ممکن $2^{\sqrt{\frac{N}{K}}}$ دفعه مانند شکل ۱۷.۲، الگوریتم گرور را

پیاده کنیم. ما مدار شکل ۱۷.۲ را ۱۰۰۰ مرتبه اجرا کردیم و نتایج اندازه‌گیری به صورت زیر شده است:

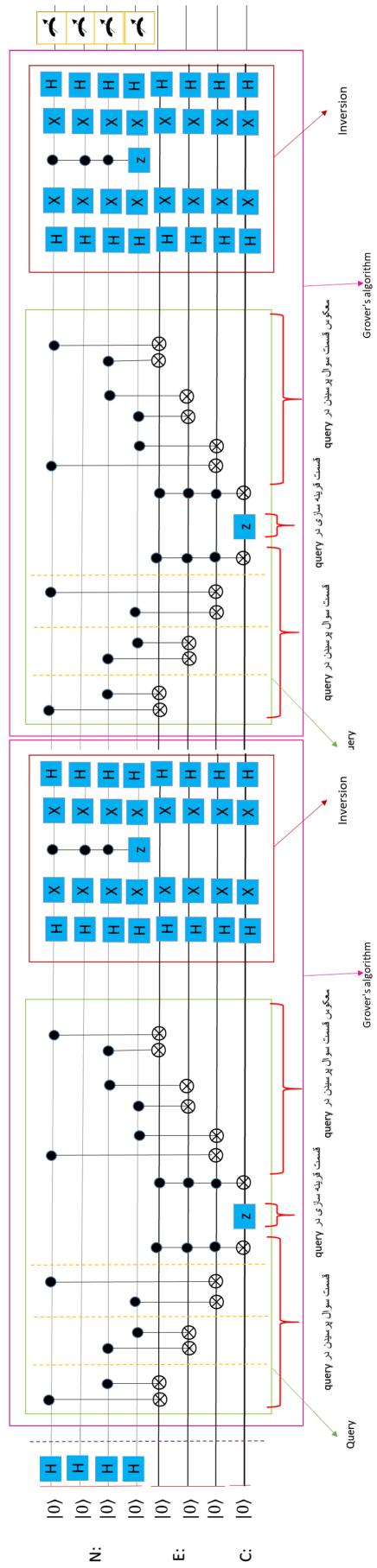
$$[1111' : 963, 0011' : 6, 1110' : 5, 0000' : 4, 0010' : 4, 1001' : 3, 1101' : 3,$$

$$0101' : 3, 1011' : 3, 0110' : 2, 1010' : 1, 0001' : 1, 0111' : 1, 0100' : 1]$$

همان طور که واضح است جواب‌های مربوط به رنگ‌آمیزی صحیح با اختلاف زیادی بیشتر از سایر رنگ‌آمیزی‌ها مشاهده شده‌اند یعنی احتمال مشاهده‌ی آن‌ها بسیار بیشتر شده است. قدرت الگوریتم گرور زمانی خودش را نشان می‌دهد که تعداد رأس‌های گراف زیاد شود مثلاً $N = 20$ در این حالت ما تقریباً ۱۰۰,۰۰۰ حالت متفاوت برای رنگ‌آمیزی داریم ولی اگر بخواهیم از روش کوانتومی استفاده کنیم با ۱۰۰۰ پرسش به جواب می‌رسیم در حالی که در روش کلاسیکی اگر خوش شانس نباشیم باید از مرتبه ۱۰۰۰,۰۰۰ مرتبه جستجو کنیم و این قدرت الگوریتم جستجوی گرور را نشان می‌دهد.

در این فصل سعی داشتیم شما را با تعدادی از الگوریتم‌های کوانتومی آشنا کنیم و قابلیت‌های آن‌ها را در مقایسه با مشابه کلاسیکی‌شان نشان دهیم، تا بتوانیم دلیل اینکه الگوریتم‌های کوانتومی کاندیدی برای غلبه بر محدودیت‌های کلاسیکی شده‌اند را کمی ملموس‌تر درک کنیم. یادگیری ماشین کوانتومی^{۱۶} یک زمینه نوظهور است که اصول محاسبات کوانتومی و یادگیری ماشین را ترکیب می‌کند. هدف آن استفاده از ویژگی‌های منحصر به فرد سیستم‌های کوانتومی برای افزایش قدرت محاسباتی و کارایی الگوریتم‌های یادگیری ماشین کلاسیکی است. در فصل آینده قصد داریم قسمت‌های مختلف یادگیری ماشین کوانتومی را با جزئیات بررس کنیم و در انتهای هم معاایب و مزایای این روش را بررسی کنیم.

^{۱۶}Quantum machine learning (QML)



شکل ۱۷.۲: اعمال دو مرتبه الگوریتم گروبر روی گراف شکل ۱۲.۲ برای پیدا کردن رنگ‌آمیزی یا رنگ‌آمیزی‌هایی که گراف را به گراف دوبخشی،

تبديل می‌کند.

فصل ۳

یادگیری ماشین کلاسیکی و کوانتومی

۱.۳ مقدمه

تا اینجا ابتدا با مفاهیم پایه‌ای در محاسبات کوانتومی آشنا شدیم و سپس به بررسی چند الگوریتم کوانتومی و قابلیت‌های آن‌ها در مقایسه با مشابه کلاسیکی‌شان پرداختیم. در این فصل قصد داریم به بررسی یادگیری ماشین کوانتومی بپردازیم، برای این کار ابتدا یادگیری ماشین کلاسیکی را مرور می‌کنیم و بعد مانسته‌ی کوانتومی هر بخش را بررسی خواهیم کرد.

۲.۳ یادگیری ماشین کلاسیکی

به هر راهکاری که باعث شود ماشین‌ها مسئله‌ای را شبیه روش‌هایی که انسان‌ها استفاده می‌کنند، هوش مصنوعی گفته می‌شود. یادگیری ماشین^۱ زیرمجموعه‌ای از هوش مصنوعی است که در آن، ماشین با استفاده از مجموعه داده‌های آموزشی و روش‌های آماری پیش‌رفته، به تجزیه و تحلیل داده‌ها می‌پردازد یا در واقع آموزش می‌بیند تا بتواند یک کاری را انجام دهد یا تصمیمی را بگیرد. یک ماشین هر چه اطلاعات بیشتری دریافت کند، مانند انسان، می‌تواند آن کار یا تصمیم‌گیری را بهتر انجام دهد. یادگیری عمیق^۲ زیرمجموعه‌ای از یادگیری ماشینی است که از شبکه‌های عصبی مصنوعی^۴ برای تقلید از فرآیند یادگیری

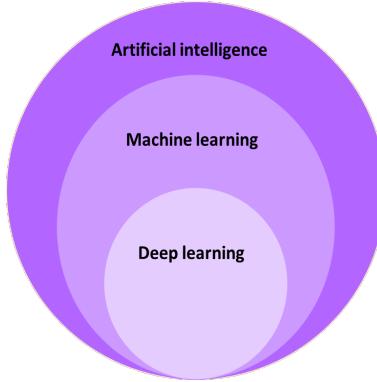
¹ Artificial intelligence (AI)

² Machine learning(ML)

³ Deep learning

⁴ Artificial Neural Network (ANN)

مغز انسان استفاده می‌کند. داده‌ها در این شبکه‌ها به صورت غیر خطی جریان پیدا می‌کنند که درست شبیه تحلیل داده‌ها در مغز انسان است. الگوریتم‌های یادگیری ماشین معمولاً هنگام اشتباه به تصحیح انسان نیاز دارند در حالی که الگوریتم‌های



شکل ۱.۳: هوش مصنوعی و زیر مجموعه‌های آن

یادگیری عمیق می‌توانند نتایج خود را از طریق تکرار، بدون دخالت انسان، بهبود بخشنند. یک الگوریتم یادگیری ماشین می‌تواند از مجموعه‌های نسبتاً کوچکی از داده‌ها یاد بگیرد، اما یک الگوریتم یادگیری عمیق به مجموعه داده‌های بزرگی نیاز دارد که ممکن است حاوی داده‌های متنوع و بدون ساختار باشد. یادگیری ماشین کلاسیکی به چهار دسته‌ی اصلی یادگیری با ناظارت^۴ یادگیری بدون ناظارت،^۵ یادگیری نیمه ناظارتی^۶ و یادگیری تقویتی^۷ تقسیم‌بندی می‌شود که در شکل ۲.۳ این تقسیم‌بندی نشان داده شده است.

۱.۲.۳ مراحل یادگیری ماشین کلاسیکی

تمام روش‌های یادگیری ماشین از چهار قسمت کلی به صورت زیر تشکیل می‌شوند:

- آماده‌سازی بردار ویژگی^۸: برای آماده‌سازی این بردار باید ابتدا جمع آوری داده^۹، تمیز کردن داده^{۱۰} و بعد برچسب‌زنی داده‌ها^{۱۱} انجام شود، سپس از روی داده‌های جمع آوری شده ویژگی‌هایی را استخراج کرد، که به پیش‌بینی مقدار خروجی

⁵Supervised earning

⁶Unsupervised earning

⁷Semi-Supervised earning

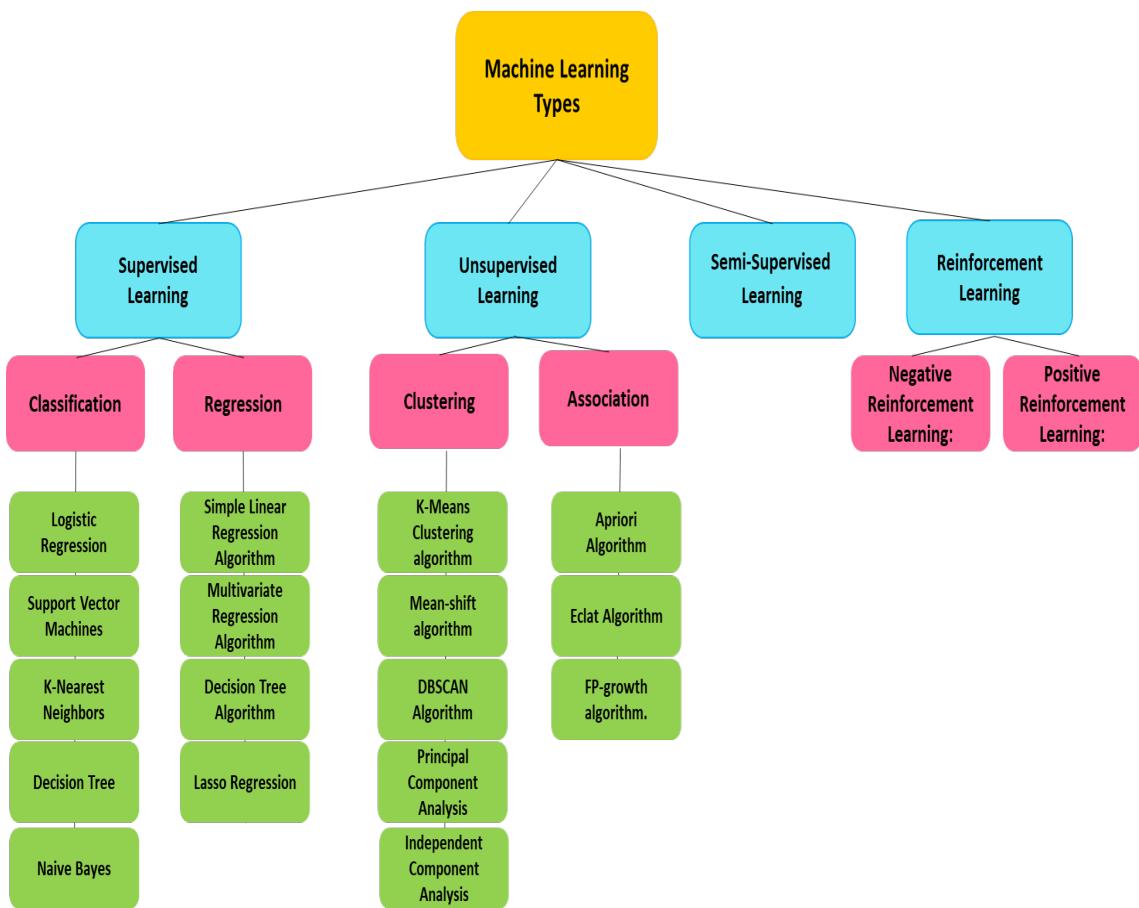
⁸Reinforcement Learning

⁹Preparation of features vector

¹⁰Data collection

¹¹Data cleaning

¹²Data labeling



شکل ۲.۳: یادگیری ماشین و دسته‌بندی آن

منجر شوند.

- انتخاب مدل^{۱۳}: مدل در واقع تابع اصلی ما است که ورودی را می‌گیرد و خروجی را پیش‌بینی می‌کند که با توجه به نوع خروجی مسئله، نوع مدل انتخاب می‌شود. اگر خروجی دارای مقادیری گسسته و تعدادی محدود باشد، مسئله دسته بندی است و اگر خروجی دارای مقادیری پیوسته و تعدادی نامحدود باشد، مسئله از نوع رگرسیون است. هر مدل شامل مجموعه پارامترهای قابل آموزش است که هدف کلی از یادگیری ماشین پیدا کردن مقدار هر چه صحیح‌تر این پارامترها است.

- انتخاب تابع هزینه^{۱۴}: تابع هزینه تابعی است که تفاوت بین مقادیر مشاهده شده y_i (واقعی) و مقادیر پیش‌بینی شده \hat{y}_i (بر اساس مدل) را اندازه‌گیری می‌کند. تابع‌های هزینه انواع مختلفی دارند که با توجه به نوع مسئله انتخاب می‌شوند.

¹³Model selection

¹⁴lost function selection

درواقع تابع هزینه مسئول سنجش خوب بودن مدل ما به ازای پارامترهای انتخاب شده است. اگر مقدار تابع هزینه به ازای پارامترهای انتخاب شده تا آن لحظه زیاد باشد، نشان می‌دهد مدل به ازای این مقادیر پارامتر از مدل صحیحی که به دنبالش هستیم دور شده و اگر با تغییر مقدار این پارامترها، مقدار تابع هزینه کاهش پیدا کند یعنی در حال نزدیک شدن به سمت مقادیر صحیح تر برای پارامترها هستیم. تابع هزینه‌ها به طور کلی حاصل جمع تفاضل مقادیر پیش‌بینی شده توسط مدل با پارامترهایی که تا آن لحظه برای مدل محاسبه شده و مقادیر صحیح خروجی است. تابع هزینه‌ها انواع مختلفی دارند که به طور کلی به دو دسته‌ی زیر تقسیم می‌شوند:

- تابع هزینه رگرسیونی: تابع هزینه مورد استفاده در مدل‌های رگرسیونی است از جمله این تابع هزینه‌ها می‌توان به

تابع هزینه‌های زیر اشاره کرد:

* میانگین مجزور خطاهای^{۱۵}

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n} \quad (1.3)$$

* میانگین قدر مطلق خطاهای^{۱۶}

$$MAE = \frac{\sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|}{n} \quad (2.3)$$

* میانگین سوگیری خطاهای^{۱۷}

$$MBE = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)}{n} \quad (3.3)$$

- تابع هزینه دسته بندی: تابع هزینه مورد استفاده در مدل‌های دسته بندی از جمله این تابع هزینه‌ها می‌توان به

تابع هزینه‌های زیر اشاره کرد:

* تابع هزینه آنتروپی متقاطع^{۱۸}

$$CrossEntropyLoss = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \log(\hat{y}_i) + (1 - y_i) \log(1 - \hat{y}_i) \quad (4.3)$$

¹⁵Mean Square Error

¹⁶ Mean Absolute Error

¹⁷ Mean Bias Error

¹⁸Cross Entropy Loss/Negative Log Likelihood

* تابع هزینه هینگر یا تابع هزینه چند کلاسه SVM^{19}

$$SVM Loss = -\sum_{j \neq y_i} \max(0, s_j - s_{y_i} + 1) \quad (5.3)$$

در روابط بالا n تعداد داده‌های مان است و منظور از i یعنی i امین داده و y_i همان i امین خروجی یا برچسب مربوط به ورودی‌های i است و \hat{y}_i خروجی پیش‌بینی شده توسط مدل ساخته شده است. باید توجه داشته باشیم که در واقع یک تابع هزینه‌ای وجود ندارد که برای تمام مسائل به کار بود و اینکه در هر یک از مدل‌های رگرسیونی یا دسته‌بندی از کدام یک از تابع هزینه‌ها باید استفاده کرد، باید گفت این خیلی مسئله‌ی مشخصی نیست و معمولاً با آزمون و خطای مشخص می‌شود.^[10].

• بهینه‌سازی ^{۲۰}: بهینه‌سازی روشی است که برای حداقل یا حداقل کردن تابع هزینه با توجه به پارامترهای مدل استفاده می‌شود. در واقع هدف ما در بهینه‌سازی پیدا کردن مینیمم مطلق نه موضعی است و از طریق بهینه‌سازی، ما پارامترهای مدل را تخمین می‌زنیم که باعث می‌شود مدل ما عملکرد بهتری داشته باشد و در واقع به مدل حقیقی‌ای که بر داده‌ها حاکم است نزدیک‌تر شویم. به عنوان مثال اگر فضای تابع هزینه بر حسب تک پارامتر θ به صورت شکل ^{۲۱} باشد، هدف پیدا کردن مینیمم مطلق است. انتخاب الگوریتم بهینه‌سازی به مسئله، معماری مدل و داده‌های که می‌خواهیم آن‌ها را مدل کنیم بستگی دارد. در اینجا یکی از این روش‌های بهینه‌سازی یعنی روش گرادیان کاهشی ^{۲۲} را بررسی می‌کنیم:

- گرادیان کاهشی یک الگوریتم بهینه‌سازی تکراری است که برای یافتن حداقل یک تابع مشتق‌پذیر ^{۲۳} استفاده می‌شود. این الگوریتم به طور گسترده در یادگیری ماشین و یادگیری عمیق برای آموزش مدل‌ها استفاده می‌شود.

در زیر توضیح مراحل کار این الگوریتم آمده است:

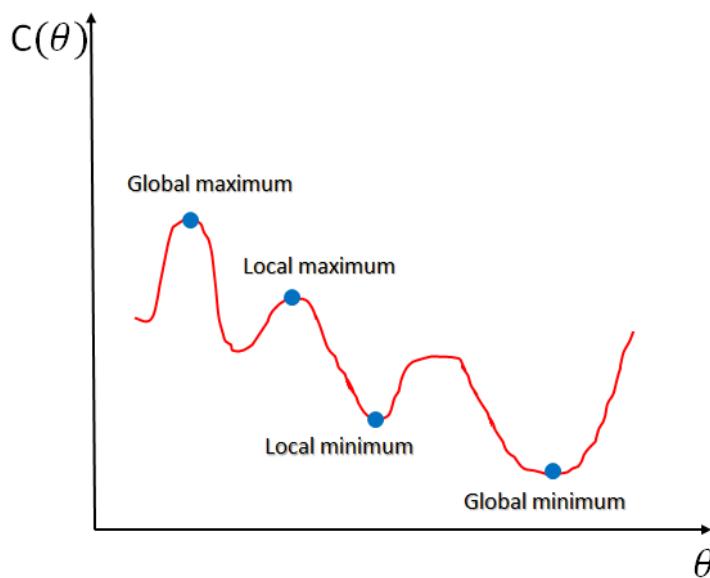
* مقداردهی اولیه: ابتدا با مقداردهی تصادفی یا مقداردهی اولیه‌ای، مقدار پارامترهای مدل را مشخص می‌کنیم. این پارامترها متغیرهایی هستند که تابع به آنها وابسته است و هدف ما یافتن مقادیر بهینه است که تابع هزینه را کمینه کنند.

¹⁹Hinge Loss/Multi class SVM Loss

²⁰Optimization

²¹ gradient descent

²²Differentiable function



شکل ۳.۳: نمایشی از تابع هزینه بر حسب یک پارامتر θ و نقاط بیشینه و کمینه موضعی و مطلق

* محاسبه گرادیان: مرحله بعدی محاسبه گرادیان تابع نسبت به پارامترها است. گرادیان یک بردار است که

به سمت شیب بیشینه تابع اشاره می‌کند. این بردار به ما می‌گوید که چگونه تابع نسبت به هر پارامتر تغییر می‌کند.

* به روزرسانی پارامترها: بعد از محاسبه گرادیان، پارامترهای مدل را در جهت معکوس گرادیان به روزرسانی

می‌کنیم تا به سمت حداقل حرکت کنیم، مانند شکل؟ که نشان می‌دهد چگونه روش گرادیان کاهشی ما

را به سمت مینیمم تابع هزینه سوق می‌دهد. این به روزرسانی به صورت تکراری انجام می‌شود و با استفاده

از نرخ یادگیری α^{23} کنترل می‌شود که میزان حرکت در هر تکرار را تعیین می‌کند. نرخ یادگیری معمولاً یک

مقدار مثبت و کوچک است و نحوه سرعت و یا آهستگی همگرایی الگوریتم را تحت کنترل قرار می‌دهد. این

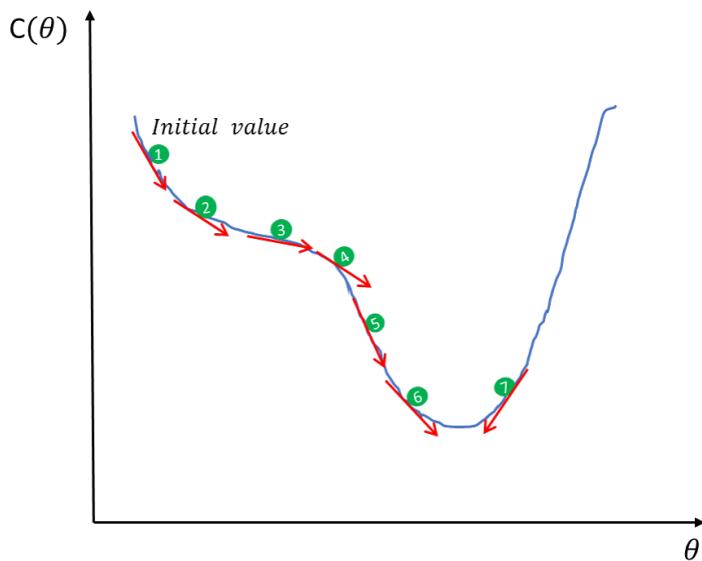
به روزسانی برای هر پارامتر θ را با^{۲۴} θ' نشان میدهیم و رابطه‌ی ریاضی آن به صورت زیر است:

$$\theta'_i = \theta_i - \alpha \nabla_{\theta_i} C(\theta) \quad (6.3)$$

در رابطه‌ی بالا $C(\theta)$ تابع هزینه است.

در ادامه به بررسی یادگیری با نظارت و یادگیری بدون نظارت و بررسی چهار قسمت یادگیری ماشین در چند روش از هر یک از این دو دسته می‌پردازیم.

²³ learning rate



شکل ۴.۳: نمایشی از نحوه‌ی عملکرد روش بهینه‌سازی گرادیان کاهش که حالت اولیه را با دایره سبز و شماره ۱ نشان داده‌ایم و بعد از هر بار بهروز رسانی پارامتر با روش بهینه‌سازی گرادیان کاهشی آن را با اعداد ۲ و ۳ و ... نشان داده‌ایم. نمودار رسم شده تابع هزینه $C(\theta)$ بر حسب پارامتر θ است.

۳.۳ یادگیری با نظارت

اول از همه، باید بدانیم که الگوریتم‌های یادگیری ماشین با نظارت چیست؟ در این روش، از بردارهای ویژگی برچسب‌گذاری شده برای آموزش مدل استفاده می‌شود، منظور از بردار ویژگی برچسب‌گذاری شده یعنی خروجی مربوط به هر بردار ویژگی، مشخص باشد. دو نوع یادگیری تحت نظارت وجود دارد:

- **دسته‌بندی^{۲۴}**: مسائل مربوط به دسته‌بندی دارای برچسب‌های گستته هستند. در این نوع مسائل هدف پیش‌بینی برچسب داده‌ها بر اساس متغیرهای مستقل (بردار ویژگی) است. مثل مسئله‌ی تشخیص نژادهای یک گونه‌ی گل از روی چند ویژگی مانند طول برگ، رنگ برگ، اندازه‌ی ساقه و غیره که مقادیر خروجی چند عدد یا دسته‌ی محدود و مشخص است.
- **رگرسیون^{۲۵}**: مسائل مربوط به رگرسیون دارای برچسب‌هایی با مقادیر پیوسته هستند مثل تشخیص قیمت خانه بر اساس ویژگی‌هایی مانند سن خانه، تعداد اتاق‌ها، مساحت خانه وغیره که خروجی هر مقداری می‌تواند باشد.

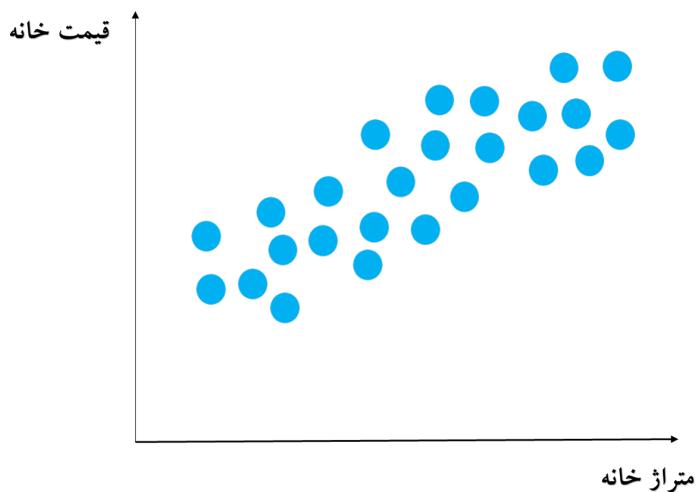
²⁴Classification

²⁵Regression

در ادامه به یکی از ساده‌ترین انواع رگرسیون یعنی رگرسیون خطی^{۲۶} می‌پردازیم.

۱.۳.۳ رگرسیون خطی

رگرسیون خطی، رابطه خطی بین یک متغیر وابسته (خروجی مدل y) و یک یا چند ویژگی مستقل x_1, x_2, \dots, x_n که $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ هر کدام یک ویژگی هستند را پیدا می‌کند. برای درک بهتر این روش فرض کنید می‌خواهیم قیمت خانه را بر اساس فقط یک ویژگی یعنی متراز خانه پیش بینی کنیم. فرض کنید برای ۲۵ خانه، قیمت خانه (x_1) و متراز هر یک (y) را داریم. پس تا اینجا، مرحله‌ی اول در یادگیری ماشین یعنی آماده سازی بردار ویژگی که شامل یک ویژگی یعنی متراز است، را انجام داده‌ایم و آن‌ها را در شکل ۵.۲ نشان داده‌ایم:



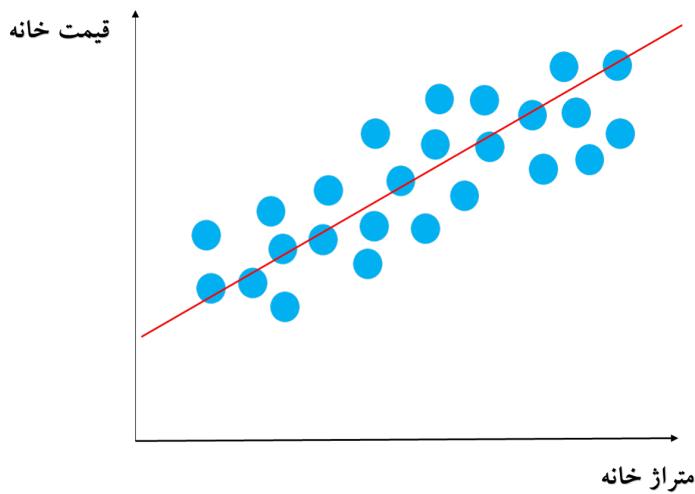
شکل ۵.۳: نمایش داده‌های قیمت ۲۵ خانه بر اساس متراز آن‌ها

مرحله‌ی دوم انتخاب مدل است، که چون هدف پیدا کردن قیمت خانه که مقادیری پیوسته و نامحدود دارد، هست پس باید سراغ مدل‌های رگرسیون برویم و از بررسی داده‌ها مثل رسم آنها در شکل ۵.۳ می‌فهمیم باید یک مدل خطی انتخاب کنیم. پس تا اینجا مدل‌مان رگرسیون خطی شد. هدف در رگرسیون خطی پیدا کردن معادله‌ی خطی، است برای پیش بینی قیمت خانه مانند خطی که در شکل ۶.۳ نشان داده شده. معادله‌ی کلی این خط یا درواقع این مدل رگرسیون خطی به صورت زیر می‌باشد:

$$y = ax + b \quad (7.3)$$

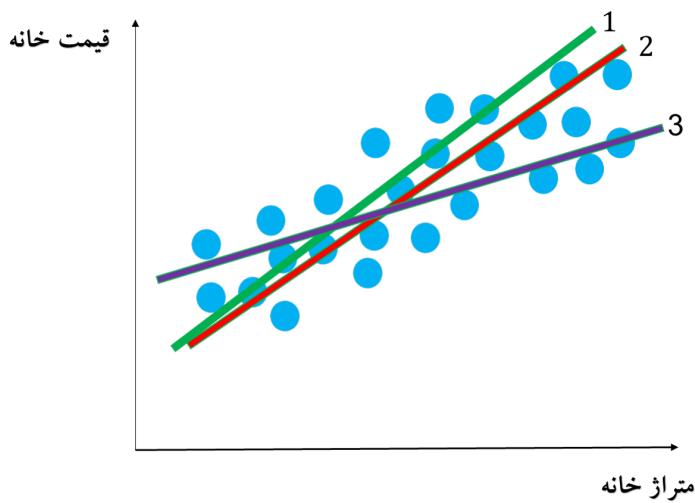
a شبی خط و b عرض از مبدأ خط است. هدف ما پیدا کردن پارامترهای این مدل یعنی a , b است. درواقع به ازای مقادیر مختلف

²⁶Linear Regression



شکل ۶.۳: نمایش یک خط برای مدل کردن و پیش‌بینی داده‌های قیمت ۲۵ خانه بر اساس متراژ آن‌ها

برای a, b مدل ما برای داده‌ها، خطوطی مانند خطوط مشخص شده در شکل ۷.۳ را نشان می‌دهد. اما کدام یک از این خطوط



شکل ۷.۳: نمایش چند نمونه از خطوطی که می‌توان برای مدل خط داده‌های قیمت ۲۵ خانه بر اساس متراژ آن‌ها

بهترین خط برای پیش‌بینی قیمت خانه است؟ یا در واقع بهترین خط برای مدل کردن قیمت خانه بر اساس متراژ آن کدام خط است؟ برای این کار به سراغ مرحله‌ی سوم یعنی تعریفتابع هزینه می‌رویم. این تابع هزینه به ما کمک می‌کند بهترین خط را پیدا کنیم. به عنوان مثال تابع هزینه مجدد میانگین خط‌ها را انتخاب می‌کنیم و با جاگذاری مدل‌مان در تابع هزینه عبارت زیر به دست می‌آید:

$$C(x_i, a, b) = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - (ax_1 + b))^2}{n} \quad (8.3)$$

و سپس برای به روز رسانی و پیدا کردن مقادیر بهتر برای پارامترهای مدل یعنی a , b از روش بهینه‌سازی گرادیان کاهشی استفاده می‌کنیم. در این روش برای به روز رسانی مقادیر پارامتر از روش زیر استفاده می‌شود:

$$a' = a - \alpha \frac{\partial C(x_i, a, b)}{\partial a} \quad (9.3)$$

$$b' = b - \alpha \frac{\partial C(x_i, a, b)}{\partial b} \quad (10.3)$$

در معادله ۹.۳ منظور از a' , b' مقادیر جدید برای a , b است و منظور از α نرخ یادگیری^{۲۷} است. با تکرار مراحل بهینه‌سازی می‌توانیم هر دفعه به مقادیر بهتری از a , b دست پیدا کنیم و در نهایت بهترین خطی که داده‌های ما را مدل می‌کند را پیدا کنیم.

۲.۳.۳ رگرسیون لجستیک

شاید فکر کنید رگرسیون لجستیک^{۲۸} یک روش رگرسیون است اما درواقع یک روش دسته بندی است و دلیل این نام گذاری را در ادامه خواهید فهمید. از این روش برای حل دو نوع مسئله‌ی دسته بندی استفاده می‌شود:

- دسته بندی دو کلاسه^{۲۹} در این مسائل خروجی تنها دو مقدار متفاوت می‌تواند داشته باشد. مثل تشخیص سگ و گربه.
- دسته بندی چند کلاسه^{۳۰} در این نوع مسائل خروجی بیشتر از دو مقدار دارد مثل مسئله‌ی تشخیص سه نوع گل زنبق با استفاده از چهار ویژگی طول و عرض کاسبرگ و طول و عرض گلبرگ.

۱.۲.۳.۳ دسته بندی دو کلاسه

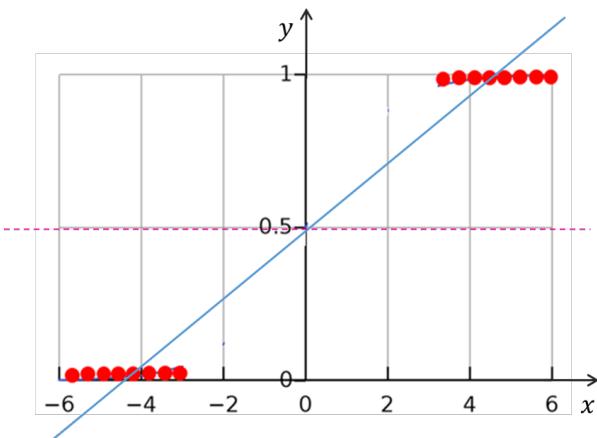
فرض کنید داده‌هایی شبیه شکل ۸.۲ داریم. شاید اولین راهی که به ذهنمان برسد مدل کدن داده‌ها با یک خط مانند مسئله‌ی رگرسیون و قرار دادن یک آستانه باشد که اگر خروجی از آستانه بیشتر بودند در کلاس یک و اگر کمتر بودند در کلاس صفر قرار بگیرند. مانند خط و آستانه‌ای که در شکل ۸.۳ نشان داده شده است. اما این نوع مدل کدن نسبت به داده‌ای پرت بسیار حساس است و چون ما کلاً دو مقدار خروجی یعنی یک و صفر داریم بقیه‌ی قسمت‌های خط که خارج از بازه است اصلاً در توصیف و مدل‌سازی کاربردی ندارند.

²⁷Learning rate

²⁸Logistic regression

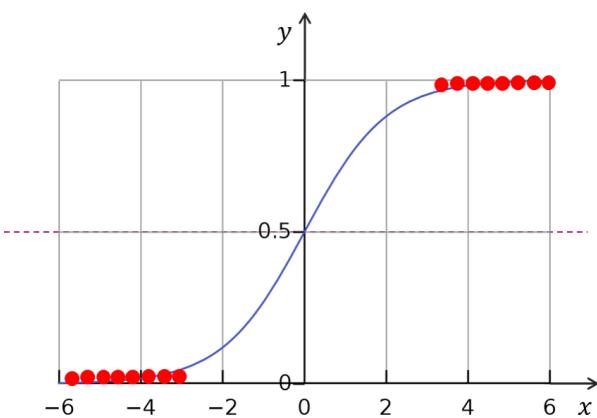
²⁹Binary-class classification

³⁰Multi-class classification



شکل ۸.۳: برآورد مدل رگرسیون خطی برای یک مسئله‌ی رگرسیون خطی

حال اگر به جای یک خط صاف، داده یک خط مانند شکل ۹.۳ را انتخاب کنیم، مدل دیگر نسبت به داده‌های پرت منحرف نمی‌شود و از طرفی چون خود تابع بین صفر و یک است مفهوم احتمال تعلق به کلاس یک را بدون نیاز به هیچ آستانه‌ای فراهم می‌کند. این خطی که در شکل ۹.۳ نشان داده‌ایم با تابع زیر که اسمش تابع سیگموئیدی^{۳۱} است قابل مدل شدن است:



شکل ۹.۳: انتخاب یک مدل خط خمیده به جای مدل خطی برای مدل کردن داده‌های دو کلاسه و حل مسئله‌ی دسته‌بندی

$$f(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}} \quad (11.3)$$

در واقع باید روی معادله خط رابطه ۸.۳ تابع سیگموئید را اعمال کنیم تا به شکل زیر در آید:

$$f_{\theta}(x_1) = \frac{1}{1 + e^{-(\theta_0 + \theta_1 x_1)}} \quad (12.3)$$

³¹Sigmoid function

حال باید ببینیم تابع هزینه‌ای که می‌توان برای پیدا کردن پارامترهای این مدل استفاده کرد چیست؟ تابع سیگموئید تابعی بین صفر و یک است و در واقع مقدار آن احتمال افتادن در کلاس یک را می‌دهد و برای کلاس دیگر این احتمال مقدار مکمل احتمال کلاس یک، می‌شود:

$$p(y_1 = 1|x_1, \theta) = f_\theta(x_1) \quad p(y_1 = 0|x_1, \theta) = 1 - f_\theta(x_1) \quad (13.3)$$

و می‌توان دو رابطه‌ی ۱۳.۳ را به صورت یک رابطه به صورت زیر نوشت:

$$p(y_1|x_1, \theta) = f_\theta(x_1)^{y_1} \times (1 - f_\theta(x_1))^{1-y_1} \quad (14.3)$$

سپس چون داده‌ها از هم مستقل هستند می‌توان رابطه‌ی ۱۴.۳ را برای تمام داده‌ها به شکل زیر نوشت:

$$p(Y|X, \theta) = \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i)^{y_i} \times (1 - f_\theta(x_i))^{1-y_i} \quad (15.3)$$

که در آن $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ و $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]$ و n تعداد داده‌هایی است که برای آموزش است. به تابع معادله‌ی ۱۵.۳ تابع درست نمایی^{۳۲} گفته می‌شود. در واقع در مسائل دسته بندی از این تابع به عنوان تابع هزینه استفاده می‌شود؛ ولی چون برای بهینه‌سازی از تابع هزینه نسبت به پارامترها مشتق گرفته می‌شود و این تابع به صورت ضرب است، معمولاً از $\log(p(Y|X, \theta))$ که به شکل حاصل جمع درآمده، به عنوان تابع هزینه استفاده می‌شود:

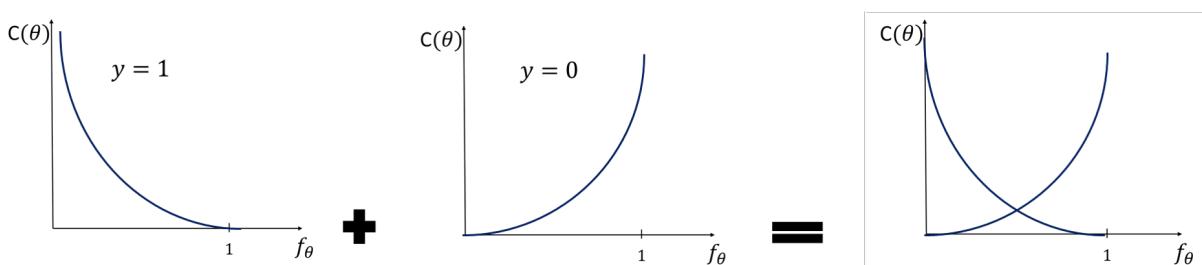
$$\log(p(Y|X, \theta)) = -(\sum_{i=1}^n y_i \log(f_\theta(x_i)) + (1 - y_i) \log(1 - f_\theta(x_i))) \quad (16.3)$$

دلیل علامت منفی ای هم که پشت عبارت گذاشتیم برای این است که معمولاً مسئله‌ی بهینه‌سازی برای پیدا کردن مینیمم استفاده می‌شود و با گذاشتن این منفی تابع را دارای مینیمم می‌کنیم. برای بخش بهینه‌سازی هم می‌توان از روش گرادیان کاهشی استفاده کرد چون این تابع هزینه دارای مینیمم مطلق است. برای اثبات این مسئله به رابطه ۱۷.۳ و شکل ۱۰.۳ نگاه کنید.

$$C(\theta) = \log(p(Y|X, \theta)) = \begin{cases} y = 1 & -\log(f_\theta(x_i)) \\ y = 0 & -\log(1 - f_\theta(x_i)) \end{cases}$$

و از این طریق مقادیر بهینه‌ی پارامترهای مدل را بدست می‌آوریم. تا اینجا مواردی که در رویکرد یادگیری ماشین به آن نیاز داشتیم

³²likelihood



شکل ۱۰.۳: رسم تابع منفی لگاریتم تابع درست نمایی به منظور نشان دادن اینکه این تابع دارای مینیمم مطلق است و روش گرادیان کاوهشی برای بهینه‌سازی آن مناسب است.

را مطرح کردیم در ادامه به بررسی یادگیری ماشین کوانتومی میپردازیم و اجزای آن را یک به یک بررسی خواهیم کرد. هدف ما این است که مشابه کوانتومی هر یک از چهار بخش اجزای یادگیری ماشین کلاسیکی را پیدا کنیم و در ادامه هم مشابه کوانتومی الگوریتم‌های دسته‌بندی و رگرسیون را بررسی خواهیم کرد.

۴.۳ یادگیری ماشین کوانتومی

۱.۴.۳ مقدمه

وضعیت فعلی محاسبات کوانتومی^{۳۳} به عنوان دوره‌ی کوانتومی مقیاس متوسط^{۳۴} (*NISQ*) نامیده می‌شود، اصطلاح دوره‌ی کوانتومی مقیاس متوسط جان پرسکیل در سال 2018 ابداع شد. دلیل این نام‌گذاری این است که در حال حاضر ما به پردازنده‌های کوانتومی‌ای دست یافته‌ایم، که حداقل هزار بیت کوانتومی دارد و این باعث می‌شود که هنوز نتوانیم بر تحمل خطای (خاصیتی است که سیستم را قادر می‌سازد در صورت خرابی و یا خطا در برخی از اجزای آن به درستی به کار خود ادامه دهد)^{۳۵} و تقدیم کوانتومی^{۳۶} (یک دستگاه کوانتومی قابل برنامه ریزی می‌تواند مشکلی را حل کند که هیچ کامپیوتر کلاسیکی نمی‌تواند آن را در هر زمان ممکن حل کند) غلبه کنیم. قبل از وارد شدن به بخش یادگیری ماشین کوانتومی لازم است با چند مفهوم آشنا شویم:

³³Quantum computing

³⁴Noisy Intermediate-Scale Quantum (NISQ)

³⁵Fault-tolerance

³⁶Quantum supremacy

- الگوریتم کوانتومی^{۳۷}: الگوریتمی است که می‌تواند بر مدلی واقع‌گرا از یک کامپیوتر کوانتومی اجرا شود که یکی از پراستفاده‌ترین این مدل‌ها، مدار کوانتومی^{۳۸} است.

- مدارهای کوانتومی:

مدار کوانتومی هم مانند مدارهای کلاسیکی از سه بخش اصلی به شکل زیر تشکیل می‌شود:

- آماده سازی یک حالت اولیه ثابت ($|\psi\rangle$ (به عنوان مثال، حالت خلاء یا حالت صفر)

- مجموعه‌ای از دروازه‌های کوانتومی (U)

- اندازه‌گیری (M)

نوعی از مدارهای کوانتومی نیز وجود دارند به نام مدارهای کوانتومی پارامتری شده^{۳۹} که با نام‌های آنسatz^{۴۰} و یا مدارهای کوانتومی وردشی^{۴۱} نیز شناخته می‌شوند که در شکل ۱۲.۳ نشان داده شده‌اند. تفاوت آن‌ها با مدارهای کوانتومی شکل ۱۱.۳ در این است که در بخش دروازه‌های کوانتومی، دارای پارامترهای قابل تغییر مثل زاویه در دروازه‌های چرخشی هستند. این پارامترها در هر بار اجرای مدار، می‌توانند مقداری متفاوت و دلخواه بگیرند، برخلاف مدار کوانتومی استاندارد که این مقادیر دارای اندازه‌ی مشخص و غیرقابل تغییر هستند.



شکل ۱۱.۳: مدار کوانتومی

- الگوریتم کوانتومی وردشی^{۴۲}: الگوریتم کوانتومی وردشی، یک الگوریتم کوانتومی-کلاسیک است که با استفاده از رایانه‌های کوانتومی و روش‌های بهینه‌سازی کلاسیکی به حل مسائل بهینه‌سازی می‌پردازد. در حال حاضر چون کامپیوترهای

³⁷Quantum algorithm

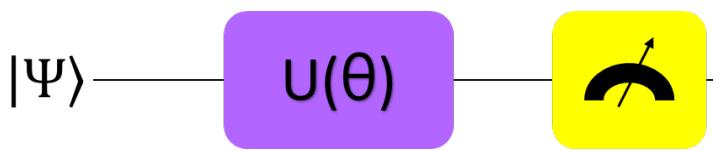
³⁸Quantum circuit

³⁹Quantum circuit

⁴⁰Ansatz

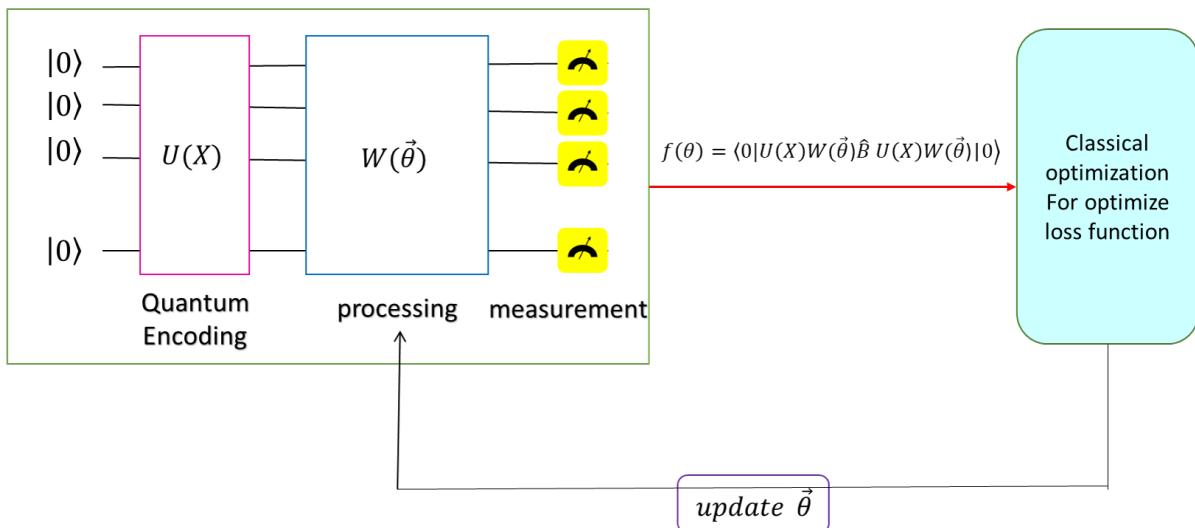
⁴¹Variational Quantum circuit (VQC)

⁴²Variational Quantum Algorithm(VQA)



شکل ۱۲.۳: مدار کوانتومی وردشی

کوانتومی با مشکلاتی مانند کم بودن تعداد بیت‌های کوانتومی و نویسه‌های شدید دست و پنجه نرم می‌کنند ما از مدل‌های جایگزین مثل مدارهای کوانتومی وردشی برای پیاده‌سازی الگوریتم‌های کوانتومی وردشی استفاده می‌کنیم و برای بخش بهینه‌سازی، آن‌ها را به یک بهینه ساز کلاسیک متصل می‌کنیم. از آن جایی که مسائل یادگیری ماشین هم نوعی مسائل بهینه‌سازی هستند پس می‌توان آن‌ها را با استفاده از الگوریتم‌های کوانتومی وردشی به صورت شکل ۱۳.۳ مدل کرد که با نام یادگیری ماشین کوانتومی^{۴۳} شناخته می‌شوند.



شکل ۱۳.۳: شکل یک مدار کوانتومی وردشی و اجزای کوانتومی و کلاسیکی آن

یادگیری ماشین کوانتومی یک حوزه تحقیقاتی است که تعامل ایده‌های محاسبات کوانتومی و یادگیری ماشین را بررسی می‌کند. در کل چهار رویکرد مختلف برای ترکیب محاسبات کوانتومی و یادگیری ماشین وجود دارد که در شکل ۱۴.۳ نشان داده شده است. در این شکل حرف اول به کلاسیک یا کوانتومی بودن سیستم مورد مطالعه اشاره دارد و حرف دوم مشخص می‌کند که آیا از یک دستگاه پردازش اطلاعات کلاسیک یا کوانتومی استفاده می‌شود. که رایج‌ترین رویکرد از بین چهار رویکرد در شکل ۱۴.۳ مربوط به داده کلاسیکی و دستگاه پردازنده کوانتومی است که اصلاح یادگیری ماشین کوانتومی که از آن در این پایان نامه استفاده

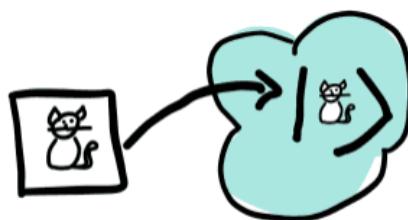
⁴³Quantum machine learning

		Type of Algorithm	
		classical	quantum
Type of Data	classical	CC	CQ
	quantum	QC	QQ

شکل ۱۴.۳: چهار رویکرد مختلف برای ترکیب محاسبات کوانتومی و یادگیری ماشین [۱۱]، [۱۲].

می‌شود مربوط به این رویکرد است. در ادامه برای درک بهتر کارکرد یادگیری ماشین کوانتومی به بررسی شکل ۱۳.۳ می‌پردازیم زیرا همان طور که گفتیم یادگیری ماشین کوانتومی نوعی از الگوریتم‌های کوانتومی وردشی و می‌توان اجزای آن را با شکل ۱۳.۳ نشان داد.

۲.۴.۳ کدبندی کوانتومی



شکل ۱۵.۳: شکلی نمادین از مفهوم کدبندی کوانتومی

اولین قسمت یادگیری ماشین کوانتومی در شکل ۱۳.۳ مربوط به کدبندی کوانتومی^{۴۴} است. در محاسبات کلاسیک، اطلاعات به صورت ارقام دودویی (بیت‌ها) که می‌توانند مقادیر ۰ یا ۱ داشته باشند، کدبندی می‌شوند. در مقابل، در کدبندی کوانتومی داده‌های کلاسیکی به صورت حالت‌های کوانتومی در فضای هیلبرت با استفاده از اعمال دروازه‌های کوانتومی روی

⁴⁴Quantum embedding

بیت‌های کوانتومی پایه و با استفاده از اصول مکانیک کوانتومی مثل برهم نهی^{۴۵} و درهم تنیدگی^{۴۶} که از ویژگی‌های منحصر به فرد سیستم‌های کوانتومی است، نمایش داده می‌شوند. ویژگی برهم نهی یک کیوبیت را قادر می‌سازد تا در چندین حالت به طور همزمان وجود داشته باشد و درهم تنیدگی هم امکان همبستگی بین بیت‌های کوانتومی را فراهم می‌کند که این ویژگی در سیستم‌های کلاسیک امکان‌پذیر نیست. این ویژگی‌ها پایه و اساس سرعت بالقوه و قابلیت‌های محاسباتی منحصر به فرد محاسبات کوانتومی را فراهم می‌کنند. روش‌های مختلفی برای کدبندی کوانتومی اطلاعات در کیوبیت‌ها وجود دارد. در اینجا چند تا از رایجترین آن‌ها را بررسی می‌کنیم:

- روش کدبندی پایه:

برای توضیح روش کدبندی پایه^{۴۷} با یک مثال شروع می‌کنیم. فرض کنید بردار ویژگی X را به صورت زیر داریم:

$$X = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (18.3)$$

در روش کدبندی پایه ابتدا هر یک از اعداد را به مبنای دو می‌بریم:

$$4 = (100)_2 \quad , \quad 3 = (011)_2 \quad (19.3)$$

نمایش کدبندی پایه برای X به صورت زیر خواهد بود:

$$|X\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|100\rangle + |011\rangle) \quad (20.3)$$

و این حالت را با اعمال یک سری دروازه‌های کوانتومی روی بیت‌های کوانتومی صفر در بخش (x) در مدار کوانتومی،

ایجاد می‌کنیم. نمایش کلی کدبندی با روش کدبندی پایه به صورت زیر است:

$$|X\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N |X^{(n)}\rangle \quad (21.3)$$

که در عبارت بالا $|X^{(n)}\rangle$ در $\langle X^{(n)}|$ نمایش دودویی هر یک از اعضای بردار X است.

⁴⁵Superposition

⁴⁶Entanglement

⁴⁷Basis encoding

• روش کدبندهای دامنه:

فرض کنید بخواهیم همان بردار X تعریف شده در رابطه‌ی ۱۸.۳^{۴۸} را با استفاده از روش کدبندهای دامنه کدبندي کنیم.

خروجی کد بندهای با استفاده از این روش به صورت زیر است:

$$|X\rangle = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (X_i)^2}} \sum_{i=1}^N x_i |i\rangle \quad (22.3)$$

که در عبارت بالا منظور از N تعداد اعضای بردار X است که باید حتماً به صورت $N = 2^n$ باشد اگر نبود جای تعداد

اعضایی که کم دارد صفر می‌گذاریم و منظور از $|i\rangle$ همان i امین حالت پایه کوانتومی در فضای کوانتومی n بعدی است.

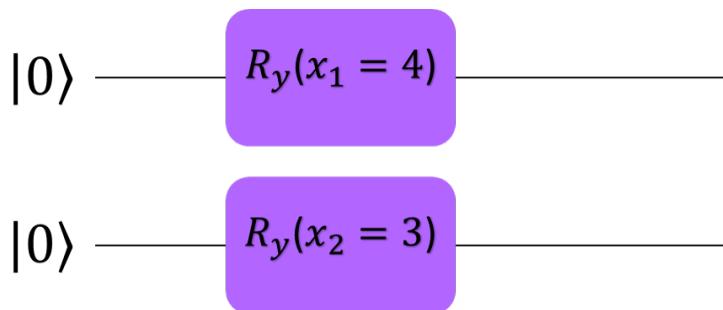
پس نمایش کد بندهای شده‌ی X به صورت زیر خواهد بود:

$$|X\rangle = \frac{1}{5}(4|0\rangle + 3|1\rangle) \quad (23.3)$$

• روش کدبندهای زاویه‌ای:

در این روش به تعداد اعضای بردارمان بیت کوانتومی صفر قرار می‌دهیم و روی هر کدام یک دروازه‌ی چرخش به اندازه‌ی داده اعمال می‌کنیم. این دروازه‌های چرخش می‌توانند حول هر یک از محورهای z, y, x باشند. مثلاً برای کد بندهای با

روش کدبندهای زاویه‌ای برای بردار X از مداری مانند شکل ۱۶.۳ استفاده می‌شود:



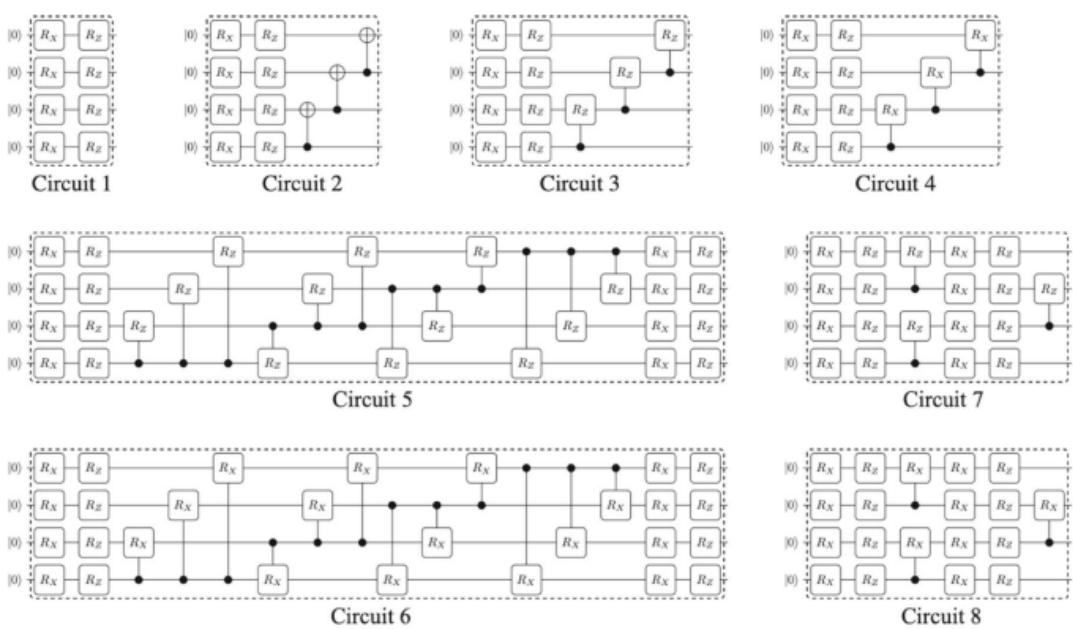
شکل ۱۶.۳: روش کدبندهای زاویه‌ای برای بردار X

⁴⁸Amplitude Embedding

۳.۴.۳ پردازش

بخش پردازش^{۴۹} که در شکل ۱۳.۳ نشان داده شده است، شامل دروازه‌های کوانتومی پارامتری شده است.

منظور از دروازه‌های پارامتری شده یعنی مقدار ورودی این دروازه‌ها (مثل زاویه در دروازه‌های چرخشی) را می‌توان تغییر داد. این بخش در واقع در فرآیند یادگیری ماشین کوانتومی نقش مدلمن را دارد. این که در این بخش چه ساختاری از دروازه‌های کوانتومی را پیاده کنیم هنوز سوالی باز است اما در شکل ۱۷.۳ و ۱۸.۳ چند نمونه از این ساختارها را نشان خواهیم داد:



شکل ۱۷.۳: چند نمونه از مدارهای پارامتری شده [۱۲]

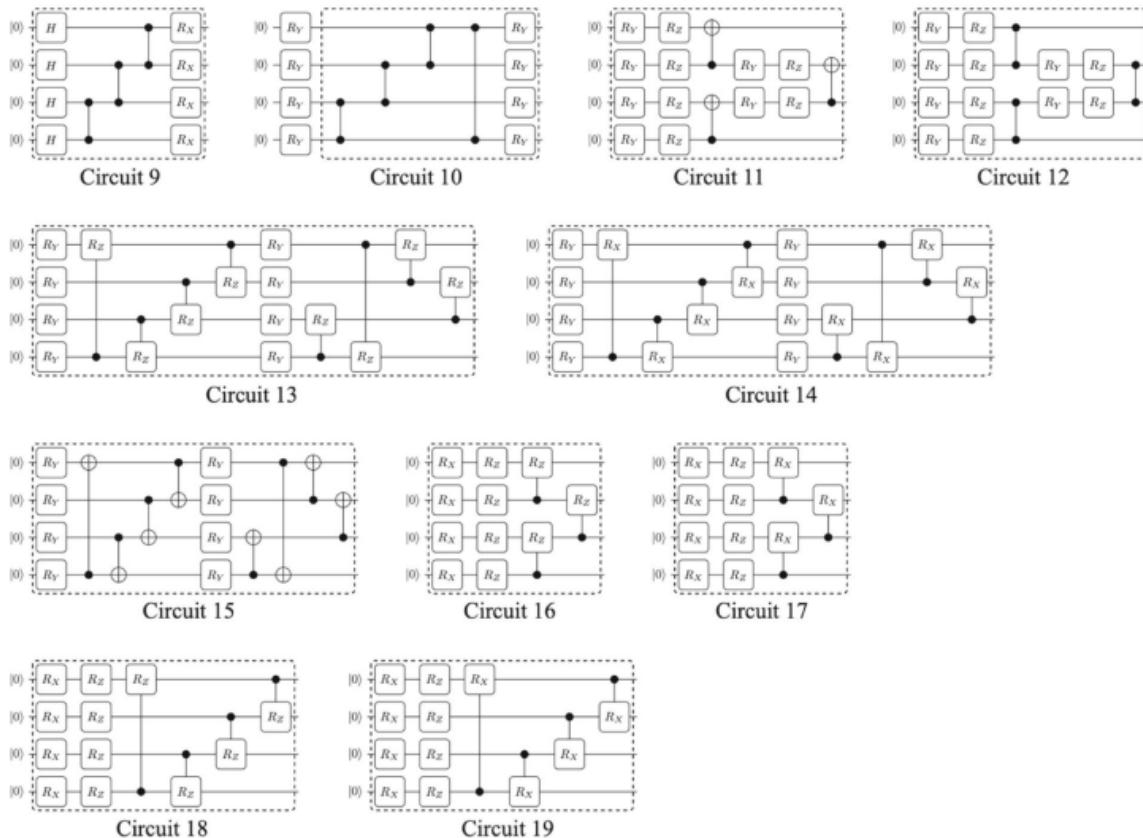
۴.۴.۳ اندازه‌گیری

اندازه‌گیری^{۵۰} در یادگیری ماشین کوانتومی نقش مهمی در استخراج اطلاعات از سیستم‌های کوانتومی و انجام پیش‌بینی

دارد. در مکانیک کوانتومی، اندازه‌گیری فرآیند به دست آوردن اطلاعات کلاسیک در مورد یک حالت کوانتومی است. الگوریتم‌های یادگیری ماشین کوانتومی اغلب بر اصول برهم‌نهی و درهم تنیدگی برای بهره برداری از مزایای محاسباتی ارائه شده توسط سیستم‌های کوانتومی تکیه می‌کنند و امکان استفاده از اصول کوانتومی را برای وظایف یادگیری ماشین را فراهم می‌کنند. توجه به این نکته

⁴⁹Processing

⁵⁰Measurement



شکل ۱۸.۳: چند نمونه از مدارهای پارامتری شده [۱۲]

مهم است که اندازه‌گیری در سیستم‌های کوانتومی می‌تواند احتمالی باشد، به این معنی که نتایج متفاوتی می‌تواند با احتمالات خاصی رخ دهد. اندازه‌گیری‌های مکرر اغلب برای جمع آوری اطلاعات آماری و اعتبارسنجی نتایج انجام می‌شود. در قسمت اندازه‌گیری هدف شبیه‌سازی محاسبه‌ی یک تابع هزینه است که در مرحله‌ی بعد این تابع هزینه که تابعی از پارامترها است را به یک بهینه ساز کلاسیکی بدهیم تا بتوانیم مقدار بهینه‌ی پارامترها را محاسبه کنیم.

اندازه‌گیری در یادگیری ماشین کوانتومی انواع مختلفی دارد:

- اندازه‌گیری انعکاسی^{۵۱}: اندازه‌گیری انعکاسی رایج‌ترین نوع اندازه‌گیری در مکانیک کوانتومی است. در این نوع اندازه‌گیری، با تصویر کردن حالت کوانتومی روی یک پایه خاص، اطلاعات کلاسیکی، استخراج می‌شود. نتیجه اندازه‌گیری یک مقدار کلاسیکی است که متناظر با مقدار ویژه مشاهده شده از مشاهده‌پذیر مورد اندازه‌گیری است.

⁵¹Projective Measurements

توجه به این نکته مهم است که زمینه یادگیری ماشین کوانتومی هنوز در حال تکامل است و روش‌های استخراج برچسب یک حوزه فعال تحقیقاتی هستند. انتخاب روش بستگی به مشکل خاص، منابع کوانتومی موجود و الگوریتم اساسی مورد استفاده برای وظایف یادگیری ماشین کوانتومی دارد. محققان به طور مستمر در حال بررسی رویکردهای جدید برای بهبود استخراج برچسب و استفاده از خواص منحصر به فرد سیستم‌های کوانتومی برای وظایف یادگیری تحت نظرارت هستند.

۵.۴.۳ بھینه‌سازی کوانتومی

ما در الگوریتم‌های یادگیری ماشین کوانتومی در ادامه‌ی این فصل از بھینه‌سازهای کلاسیکی استفاده خواهیم کرد ولی در این قسمت به بررسی بھینه‌سازهای کوانتومی و ایده‌های پشت آن‌ها می‌پردازیم. هدف بھینه‌سازی کوانتومی^{۵۲} یافتن راه حل بھینه از میان مجموعه‌ای از احتمالات با استفاده از خواص منحصر به فرد سیستم‌های کوانتومی، مانند برهمنه و درهم تنیدگی است. ذکر این نکته ضروری است که بھینه‌سازهای کوانتومی هنوز در مراحل اولیه توسعه هستند و اجرای عملی آن‌ها نیازمند سخت افزار کوانتومی قوی و مقیاس‌پذیر است. با پیشرفت فناوری محاسبات کوانتومی، بھینه‌سازهای کوانتومی این پتانسیل را دارند که با ارائه راه حل‌های کارآمدتر برای مسائل پیچیده، انقلابی در زمینه بھینه‌سازی ایجاد کنند^{۱۳}. یکی از روش‌های بھینه‌سازی کوانتومی حل کننده ویژه مقدار کوانتومی وردشی^{۵۳} است. در واقع این الگوریتم یک الگوریتم کوانتومی است که برای تخمین انرژی حالت پایه یک هامیلتونی^{۵۴} معین طراحی شده است. منظور از هامیلتونی یک عملگر هرمیتی است که اگر روی ویژه حالت^{۵۵} اثر کند انرژی آن حالت را تحت ویژه مقدار^{۵۶} و به شکل زیر می‌دهد:

$$H |\phi\rangle = E |\psi\rangle \quad (24.3)$$

در رابطه‌ی بالا H هامیلتونی سیستم، E ویژه حالت یا انرژی مربوط به حالت $|\psi\rangle$ است.

$$H |\Phi(\theta)\rangle = E(\theta) |\Phi(\theta)\rangle \quad (25.3)$$

$$E(\theta) = \langle \Phi(\theta) | H | \Phi(\theta) \rangle \quad (26.3)$$

⁵²Quantum optimization

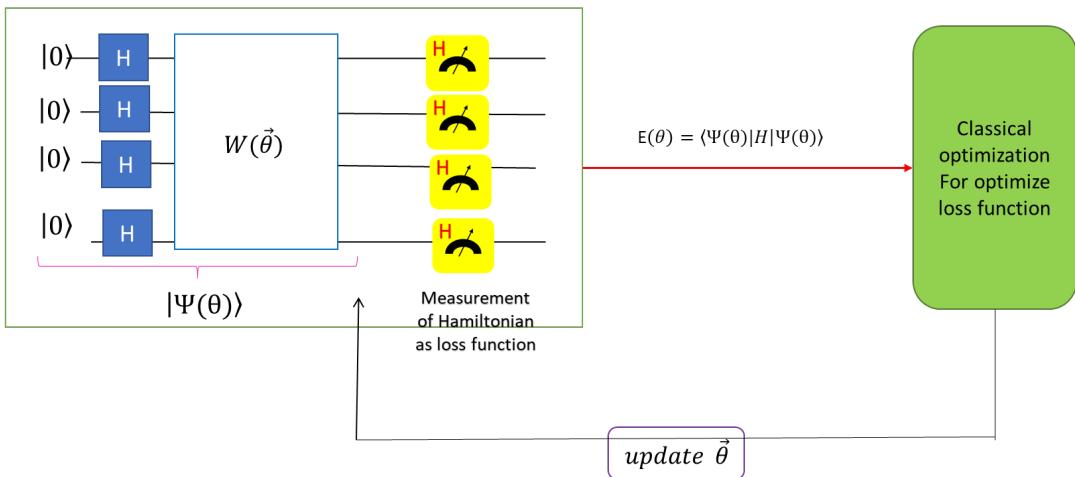
⁵³Variational quantum eigensolver(VQE)

⁵⁴Hamiltonian

⁵⁵Eigenvector

⁵⁶Eigenvalue

با توجه به معادله ۲۵.۳ کلیت این روش به این شکل است که با داشتن هامیلتونی یک سیستم و قرار دادن آن در یک مدار کوانتومی وردشی و اندازه‌گیری مقدار چشم داشتی هامیلتونی به عنوان تابع هزینه، آن را به یک بهینه‌ساز کلاسیکی تحویل می‌دهیم تا آن را کمینه کند و از این طریق هم مقدار کمترین انژی پیدا می‌شود و هم حالت کوانتومی مربوط به کمترین انرجی. نمونه از مدار مربوط به این روش به صورت زیر است:



شکل ۱۹.۳: نمونه‌ای از یک مدار حل کننده ویژه مقدار کوانتومی وردشی

۶.۴.۳ الگوریتم بهینه‌سازی تقریبی کوانتومی

یک نمونه از حل کننده‌های ویژه مقدار کوانتومی وردشی، الگوریتم بهینه‌سازی تقریبی کوانتومی (QAOA)^{۵۷} است که به طور خاص برای حل مسائل بهینه‌سازی ترکیبی^{۵۸} مثل مسئله فروشنده دوره‌گرد^{۵۹}، مسئله کوله‌پشتی^{۶۰} و رنگ‌آمیزی گراف^{۶۱} طراحی شده است.

شکل کلی الگوریتم بهینه‌سازی تقریبی کوانتومی به صورت شکل ۲۰.۳ می‌باشد:

در الگوریتم بهینه‌سازی تقریبی کوانتومی، هدف یافتن راه حل بهینه برای یک مسئله بهینه‌سازی با تحول یک حالت کوانتومی بر اساس یک هامیلتونی وابسته به زمان است. هامیلتونی تابع هزینه مسئله را نشان می‌دهد و سیستم کوانتومی را به سمت راه حل

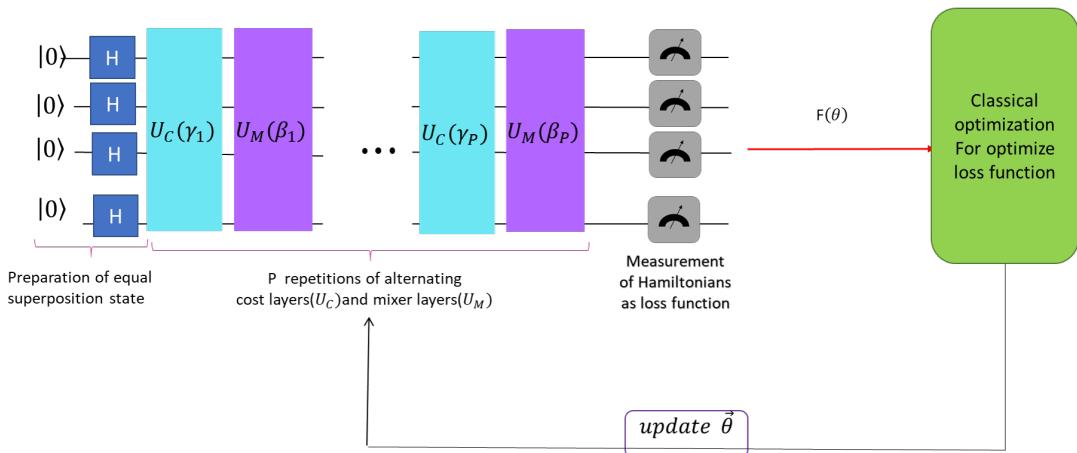
⁵⁷ Quantum Approximate Optimization Algorithm(QAOA)

⁵⁸

⁵⁹ Travelling salesman problem

⁶⁰ Knapsack problem

⁶¹ Graph coloring



شکل ۲۰.۳: مدار مربوط به الگوریتم بهینه‌سازی QAOA

مورد نظر هدایت می‌کند. فرمول هامیلتونی در الگوریتم بهینه‌سازی تقریبی کوانتومی بستگی به مسئله‌ای دارد که می‌خواهیم آن را حل کنیم. در واقع در این روش هامیلتونی ای که با مدار پیاده می‌کنیم به صورت معادله ۲۷.۳ است:

$$H = H_C + H_M \quad (27.3)$$

که در آن H_C هامیلتونی تابع هزینه^{۶۲} و H_M هامیلتونی مخلوط کننده^{۶۳} است. که H_C همان هامیلتونی توصیف کننده سیستم است و H_M که هامیلتونی مخلوط کننده است که به عنوان وسیله‌ای برای هدایت سیستم بین نقاط مختلف در فضای راه حل عمل می‌کند و به الگوریتم کمک می‌کند تا انواع راه حل‌های کاندید را کشف کند و به یک راه حل تقریبی برای مسئله بهینه‌سازی همگرا شود.

۷.۴.۳ دسته‌بندی کوانتومی

در این قسمت قرار است پیاده‌سازی مانسته‌ی کوانتومی روش کلاس‌بندی، در یادگیری ماشین را با استفاده از الگوریتم‌های کوانتومی وردشی توضیح دهم. برای پیاده‌سازی دسته‌بندی کوانتومی که در شکل ۲۱.۳ اجزای آن را نشان داده‌ایم، مراحل زیر را انجام می‌دهم:

- مرحله‌ی اول کدبندی بردار ویژگی استخراج شده از داده با استفاده از یکی از روش‌های کدبندی است.

⁶²Define a cost Hamiltonian

⁶³Define a mixer Hamiltonian

- سپس یکی از ساختارهای مدارهای پارامتری شده در شکل ۱۷.۳ و ۱۸.۳ را انتخاب کرده و آن را یک لایه می‌نامیم. این که از چند لایه استفاده شود تا نتیجه‌ی بهتری بگیریم یک سوال باز است و در واقع جز پارامترهای ازاد مسئله است و از روی آزمون و خطأ و نتایج کار سایر افراد می‌توان مقدار مناسبش را پیدا کرد. فقط باید حواسمن باشد استفاده‌ی تعداد زیادی لایه، باعث بدتر شدن نتایج می‌شود زیرا رایانه‌های کوانتومی به دلیل ناهمدوسی کوانتومی^{۶۴} خطای حاصل از دروازه‌ها و اندازه‌گیری، مستعد انواع مختلف خطاهای نویه^{۶۵} هستند و با افزایش تعداد لایه‌ها، پیچیدگی و حساسیت به نویه نیز افزایش می‌یابد و این باعث بدتر شدن نتیجه می‌شود.
- اندازه‌گیری: در بخش اندازه‌گیری برای مدل‌های دسته‌بندی معمولاً می‌توان از هر یک از روش‌های محاسبه‌ی چشم داشتی ماتریس پائولی^{۶۶} یا پسابرداشت توازن برای به دست آوردن احتمال افتادن در هر یک از کلاس‌ها استفاده کرد. برای همین باید همین مدار را به تعداد کلاس‌هایی که داریم تکرار کنیم تا خروجی اندازه‌گیری در هر مدار نشان دهنده احتمال انتخاب یکی از کلاس‌ها در مسئله‌ی دسته‌بندیمان باشد. در نهایت برچسب نهایی مربوط به کلاسی است که احتمال قرارگرفتن در آن کلاس از همه بیشتر بوده است.
- بهینه‌سازی: در قسمت بهینه‌سازی حاصل اندازه‌گیری در قسمت قبل را که در واقع تابعی از پارامترها است را به عنوان ورودی به یک بهینه‌ساز کلاسیکی می‌دهیم تا مقدار بهینه را برای این پارامترها پیدا کند و بعد از هر مرحله بهینه‌سازی، با استفاده از نتایج بهینه‌سازی، پارامترها را به روز رسانی می‌کنیم و دوباره مدار را اجرا می‌کنیم و نتیجه‌ی اندازه‌گیری با پارامترهای به روز رسانی شده را به بهینه‌ساز می‌دهیم تا دوباره بهینه‌سازی را انجام دهد و به مقادیر بهتری برای پارامترها نزدیکتر شود.

۸.۴.۳ رگرسیون کوانتومی

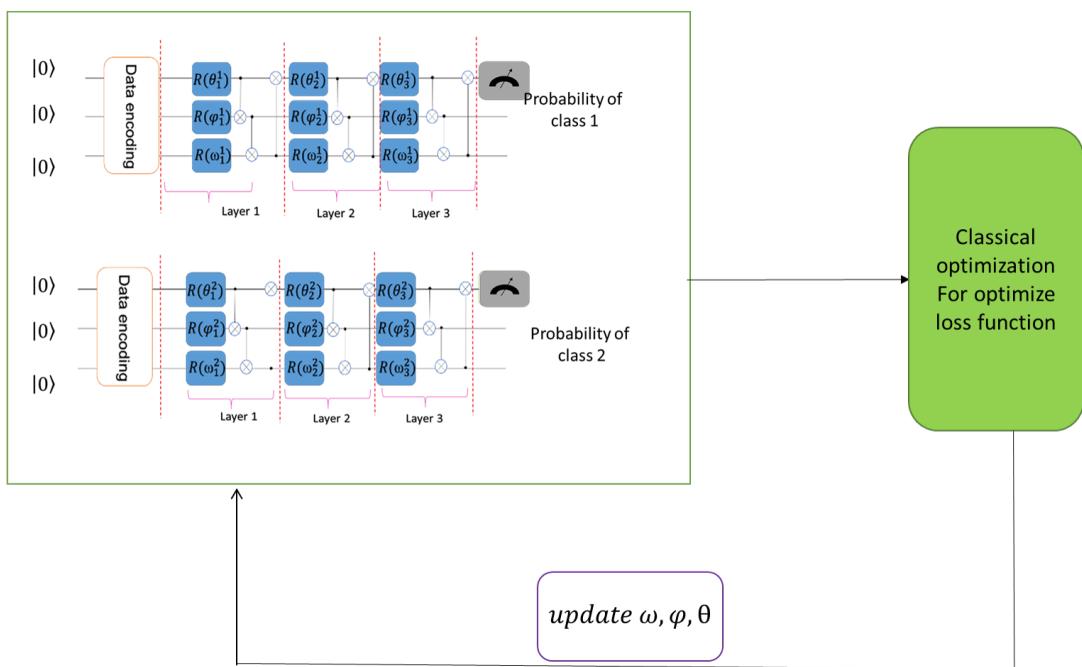
رگرسیون کوانتومی را به دو شکل می‌توان انجام داد

- روش اول: در این روش مدل را با پارامترهایش مشخص می‌کنیم، مثلاً اگر مسئله رگرسیون خطی باشد مدلمان به صورت

⁶⁴Quantum decoherence

⁶⁵Noise

⁶⁶Parity post-processing



شکل ۲۱.۳: پیاده‌سازی یک مدل دسته‌بندی کوانتومی با استفاده از مدار کوانتومی پارامتری شده و یک بهینه‌ساز کلاسیکی برای پیدا کردن مقدار بهینه‌ی پارامترها برای یک مسئله دو کلاسه با

زیر است:

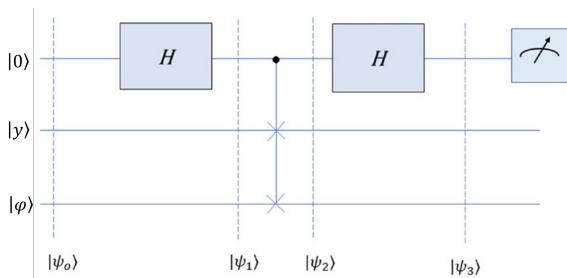
$$|\phi\rangle = |ax + b\rangle \quad (28.3)$$

در این روش باید برچسب صحیح را کدبندی کرده و به عنوان ورودی داد و سپس از طریق الگوریتم تست تعویض^{۶۷} تابع هزینه‌ی زیر را ساخت:

$$C(a, b) = 1 - \langle y | \phi \rangle \quad (29.3)$$

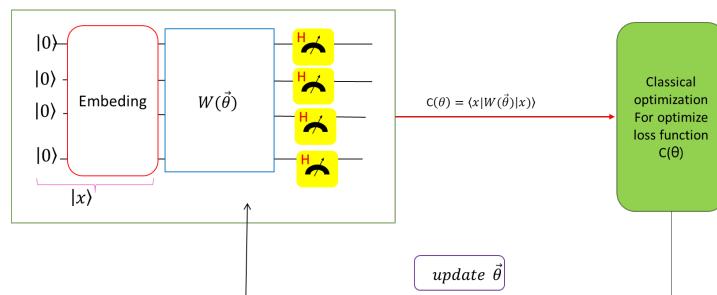
در این تابع هزینه اگر پارامترها باعث تولید خروجی نزدیک به خروجی درست یعنی $\langle y | \phi \rangle$ شده باشند تصویر $\langle \psi | \phi \rangle$ روی $|y\rangle$ به یک نزدیک می‌شود و حاصل عبارت ۲۹.۳ که به عنوان تابع هزینه تعریف کرده‌ایم به صفر نزدیک می‌شود و اگر پارامترها خوب نباشند مقدار تابع هزینه به یک نزدیک می‌شود. بعد از محاسبه‌ی تابع هزینه، که یک تابع بر حسب پارامترهای a, b است، آن را به یک بهینه‌ساز کلاسیکی تحویل می‌دهیم تا مقدار بهینه a, b پیدا شود. مدار مربوط به رگرسیون کوانتومی به این روش به صورت شکل ۲۲.۳ است.

⁶⁷Swap test



شکل ۲۲.۳: پیاده‌سازی یک مدار کوانتومی برای انجام رگرسیون خطی کوانتومی

• روش دوم در رگرسیون این روش پارامترهای مدل به صورت خطی ظاهر نمی‌شود و نمی‌توان مدل مشخصی مثل مدل خطی به داده برآذش کرد، شبیه شبکه‌های عصبی. در این روش ابتدا یک مدار پارامتری شده درست می‌کنیم و بعد از اندازه‌گیری در واقع یکتابع بر حسب یک سر پارامتر خواهیم داشت که توقع داریم پارامترهایش طوری پیدا شود که خروجی مورد نظر ما اندازه‌گیری شود. در واقع در روش قبلی ما مدل را در حالت کوانتومی $\langle \phi | \text{می‌سازیم}$ و به دنبال پارامترهای مدلی مشخص هستیم. مداری که برای پیاده‌سازی روش دوم استفاده می‌شود شبیه شکل ۲۳.۳ خواهد بود:



شکل ۲۳.۳: پیاده‌سازی یک مدار کوانتومی برای انجام رگرسیون خطی کوانتومی

در این فصل مروی داشتیم بروش یادگیری ماشین کلاسیکی و اجزای تشکیل دهنده‌ی آن، سپس دو تا از مهمترین روش‌های یادگیری ماشین کلاسیکی یعنی دسته‌بندی و رگرسیون را مورور کردیم و در انتهای این فصل، مانسته‌ی کوانتومی روش‌های یادگیری ماشین کلاسیکی دسته‌بندی و رگرسیون را به طور مفصل بررسی کردیم و نشان دادیم که چه طور با مدارهای کوانتومی پارامتری شده می‌توان این مدل‌ها را ساخت و بعد با بهینه‌سازهای کلاسیکی آن‌ها را آموزش داد. در فصل آینده قصد داریم ابزاری به نام همولوژی تداوم را معرفی کنیم تا با استفاده از آن به استخراج بردار ویژگی از کلاسی از سری‌های زمانی به نام حرکت بروانی کسری پردازم.

فصل ۴

همولوژی تداوم

۱۰۰.۴ مقدمه

تحلیل داده مبتنی بر توپولوژی^۱ (*TDA*) حوزه‌ای از تجزیه و تحلیل داده‌ها است که از مفاهیم و روش‌های توپولوژی جبری برای استخراج و تجزیه و تحلیل ویژگی‌ها و ساختارهای توپولوژیکی در مجموعه داده‌های پیچیده استفاده می‌کند. از جمله مزایای استفاده از تحلیل داده مبتنی بر توپولوژی می‌توان به موارد زیر اشاره کرد [۱۴]، [۱۵]، [۱۶]، [۱۷] :

- مدیریت داده‌های پیچیده: تحلیل داده مبتنی بر توپولوژی در مدیریت داده‌های پیچیده و بعد بالا بسیار مؤثر است. این ابزار قادر است الگوها، روابط و ساختارهای پیچیده را کشف و تحلیل کند که با استفاده از روش‌های آماری یا یادگیری ماشین کلاسیکی به سختی قابل شناسایی هستند.
- مقاومت در برابر نوافه: در برابر نوافه و داده‌های پرت مقاوم است. این روش بر روی ساختار کلی تمرکز می‌کند و باعث می‌شود نتایج معناداری را حتی در صورت وجود نوافه یا اطلاعات ناقص، ارائه دهد.
- استنباط توپولوژیک: درک توپولوژیکی از داده‌ها که مربوط به شکل و ساختار زیربنایی داده است را گرفته و تحلیل می‌کند. این روش می‌تواند ویژگی‌های اساسی مانند خوش‌ها، سوراخ‌ها، حلقه‌ها، خلاء‌ها و تونل‌ها را شناسایی کند که از طریق روش‌های دیگر به راحتی قابل تشخیص نیستند.

¹Topological Data Analysis(TDA)

- انعطاف‌پذیری: انعطاف زیادی در خصوص انواع داده‌هایی که قادر به تجزیه و تحلیل آنهاست، دارد. این روش قادر است به طور مثال با ابر نقطه‌ها^۲، سری‌های زمانی، تصاویر، گرافها و داده‌های دیگر سروکار داشته باشد. این انعطاف‌پذیری باعث می‌شود تحلیل داده مبتنی بر توپولوژی در زمینه‌های مختلفی مانند زیست‌شناسی، فیزیک، مالی و علوم اجتماعی قابل استفاده باشد.

همولوژی تداوم^۳ یک ابزار قدرتمند در چارچوب تجزیه و تحلیل داده‌های توپولوژیکی است که به کشف و تعیین ویژگی‌های توپولوژیکی پایدار در مجموعه داده‌های پیچیده کمک می‌کند. همولوژی تداوم یک ابزار ریاضی است که در زمینه توپولوژی جبری برای مطالعه شکل و ساختار داده‌ها استفاده می‌شود. این ابزار راهی را فراهم می‌کند تا ویژگی‌های توپولوژیکی، مانند اجزای متصل، حلقه‌ها، حفره‌ها و فضاهای خالی با ابعاد بالاتر، که در طول مقیاسی مشخص پابرجا می‌مانند، اندازه‌گیری و تجزیه و تحلیل شوند [۱۸، ۱۹]. افکار پایه‌ای پشت همولوژی تداوم، ساخت دنباله‌ای از فضاهای توپولوژیکی به نام فیلتراسیون است که تکامل داده‌ها را در سطوح مختلف مجتمع‌های سادگی یا ابر نقاط بررسی و ساختارهای توپولوژیکی قوی و پایدار موجود در داده را نشان می‌دهد. نتیجه تجزیه و تحلیل همولوژی تداوم به عنوان یک نمودار به نام نمودار تداوم^۴ (شکل ۱.۴) یا بارکد تداوم^۵ (شکل ۵.۴) نشان داده می‌شود. در این نمودار، هر ویژگی توپولوژیکی توسط یک نقطه یا بازه نشان داده می‌شود که زمان تولد و مرگ آن را نشان می‌دهد و نشان‌دهنده مقیاسی است که ویژگی در داده ظاهر می‌شود و ناپدید می‌شود. این نمودارهای تداوم می‌توانند برای تحلیل و مقایسه ساختار و روابط در داده استفاده شوند [۲۰، ۲۱].

همولوژی تداوم کاربردهای مختلفی را در حوزه‌های مختلفی از جمله تشخیص شکل، پردازش تصویر و سیگنال، تحلیل شبکه و تجسم داده دارد. این ابزار به عنوان یک ابزار قدرتمند برای بررسی خواص توپولوژیکی داده‌های پیچیده مورد استفاده قرار گرفته می‌گیرد و به پیشرفت درک و تجزیه و تحلیل مجموعه داده‌هایی با بعد بالا و نوونه‌دار کمک می‌کند.

۱.۴ تعاریف پایه در همولوژی تداوم

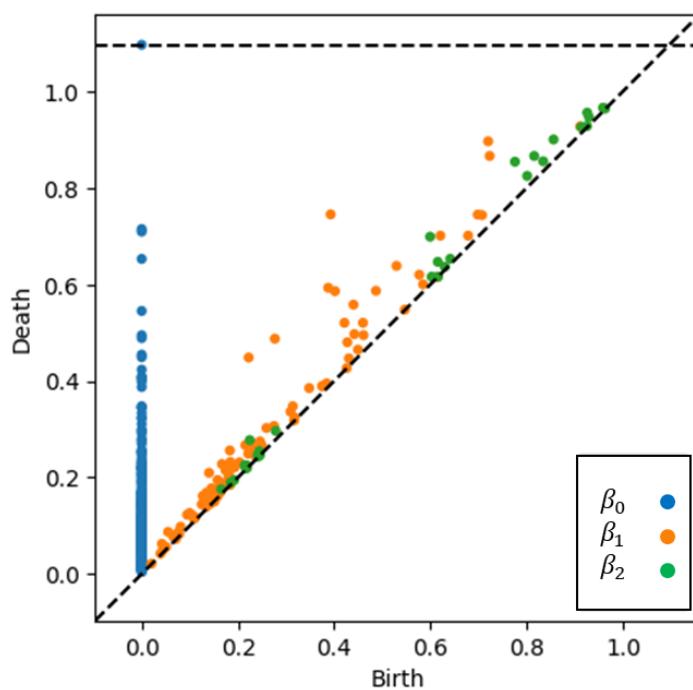
برای فهم بهتر چگونگی استخراج ویژگی‌های توپولوژیکی با استفاده از همولوژی تداوم باید ابتدا با چند تا از تعاریف مهم در این حوزه آشنا شویم.

²point cloud(pc)

³Persistent homology

⁴persistence diagram

⁵persistence barcode



شکل ۱.۴: نمونه از نمودار تداوم

- نگاشت^۶ f از مجموعه دلخواه X به مجموعه دلخواه Y ، قاعده‌ای است که طبق آن برای هر عضو از مجموعه X یک

عضو از مجموعه Y تناظر می‌کنیم:

$$f : X \rightarrow Y \quad \text{or} \quad f : x \rightarrow y = f(x) = \begin{cases} x \in X \\ y \in Y \end{cases} \quad (1.4)$$

مجموعه X را دامنه^۷ نگاشت f و مجموعه Y را برد^۸ نگاشت f می‌گویند.

- تصویر^۹ یک نگاشت، مثل نگاشت f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(X) = \{y \in Y | y = f(x), x \in X\} \quad (2.4)$$

- تصویر وارون^{۱۰}: به زیر مجموعه از مجموعه X که تمام اعضای آن به تنها یک عضو از مجموعه Y نگاشت داده شود

⁶Map

⁷Domain

⁸range

⁹Image

¹⁰Inverse image

تصویر وارون عضو \mathcal{U} گفته می‌شود.

$$f^{-1}(y) = \{x \in X | f(x) = y\} \quad (3.4)$$

- نگاشت یک به یک^{۱۱}: نگاشت f را زمانی یک به یک می‌نامند که هر دو عضو غیر یکسان از مجموعه X به دو غیر یکسان

از Y متناظر شوند.

$$\forall x, x' \in X : \quad if x \neq x' \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq f(x') \quad (4.4)$$

- نگاشت پوشای^{۱۲}: نگاشت f را زمانی پوشای می‌نامند که به ازای هر عضو از X به دو غیر یکسان از Y متناظر شوند.

$$\forall x, x' \in X : \quad if x \neq x' \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq f(x') \quad (5.4)$$

- نگاشت یک به یک پوشای (وارون پذیر)^{۱۳}: نگاشت f را یک به بک پوشای می‌گویند زمانی که هم یک به یک باشد و هم پوشای

- توبولوژی برای هر زیر مجموعه دلخواه X از فضای اقلیدسی $-D$ بعدی، R^D ، هر زیر مجموعه دلخواه از مجموعه توانی

τ یک توبولوژی روی X است اگر :

- مجموعه تهی و خود مجموعه X عضوی از τ باشند

- اجتماع هر تعداد عضو از τ ، عضوی از τ باشد.

- اشتراک هر تعداد عضو از τ ، عضوی از τ باشد.

- فضای توبولوژیکی^{۱۴} برای توبولوژی τ روی مجموعه X ، دوتایی مرتب (X, τ_X) را فضای توبولوژیکی می‌گویند.

۲.۴ همسان ریختی : توبولوژی در مقابل هندسه

برای فضاهای توبولوژیکی (X, τ_X) و (Y, τ_Y) نگاشت $f : X \Rightarrow Y$ را همسان ریختی^{۱۵} (همئومورفیزم) می‌گوییم، اگر

نگاشت f نگاشتی یک به یک و پوشای باشد و در این حالت نگاشت نگاشتی پیوسته است. در صورت

¹¹injective (one-to-one)

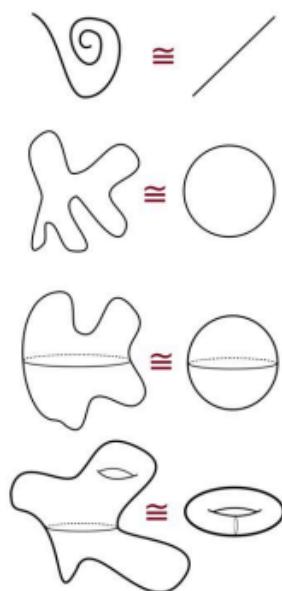
¹²surjective (onto)

¹³bijection

¹⁴topological space

¹⁵homeomorphism

وجود همسان ریختی بین فضاهای توپولوژیکی (X, τ_X) و (Y, τ_Y) ، فضای توپولوژیکی (X, τ_X) نسبت به فضای توپولوژیکی (Y, τ_Y) ، همسان ریخت^{۱۶} (همئومورفیک) خواهد بود و بالعکس. با این تعریف می‌توان گفت که همسان ریختی یک رابطه هم ارزی است. بدین معنا که همسان ریختی، فضاهای توپولوژیکی هم ارز را در یک کلاس هم ارزی قرار می‌دهد و در نهایت، مجموعه همه فضاهای توپولوژیکی ممکن را به کلاس‌های هم ارزی مختلف افزایش می‌کند [۲۲]. لذا می‌توان گفت معیار هم ارزی اشکال (فضاهای توپولوژیکی) در هندسه [اقلیدسی] تجانس و در توپولوژی همسان ریختی می‌باشد [۲۳]. با توجه به تعریف همسان ریختی، هم ارزی [توپولوژیکی] فضاهای مختلف که در یک کلاس هم ارزی قرار دارند، هم ارز بودن از دید توپولوژی است که به طور شهودی به معنای این است که می‌توان این فضاهای را با تغییر شکل پیوسته (کشیدن، فشردن، پیچاندن، خم کردن و...) به یکدیگر تبدیل کرد. کلمه مختلف نیز از دید هندسه است که به معنای تفاوت هندسی (غیرتجانس) است [۲۴]. در حالت کلی می‌توان گفت که فضاهای توپولوژیکی که دارای هندسه یکسان هستند (تجانس)، به لحاظ توپولوژیکی نیز یکسانند (همسان ریخت)، ولی عکس این گزاره صادق نیست. در شکل ۲.۴ نمونه‌هایی از هم ارزی توپولوژیکی را نشان داده شده است.



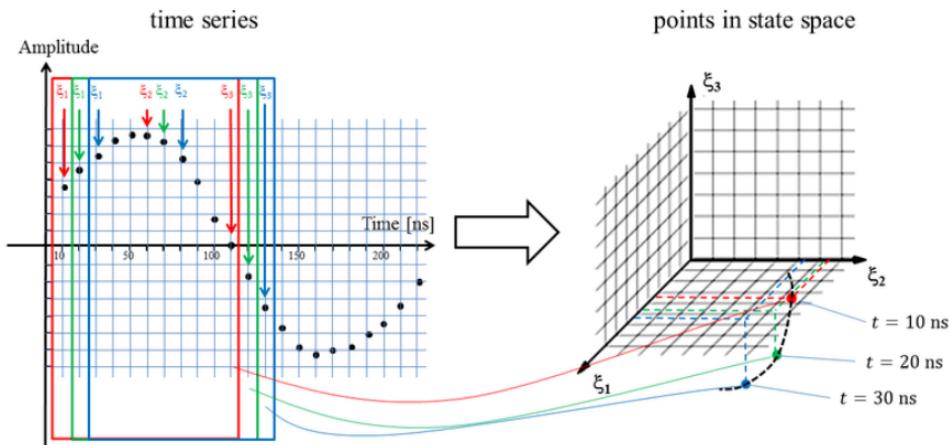
شکل ۲.۴: مثال‌هایی از فضاهای توپولوژیکی همسان ریخت [۲۴]

^{۱۶}homeomorphic

۳.۴ غوطه ورسازی تاخیر زمانی

یک سری زمانی $\vec{x} = (x(t_i))_{i=1}^{\tau}$ را می‌توان با استفاده از پارامتر τ به ابرنقطه D بعدی ($X(\vec{x})$) به شکل ۳.۴ تبدیل کرد.

به این روش غوطه ورسازی تاخیر زمانی می‌گویند [۲۵]^{۱۷} و به پارامتر τ تعداد نقاط در ابر نقطه داده با طول



شکل ۳.۴: نمونه‌ای از غوطه ورسازی تاخیر زمانی را برای $D = 3$ نشان می‌دهد [۲۶]

سری زمانی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$|X(\vec{x})| = |\vec{x}| - (\dim(X(\vec{x})) - 1)\tau \quad (3.4)$$

درواقع در این روش پنجره‌ای با ابعاد τ روی سری زمانی حرکت می‌دهیم و در هر مرحله نقاط موجود در پنجره با طول τ نشان دهنده‌ی مختصات یک نقطه در فضای ابر داده است. این کار را تا انتهای سری زمانی ادامه می‌دهیم تا سری زمانی به طور کامل به فضای ابر نقطه تبدیل انتقال پیدا کند.

۴.۴ ساخت مجتمع‌های سادکی در فضای ابر داده

بعد از تبدیل سری زمانی با روش غوطه ورسازی تاخیر زمانی به ابر داده که تنها یکی از روش‌های موجود برای تبدیل یک سری زمانی به ابر نقطه است، ابر داده را به یک مجتمع سادکی^{۱۸} تبدیل می‌کنیم. مجتمع سادکی یک مفهوم اساسی در تحلیل داده‌های توپولوژیکی است. مجتمع سادکی، یک ساختار هندسی است که اطلاعات اتصال مجموعه‌ای از نقاط را جمع آوری می‌کند. در

¹⁷time-delay embedding (TDE)

¹⁸Simplicial Complex

زمینه تحلیل داده‌های توپولوژیکی، مجتمع سادکی به طور معمول برای نمایش ساختار توپولوژیکی مجموعه‌ای از داده‌ها استفاده

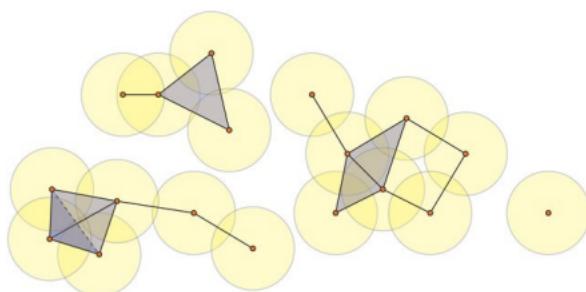
می‌شود. مجتمع سادکی از مجموعه از سادک^{۱۹} ها تشکیل شده است. به عنوان مثال :

- صفر سادک: همان نقاطه در هندسه است.
- یک سادک: پاره خط است.
- دو سادک: مثلث توپر.
- سه سادک: چهاروجهی توپر.

و هر فضای توپولوژیکی D – بعدی را می‌توان با سادک‌های صفر تا D – بعدی پوشاند به شرطی که یا اشتراک سادک‌ها

تلهی باشد و یا یک سادک دیگر باشد.

برای تبدیل یک ابر داده به یک مجتمع سادکی کافی است به مرکز هر نقطه یک کره‌ی D – بعدی درست کنیم و شروع به افزایش شعاع تمام کره‌ها به طور همزمان کنیم و ، هرگاه کره‌های به مرکز دو نقطه به هم برخورد کردن دو نقطه را به هم وصل کنیم مانند شکل زیر: اما همان طور که واضح است هر چه شعاع کره‌ها را زیاد کنیم به سمت اتصال تمام نقاط به هم می‌رویم. پس این کار را



شکل ۴.۴: نمونه‌ای از تبدیل یک ابر داده به مجتمع سادکی [۲۴]

باید تا چه شعاعی ادامه دهیم؟ این موضوعی است که باعث ایجاد مفهومی به اسم همولوژی تداوم^{۲۰} شد.

¹⁹Simplex

²⁰Persistent homology

۵.۴ ناوردای توپولوژیکی

قبل از آن که به مفهوم همولوژی تداوم پردازیم باید به مفهومی به اسم ناوردهای توپولوژی^{۲۱} پردازیم. به کمیت‌هایی از فضای توپولوژیکی که تحت همسان ریختی تغییر نمی‌کنند، ناوردهای توپولوژیکی می‌گویند. از جمله ناوردهای توپولوژیکی می‌توان به گروه‌های بنیادی^{۲۲} (نظریه هموتوبی^{۲۳}) گروه‌های همولوژی^{۲۴} (اعداد بتی^{۲۵}) و مشخصه اویلر اشاره کرد که در ادامه فقط به بررسی عدد بتی^{۲۶} خواهیم پرداخت.

عدد بتی

عدد بتی k ام یا عدد بتی بُعد k . برای مجتمع سادکی (X, ψ) ، عبارت است از بعد گروه همولوژی K -بعدی:

$$\beta_K(\Phi(x)) = \dim(H_K(\psi(x))) \quad (7.4)$$

به طور شهودی، $\beta_K(\Phi(x))$ نشان‌دهنده‌ی تعداد حفره‌های k -بعدی موجود در مجتمع سادکی (X, ψ) است. پس β_0 تعداد نقاط در یک مجتمع سادکی، β_1 تعداد حفره‌ها با مرز یک بعدی، β_2 تعداد حفره‌ها با مرز دو بعدی و به طور کلی β_n تعداد حفره‌ها با مرز n بعدی در یک مجتمع سادکی را نشان می‌دهد.

۶.۴ بارکد تداوم

بارکد تداوم^{۲۷} برای تداوم k -همولوژی که به k -بارکد تداوم معروف است، نمایشی از تداوم k -همولوژی در صفحه‌ی R^2 است که در آن محور افقی آستانه‌ی فیلتراسیون $[\theta_0, \theta_n]$ به ترتیب در آن مهم است و محور عمودی کلاس‌های همولوژی از گروه‌های k -همولوژی که ترتیب در آن‌ها مهم نیست را نشان می‌دهد. هر کلاس همولوژی در k -بارکد تداوم به صورت پاره خط افقی نشان داد شده است. نمونه‌ای از بارکد تداوم در شکل زیر نشان داده شده است:

²¹topological invariant

²²fundamental groups

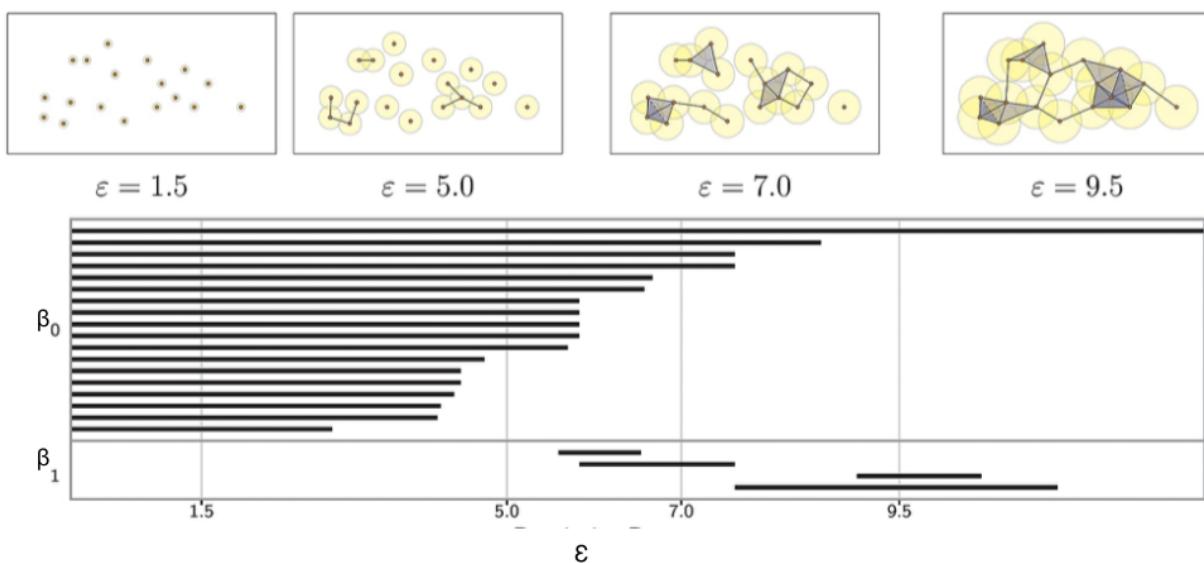
²³homotopy theory

²⁴homotopy theory

²⁵Betti numbers

²⁶Betti number

²⁷persistence barcode (PB)



شکل ۵.۴: مجموعه نقاط متناهی در R^2 برای ($\epsilon = 0$) و مجموعه‌ای از فضاهای تو در تو که با افزایش ϵ ساخته شده است و بارکد حاصل از

این فضاهای تو در تو. خط پیوسته تعداد مولفه‌های همبند و خط گسسته تعداد حفره‌ها را نشان می‌دهد. [۲۷]

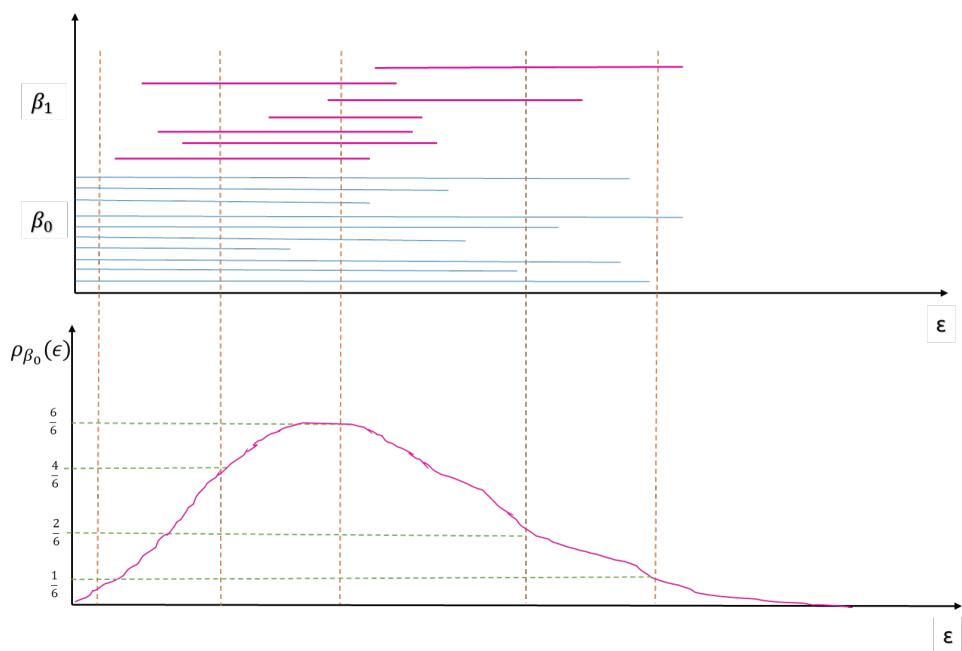
۷.۴ منحنی بتی

منحنی بتی^{۲۸} از روی بارکد تداوم به دست می‌آید و یک نمایش بصری از توپولوژی در حال تغییر داده‌ها با تغییر مقیاس ارائه می‌دهد. در واقع منحنی بتی نشان‌دهنده تغییر تعداد اعداد بتی یعنی تعداد نقطه‌ها یا حفره‌هایی با مرز یک بعدی یا دو بعدی و غیره بر حسب تغییر پارامتر مجاورت یا همان شعاع کره‌ها است. معمولاً هر منحنی بتی تغییرات یک عدد بتی خاص را برای داده نشان می‌دهد، برای همین مثلاً اگر تغییرات تعداد بتی صفر بر حسب پارامتر مجاورت را نمایش دهد به آن منحنی بتی صفر می‌گوییم، مانند شکل ۶.۴. اگر همین کار را برای جفت‌های تداوم بتی یک انجام دهیم، شکل حاصل منحنی بتی یک خواهد شد، مثل شکل

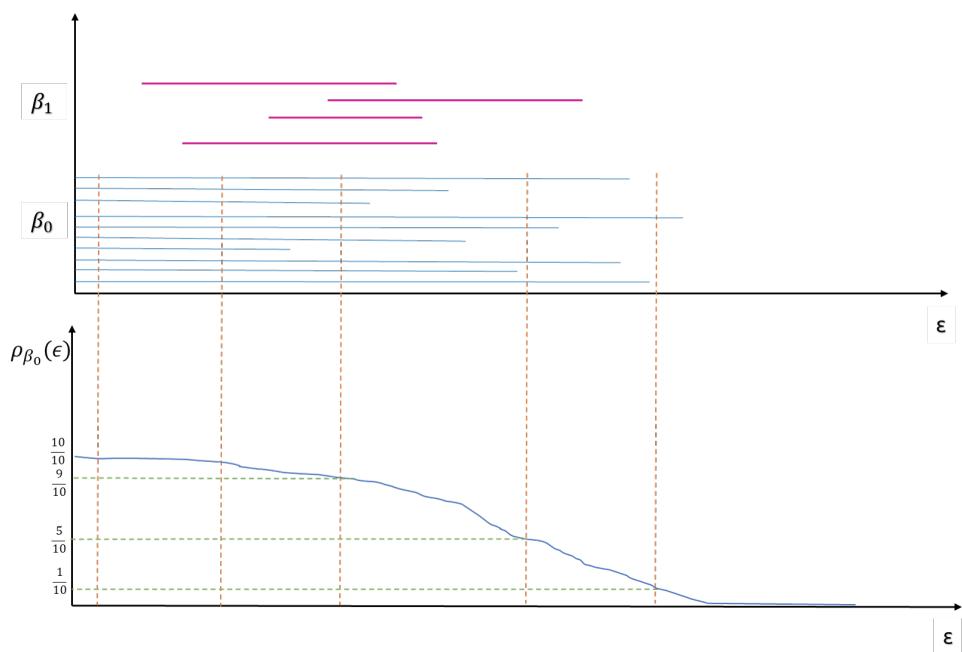
.۷.۴

در فصل بعد ابتدا با سری‌های زمانی حرکت بروانی کسری آشنا می‌شویم و سپس با استفاده از نمودارهای تداوم و منحنی بتی که در این فصل یادگرفته‌ایم از روی سری‌های زمانی ویژگی‌هایی را استخراج می‌کنیم تا به عنوان بردار ویژگی به مدل کلاسیندی کوانتوسی بدھیم و آن را اموزش دهیم تا کلاس نمای هارست سری‌های زمانی حرکت بروانی کسری را تشخیص دهد.

²⁸Betti curve



شکل ۶.۴: شکل منحنی بتی صفر که از روی جفت‌های تداوم مربوط به بتی صفر در نمودار بارکد تداوم رسم می‌شود



شکل ۷.۴: شکل منحنی بتی یک که از روی جفت‌های تداوم مربوط به بتی یک در نمودار بارکد تداوم رسم می‌شود

فصل ۵

طبقه بندی سری‌های زمانی کلاس حرکت بروانی کسری

۱.۵ مقدمه

یک کلاس شناخته شده از سری‌های زمانی خود متتشابه غیرمانا، حرکت بروانی کسری^۱ (fBm) است که برای مدل‌سازی فرآیندهای تصادفی حاضر در طبیعت در نظر گرفته می‌شوند. یکی از مشخصه‌های این مدل سری زمانی این است که با یک کمیت معروف به نام نمای هارست^۲ (H) ویژگی‌هایشان تعیین می‌شود. روش‌های کلاسیکی پردازش داده به خوبی در تعیین نمای هارست یک سری زمانی تصادفی کار می‌کنند. با این حال، چون اندازه محدود داده و همچنین وجود روندها و نوفه‌ها به شدت در تعیین مقدار دقیق نمای هارست اثرگذار هستند [۲۸] از روش‌های یادگیری ماشین کلاسیک برای تعیین نمای هارست یک سری زمانی تصادفی استفاده شد که نتایج نشان می‌دهد که اگر این مدل‌ها به اندازه کافی آموزش داده شود، می‌توانند نمای هارست هر داده‌ی تصادفی را حداقل پانزده برابر سریع‌تر از روش‌های پردازش داده استاندارد پیش‌بینی کنند [۲۹]. با وجود انگیزه‌هایی نظیر اندازه داده‌ها، وجود نوفه‌ها و روندها و از همه مهمتر بی نظمی در داده‌ها باعث شده است علاوه بر روش‌هایی مانند تجزیه و تحلیل میانگین متحرک بدون روند^۳ (DMA) [۳۰] و تجزیه و تحلیل نوسانات بدون روند^۴ (DFA) [۳۱]، از ابزار تحلیل توپولوژیکی داده (TDA) برای تعیین نمای هارست fBm استفاده شود. با این انگیزه‌ها در پی این هستیم تا با تلفیق الگوریتم‌های یادگیری ماشین کوانتمی و ابزارهای TDA به بررسی مجدد تعیین نمای هارست سری‌های زمانی fBm پردازیم. در فصل‌های قبل الگوریتم‌های

¹Fractional Brownian Motion(fBm)

²Hurst exponent

³Detrended Moving Average Analysis

⁴Detrended Fluctuation Analysis

کوانتومی و بعد یادگیری ماشین کوانتومی را معرفی کردیم. در این فصل قصد دارم به دسته بندی سری های زمانی حرکت بروانی کسری بر اساس نمای هارست با استفاده از مدل یادگیری ماشین کوانتومی پردازیم. همان طور که قبل از گفتیم اولین مرحله برای شروع آموزش مدل یادگیری ماشین کوانتومی و کلاسیکی ساخت بردار ویژگی از روی داده است. ولی پیش از آن لازم است با داده ها که سری های زمانی حرکت بروانی کسری است، بیشتر آشنا شویم.

۲.۵ سری های زمانی حرکت بروانی کسری

برای شناخت سری های زمانی حرکت بروانی کسری و دلیل انتخاب این سری های زمانی در این پایان نامه، باید ابتدا با چند

مفهوم آشنا شویم:

- سری زمانی^۴: یک آرایه یک بعدی که مقادیر یک مشاهده پذیر را بر اساس متغیرهای پویا مثل زمان نمایش می‌هد.
- قانون مقیاس^۵: یک تابع توانی که رفتار یک یک کمیت فیزیکی را توصیف می‌کند.
- سیستم های برخالی^۶ و بس برخالی^۷: سیستم های برخالی به سیستم هایی گفته می‌شوند که با یک تابع توانی با یک توان غیر صحیح مشخص، در تمام مقیاس ها قابل توصیف هستند. و سیستم های بس برخالی سیستم هایی هستند که باز هم با توابع توانی قابل توصیف هستند ولی در هر مقیاس این توان، عددی متفاوت به خود می‌گیرد و ثابت نیست.
- نامانایی^۸: تعریف ضعیف آن به معنای تغییر میانگین و انحراف از معیار سری های زمانی در طول زمان است و از طرفی تعریف قوی مانایی^۹ مستلزم ثابت بودن تمام مومان های^{۱۰} سری زمانی در تمام لحظات است. معمولاً اثرات خارجی باعث نامانا شدن سری های زمانی می‌شوند.

در دنیای علم برای مطالعه های پدیده های مختلف آن ها مدل می کنند، که هدف از این مدل کردن بررسی تحول پدیده ها در طبیعت و احتمالاً ردیابی موقعیت آینده ای آن ها از نقطه نظر ریاضیات است. برای این مدل کردن ها باید ابتدا از پدیده هی مورد نظر اطلاعات

⁵Timeseries

⁶Scaling law

⁷Fractal

⁸multifractal

⁹stationary

¹⁰stationary

¹¹Moment

جمع آوری کرد، که این داده‌ها می‌توانند انواع مختلفی داشته باشند که یکی از این انواع سری‌های زمانی^{۱۲} هستند که همان طور که قبل تعریف کردیم، سری زمانی آرایه‌ی یک بعدی است که مقادیر یک مشاهده‌پذیر بر اساس متغیری پویا مدل زمان را نمایش می‌دهد. اگر بتوان یک سری زمانی را به صورت معادله‌ی ۱.۵ مدل کرد، در آن صورت به H نمای هارست^{۱۳} گفته می‌شود.

$$y(a \times t) \triangleq a^H y(t) \quad (1.5)$$

تشخیص خودمتشابهی در سری‌های زمانی و تشخیص اندازه‌ی نمای هارست آن‌ها از این نظر ارزشمند است که اگر نمای هارست یک سری زمانی را تشخیص دهیم می‌توانیم: رفتار سری‌های زمانی را توصیف کنیم. شاخص هارست اطلاعات مفیدی درباره رفتار و خصوصیات یک سری زمانی ارائه می‌دهد. به کمک این شاخص، می‌توان فهمید که آیا سری دارای حافظه بلندمدت، پیوستگی یا تصادفی بوده و این توصیف برای درک دینامیک داده‌ها ضروری است. همچنین با تشخیص کلاس جهانی آن سری زمانی می‌توان به تعداد دلخواه انسامبل از آن سری زمانی ساخت. یک کلاس شناخته‌شده از سری‌های زمانی خودمتشابه غیرمانا، حرکت بروانی کسری است که برای مدل‌سازی فرآیندهای تصادفی حاضر در طبیعت در نظرگرفته می‌شوند. برای تولید داده‌هایی با ویژگی حرکت بروانی کسری از نوع سری زمانی با نمای هارست مشخص، از انتگرال کسری زیر استفاده می‌شود:

$$x(H, t) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_0^t (t - s)^{H - \frac{1}{2}} dx(S) \quad (2.5)$$

که در رابطه‌ی ۲.۵(.) تابع گاما است و $dx(s) = x(s + dx) - x(s)$ است. در شکل ۱.۵ چند نمونه از سری‌های زمانی fBm با نمای هارست‌های مختلف را نمایش داده‌ایم تا تاثیر نمای هارست را ببینیم و همان‌طور که می‌بینید با افزایش نمای هارست سری زمانی نرم‌تر می‌شود. داده‌هایی که من در این پایان نامه استفاده کرده ام سری‌های زمانی حرکت بروانی کسری با طول ۱۰۳۳ و با نماهای هارست $H \in [0, 1]$, $\Delta H = 0.1$ هستند.

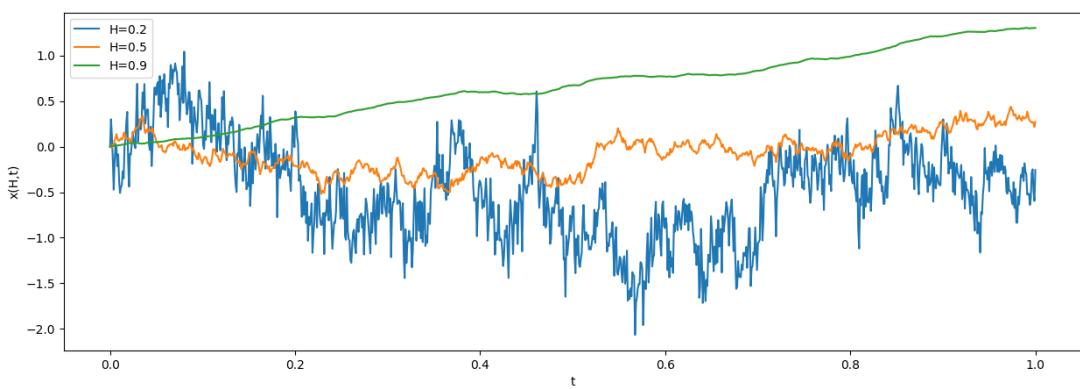
۳.۵ ساخت بردار ویژگی

در کل 200 سری زمانی fBm با طول 1033 با ده کلاس نمای هارست به صورت $H \in [0, 1]$, $\Delta H = 0.1$ ساخته‌ایم.

اگر بخواهیم یک بار دیگر روند انتخاب داده و استخراج بردار ویژگی را مرور کنیم باید بگوییم که ما ابتدا به تعداد ده کلاس نمای

¹²Time series

¹³Hurst exponent

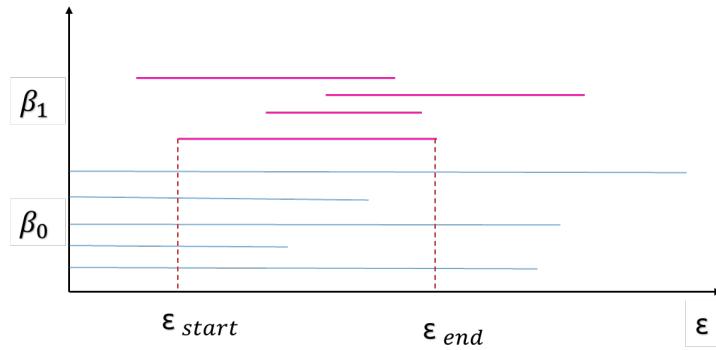


شکل ۱.۵: سری‌های زمانی حرکت بروانی کسری با نماهای هارست مختلف

هارست به صورت $H \in [0, 1]$, $\Delta H = 0.1$ مشخص کردیم و برای هر کلاس نمای هارست به تعداد بیست سری زمانی حرکت بروانی کسری تولید کردیم. سپس هر یک از سری‌های زمانی تولید شده با نمای هارست مشخص را با روش غوطه ور سازی تاخیر زمانی با $\tau = 1$ به فضای ابر داده‌ی ده بعدی ($D = 10$) می‌بریم سپس با فیلتراسیون بارکد تداوم ابر داده را برای هر سری زمانی رسم می‌کنیم و از روی بارکد تداوم، منحنی بتی می‌سازیم و سپس از این دو نمودار ویژگی‌های زیر را می‌خوانیم:

- ویژگی اول: تعداد جفت‌های تداوم^{۱۴} (که در شکل ۲.۵ به هر یک از پاره خط‌ها گفته می‌شود) مربوط به کلاس همولوژی

که آن را با PPs_{β_1} نشان می‌دهیم.



شکل ۲.۵: نمونه‌ای از بارکد تداوم که هر یک از پاره خط‌ها را جفت تداوم (PP) می‌نامند که یک نقطه‌ی شروع (ϵ_{start}) و پایان (ϵ_{end}) دارد که در شکل نشان داده شده است. همچنین ϵ شعاع همان کره‌ها در فیلتراسیون است که به آن پارامتر مجاورت هم می‌گویند.

- ویژگی دوم و سوم: ویژگی دوم و سوم آنتروپی مربوط به جفت‌های تداوم مربوط به کلاس همولوژی β_0 و β_1 است که به ترتیب آن‌ها را با S_{β_0} و S_{β_1} نشان می‌دهیم. رابطه‌ی مربوط به آنتروپی جفت‌های تداوم برای هر گروه همولوژی مشخص

¹⁴Persistent pairs(PPs)

به صورت زیر است :

$$S_{\beta_d} = -\sum_{i=1}^{PPs_{\beta_d}} \frac{L_i^{\beta_d}}{\sum_{i=1}^{PPs_{\beta_d}} L_i^{\beta_d}} \log \left(\frac{L_i^{\beta_d}}{\sum_{i=1}^{PPs_{\beta_d}} L_i^{\beta_d}} \right) \quad (۳.۵)$$

$$L_i^{\beta_d} = \epsilon_{end}^{PPs_{\beta_d}^i} - \epsilon_{start}^{PPs_{\beta_d}^i} \quad (۴.۵)$$

• ویژگی چهارم و پنجم و ششم به ترتیب شعاع پدیدارشدن ($\epsilon_{maximum}$)، و شعاع ناپدید شدن

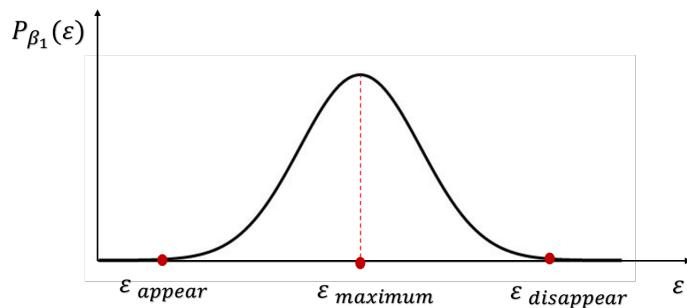
(ϵ_{appear}) در منحنی بتی هستند که به عنوان مثال در شکل ۳.۵ آن‌ها را نمایش داده‌ایم و از روابط زیر قابل محاسبه

هستند:

$$\epsilon_{didappear} = \min(\epsilon \mid \int_0^\epsilon \beta_d(\epsilon') d\epsilon' = 0) \quad (۵.۵)$$

$$\epsilon_{appear} = \max(\epsilon \mid \int_0^\epsilon [\beta_d(\epsilon') - c_d] d\epsilon' = 0) \quad , c_{d=0} = 1, c_{d>0} = 0 \quad (۶.۵)$$

$$\epsilon_{maximum} = \min(\epsilon \mid \frac{\partial \beta_d(\epsilon')}{\partial \epsilon'} \Big|_{\epsilon'=\epsilon} = 0, \frac{\partial^2 \beta_d(\epsilon')}{\partial \epsilon'^2} \Big|_{\epsilon'=\epsilon} \leqslant 0) \quad (۷.۵)$$



شکل ۳.۵: نمایش $\epsilon_{appear}, \epsilon_{maximum}, \epsilon_{didappear}$ در منحنی بتی

• ویژگی هفتم سطح زیر نمودار منحنی بتی یک است که آن را با A_{β_1} نشان می‌دهیم.

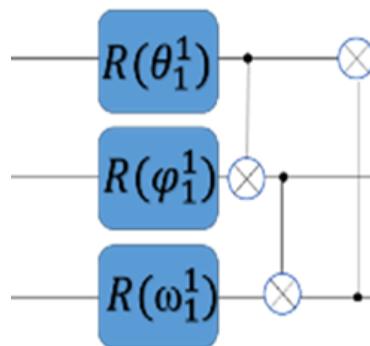
۴.۵ ساخت مدل دسته‌بندی کوانتومی و نتایج

حال که بردار ویژگی را ساختیم وقت آن رسیده است که بردارهای ویژگی را با استفاده از روش کدبندی دامنه، کدبندی کنیم.

از آن جایی که تعداد ویژگی‌های بردار ویژگی هفت عدد است، تعداد بیت‌های کوانتومی اولیه مدار سه تا خواهد بود. سپس برای

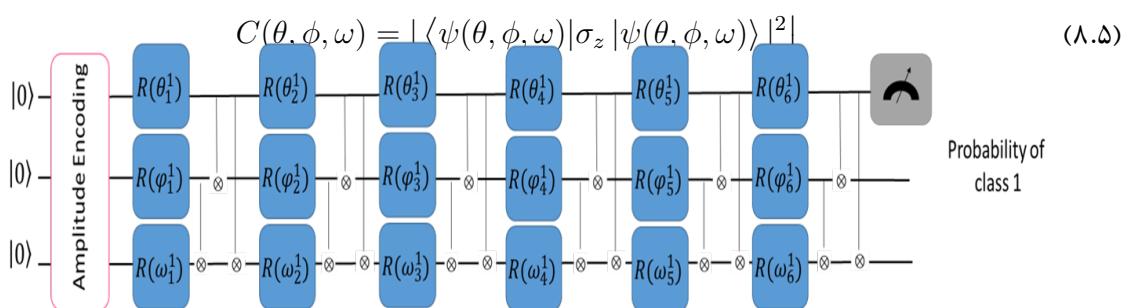
ساخت مدل، مدار پارامتری شده که از یک سری واحد به نام لایه تشکیل شده است، می‌سازیم. هر یک از این لایه‌ها شامل سه دروازه‌ی چرخش که زاویه‌ی چرخش در هر یک از این دروازه‌ها همان پارامترهای قابل آموزش ما هستند و سه دروازه‌ی وارونگر کنترل شده بین بیت‌های کوانتومی $(1, 2), (2, 3), (1, 3)$ هستند که در شکل ۴.۵ مدار نشان دهنده‌ی هر لایه را نشان داده‌ایم.

شکل ۴.۵ تشکیل شده است.



شکل ۴.۵: نمایش یک لایه که در مدار دسته‌بندی کوانتومی نمای هارست سری‌های زمانی fBm به کارخواهد رفت.

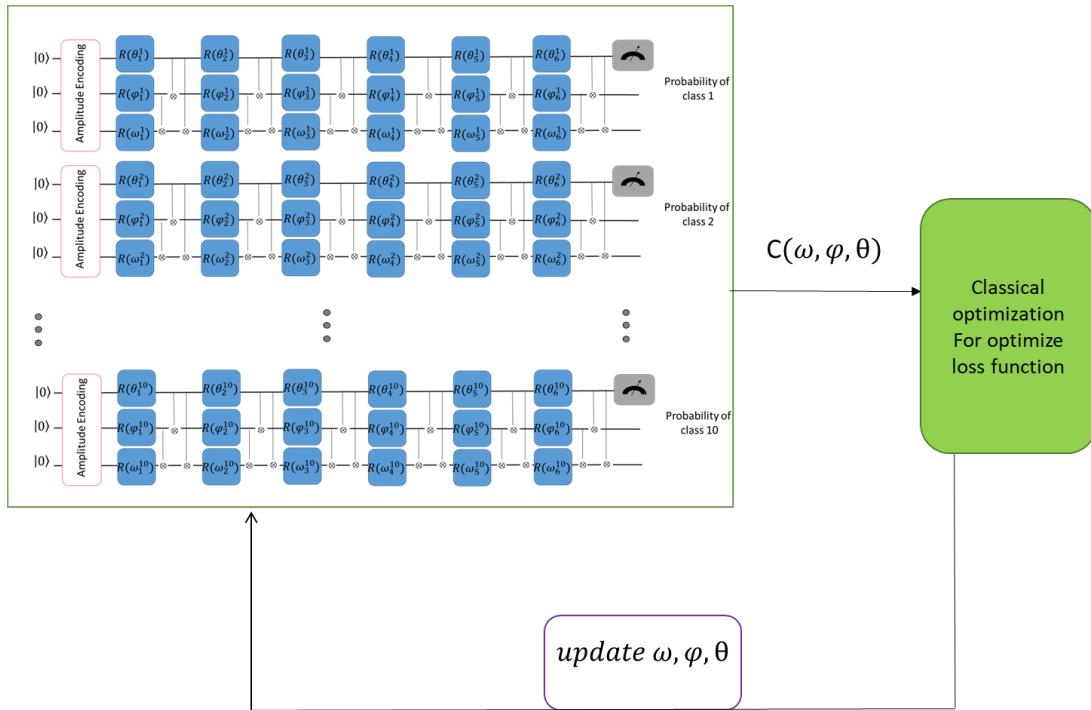
مدار پارامتری شده‌ی مورد استفاده در این مسئله‌ی دسته‌بندی از شش لایه به شکل ۵.۵ ساخته شده است که در قسمت اندازه‌گیری هم مقدار چشم داشتی عملگر پائولی σ_z را حساب می‌کنیم و دلیل این انتخاب این است که چون مقدار چشم داشتی این عملگر همیشه عددی بین ۱-۰ است، مربع مقدار چشم داشتی عملگر پائولی که به صورت معادله‌ی ۸.۵ محاسبه می‌شود همیشه دارای مقداری بین صفر و یک است و می‌تواند مفهوم احتمال قرار گیری در آن کلاس را برای ما تداعی کند بنابراین تابع رابطه‌ی ۸.۵ را عنوان خروجی مدار و در واقع تابع هزینه مدار در نظر می‌گیریم و تحويل یک بهینه ساز کلاسیکی می‌دهیم.



شکل ۵.۵: مدار پارامتری شده برای حل مسئله تشخیص نمای هارست سری‌زمانی‌های fBm برای تشخیص یک کلاس

سپس کل شکل ۵.۵ را به تعداد کلاس‌های نمای هارستمان که تعداد آن‌ها ده تا است تکرار می‌کنیم. شکل نهایی مدلمان

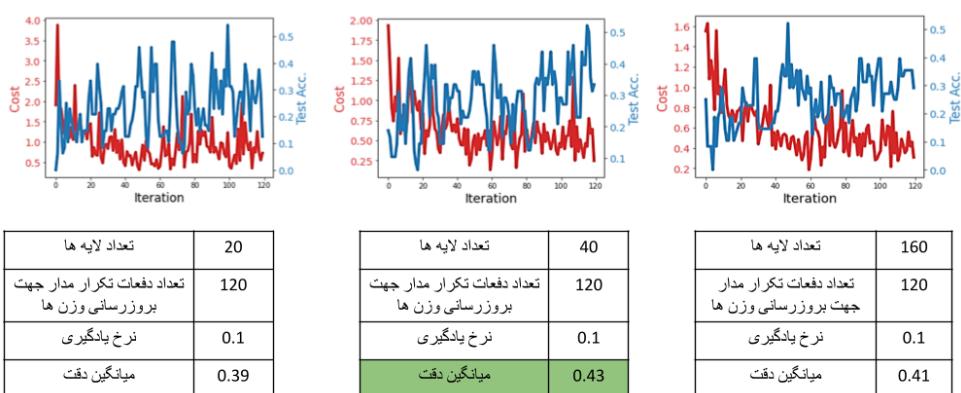
مانند شکل ۶.۵ خواهد بود:



شکل ۶.۵: مدل کامل دسته‌بندی کوانتومی پارامتری شده برای حل مسئله تشخیص نمای هارست سری زمانی‌های fBm.

همانطور که واضح است مدل دارای تعدادی پارامتر آزاد^{۱۵} از جمله تعداد دفعات تکرار آموزش مدل توسط تمام داده‌ها^{۱۶}،

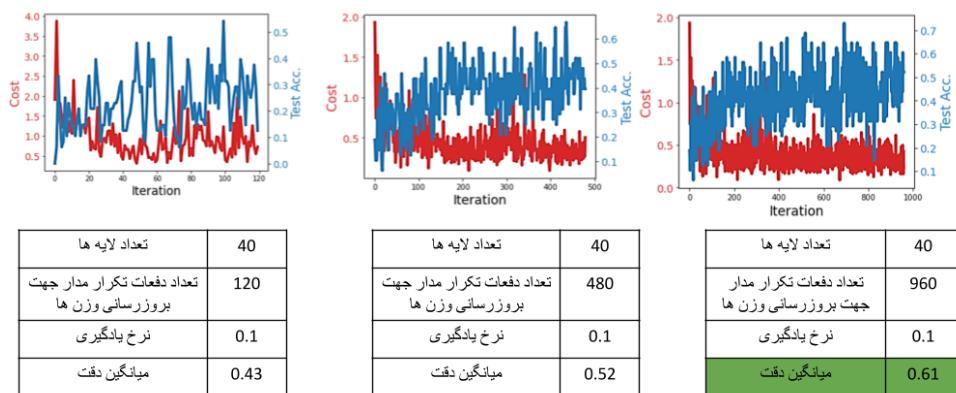
تعداد لایه‌های مدل و نرخ یادگیری است که بهترین مقادیر آن به صورت زیر بوده است:



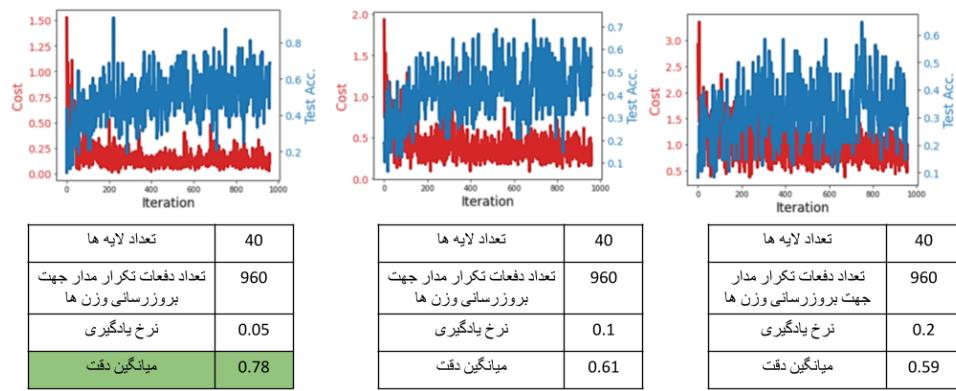
شکل ۷.۵: بررسی تغییرات دقت مدل دسته‌بندی سری زمانی حرکت بروانی کسری برای تغییر تعداد لایه‌های مدل

¹⁵Hyper parameter

¹⁶Iteration



شکل ۸.۵: بررسی تغییرات دقت مدل دسته‌بندی سری زمانی حرکت بروانی کسری برای پارامتر ازad تعداد دفعات تکرار اجرای مدل و بهینه‌سازی پارامترهای مدار



شکل ۹.۵: بررسی تغییرات دقت مدل دسته‌بندی سری زمانی حرکت بروانی کسری برای پارامتر ازad نرخ یادگیری در بهینه‌سازی

ما داده‌هایمان را به دو بخش داده آموزشی و داده تستی تقسیم کرده‌ایم و از بخش آموزشی برای آموزش مدل دسته‌بندی کوانتومیمان استفاده کردیم و در هر مرحله از آموزش با استفاده از داده‌های تست از مدلمان تست گرفته‌ایم و نتایج را با خطوط آبی نمایش داده‌ایم که همان طور که واضح است به مرور میزان دقت مدل افزایش یافته است. در هر یک از مراحل آموزش و تست مقدار تابع هزینه را هم ذخیره کرده‌ایم که با خط قرمز آن را نشان داده‌ایم که همان طور که انتظار می‌رفت با آموزش مدل به مرور مقدارش به صفر می‌لیم می‌کند. در هر یک از شکل‌های ۹.۵، ۸.۵، ۷.۵ یکی از پارامترهای آزاد را تغییر داده‌ایم و بقیه را ثابت نگهداشت‌هایم تا مقدار بهتر را برای آن پارامتر آزاد پیدا کنیم و بعد از پیدا کردن مقدار بهتر برای هر پارامتر آزاد برای چک کردن پارامتر آزاد بعدی بهترین مقدار برای پارامترهای آزاد قبلی را قرار داده‌ایم.

۵.۵ نتیجه گیری

نتایج نشان می دهد که مدل های یادگیری کوانتومی قابلیت یادگیری را به خوبی دارند و می توانند با دقت حدود ۸۷ درصد کلاس نمای هارست سری های زمانی fBm را تشخیص دهنند. اما سرعت یادگیری آنها چون از رایانه های کوانتومی استفاده نشده بسیار پایین تر از مشابه کلاسیکی آنها است. با ساخت رایانه های کوانتومی در آینده و اجرای مدل های دسته بندی کوانتومی ای از این قبیل، می توان انتظار دقت و سرعت بسیار بالاتری نسبت به مدل های مشابه کلاسیکی داشت چون الگوریتم های یادگیری ماشین کوانتومی به دلیل قابلیت پردازش و استخراج الگوهای پیچیده از مجموعه داده های بزرگ، باعث بهبودی در تحلیل داده ها می شوند و به احتمال زیاد نکات و همبستگی هایی را کشف می کنند که الگوریتم های کلاسیک ممکن است قادر به پیدا کردن آنها نباشند. همچنین با ساخت رایانه های کوانتومی و پیاده سازی بهینه سازهای کوانتومی به جای بهینه سازهای کلاسیکی می توان انتظار داشت سرعت آموخت این مدل های دسته بندی کوانتومی بسیار بیشتر از مشابه کلاسیکی شان شوند.

فصل ۶

جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این فصل با مرور ایده‌ها و نتایج به دست آمده، کارهای انجام شده در این پژوهش را جمع‌بندی می‌کنیم و در آخر هم به بررسی گام‌های پیش رو و ایده‌هایی که برای ادامه‌ی این پژوهش می‌توان به کار بست بحث می‌کنیم.

۱.۶ جمع‌بندی

در این پایان نامه به طور کلی هدف کاربست یادگیری ماشین کوانتومی برای دسته‌بندی کلاس‌های نمای هارتست سری‌های زمانی حرکت بروانی کسری بود. برای این کار ابتدا در فصل یک با مفاهیم پایه‌ای مثل بیت کوانتومی، دروازه‌های کوانتومی، نحوه‌ی اعمال کردن این دروازه روی بیت‌های کوانتومی و سپس ساخت مدارهای کوانتومی آشنا شدیم. سپس در فصل دوم به سراغ فهم تعدادی از الگوریتم‌های کوانتومی مثل الگوریتم دویچ، دویچ-جوزا، پس‌زدن فاز و الگوریتم گرور رفتیم و نشان دادیم هر یک چگونه یک مسئله را سریع‌تر از الگوریتم‌های کلاسیکی حل می‌کنند. در فصل سوم ابتدا یادگیری ماشین کلاسیکی را بررسی کردیم و گفتیم از چه بخش‌هایی تشکیل شده است و دو مدل معروف دسته‌بندی و رگرسیون را بررسی کردیم. در ادامه‌ی این فصل مانسته کوانتومی هر یک از بخش‌های یادگیری ماشین کلاسیکی را گفتیم که باعث خلق حوزه‌ای به نام یادگیری ماشین کوانتومی شده است. در واقع یادگیری ماشین کوانتومی یک زمینه‌ی بین رشته‌ای است که اصول محاسبات کوانتومی و یادگیری ماشین را ترکیب می‌کند. هدف آن کشف پتانسیل سیستم‌ها و الگوریتم‌های کوانتومی برای انجام وظایف یادگیری ماشین است. اگرچه یادگیری ماشین کوانتومی برای برخی برنامه‌ها و کاربردها وعده‌هایی دارد، اما همچنین مزایا و معایب خاصی نیز دارد. در ادامه به برخی از مزایا و معایب آن اشاره می‌کنیم.

مزایا یادگیری ماشینی کوانتومی [۳۲]، [۳۳]، [۳۴]:

- قابلیت افزایش سرعت: کامپیوترهای کوانتومی دارای پتانسیلی برای حل برخی از مسائل محاسباتی به صورت توانی سریع تر در مقایسه با کامپیوترهای کلاسیکی هستند. این افزایش سرعت می‌تواند در الگوریتم‌های یادگیری ماشین کوانتومی مورد استفاده قرار گیرد و وظایفی مانند بهینه‌سازی، خوشبندی داده‌ها و تشخیص الگو را سریع‌تر از مدل‌های کلاسیکی انجام دهد.
 - تحلیل بهبودیافته داده‌ها: الگوریتم‌های یادگیری ماشین کوانتومی به دلیل قابلیت پردازش و استخراج الگوهای پیچیده از مجموعه داده‌های بزرگ، بهبودی در تحلیل داده‌ها ارائه می‌دهند. این الگوریتم‌ها به احتمال زیاد نکات و همبستگی‌هایی را کشف می‌کنند که الگوریتم‌های کلاسیک ممکن است نادیده بگیرند.
 - نمایش داده‌های کوانتومی: سیستم‌های کوانتومی قادرند داده‌ها را با استفاده از حالت کوانتومی نمایش و پردازش کنند. این قابلیت می‌تواند نمایش‌های بهینه و فشرده‌تر و کم حجم‌تر را نسبت به روش‌های کلاسیک فراهم کند. این موضوع می‌تواند بهبودهایی در فشرده‌سازی داده یا رمزگاری ویژگی‌ها ایجاد کند.
 - شبیه‌سازی کوانتومی: یادگیری ماشینی کوانتومی می‌تواند برای شبیه‌سازی سیستم‌های کوانتومی با دقت و کارآیی بیشتری نسبت به شبیه‌سازی‌های کلاسیک مورد استفاده قرار گیرد. این امر می‌تواند برای زمینه‌هایی مانند علوم مواد، کشف دارو و مسائل بهینه‌سازی با راه حل‌های الهام‌گرفته از کوانتومی مفید باشد.
- معایب یادگیری ماشینی کوانتومی [۱]، [۳۵]، [۳۶]:
- محدودیت‌های سخت افزاری: ساخت و نگهداری کامپیوترهای کوانتومی در حال حاضر چالش‌هایی دارد. کامپیوترهای کوانتومی به نوفه، خطاهای ناهمدوسی کوانتومی حساس هستند که می‌تواند تأثیراتی بر روی صحت و دقت الگوریتم‌های یادگیری ماشینی کوانتومی داشته باشد برای همین لازم است تکنولوژی بهبود یابد و پایدارتر شود.
 - محدودیت قابلیت استفاده از مزیت کوانتومی: همه وظایف یادگیری ماشینی از الگوریتم‌های کوانتومی بهره‌برداری نمی‌کنند و تشخیص مسائلی که می‌توانند از الگوریتم‌های کوانتومی بهره‌برداری کنند، یک حوزه پژوهش فعال است.
 - عدم استانداردسازی: یادگیری ماشینی کوانتومی یک حوزه جدید است و کمبود ابزارها، چارچوب‌ها و کتابخانه‌های

استاندارد سازی وجود دارد. این باعث می‌شود که برای پژوهشگران و افراد عملی دشوار باشد الگوریتم‌های یادگیری ماشین کوانتومی را به صورت پایدار و قابل تکرار توسعه، مقایسه و بازتولید کنند.

- نیاز به تخصص: یادگیری ماشینی کوانتومی نیاز به تخصص در زمینه‌های محاسبات کوانتومی و یادگیری ماشین دارد که تعداد افرادی را که قادر به بهره‌برداری موثر از مزیت‌های یادگیری ماشینی کوانتومی هستند، محدود می‌کند. دانش و مهارت‌های تخصصی مورد نیاز، مانعی برای پذیرش و کاربرد گسترده‌تر یادگیری ماشین کوانتومی است.

مهم است توجه داشت که یادگیری ماشین کوانتومی یک حوزه فعال پژوهشی و توسعه است و پیشرفت‌های جاری ممکن است برخی از این معایب را در طول زمان برطرف کنند. بعد از بررسی یادگیری ماشین کوانتومی و اجزای تشکیل‌دهنده‌ی آن در فصل چهار به سراغ معرفی ابزار دیگری به نام همولوژی تداوم رفته‌یم که با استفاده از آن، می‌توانستیم یک سری ویژگی‌های توپولوژیکی از داده استخراج کنیم. در فصل پنجم به معرفی یک کلاس شناخته شده از سری‌های زمانی خود متشابه نامانا یعنی حرکت براونی کسری پرداختیم و با معرفی کمیتی به نام نمای هارست در این سری‌های زمانی و اهمیت تشخیص آن شروع به ساخت و آموزش مدلی کوانتومی برای دسته‌بندی این سری‌های زمانی بر حسب کلاس نمای هارستشان کردیم. برای استخراج بردار ویژگی برای آموزش مدل دسته‌بندی کوانتومی هم از ابزاری که در فصل چهار هم از تداوم همولوژی که یک ابزار قدرتمند در چارچوب تجزیه و تحلیل داده‌های توپولوژیکی است ونسبت به نویله‌ها و روندها مقاوم است استفاده کردیم و هفت ویژگی، یعنی تعداد جفتهای تداوم PPs_{β_1} ، آنتروپی مربوط به جفتهای تداوم مربوط به کلاس همولوژی β_0 و β_1 است که به ترتیب آن‌ها را با S_{β_0} و S_{β_1} نشان دادیم، شعاع پیدارشدن (ϵ_{appear}) شعاع بیشینه ($\epsilon_{maximum}$)، و شعاع ناپدید شدن ($\epsilon_{disappear}$) در منحنی بتی و مساحت سطح زیر نمودار منحنی بتی یک که آن را با A_{β_1} نشان دادیم را استخراج کردیم. و مدل‌های دسته‌بندی کوانتومی که از ده مدار کوانتومی با ساختار یکسان که خروجی هر یک احتمال تعلق نمای هارست سری زمانی fBm ورودی به آن کلاس را نشان می‌داد را آموزش دادیم و نتایج آزمودن مدل‌ها نشان داد که این مدل‌های کوانتومی هم می‌توانند با صحت و دقیقت قابل قبولی مانند مانسته‌ی کلاسیکی خود بیاموزد، با این وجود سرعت آموزش دادن این مدل‌ها به دلیل عدم استفاده از کامپیوترهای کوانتومی هنوز قابل قیاس با با کامپیوترهای کلاسیکی نیست.

۲.۶ گام‌های پیش رو

برای ادامه‌ی این پژوهش می‌توان:

• مشابه کوانتومی سایر روش یادگیری ماشین با نظارت و بدون نظارت مثل، KMeans، KNN، SVM، KMeans را بررسی کرد.

• در قسمت بهینه‌سازی کوانتومی می‌توان سایر روش‌های بهینه‌سازی کوانتومی مثل روش‌های زیر را بررسی کرد [۳۷]:

(QAOA) Algorithm Optimization Approximate Quantum -

(QA) Annealing Quantum -

(QGA) Algorithm Genetic Quantum-Inspired -

• بررسی میزان مقاومت مدل‌های دسته بندی کوانتومی به نوفه‌ها و روندها و همچنین میزان بستگی تشخیص نمای هارست

به طول سری زمانی یا در واقع بررسی اثر طول سری زمانی

• به دلیل گسترده شدن حوزه‌های مورد استفاده پردازش تصویر مثل پزشکی، کشاورزی، امنیت و نظارت و غیره، کار

کردن روی داده‌های عکس از اهمیت زیادی برخوردار شده است. همچنین محاسبات کوانتومی در حال تبدیل شدن به

یک ابزار مهم برای غلبه کردن بر محدودیت‌های کلاسیکی در حوزه‌ی پردازش تصویر است. در نتیجه بررسی پردازش

تصویر کوانتومی و روش‌های آن می‌تواند بسیار با اهمیت باشد.

مراجع

- [1] V. Dunjko, J. M. Taylor, and H. J. Briegel, “Quantum-enhanced machine learning,” *Physical Review Letters*, 2016.
- [2] “Bloch sphere,” https://en.wikipedia.org/wiki/Bloch_sphere.
- [3] R. P. Feynman, “Simulating physics with computers,” *International Journal of Theoretical Physics*, 1982.
- [4] P. W. Shor. *Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring*. 1994.
- [5] L. K. Grover, “A fast quantum mechanical algorithm for database search,” pp.212–219, 1996.
- [6] “Deutsch algorithm in qnicke course,” https://gitlab.com/qworld/nickel/-/blob/master/nickel/A03_Deutsch_Algorithm.ipynb.
- [7] C. Bernhardt. *Quantum Computing For Everybody*, vol.216. MIT Press, 2019.
- [8] “Deutsch algorithm,” https://gitlab.com/qworld/nickel/-/blob/master/nickel/A04_Deutsch_Jozsa_Algorithm.ipynb.
- [9] “Grover search algorithm in qbronze course,” <https://gitlab.com/qworld/bronze-qiskit>.
- [10] V. Rajput, “Robustness of different loss functions and their impact on networks learning capability,” *arXiv:2110.08322*, 2021.
- [11] P. Rebentrost, M. Mohseni, and S. Lloyd, “Quantum support vector machine for big data classification,” *Physical Review Letters*, 2014.
- [12] T. Hubregtsen, J. Pichlmeier, P. Stecher, and K. Bertels, “Evaluation of parameterized quantum circuits: on the relation between classification accuracy, expressibility, and entangling capability,” *Quantum Machine Intelligence*, 2021.
- [13] E. Farhi, J. Goldstone, and S. Gutmann, “A quantum approximate optimization algorithm,” *arXiv:1411.4028*, 2014.

- [14] G. Carlsson, “Topology and data,” *Bulletin of The American Mathematical Society*, 2009.
- [15] H. Edelsbrunner and J. Harer, “Computational topology: An introduction,” *American Mathematical Society*, 2010.
- [16] F. Chazal, B. Fasy, F. Lecci, B. Michel, A. Rinaldo, and L. Wasserman, “Robust topological inference: Distance to a measure and kernel distance,” *Journal of Machine Learning Research*, vol.18, 2014.
- [17] S. G. L. A. Lum, Pek Y, T. Ishkanov, M. Vejdemo-Johansson, M. Alagappan, J. Carlsson, and G. Carlsson, “Extracting insights from the shape of complex data using topology,” *Scientific reports*, p.1236, 2013.
- [18] N. Otter, M. A. Porter, U. Tillmann, P. Grindrod, and H. A. Harrington, “A roadmap for the computation of persistent homology,” *EPJ Data Science*, 2017.
- [19] P. Skraba and M. Vejdemo-Johansson, “Persistence modules: algebra and algorithms,” *arXiv preprint arXiv:1302.2015*, 2013.
- [20] R. Ghrist, “Barcodes: the persistent topology of data,” *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol.45, no.1, pp.61–75, 2008.
- [21] V. Divol and T. Lacombe, “Understanding the topology and the geometry of the space of persistence diagrams via optimal partial transport,” *Journal of Applied and Computational Topology*, vol.5, pp.1–53, 2021.
- [22] X. Yu, C. Cecati, T. Dillon, and M. Simoes, “The new frontier of smart grids,” *Industrial Electronics Magazine, IEEE*, vol.5, pp.49 – 63, 2011.
- [23] B. Arnold, “Intuitive concepts in elementary topology,” 2011.
- [24] H. Masoumi, “Complex systems analysis using persistent homology technique,” 2019.
- [25] D. Biswas and T. Banerjee, “Time-delayed chaotic dynamical systems: From theory to electronic experiment,” *SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology*, 2017.
- [26] C. Brandt and P. Maaß, “A state space approach for the non-destructive evaluation of cfrp with ultrasonic testing,” 2015.
- [27] R. Ghrist, “Barcodes: The persistent topology of data,” *BULLETIN (New Series) OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY*, 2008.
- [28] I. Eghdami, H. Panahi, and S. M. S. Movahed, “Multifractal analysis of pulsar timing residuals: Assessment of gravitational wave detection,” *The Astrophysical Journal*, vol.864, p.162, 2018.

- [29] S. Bogle and W. Potter, “Using hurst exponent and machine learning to build a predictive model for the jamaica frontier market,” pp.397–411, 01 2016.
- [30] D. Grech and Z. Mazur, “Comparison study of dfa and dma methods in analysis of auto-correlations in time series,” 2005.
- [31] A. D. Likens, M. Mangalam, A. Y. Wong, A. C. Charles, and C. Mills, “Better than dfa? a bayesian method for estimating the hurst exponent in behavioral sciences,” 2023.
- [32] M. Schuld, I. Sinayskiy, and F. Petruccione, “An introduction to quantum machine learning,” *Contemporary Physics*, vol.56, pp.172–185, 2014.
- [33] J. Biamonte, P. Wittek, N. Pancotti, P. Rebentrost, N. Wiebe, and S. Lloyd, “Quantum machine learning,” *Nature*, vol.549, pp.195–202, 2017.
- [34] V. Dunjko and H. J. Briegel, “Machine learning & artificial intelligence in the quantum domain,” *arXiv:1709.02779*, 2017.
- [35] M. Benedetti, D. Garcia-Pintos, O. Perdomo, V. Leyton-Ortega, Y. Nam, and A. Perdomo-Ortiz, “A generative modeling approach for benchmarking and training shallow quantum circuits,” *npj Quantum Information*, may 2019.
- [36] M. Schuld and N. Killoran, “Is quantum advantage the right goal for quantum machine learning?,” *PRX Quantum*, 2022.
- [37] “quantum optimization methods,” <https://pennylane.ai/qml/demonstrations/optimization>.

Abstract:

Matrix algebra, along with the symmetric and anti-symmetric nature of the wave function of multi-particle systems, has led to a new approach alongside classical physics, namely quantum mechanics. Inspired by the proposed approaches in quantum on the one hand and on the other hand trying to Build quantum computers, algorithms with goals such as optimization and solving complex problems through computers in the framework of programs Computationally developed. In this thesis, relying on the self-similarity feature of a global class called time series modeled Based on the fractional Brownian motion characterized by the Hurst exponent, try to use Topology data analysis derived from algebraic topology, which is resistant to noise and trends, in the field of quantum machine learning for classification of fBm time series. For this purpose, we produced 200 Fractional Brownian motion time series in ten classes of Hurst exponent as follows $H \in [0, 1]$, $\Delta H = 0.1$ that we used 75 percent of them for training and the rest for testing. From each of the time series, using the persistent homology tool, we extracted seven features, which include the number of persistent pairs of Betti one, the entropy of persistent pairs of Betti zero and one, appear, disappear, and the maximum radius in Betti curve and the area under Betti curve then embed them into the quantum state by quantum domain embedding method. For constructing our quantum classification model, we use a six-layer quantum circuit composed of rotation gates (with angles as trainable model parameters) and controlled gates (providing access to entangled states) for the ten classes of our Hurst exponent classes. We set the cost function of our model, the square value of the expectation value of the Pauli-z matrix because it ranges from 0 to 1 and conveys the concept of probability. Finally, we optimize the constructed model using a classical optimizer and achieve the best accuracy of 87 percent for

our models, independent of the values of the Hurst exponent.

Keywords: Quantum machine learning, Quantum optimization, Topological data analysis, fractional Brownian motion (fBm)



Shahid Beheshti University
Faculty of Physics

A THESIS SUBMITTED
FOR THE DEGREE OF
MASTER OF SCIENCE

Quantum Machine Learning with Persistent Homology

By

Narges Eghbali

Supervisor:

Dr. Seyed Mohammad Sadegh Movahed

Advisor:

Behruz Askari

Summer 2023