РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

1. Рекомендации по выполнению контрольной работы

Для получения допуска к экзамену по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» во время сессии вам будет предложена аудиторная контрольная работа, задания в которой аналогичны примерам контрольной работы, размещенным ниже.

Контрольная работа содержит 6 заданий и включает в себя ряд задач по линейной алгебре, векторной алгебре и аналитической геометрии.

Для подготовки к аудиторной контрольной работе нужно выполнить до сессии один вариант контрольной работы (в тонкой тетради в клетку). Номер варианта определяется последней цифрой шифра зачетной книжки. Если последняя цифра зачётки нечётная, то студент выполняет первый вариант. Если последняя цифра зачётки чётная, то студент выполняет второй вариант. Следовательно, задачами 1-го варианта будут 1.1; 2.1; 3.1; 4.1; 5.1; 6.1. Задачами 2-го варианта будут 1.2; 2.2; 3.2; 4.2; 5.2; 6.2.

2. Контрольная работа

Задания 1.1 – 1.2. Для данного определителя Δ найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{32}, a_{13}. Вычислить определитель Δ получив предварительно нули в: а) i -ой строке; б) j -м столбце.

1.1. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$, $i=2,\ j=1.$

1.2. $\begin{vmatrix} -3 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, $i=2,\ j=3.$

Задания 2.1 – 2.2. Решите систему уравнений тремя способами:

1) методом Крамера;
2) методом обратной матрицы;
3) методом Гаусса.

2.1. $\begin{cases} 2x_1+6x_2+x_3=-11, \\ 3x_1+7x_2-x_3=-20, \\ x_1+2x_2-x_3=-8. \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} 2x_1-5x_2-7x_3=2, \\ x_1-3x_2-2x_3=3, \\ 3x_1-13x_2+7x_3=26. \end{cases}$

Задания 3.1 – 3.2. Выяснить, совместна ли система уравнений, и, если она совместна, решить её.

3.1. $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3-2x_5=3, \\ 2x_1+5x_2-8x_3-2x_4-x_5=8, \\ x_1+3x_2-5x_3-2x_4+x_5=5. \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3-x_4=4, \\ 2x_1+7x_2-2x_3-5x_4=9, \\ x_1+4x_2-4x_4=5. \end{cases}$

Задания 4.1 – 4.2. Найдите собственные векторы линейного оператора действительного линейного пространства, заданного в некотором базисе матрицей A. Найдите матрицу B, приводящую к диагональному виду матрицу A.

4.1. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$

4.2. $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}.$

<u>Задания 5.1 – 5.2</u>. Даны координаты вершин треугольной пирамиды (тетраэдра) $A_1A_2A_3A_4$:

1) запишите уравнение прямой, проходящей через ребро A_1A_2;

2) запишите уравнение плоскости, которой принадлежит грань $A_1A_2A_3$;

3) найдите угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3;

4) вычислите площадь грани $A_1A_2A_3$;

5) вычислите объем треугольной пирамиды $A_1A_2A_3A_4$;

6) вычислите массу материальной треугольной пирамиды $A_1A_2A_3A_4$, изготовленной из меди плотностью $\mu = 8{,}9$ г/см^3 (считая, что 1 масштабная единица в системе координат равна 1 см).

5.1. $A_1(1;-3;-2)$, $A_2(2;-1;-1)$, $A_3(3;2;2)$, $A_4(-1;1;1)$.

5.2. $A_1(1;2;-2)$, $A_2(-1;1;-1)$, $A_3(2;3;1)$, $A_4(3;1;-1)$.

<u>Задания 6.1 – 6.2</u>. Изобразите геометрическое место точек, заданных данным уравнением:

1) на плоскости;

2) в пространстве.

6.1. а) $4x^2+9y^2+24x-18y+9=0$; б) $3x^2-12x-2y+10=0$.

6.2. а) $9x^2-16y^2-36x-32y-124=0$; б) $5y^2-2x+30y+47=0$.

3. Теоретические сведения к выполнению контрольной работы

Задания 1.1 – 1.2, 2.1 – 2.2, 3.1 – 3.2. Операция произведения матриц A и B определена для *согласованных матриц*, т. е. когда количество столбцов матрицы A равно количеству строк матрицы B. Произведением матрицы $A_{m\times n}=\left[a_{ij}\right],\ i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n},$ на матрицу $B_{n\times k}=\left[b_{ij}\right],\ i=\overline{1,n},\ \ j=\overline{1,k},$ называется матрица $C_{m\times k}=\left[c_{ij}\right],\ i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,k},$ элементы которой находятся по формуле

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+\ldots+a_{in}b_{nj}.$$

Матрица, полученная из данной матрицы A заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется *транспонированной*. Ее обозначают A^T.

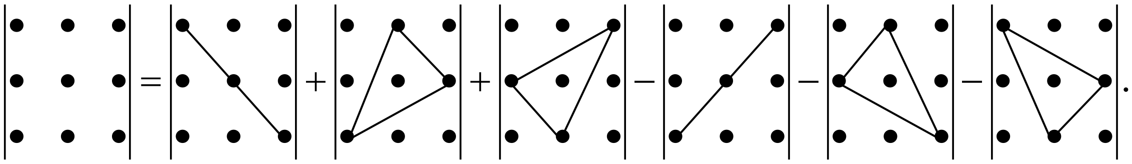
Определителем второго порядка называется число

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Определителем третьего порядка называется число

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Определитель третьего порядка можно вычислить по «правилу треугольников» (линии соединяют по три элемента, которые умножаются):



Если в определителе n-го порядка вычеркнуть i-ю строку и j-й столбец, на пересечении которых расположен элемент a_{ij} определителя, то оставшиеся на прежних местах элементы образуют определитель $n-1$-го порядка, называемый *минором* M_{ij} *элемента* a_{ij}. Число $A_{ij}=\left(-1\right)^{i+j}M_{ij}$ называется *алгебраическим дополнением элемента* a_{ij}.

Определитель n-го порядка матрицы $A=[a_{ij}]$ можно вычислять:

1) путем разложения по элементам i-й строки:

$$\Delta=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}+\ldots+a_{in}A_{in}.$$

2) путем разложением по элементам j-го столбца:

$$\Delta=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}+\ldots+a_{in}A_{in}.$$

Пусть A – квадратная матрица порядка n. Матрица A^{-1} называется обратной для матрицы A, если выполнены равенства

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

где E – единичная матрица порядка n. Матрица A имеет обратную матрицу тогда и только тогда, когда её определитель $|A| \neq 0$.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix},$$

где $|A|$ – определитель матрицы; A_{ij} – алгебраические дополнения.

Система трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2, x_3 имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

где a_{ij} – коэффициенты системы; b_i – свободные члены.

Матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

называется *матрицей системы*.

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ – матрица-столбец неизвестных; $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ – матрица-столбец свободных членов.

Определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

называется *определителем системы*.

Матрица

$$[A\,|\,B] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

называется *расширенной матрицей* системы.

Элементарными преобразованиями строк матрицы называются:

1) перестановка строк;

2) умножение строки на одно и то же число λ ($\lambda \neq 0$);

3) прибавление к строке матрицы другой ее строки, умноженной на некоторое число.

Если определитель системы $\Delta \neq 0,$ то система имеет единственное решение.

Метод Крамера. Необходимо:

1) вычислить определитель Δ;

2) в определителе Δ заменить поочередно i-й столбец столбцом свободных членов и вычислить соответствующие определители $\Delta_i \ (i = 1, 2, 3)$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

3) вычислить значения x_1, x_2, x_3 по *формулам Крамера*:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta};$$

4) записать решение $(x_1; x_2; x_3)$.

Метод обратной матрицы. Необходимо:

1) записать систему в матричном виде:

$$AX = B,$$

где A – матрица системы; X – матрица-столбец неизвестных; B – матрица-столбец свободных членов;

2) решить матричное уравнение

$$X = A^{-1}B, \tag{2}$$

где A^{-1} – обратная матрица;

3) записать решение $(x_1; x_2; x_3)$.

Метод Гаусса. Необходимо:

1) записать расширенную матрицу системы;

2) с помощью элементарных преобразований строк расширенной матрицы свести матрицу системы к треугольной или трапециевидной (с нулевыми элементами под главной диагональю);

3) для преобразованной таким образом расширенной матрицы записать соответствующую систему уравнений;

4) решить полученную систему, начиная с последнего уравнения;

5) записать решение $(x_1; x_2; x_3)$.

Рангом матрицы называется наивысший порядок отличных от нуля ее миноров.

Теорема Кронекера – Капелли.

Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда $r(A) = r([A|B])$.

Задания 4.1 – 4.2. Пусть U и V – два линейных пространства. Отображение $f: U \to V$ называется линейным оператором, если:

1) $f\left(x_1 + x_2\right) = f\left(x_1\right) + f\left(x_2\right)$ для любых $x_1, x_2 \in U$;

2) $f\left(\lambda x\right) = \lambda f\left(x\right)$ для любого $x \in U$ и любого $\lambda \in \mathbb{R}$.

Пусть f линейный оператор в конечномерном пространстве L_n и A – матрица этого оператора в некотором базисе. Пусть число λ и вектор $\overline{x} \in L_n$, $\overline{x} \neq 0$, таковы, что

$$f\left(\overline{x}\right) = \lambda \overline{x}. \tag{3}$$

Тогда число λ называется *собственным числом линейного оператора* f, а вектор $\overline{x}$ – *собственным вектором* этого *оператора, соответствующим собственному числу* λ. Равенство (3) можно записать в матричной форме $A\overline{x} = \lambda \overline{x}$. Так как $\lambda \overline{x} = \lambda E \overline{x}$, где E – единичная матрица, то уравнение перепишется в виде

$$\left(A - \lambda E\right)\overline{x} = 0.$$

Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – координаты собственного вектора $\overline{x}$, то перейдя к координатной форме записи, будем иметь

$$\begin{cases} \left(a_{12} - \lambda\right)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + \left(a_{22} - \lambda\right)x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \left(a_{33} - \lambda\right)x_3 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Для отыскания собственных векторов необходимо найти ненулевые решения системы (4), которые существуют тогда и только тогда, когда определитель этой системы равен нулю, т. е.

$$|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Уравнение (5) называется *характеристическим уравнением матрицы* A, а его корни – *характеристическими числами* или *собственными значениями матрицы* A. Левая часть характеристического уравнения представляет собой многочлен степени n, называемый *характеристическим многочленом матрицы* A. Всякому корню λ_0 соответствует собственный вектор, координаты которого определяются из системы (4) после подстановки в нее вместо λ величины λ_0.

Матрица A сводится к матрице Λ диагонального вида тогда и только тогда, когда базисными векторами пространства выбраны собственные векторы матрицы A:

$$\Lambda = T^{-1}AT,$$

где T – матрица перехода, столбцы которой являются координатами собственных векторов $\bar{x}^1, \bar{x}^2, ..., \bar{x}^n$ матрицы A.

$$T = \begin{bmatrix} \bar{x}^1 & \bar{x}^2 & ... & \bar{x}^n \\ \downarrow & \downarrow & ... & \downarrow \end{bmatrix}.$$

Задания 5.1 – 5.2. Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{6}$$

Уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

Вектор – направленный отрезок. *Длина* (или *модуль*) *вектора* – расстояние между его началом и концом. Если $\bar{a} = (x_1; y_1; z_1)$, то

$$|\bar{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}. \tag{8}$$

Если в прямоугольной системе координат $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то

$$\overline{M_1M_2} = \left(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\right). \tag{9}$$

Скалярным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

$$\left(\bar{a}, \bar{b}\right) = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\left(\bar{a}, \bar{b}\right)$$

Если $\bar{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\bar{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то скалярное произведение в координатной форме:

$$\left(\bar{a}, \bar{b}\right) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{10}$$

$$\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \tag{11}$$

Если $\bar{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\bar{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то векторное произведение в координатной форме:

$$\left[\bar{a}, \bar{b}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}\left(y_1z_2 - z_1y_2\right) - \bar{j}\left(x_1z_2 - z_1x_2\right) + \bar{k}\left(x_1y_2 - y_1x_2\right). \tag{12}$$

Площадь S треугольника, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}$:

$$S = \frac{1}{2}\left|[\bar{a}, \bar{b}]\right|, \tag{13}$$

Если $\bar{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\bar{b} = (x_2; y_2; z_2)$, $\bar{c} = (x_3; y_3; z_3)$, то смешанное произведение в координатной форме:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Объем V пирамиды, построенной на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$:

$$V = \frac{1}{6}\left|(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})\right|. \tag{15}$$

Масса тела плотностью μ:

$$m = \mu V. \tag{16}$$

Задания 6.1 – 6.2. *Каноническое уравнение эллипса* (рис. 1):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

В пространстве это уравнение задает эллиптический цилиндр (рис. 9).

На плоскости уравнение

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

задает эллипс (рис. 2) с полуосями a, b и центром в точке $C(x_0; y_0)$.

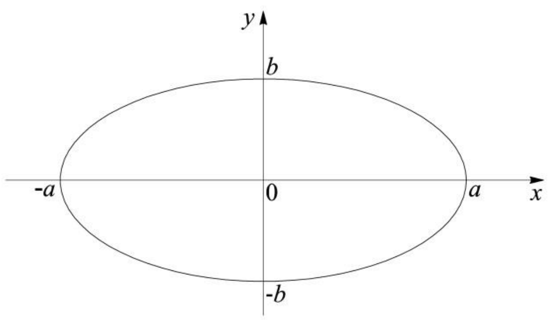


Рис. 1

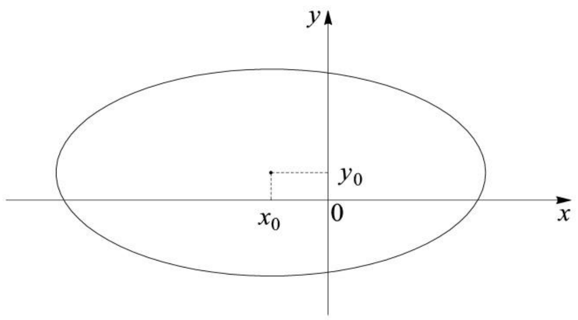


Рис. 2

Каноническое уравнение гиперболы (рис. 3):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

В пространстве это уравнение задает гиперболический цилиндр (рис. 10).

На плоскости уравнение

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

задает гиперболу (рис. 4) с полуосями a, b и центром в точке $C(x_0; y_0)$.

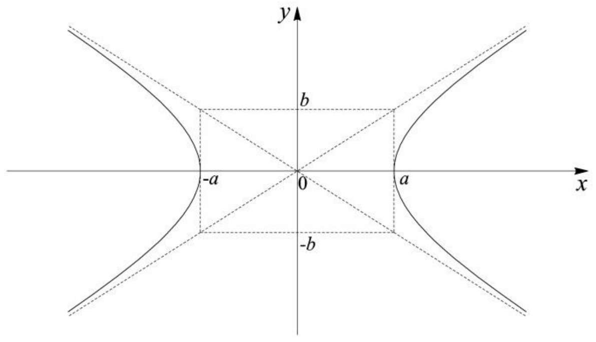


Рис. 3

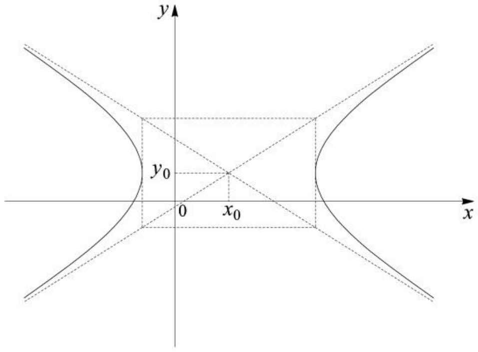


Рис. 4

Каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px, \ \ p > 0.$$

В пространстве это уравнение задает параболический цилиндр (рис. 11).

На плоскости уравнения

$$(y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0) \quad \text{или} \quad (x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0)$$

задают параболы с осью симметрии, параллельной координатной оси Ox (рис. 5, 6) и координатной оси Oy (рис. 7, 8) соответственно, и вершиной в точке $C(x_0; y_0)$.

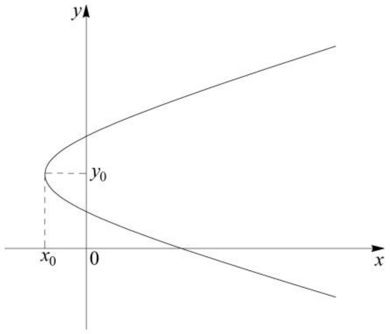


Рис. 5

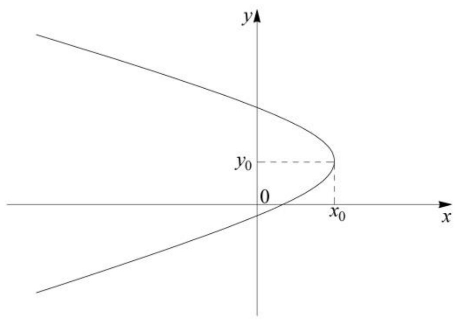


Рис. 6

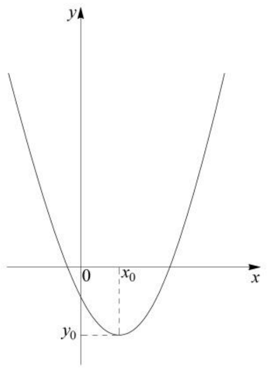


Рис. 7

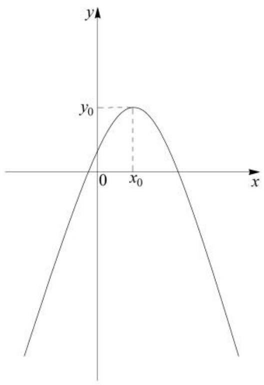


Рис. 8

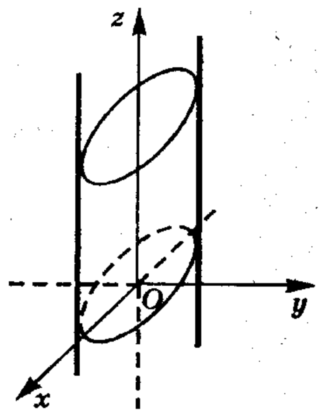


Рис. 9

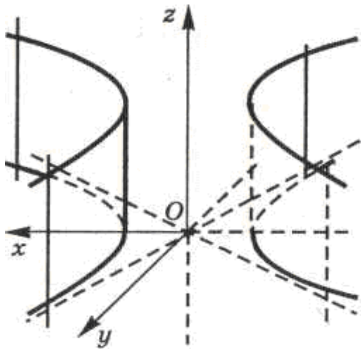


Рис. 10

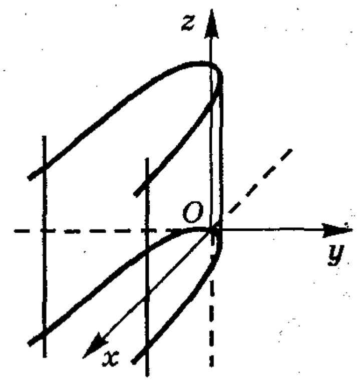


Рис. 11

4. Примеры решения типовых заданий контрольной работы

Задание 2. Решить систему уравнений тремя способами:

1) методом Крамера;

2) методом обратной матрицы;

3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + \ \ x_3 = -9, \\ 3x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 = \ \ 1, \\ \ \ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = \ \ 7. \end{cases}$$

Решение. 1) Решим систему *методом Крамера*. Запишем основную матрицу системы и матрицу-столбец свободных членов:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Вычислим определитель системы разложением по первой строке (1):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - (-5) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\big((-1)\cdot 4 - 2\cdot(-2)\big) +$$

$$+5(3\cdot 4 - 2\cdot 1) + \big(3\cdot(-2) - (-1)\cdot 1\big) = 2(-4+4) + 5(12-2) + (-6+1) = 5\cdot 10 - 5 = 45.$$

Поскольку определитель системы $\Delta \neq 0$, то систему можно решить методом Крамера. Заменим по очереди столбцы в определителе системы столбцом свободных членов системы. Вычисляем полученные определители и получаем:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -9 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 7 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -9 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - (-5) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = -9\big((-1)\cdot 4 - 2\cdot(-2)\big) +$$

$$+5(1\cdot 4 - 2\cdot 7) + \big(1\cdot(-2) - (-1)\cdot 7\big) = -9(-4+4) + 5(4-14) + (-2+7) =$$

$$= 5\cdot(-10) + 5 = -50 + 5 = -45;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -9 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} - (-9) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 2(1\cdot 4 - 2\cdot 7) +$$

$$+9(3\cdot 4 - 2\cdot 1) + 3\cdot 7 - 1\cdot 1 = 2(4-14) + 9(12-2) + 21 - 1 = 2(-10) + 9\cdot 10 + 20 =$$

$$= -20 + 90 + 20 = 90;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -5 & -9 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} - (-5)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + (-9)\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\big((-1)\cdot 7 - 1\cdot(-2)\big) +$$

$$+5(3\cdot 7 - 1\cdot 1) - 9\big(3\cdot(-2) - (-1)\cdot 1\big) = 2(-7+2) + 5(21-1) - 9(-6+1) =$$

$$= 2(-5) + 5\cdot 20 - 9(-5) = -10 + 100 + 45 = 135.$$

Тогда по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-45}{45} = -1,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{90}{45} = 2,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{135}{45} = 3.$$

2) Решим систему *методом обратной матрицы*. Так как $\Delta \neq 0$, то обратная матрица A^{-1} существует. Находим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -1\cdot 4 - 2\cdot(-2) = -4 + 4 = 0.$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(3\cdot 4 - 2\cdot 1) = -(12-2) = -10.$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2) - (-1)\cdot 1 = -6 + 1 = -5.$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -\big(-5\cdot 4 - 1\cdot(-2)\big) = -(-20+2) = 18.$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 4 - 1\cdot 1 = 8 - 1 = 7.$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -\big(2\cdot(-2) - (-5)\cdot 1\big) = -(-4+5) = -1.$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5\cdot 2 - 1\cdot(-1) = -10 + 1 = -9.$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(2\cdot 2 - 1\cdot 3) = -(4-3) = -1.$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1) - (-5)\cdot 3 = -2 + 15 = 13.$$

Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{45}\begin{bmatrix} 0 & 18 & -9 \\ -10 & 7 & -1 \\ -5 & -1 & 13 \end{bmatrix}.$$

Находим решение системы по формуле (2).

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{45}\begin{bmatrix} 0 & 18 & -9 \\ -10 & 7 & -1 \\ -5 & -1 & 13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{45}\begin{bmatrix} 0\cdot(-9)+18\cdot 1-9\cdot 7 \\ -10\cdot(-9)+7\cdot 1-1\cdot 7 \\ -5\cdot(-9)-1\cdot 1+13\cdot 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{45}\begin{bmatrix} 0+18-63 \\ 90+7-7 \\ 45-1+91 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{45}\begin{bmatrix} -45 \\ 90 \\ 135 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -45/45 \\ 90/45 \\ 135/45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Получили ответ: $(-1; 2; 3)$.

3) Решим систему *методом Гаусса*. Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left[A \middle| B\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 1 & -9 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 7 \end{array}\right]$$

С помощью элементарных преобразований строк расширенной матрицы приведем основную матрицу системы к треугольному виду. Для этого поменяем местами первую и третью строки матрицы. Исключим x_1 из второго и третьего уравнений. Для этого умножаем первую строку расширенной матрицы на -3 и прибавляем ко второй строке, затем умножаем первую строку на -2 и прибавляем к третьей строке:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 7 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & -9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & -10 & -20 \\ 0 & -1 & -7 & -23 \end{array}\right]$$

Умножим каждый элемент второй строки на $\dfrac{1}{5}$ и прибавим полученную вторую строку матрицы к третьей строке.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -7 & -23 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -9 & -27 \end{array}\right]$$

Запишем систему, соответствующую полученной матрице.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 7, \\ \quad\; x_2 - 2x_3 = -4, \\ \quad\quad\; -9x_3 = -27. \end{cases}$$

Из последнего уравнения полученной системы находим $x_3 = 3$. Подставляем найденное значение x_3 во второе уравнение системы:

$x_2 - 2\cdot 3 = -4,\ x_2 - 6 = -4,\ x_2 = -4+6,\ x_2 = 2.$

Подставляем найденные значения x_2 и x_3 в первое уравнение системы.

$x_1-2\cdot2+4\cdot3=7,\ x_1-4+12=7,\ x_1=7+4-12,\ x_1=-1.$

Ответ: $(-1;2;3)$.

<u>Задание 4</u>. Найти собственные векторы линейного оператора действительного линейного пространства, заданного в некотором базисе матрицей A. Найти матрицу T, приводящую к диагональному виду матрицу A.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 9 & -3\end{bmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\det(A-\lambda E)=0,\ \text{т. е. } \det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 5\\ 9 & -3-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Вычисляем определитель и приходим к уравнению:

$$(1-\lambda)\cdot(-3-\lambda)-5\cdot9=0,\ -3-\lambda+3\lambda+\lambda^2-45=0,\ \lambda^2+2\lambda-48=0.$$

Корни этого уравнения $\lambda_1=-8,\ \lambda_2=6$ – собственные числа линейного оператора. Собственные векторы, соответствующие $\lambda_1=-8,\ \lambda_2=6$, найдем из системы (4), которая для данного примера принимает вид

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1 + 5x_2=0,\\ 9x_1+(-3-\lambda)x_2=0.\end{cases}$$

Подставив в эту систему $\lambda_1=-8$ получим систему для получения первого собственного вектора линейного оператора:

$$\begin{cases}9x_1+5x_2=0,\\ 9x_1+5x_2=0.\end{cases}$$

Таким образом, значения x_1 и x_2 должны удовлетворять уравнению $9x_1+5x_2=0.$ Выражаем $x_1=-\dfrac{5}{9}x_2.$ Следовательно, решение этой системы имеет вид $x_2=9t,\ \ x_1=-5t,\ \ t\in\mathbb{R}.$ Итак, собственному числу $\lambda_1=-8$ соответствуют собственные векторы $\overline{x}^1=(-5t,9t),\ t\neq0,\ t\in\mathbb{R}.$

Аналогично подставляем в систему $\lambda_2=6$ и получаем систему

$$\begin{cases}-5x_1+5x_2=0,\\ 9x_1-9x_2=0.\end{cases}$$

Исходя из этой системы значения x_1 и x_2 должны удовлетворять уравнению $x_1-x_2=0,$ т. е. $x_1=x_2.$ Следовательно, решение этой системы имеет вид $x_2=t,\ x_1=t,\ t\in\mathbb{R}.$ Итак, собственному числу $\lambda_2=6$ соответствуют собственные векторы $\overline{x}^2=(t,t),\ t\neq0,\ t\in\mathbb{R}.$

Найдем матрицу T, приводящую к диагональному виду матрицу A. Придадим t произвольное значение, например, пусть $t=1$. Получим два собственных вектора $\bar{x}^1=(-5,9)$ и $\bar{x}^2=(1,1)$. Из координат собственных векторов матрицы как из столбцов строим матрицу $T=\begin{bmatrix}-5 & 1\\ 9 & 1\end{bmatrix}$. Найдем матрицу, обратную матрице T. Вычислим определитель и алгебраические дополнения элементов матрицы T:

$$\Delta=\begin{vmatrix}-5 & 1\\ 9 & 1\end{vmatrix}=-5\cdot 1-1\cdot 9=-5-9=-14.$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 1=1,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot 9=-9,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot 1=-1,\ A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot(-5)=-5.$$

Тогда

$$T^{-1}=-\frac{1}{14}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -9 & -5\end{bmatrix}.$$

Убедимся, что матрица $T^{-1}AT$ является диагональной:

$$T^{-1}AT=-\frac{1}{14}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -9 & -5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 5\\ 9 & -3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-5 & 1\\ 9 & 1\end{bmatrix}=-\frac{1}{14}\begin{bmatrix}1\cdot 1-1\cdot 9 & 1\cdot 5-1\cdot(-3)\\ -9\cdot 1-5\cdot 9 & -9\cdot 5-5\cdot(-3)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5 & 1\\ 9 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{14}\begin{bmatrix}-8 & 8\\ -54 & -30\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-5 & 1\\ 9 & 1\end{bmatrix}=-\frac{1}{14}\begin{bmatrix}-8\cdot(-5)+8\cdot 9 & -8\cdot 1+8\cdot 1\\ -54\cdot(-5)-30\cdot 9 & -54\cdot 1-30\cdot 1\end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{14}\begin{bmatrix}112 & 0\\ 0 & -84\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}.$$

Задание 5. Даны координаты вершин треугольной пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(1;3;-2)$, $A_2(2;2;-1)$, $A_3(3;2;2)$, $A_4(-1;1;1)$:

1) записать уравнение прямой, проходящей через ребро A_1A_2;

2) записать уравнение плоскости, которой принадлежит грань $A_1A_2A_3$.

3) найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3;

4) вычислить площадь грани $A_1A_2A_3$;

5) вычислить объем треугольной пирамиды $A_1A_2A_3A_4$;

6) вычислить массу материальной треугольной пирамиды $A_1A_2A_3A_4$, изготовленной из меди, плотностью $\mu=8{,}9$ г/см^3 (считая, что 1 масштабная единица в системе координат равна 1 см).

Решение. 1) Составим уравнение прямой A_1A_2, используя уравнение прямой (6), проходящей через две точки:

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-3}{2-3}=\frac{z-(-2)}{-1-(-2)},\quad \frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+2}{1}.$$

2) Используя формулу (7), составим уравнение плоскости $A_1A_2A_3$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-(-2) \\ 2-1 & 2-3 & -1-(-2) \\ 3-1 & 2-3 & 2-(-2) \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=0.$$

Вычислим определитель, используя формулу (1):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=(x-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}-(y-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}+(z+2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

$$(x-1)(-1\cdot 4-1\cdot(-1))-(y-3)(1\cdot 4-1\cdot 2)+(z+2)(1\cdot(-1)-(-1)\cdot 2)=0,$$

$(x-1)(-4+1)-(y-3)(4-2)+(z+2)(-1+2)=0,\ -3(x-1)-2(y-3)+z+2=0,$
$-3x+3-2y+6+z+2=0,\ -3x-2y+z+11=0.$

Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$: $3x+2y-z-11=0.$

3) Найдем угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3 по формуле (11) как угол между векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$. Для этого вычислим координаты векторов $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, а также их длины и скалярное произведение, используя формулы (9), (8) и (10):

$$\cos(\overline{A_1A_2}\,\hat{,}\,\overline{A_1A_3})=\frac{(\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3})}{|\overline{A_1A_2}||\overline{A_1A_3}|}.$$

$$\overline{A_1A_2}=(2-1,2-3,-1-(-2)),\quad \overline{A_1A_2}=(1,-1,1).$$

$$\overline{A_1A_3}=(3-1,2-3,2-(-2)),\quad \overline{A_1A_3}=(2,-1,4).$$

$$|\overline{A_1A_2}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}.$$

$$|\overline{A_1A_3}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+4^2}=\sqrt{4+1+16}=\sqrt{21}.$$

$$(\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3})=1\cdot 2+(-1)\cdot(-1)+1\cdot 4=2+1+4=7.$$

$$\cos(\overline{A_1A_2}\,\hat{,}\,\overline{A_1A_3})=\frac{7}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{21}}=\frac{7}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

4) Площадь треугольника $\triangle A_1A_2A_3$ вычислим по формуле (13):

$$S=\frac{1}{2}\left|[\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3}]\right|.$$

Для этого вычислим векторное произведение векторов $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$ по формуле (12):

$$[\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & 4\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k}.$$

$$[\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3}]=(-3;-2;1).$$

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+1^2}=\frac{1}{2}\sqrt{9+4+1}=\frac{1}{2}\sqrt{14}.$$

5) Объем треугольной пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ вычислим по формуле (15). Координаты векторов $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$ найдены выше. Найдем координаты вектора $\overline{A_1A_4}$ и по формуле (14) вычислим смешанное произведение векторов $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$, на которых построена треугольная пирамида $A_1A_2A_3A_4$:

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overline{A_1A_2},\ \overline{A_1A_3},\ \overline{A_1A_4}\right)\right|.$$

$$\overline{A_1A_4}=\left(-1-1,1-3,1-(-2)\right),\quad \overline{A_1A_4}=(-2,-2,3).$$

$$\left(\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3},\ \overline{A_1A_4}\right)=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 4\\ -2 & -2 & 3\end{vmatrix}=-3+8-4-2+8+6=13.$$

Получаем

$$V=\frac{1}{6}|13|=\frac{13}{6}.$$

6) Найдем массу материальной треугольной пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ по формуле (16).

$$m=8{,}9\cdot\frac{13}{6}=\frac{1157}{60}=19\frac{17}{60}\ \text{г/см}^3.$$

<u>Задание 6</u>. Изобразить геометрическое место точек, заданных данным уравнением:

1) на плоскости;

2) в пространстве.

а) $16x^2+25y^2-96x+50y-231=0$; б) $9x^2-16y^2+36x+32y-124=0$;

в) $2y^2-3x-8y+5=0$.

Решение. а) Выделим в этом уравнении полные квадраты по переменным x и y.

$$16x^2-96x+25y^2+50y-231=0,$$

$$16\left(x^2-6x\right)+25\left(y^2+2y\right)-231=0,$$

$$16\left(\left(x^2-2\cdot 3\cdot x+9\right)-9\right)+25\left(\left(y^2+2\cdot 1\cdot y+1\right)-1\right)-231=0,$$

$$16\left(\left(x-3\right)^2-9\right)+25\left(\left(y+1\right)^2-1\right)-231=0,$$
$$16\left(x-3\right)^2-144+25\left(y+1\right)^2-25-231=0,$$
$$16\left(x-3\right)^2+25\left(y+1\right)^2=400.$$

Разделив на 400 обе части последнего уравнения, получим уравнение эллипса (рис. 15):

$$\frac{16\left(x-3\right)^2}{400}+\frac{25\left(y+1\right)^2}{400}=\frac{400}{400},$$
$$\frac{\left(x-3\right)^2}{25}+\frac{\left(y+1\right)^2}{16}=1.$$

Найдем центр и полуоси эллипса. Поскольку $a^2=25$, то $a=5$. Получили $b^2=16$, откуда $b=4$. Координаты центра: $x_0=3$, $y_0=-1$.

В пространстве данное уравнение задает эллиптический цилиндр (рис. 16).

б) Выделим в этом уравнении полные квадраты по переменным x и y.

$$9x^2+36x-16y^2+32y-124=0,$$
$$9\left(x^2+4x\right)-16\left(y^2-2y\right)-124=0,$$
$$9\left(\left(x^2+2\cdot 2x+4\right)-4\right)-16\left(\left(y^2-2\cdot 1y+1\right)-1\right)-124=0,$$
$$9\left(\left(x+2\right)^2-4\right)-16\left(\left(y-1\right)^2-1\right)-124=0,$$
$$9\left(x+2\right)^2-36-16\left(y-1\right)^2+16-124=0,$$
$$9\left(x+2\right)^2-16\left(y-1\right)^2=144.$$

Разделив на 144 обе части последнего уравнения, получим уравнение гиперболы (рис. 17):

$$\frac{9\left(x+2\right)^2}{144}-\frac{16\left(y-1\right)^2}{144}=\frac{144}{144},$$
$$\frac{9\left(x+2\right)^2}{16}-\frac{16\left(y-1\right)^2}{9}=1.$$

Найдем полуоси гиперболы и ее центр. Так как $a^2=16$, то $a=4$; так как $b^2=9$, то $b=3$; координаты центра $\left(-1,\,2\right)$.

В пространстве данное уравнение задает гиперболический цилиндр (рис. 18).

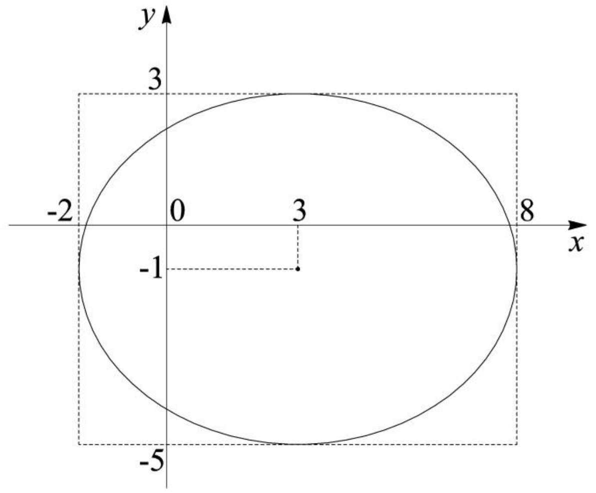


Рис. 15

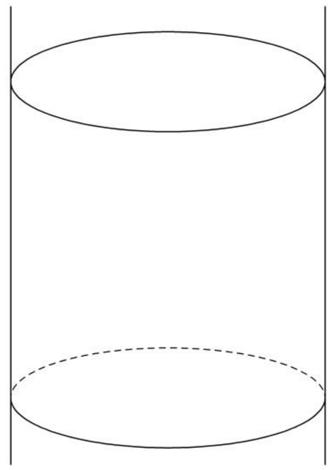


Рис. 16

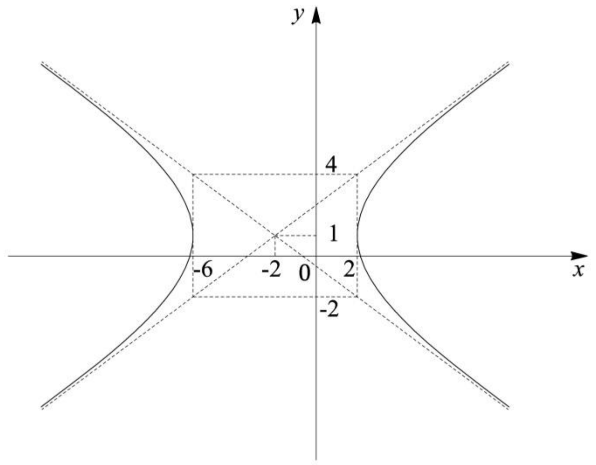


Рис. 17

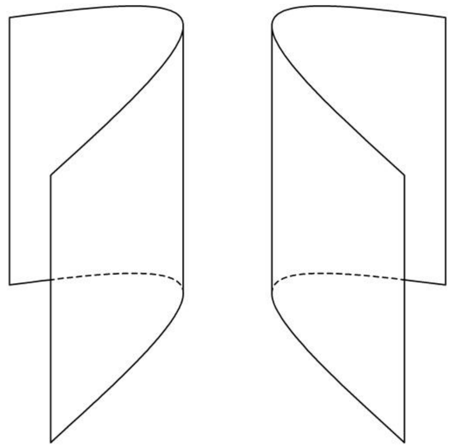


Рис. 18

в) Выделим в этом уравнении полный квадрат по переменной y.

$2y^2-8y-3x+5=0.$

$2\left(y^2-4y\right)-3x+5=0.$

$2\left(\left(y^2-2\cdot 2y+4\right)-4\right)-3x+5=0.$

$2\left(\left(y-2\right)^2-4\right)-3x+5=0.$

$2\left(y-2\right)^2-8-3x+5=0.$

$2\left(y-2\right)^2-3x-3=0.$

$2\left(y-2\right)^2=3\left(x+1\right).$

$\left(y-2\right)^2=1{,}5\left(x+1\right).$

Получили уравнение параболы (рис. 19) с координатами вершины параболы $\left(-1,\,2\right)$.

В пространстве данное уравнение задает параболический цилиндр (рис. 20).

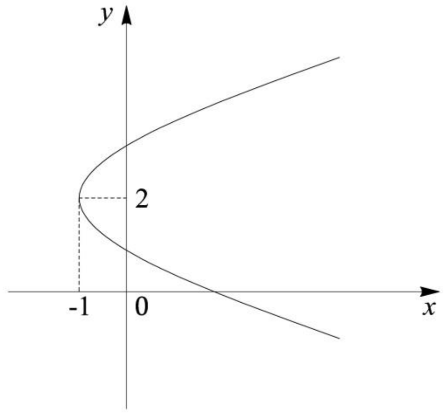


Рис. 19

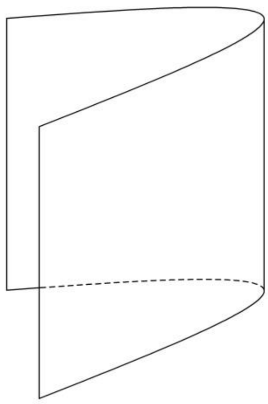


Рис. 20

5. Рекомендуемая литература для подготовки к контрольной работе

1. Гусак, А. А. Высшая математика : учебник для вузов. В 2 т. / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 2009. – Т. 1. – 544 с. ; Т. 2. – 448 с.

2. Жевняк, Р. М. Высшая математика. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Дифференциальное исчисление / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1992. – 384 с.

3. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2009. – 608 с.

4. Гусак, А. А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Примеры и задачи : учеб. пособие / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 2011. – 288 с.

5. Руководство к решению задач по высшей математике. В 2 ч. / Е. И. Гурский [и др.] ; под общ. ред. Е. И. Гурского. – Минск : Выш. шк., 1989–1990. – Ч. 1. – 1989. – 349 с. ; Ч. 2. – 1990. – 400 с.

6. Сухая, Т. А. Задачи по высшей математике. В 2 ч. / Т. А. Сухая, В. Ф. Бубнов. – Минск : Выш. шк., 1993. – Ч. 1. – 446 с. ; Ч. 2. – 301 с.

7. Майсеня, Л. И. Справочник по математике: основные понятия и формулы / Л. И. Майсеня. – Минск : Выш. шк, 2012. – 399 с.

8. Математика в примерах и задачах : учеб. пособие. В 2 ч. / Л. И. Майсеня [и др.] ; под общ. ред. Л. И. Майсени. – Минск : Выш. шк., 2014. – Ч. 1. – 356 с. ; Ч. 2. – 430 с.