IMO 2006 Problem 5

Ibrahim Karimli

January 18, 2024

Sual:

$P(x)$ dərəcəsi $n > 1$ olan tam əmsallı polinom olsun. Tutaq ki, k müsbət tam ədəd, $Q(x) = P^k(x)$ olan polinomdur. İsbat edinki $Q(x) = x$ şərtini ödəyən ən çoxu n tam ədəd mövcuddur.

Qeyd: $P^2(x) = P(P(x)), P^3(x) = P(P(P(x)))$

Həll:

Fərz edək ki: $Q(x) - x$ polinomunu $n + 1$ tam ədəd 0-a bərabər edir.

Həmin ədədlər $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1}$ olsun. Aydındırki $P(x)$ tam əmsallı olduğundan $x_i - x_j | P(x_i) - P(x_j)$. Deməli $P(x_i) - P(x_j) | P^k(x_i) - P^k(x_j)$. Onda əldə edə bilərik ki:

$$P(x_i) - P(x_j) \mid P^k(x_i) - P^k(x_j) = Q(x_i) - Q(x_j) = x_i - x_j$$

Deməli bütün i, j cütlükləri üçün $|P(x_i) - P(x_j)| = |x_i - x_j|$ şərti ödənir.

$x_1, x_2, ..., x_{n+1}$ setindən x_a, x_b, x_c ədədlərini seçək hansıki $P(x_a) - P(x_b) = x_a - x_b$ və $P(x_a) - P(x_c) = x_c - x_a$. Onda $P(x_b) - P(x_c) = 2x_a - x_b - x_c$. Digər tərəfdən $P(x_b) - P(x_c)$ ya $x_b - x_c$ yada $x_c - x_b$ olduğundan ya $x_a = x_b$ yada $x_a = x_c$ olmalıdır hansı ki hər ikisi ziddiyyətədir.

Deməli ya $P(x_i) - P(x_j) = x_i - x_j \forall i = 1, 2, \cdots, n+1$ yada $P(x_i) - P(x_j) = x_j - x_i \forall i = 1, 2, \cdots, n+1$.

Yəni bütün $i = 1, 2, ..., n + 1$ üçün ya $P(x_i) - x_i$ yada $P(x_i) + x_i$ polinomu sabitdir hansıki ziddiyətdir, çünki P-in dərəcəsi 1-dən böyükdür. Deməli fərziyyəmiz yanlışdır və $Q(x) - x$ polinomunu ən çoxu n tam ədəd 0-a bərabər edir.