IMO 2001 P2

Mirhabib

December 9, 2023

a,b,c müsbət həqiqi ədədlər olsun, beləki $abc = 1$. Isbat edin ki,

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

İpucu

abc=1 şərti verildikdə, ilk ağla gələn strategiyalardan biri a,b,c-ni xüsusi şəkildə ifadə etməkdi. Beləki, biz $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$ kimi bir əvəzləmə edə bilərik. Bu üsul bir çox bərabərsizlik suallarında istifadə olunur və motivasiyası çox sadədir.

Həlli

Bu əvəzləmələri verilən ifadəyə tətbiq etdikdə ifadə buna çevrilir:

$$\left(\frac{x}{y} - 1 + \frac{z}{y}\right)\left(\frac{y}{z} - 1 + \frac{x}{z}\right)\left(\frac{z}{x} - 1 + \frac{y}{x}\right) \leq 1. \iff$$

$(x+z-y)(x+y-z)(y+z-x) \leq xyz$ Burdan sonra suala 2 cür yanaşaraq həll etmək olar.

əvəzləmə yolu ilə

$x+z-y=m$, $x+y-z=n$, $y+z-x=k$ desək, ifadə buna çevirilir:

$8mnk \leq (m+k)(n+k)(m+n)$

Bu isə ədədi- həndəsi ortanın tətbiqi ilə doğru məlumdur.

vurub- açma yolu ilə(pqr)

$x+y+z = p$, $xy+yz+xz = q$, $xyz = r$ dedikdən sonra ifadəni vurub-açdıqda ifadə sadələşir:

$p^3 - 2p^3 + 4pq - 8r \leq r \iff p^3 + 9r \geq 4pq$

Sonda aldığımız ifadə isə Schur bərabərsizliyinin özüdür.

Beləliklə sual bitdi.