IMO 2002 Problem 5

Ibrahim Karimli

January 18, 2024

Sual:

$\mathbb{R}$ həqiqi ədədlər çoxluğu olsun. Bütün elə $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funksiyalarını tapın ki,

$$(f(x) + f(z))\,(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz) \qquad (1)$$

şərti bütün x, y, z, t həqiqi ədədləri üçün ödənsin.

Həll:

1-ci hal: f sabitdir

Onda istənilən x üçün $f(x) = c$ olsun. (1)-də yerinə qoysaq, $4c^2 = 2c$ əldə edirik yəni buradan 2 həll çıxır: $f(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ və $f(x) = \frac{1}{2}\ \forall x \in \mathbb{R}$

2-ci hal: f sabit deyil

$P(x, y, z, t)$ (1)-in təyini olsun (məsələn $P(a, y, z, t)$ (1)-də x-i a ilə əvəzləmədir)

$$P(x, 0, x, 0) \Longrightarrow 2f(0)f(x) = f(0)$$

$f(0) \neq 0$ olsa, f sabit olur yəni ziddiyət yaranır. Deməli $f(0) = 0$.

$$P(x, y, 0, 0) \Longrightarrow f(x)f(y) = f(xy) \qquad (2)$$

$$P(z, 0, z, t) \Longrightarrow 2f(z)f(t) = f(-zt) + f(zt) \Longrightarrow 2f(zt) = f(-zt) + f(zt) \Longrightarrow f(-zt) = f(zt) \qquad (3)$$

$$P(x, y, y, x) \Longrightarrow f(x^2) + 2f(xy) + f(y^2) = f(x^2 + y^2) \Longrightarrow f(x^2 + y^2) > f(x^2) \qquad (4)$$

(2) və (4)-ə əsasən Koşi funksiyasından istifadə edərək əldə edirik ki, müsbət həqiqi x-lər üçün $f(x) = x^d$, lakin (3)-ə əsasən f həmdə cüt funksiyadır, deməli $f(x) = x^d\ \forall x \in \mathbb{R}$

$$P(1, 1, 1, 1) \Longrightarrow 4f(1)^2 = 2^d \Longrightarrow d = 2 \Longrightarrow f(x) = x^2$$

Yekun olaraq 3-cü və son həllimizi $f(x) = x^2\ \forall x \in \mathbb{R}$ kimi əldə edirik.