

IMO 2006 Problem 2

Mirhabib Asgarov

January 18, 2024

Sual:

Düzgün 2006-bucaqlının diaqonalının uc nöqtələri bu çoxbucaqlının sərhədini hər biri tək sayda tərəfdən ibarət iki hissəyə ayırırsa, belə diaqonal tək adlanır. Çoxbucaqlının hər bir tərəfi də tək hesab edilir. Tutaq ki, bu düzgün 2006-bucaqlı, çoxbucaqlının daxilində kəsişməyən 2003 sayda diaqonallar vasitəsi ilə üçbucaqlara bölünmüşdür. Bu bölgədə alınmış və iki tərəfi tək olan bərabəryanlı üçbucaqların mümkün maksimal sayını tapın

Həlli:

Bərabəryanlı üçbucağı o zaman tək adlandırırıq ki, onun 2 tək tərəfi var. Həm bərabəryanlı olub, həm də tək olan üçbucaqlara yaxşı üçbucaq deyək. Tutaq ki, ABC tək üçbucaq olsun, hansı ki AB və BC tək tərəfdir. Bu o deməkdir ki, A və B arasında, həmçinin B və C arasında tək sayda tərəf var. Bu tərəflərə ABC yaxşı üçbucağına aiddir deyək.

İddia: Bu qrupların hər birində tərəflərdən biri heç bir digər yaxşı üçbucağa aid deyil.

İsbatı: Tutaq ki, AB sahəsini götürək. Burada yarancaq hər hansı bir yaxşı üçbucağın bərabər olan tərəfləri birlikdə cüt sayda tərəfi özündə saxlayır. Bunu nümunə ilə göstərək. Tutaq ki, AB arasında şəkil 1 dəki kimi 9 tərəf olsun. Bu sahədə yaradacağımız üçbucağın bir tərəfi çoxbucaqlının nə qədər tərəfini tutursa, ona bərabər olacaq simmetrik tərəf üçündə bu dəyər eynidir. Buna görə də hər bir üçbucağın bərabər olan 2 tərəfi cüt sayda çoxbucaqlı tərəfini özünə aid edir. Bu cür davam etsək, aydındır ki, sahədə tək sayda tərəf olduğundan mütləq şəkildə 1 tərəf başqa heç bir yaxşı üçbucağa aid olmayacaq.

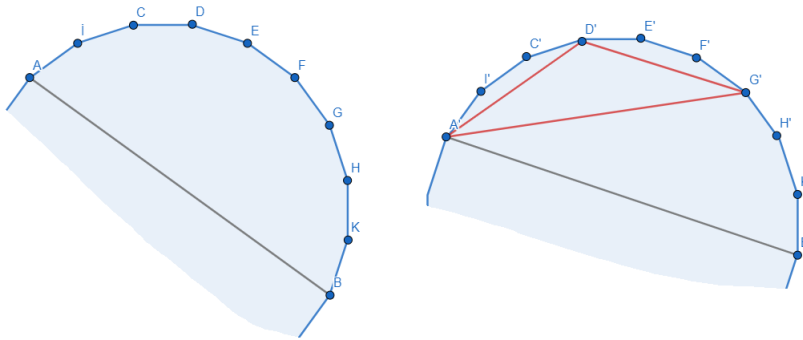


Figure 1: .

Deməli, hər bir yaxşı üçbucaq üçün təyin olunmuş 2 çoxbucaqlı tərəfi var (AB üçün 1, BC üçün 1 ədəd), hansı ki başqa heç bir üçbucağa aid deyil. Çoxbucaqlının 2006 tərəfi olduğundan, deməkki maksimum 1003 yaxşı üçbucaq əldə edə bilərik. 1003 üçün konstruksiya isə sadədir. Təpə nöqtələrini $1, 2, 3, \dots, 2006$ deyərək işarələyək. Bu zaman $(2, 4), (4, 6), \dots, (2004, 2006), (2006, 2)$ xətlərini çəkəndə 1003 yaxşı üçbucaq alındığını görürük. Digər diaqonalları isə şərtə uyğun şəkildə özümüz seçə bilərik.