компьютере) и определите количество верных в строгом смысле цифр в следующих значениях элементарных функций:

а) $\log 23{,}6$;   б) $e^{2{,}01}$;   в) $\frac{1}{4{,}09}$;

г) $\arccos 0{,}79$;   д) $\operatorname{arctg} 8{,}45$;   е) $3{,}4^{2{,}6}$.

1.6. УЧЕТ ПОГРЕШНОСТЕЙ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПО ЗАДАННОЙ ФОРМУЛЕ

Наиболее распространенный вид вычислений — это ***вычисления по готовой формуле***. В компьютере вычисление при любой громоздкости формулы обеспечивается, как правило, одной командой (оператором). Если при этом не запрограммирован контроль за вычислительными погрешностями, вычислитель анализирует результат в конце счета. Иногда условия вычислительной задачи заставляют вести пооперационный учет движения вычислительной погрешности. Рассматривая в дальнейшем приемы вычислений, мы будем учитывать как пооперационную, так и итоговую методику оценки точности.

1.6.1. Вычисления по правилам подсчета цифр

При вычислении этим методом явного учета погрешностей не ведется, ***правила подсчета цифр*** показывают лишь, какое количество значащих цифр или десятичных знаков в результате можно считать надежными. Сами эти правила основываются на выводах, вытекающих из формул для оценки погрешностей арифметических действий и функций (см. подразд. 1.4 и 1.5). Приведем эти правила в систематизированном виде.

1. При сложении и вычитании приближенных чисел младший из сохраняемых десятичных разрядов результата должен являться наибольшим среди десятичных разрядов, выражаемых последними верными значащими цифрами исходных данных[1].

[1] Когда точность исходных данных такова, что все они имеют десятичные знаки после запятой, т. е. являются десятичными дробями, правило формулируется более доступно: при сложении и вычитании приближенных чисел в результате следует считать верными столько десятичных знаков после запятой, сколько их в приближенном данном с наименьшим числом знаков после запятой. Количество десятичных знаков после запятой перед выполнением действия целесообразно уравнивать, округляя до одного запасного исходные данные с большим количеством десятичных знаков.

компьютере) и определите количество верных в строгом смысле цифр в следующих значениях элементарных функций:

а) $\log 23{,}6$; б) $e^{2{,}01}$; в) $\dfrac{1}{4{,}09}$;

г) $\arccos 0{,}79$; д) $\operatorname{arctg} 8{,}45$; е) $3{,}4^{2{,}6}$.

1.6. УЧЕТ ПОГРЕШНОСТЕЙ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПО ЗАДАННОЙ ФОРМУЛЕ

Наиболее распространенный вид вычислений — это ***вычисления по готовой формуле***. В компьютере вычисление при любой громоздкости формулы обеспечивается, как правило, одной командой (оператором). Если при этом не запрограммирован контроль за вычислительными погрешностями, вычислитель анализирует результат в конце счета. Иногда условия вычислительной задачи заставляют вести пооперационный учет движения вычислительной погрешности. Рассматривая в дальнейшем приемы вычислений, мы будем учитывать как пооперационную, так и итоговую методику оценки точности.

1.6.1. Вычисления по правилам подсчета цифр

При вычислении этим методом явного учета погрешностей не ведется, ***правила подсчета цифр*** показывают лишь, какое количество значащих цифр или десятичных знаков в результате можно считать надежными. Сами эти правила основываются на выводах, вытекающих из формул для оценки погрешностей арифметических действий и функций (см. подразд. 1.4 и 1.5). Приведем эти правила в систематизированном виде.

1. При сложении и вычитании приближенных чисел младший из сохраняемых десятичных разрядов результата должен являться наибольшим среди десятичных разрядов, выражаемых последними верными значащими цифрами исходных данных[1].

[1] Когда точность исходных данных такова, что все они имеют десятичные знаки после запятой, т. е. являются десятичными дробями, правило формулируется более доступно: при сложении и вычитании приближенных чисел в результате следует считать верными столько десятичных знаков после запятой, сколько их в приближенном данном с наименьшим числом знаков после запятой. Количество десятичных знаков после запятой перед выполнением действия целесообразно уравнивать, округляя до одного запасного исходные данные с большим количеством десятичных знаков.

При этом следует избегать вычитания близких по величине чисел, а также при пооперационном применении правила для сложения и вычитания нескольких чисел подряд стараться производить действия над числами в порядке возрастания их абсолютных величин.

2. При умножении и делении приближенных чисел нужно выбрать число с наименьшим количеством значащих цифр и округлить остальные числа так, чтобы в них было лишь на одну значащую цифру больше, чем в наименее точном числе.

В результате следует считать верными столько значащих цифр, сколько их в числе с наименьшим количеством значащих цифр.

3. При определении количества верных цифр в значениях элементарных функций от приближенных значений аргумента следует грубо оценить значение модуля производной функции. Если это значение не превосходит единицы или близко к ней, то в значении функции можно считать верными столько знаков после запятой, сколько их имеет значение аргумента. Если же модуль производной функции в окрестности приближенного значения аргумента превосходит единицу, то количество верных десятичных знаков в значении функции меньше, чем в значении аргумента на величину k, где k — наименьший показатель степени, при котором имеет место неравенство[1]: $|f'(x)| < 10^k$.

4. При записи промежуточных результатов следует сохранять на одну цифру больше, чем рекомендуют правила 1—3. В окончательном результате эта запасная цифра округляется.

Правила подсчета цифр носят оценочный характер и не являются методом строгого учета точности вычислений. Обычно их применяют в тех случаях, когда быстро и без особых затрат нужно получить результат, не особенно беспокоясь о его достоверности. Между тем практическая надежность этих правил достаточно высока в результате вычислительной вероятности взаимопогашения ошибок, не учитываемой при строгом подсчете предельных погрешностей.

При операционном учете ошибок вычислений используется обычная расчетная таблица — так называемая *расписка формулы*.

Пример 1.14. Вычислите значение величины

$$A = \frac{e^a + \sqrt{b}}{\ln(a + b^2)} \tag{1.19}$$

---

[1] Действительно, при этом условии с учетом формулы $\Delta f = |f'(x)|\Delta x$ можно вывести, что увеличение k на единицу означает увеличение Δf примерно в 10 раз, что в данном случае уменьшает в значении $f(x)$ количество верных десятичных знаков на единицу по сравнению со значением x.

Таблица 1.4

a	b	e^a	$\sqrt{b}$	$e^a+\sqrt{b}$	b^2	$a+b^2$	$\ln(a+b)^2$	A
2,156	0,927	8,63**7**	0,962**8**	9,600	0,8593	3,0153	1,103**7**	8,69**8**

по правилам подсчета цифр для приближенных значений $a = 2,156$ и $b = 0,927$, у которых все цифры верны.

Вычисления приведены в табл. 1.4.

Прокомментируем ход вычислений. Сначала вычислим $e^{2,156} = 0,63652$. Этот же результат дает нам и оценку величины производной в этой же точке: $2^{2,156} < 1 \cdot 10^1$, т. е. в полученном значении следует сохранить на один десятичный знак меньше, чем в значении аргумента. Округляя с одним запасным знаком, получаем 8,63**7** (запасной знак выделен) и заносим результаты в таблицу. Далее $\sqrt{0,927} = 0,9628083$, причем модуль производной $(1/2\sqrt{b})$ меньше единицы, поэтому сохраняем после запятой три знака и один запасной: 0,962**8**. При вычислении суммы в числителе находим $8,637 + 0,9628 = 9,5998$ и согласно правилу 1 округляем результат до тысячных: 9,600. При вычислении b^2 пользуемся правилом 2, при нахождении суммы $a + b^2$ — правилом 1.

При определении количества верных цифр в значении $\ln 3,0153$ снова применяем правило 3 (учитываем, что производная функции $\ln x$ при $x > 1$ имеет значение меньше единицы). Округляя окончательный результат без запасного знака, получим $A = 8,70$ (три верные значащие цифры).

Допустим, что в результате вычисления заданного в примере 1.19 выражения (exp(2,156) + sqrt(0,927))/ln(2,156 + sqrt(0,927)) на МК или компьютере было получено значение: 8,6873389294998. Как выделить в полученном числе верные цифры? Сделать это можно и без подробного поэтапного анализа, который приведен выше.

Действительно, так как выражение A представляет собой дробь, то последнее действие при его вычислении — деление, а следовательно, результат будет содержать верных значащих цифр не более, чем в наименее точном из операндов — числителе или знаменателе. Учитывая, что корень квадратный дает верных цифр столько же, сколько и его аргумент (три), а экспонента в данном случае теряет не более одного верного знака после запятой (что вместе с ненулевой целой частью также дает не менее трех значащих цифр), замечаем, что в числителе число верных значащих цифр будет равно трем. Нетрудно видеть, что в знаменателе число верных цифр (благодаря свойствам производной логарифма) также наверняка не менее трех. Следовательно, значение A должно быть округлено до трех верных знаков: $A = 8{,}70$. Там, где возможен подобный анализ, при использовании МК или компьютера в непосредственных вычислениях по правилам подсчета цифр удается избежать пооперационного учета количества верных знаков.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как формулируются правила подсчета цифр?
2. В каких случаях рекомендуется применять правила подсчета цифр?
3. Какие два способа применения правил подсчета цифр возможны в вычислениях на МК и ЭВМ?
4. Какова последовательность действий на каждом промежуточном этапе расчетной таблицы в вычислениях по правилам подсчета цифр с пооперационным учетом ошибок? На заключительном этапе?

УПРАЖНЕНИЯ

Вычислите на МК или компьютере значения заданных выражений по правилам подсчета цифр двумя способами: 1) с пооперационным анализом результатов; 2) с итоговой оценкой окончательного результата (у числовых данных все цифры верные):

а) $\dfrac{0{,}62+\sqrt{16{,}9}}{\lg 41{,}3}$;   б) $\dfrac{12{,}47+\sqrt{12{,}5^2+14{,}8^2}}{\sin^2 0{,}97+\cos^2 2{,}63}$;

в) $\dfrac{\ln(6{,}91+3{,}35^2)}{\sqrt{626{,}3}}$;   г) $\dfrac{\sqrt[3]{26{,}88}}{e^{3.94}-8{,}04^2}+6{,}19^{1{,}34}$.

1.6.2. Вычисления со строгим учетом предельных абсолютных погрешностей

Этот метод предусматривает использование правил вычисления предельных абсолютных погрешностей, рассмотренных в подразд. 1.4 и 1.5.

При пооперационном учете ошибок (который целесообразен прежде всего для ручных вычислений) промежуточные результаты, так же как и их погрешности, заносятся в специальную таблицу, состоящую из двух параллельно заполняемых частей — для резуль-

e get a

Таблица 1.5

a	b	e^a	$\sqrt{b}$	$e^a + \sqrt{b}$	b^2	$a + b^2$	$\ln(a+b)^2$	A
2,156	0,927	8,637	0,9628	9,603	0,860	3,016	1,104	8,70
Δa	Δb	$\Delta(e^a)$	$\Delta(\sqrt{b})$	$\Delta(e^a + \sqrt{b})$	$\Delta(b^2)$	$\Delta(a + b^2)$	$\Delta\ln(a + b^2)$	ΔA
0,0005	0,0005	0,0049	0,00027	0,0054	0,0016	0,0021	0,00076	0,016

татов и их погрешностей. В табл. 1.5 приведены пошаговые вычисления со строгим учетом предельных абсолютных погрешностей по той же формуле, что и в примере 1.14, и в предположении, что исходные данные a и b имеют предельные абсолютные погрешности $\Delta a = \Delta b = 0{,}0005$ (т. е., что у значений a и b все цифры верны в строгом смысле).

Промежуточные результаты вносятся в таблицу после округления до одного запасного знака (с учетом вычисленной параллельно величины погрешности); значения погрешностей для удобства округляются (с возрастанием!) до двух значащих цифр. Проследим ход вычислений на одном этапе (см. табл. 1.5).

Используя калькулятор, имеем $e^{2,156} = 8{,}63652$. Подсчитаем предельную абсолютную погрешность (см. табл. 1.5): $\Delta(e^{2,156} \cdot 0{,}0005) = 0{,}0043182 \approx 0{,}0044$. Судя по ее величине, в полученном значении экспоненты в строгом смысле верны два знака после запятой. Округляем это значение с одной запасной цифрой: $e^{2,156} \approx 8{,}637$ (запасная цифра выделена) и вносим его в таблицу. Вслед за этим вычисляется полная погрешность полученного результата (погрешность действия плюс погрешность округления: $0{,}0044 + 0{,}00048 \doteq 0{,}0049$), которая также вносится в таблицу. Все последующие действия выполняются аналогично с применением соответствующих формул для предельных абсолютных погрешностей.

Округляя окончательный результат до последней верной в строгом смысле цифры, а также округляя погрешность до соответствующих разрядов результата, окончательно получаем: $A = 8{,}7 \pm 0{,}1$.

Вычисления по методу строгого учета предельных абсолютных погрешностей можно выполнить и программным путем. Однако в тех случаях, когда для вычислений выгоднее применять калькулятор, можно обойтись и без составления программы. Рассмотрим для примера, как можно получить итоговую оценку предельной погрешности результата вычислений на МК по формуле с использованием предельной относительной погрешности.

Пример 1.15. Значения $a = 23{,}1$ и $b = 5{,}24$ даны цифрами, верными строгом смысле. Вычислить значение выражения $B = \dfrac{\sqrt{a}}{b \ln a}$.

С помощью МК получаем $B = 0{,}2921247$. Используя формулы от-›сительных погрешностей частного и произведения, запишем:

$$\delta B = \delta(\sqrt{a}) + \delta b + \delta(\ln a), \text{ т. е.}$$

$$\delta B = \frac{1}{2}\delta a + \delta b + \frac{\delta a}{|\ln a|}.$$

Пользуясь МК (см. также формулу (1.6)), получим $\delta B \approx 0{,}003$, что іет $\Delta B = B\,\delta B = 0{,}0008$. Это означает, что в результате две цифры ›сле запятой верны в строгом смысле: $B = 0{,}003 \pm 0{,}001$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как оформляются вычисления со строгим учетом предельных погрешностей при пооперационном учете ошибок?
2. Какова последовательность действий на каждом промежуточном этапе составления расчетной таблицы в вычислениях по методу строгого учета предельных погрешностей с пооперационным учетом ошибок? На заключительном этапе?
3. Как вычисляются предельные погрешности результата при использовании методики итоговой оценки ошибки вычислений?

УПРАЖНЕНИЯ

У значений $a = 2{,}674$ и $b = 31{,}48$ все цифры верны в строгом смысле. Вычислите значения заданных выражений со строгим учетом границ погрешностей двумя способами:

1) с пооперационным учетом границ погрешностей;
2) с итоговой оценкой точности результата:

а) $\dfrac{ab}{\sqrt{a+b^2}}$; б) $\dfrac{a+\sqrt{b}}{\lg(a^2+b^2)}$; в) $\dfrac{e^a - \sqrt[3]{b}}{\ln(1+a^2)}$; г) $\lg\dfrac{\cos^2 a + b}{a^{\sqrt{b}} + b^{\sqrt{a}}}$.

1.6.3. Вычисления по методу границ

Если нужны абсолютно гарантированные границы возможных іачений вычисляемой величины, используют специальный метод ıчислений — ***метод границ***.

e get a

Пусть $f(x, y)$ — функция, непрерывная и монотонная в некоторой области допустимых значений аргументов x и y. Нужно получить ее значение $f(a, b)$, где a и b — приближенные значения аргументов, причем достоверно известно, что

$$\text{НГ}_a < a < \text{ВГ}_a, \ \text{НГ}_b < b < \text{ВГ}_b. \tag{1.20}$$

Здесь НГ, ВГ — обозначения соответственно нижней и верхней границ значений параметров. Итак, вопрос состоит в том, чтобы найти строгие границы значения $f(a, b)$ при известных границах значений a и b.

Допустим, что функция $f(x, y)$ возрастает по каждому из аргументов x и y. Тогда $f(\text{НГ}_a, \text{НГ}_b) < f(a, b) < f(\text{ВГ}_a, \text{ВГ}_b)$. Пусть теперь $f(x, y)$возрастает по аргументу x и убывает по аргументу y. Тогда будет строго гарантировано выполнение неравенства:

$$f(\text{НГ}_a, \text{ВГ}_b) < f(a, b) < f(\text{ВГ}_a, \text{НГ}_b).$$

Указанный принцип особенно очевиден для основных арифметических действий. Пусть, например, $f(x, y) = x + y$. Тогда очевидно, что

$$\text{НГ}_a + \text{НГ}_b < a + b < \text{ВГ}_a + \text{ВГ}_b. \tag{1.21}$$

Точно так же для функции $f_2(x, y) = x - y$ (она по x возрастает, а по y убывает) имеем:

$$\text{НГ}_a - \text{НГ}_b < a - b < \text{ВГ}_a - \text{НГ}_b. \tag{1.22}$$

Аналогично для умножения и деления:

$$\text{НГ}_a \cdot \text{НГ}_b < ab < \text{ВГ}_a \cdot \text{ВГ}_b, \tag{1.23}$$

$$\frac{\text{НГ}_a}{\text{ВГ}_b} < \frac{a}{b} < \frac{\text{ВГ}_a}{\text{НГ}_b}. \tag{1.24}$$

Рассмотрим функцию $\dfrac{1}{\ln(x - y)}$. Замечаем, что при увеличении x она убывает, а с увеличением y — возрастает (разумеется, при соблюдении условий существования). Следовательно, имеет место неравенство:

$$\frac{1}{\ln(\text{ВГ}_a - \text{НГ}_b)} < \frac{1}{\ln(a - b)} < \frac{1}{\ln(\text{НГ}_a - \text{ВГ}_b)}.$$

Вычисляя по методу границ с пошаговой регистрацией промежуточных результатов, удобно использовать обычную вычислительую таблицу, состоящую из двух строк — отдельно для вычисления [Г- и ВГ-результата. По этой причине метод границ называют еще *етодом двойных вычислений*. При выполнении промежуточных вычислений и округлении результатов используются все рекомендации равил подсчета цифр с одним важным дополнением: округление ижних границ ведется по недостатку, а верхних — по избытку.)кончательные результаты округляются по этому же правилу до оследней верной цифры.

Пример 1.16. В табл. 1.6 приведены вычисления по формуле $A = \frac{e^a + \sqrt{b}}{\ln(a + b^2)}$ методом границ. Нижняя и верхняя границы значеий a и b определены из условия, что в исходных данных $a = 2{,}156$ $b = 0{,}927$ все цифры верны в строгом смысле ($\Delta a = \Delta b = 0{,}0005$), .е. $2{,}1555 < a < 2{,}1565$; $0{,}9265 < b < 0{,}9275$.

Таким образом, результат вычислений значения A по методу раниц имеет вид:

$$8{,}6894 < A < 8{,}7041.$$

Способ границ связан со способом строгого учета предельных бсолютных погрешностей следующим образом. Пусть X — точное начение некоторой величины, e_x — его приближение с известными раницами $НГ_x$ и $ВГ_x$.

Примем x равным значению $\frac{НГ_x + ВГ_x}{2}$, тогда абсолютная погрешность e_x этого приближения (рис. 1.8) будет заведомо не больше юлуразности $e_x = \frac{ВГ_x - НГ_x}{2}$.

Так, по результатам вычислений в табл. 1.6 получаем:

Таблица 1.6

Параметр	a	b	e^a	$\sqrt{b}$	$e^a + \sqrt{b}$
НГ	2,1555	0,9265	8,63220	0,96255	9,59475
ВГ	2,1565	0,9275	8,64084	0,96307	9,60391

Окончание табл. 1.6

Параметр	b^2	$a + b^2$	$\ln(a + b^2)$	A
НГ	0,85840	3,01434	1,10338	8,6894
ВГ	0,86026	3,01676	1,10419	8,7041

ную таблицу, состоящую из двух строк — отдельно для вычисления НГ- и ВГ-результата. По этой причине метод границ называют еще *методом двойных вычислений*. При выполнении промежуточных вычислений и округлении результатов используются все рекомендации правил подсчета цифр с одним важным дополнением: округление нижних границ ведется по недостатку, а верхних — по избытку. Окончательные результаты округляются по этому же правилу до последней верной цифры.

Пример 1.16. В табл. 1.6 приведены вычисления по формуле $A = \dfrac{e^a + \sqrt{b}}{\ln(a + b^2)}$ методом границ. Нижняя и верхняя границы значений a и b определены из условия, что в исходных данных $a = 2{,}156$ и $b = 0{,}927$ все цифры верны в строгом смысле ($\Delta a = \Delta b = 0{,}0005$), т. е. $2{,}1555 < a < 2{,}1565$; $0{,}9265 < b < 0{,}9275$.

Таким образом, результат вычислений значения A по методу границ имеет вид:

$$8{,}6894 < A < 8{,}7041.$$

Способ границ связан со способом строгого учета предельных абсолютных погрешностей следующим образом. Пусть X — точное значение некоторой величины, e_x — его приближение с известными границами $НГ_x$ и $ВГ_x$.

Примем x равным значению $\dfrac{НГ_x + ВГ_x}{2}$, тогда абсолютная погрешность e_x этого приближения (рис. 1.8) будет заведомо не больше полуразности $e_x = \dfrac{ВГ_x - НГ_x}{2}$.

Так, по результатам вычислений в табл. 1.6 получаем:

Таблица 1.6

Параметр	a	b	e^a	$\sqrt{b}$	$e^a + \sqrt{b}$
НГ	2,1555	0,9265	8,63220	0,96255	9,59475
ВГ	2,1565	0,9275	8,64084	0,96307	9,60391

Окончание табл. 1.6

Параметр	b^2	$a + b^2$	$\ln(a + b^2)$	A
НГ	0,85840	3,01434	1,10338	8,6894
ВГ	0,86026	3,01676	1,10419	8,7041

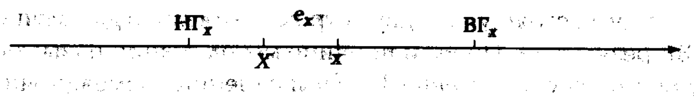

Рис. 1.8. Связь между абсолютной погрешностью и границами значений числа

$$A = \frac{8{,}6894 + 8{,}7041}{2} = 8{,}69675\,,\quad \Delta A = \frac{8{,}7041 - 8{,}6894}{2} = 0{,}00735\,,$$

что дает $A = 8{,}697 \pm 0{,}008$, или, при записи цифрами, верными в строгом смысле:

$$A = 8{,}7 \pm 0{,}01.$$

Вычисления по методу границ можно вести и без пошагового фиксирования промежуточных результатов. Пусть, например, нужно найти границы значения выражения:

$$Z = \frac{\sqrt{x}}{\ln(x - y^2)},$$

если $4{,}845 < x < 4{,}855$; $1{,}215 < y < 1{,}225$.

Имеем

$$\frac{\sqrt{\text{НГ}_x}}{\ln(\text{ВГ}_x - (\text{НГ}_y)^2)} < Z < \frac{\sqrt{\text{ВГ}_x}}{\ln(\text{НГ}_x - (\text{ВГ}_y)^2)}.$$

С помощью МК вычислим значения нижней и верхней границ Z:

$$1{,}807895009 < Z < 1{,}825100030.$$

Если нет нужды держать в результате слишком большое количество значащих цифр, его можно округлить (нижнюю границу — по убыванию, верхнюю — по возрастанию). Так, округляя границы Z до сотых, будем иметь

$$1{,}80 < Z < 1{,}83, \text{ т. е. } Z = 1{,}81 \pm 0{,}01.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем основное отличие метода границ от вычислений по методу строгого учета границ погрешностей?
2. Какова последовательность действий на каждом промежуточном этапе расчетной таблицы в вычислениях по методу границ с пооперационным учетом ошибок? На заключительном этапе?