

ӘОЖ 373.1.02:372.851

Қолжазба құқығында

ЖУМАЛИЕВА ЛЯЗЗАТ ДАУРЕНБАЕВНА

**Орта мектепте математикалық есептерді шығаруды оқытудың
әдістемелік негіздері**

6D010900 – Математика

Философия докторы (PhD)
дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Отандық ғылыми кеңесші
педагогика ғылымдарының докторы,
ҚР ҰҒА корреспондент мүшесі,
профессор, Әбілқасымова А.Е.
Шетелдік ғылыми кеңесші:
педагогика ғылымдарының кандидаты,
доцент Седова Е.А.

Қазақстан Республикасы
Алматы, 2017

МАЗМҰНЫ

КІРІСПЕ.....	3
1 МЕКТЕП МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЕСЕПТЕРІН ШЫҒАРУДЫ ОҚЫТУДЫҢ ТЕОРИЯЛЫҚ НЕГІЗДЕРІ.....	10
1.1 Математиканы оқыту процесіндегі есептердің рөлі мен функциясы...	10
1.2 Математикалық есептердің классификациясы.....	19
1.3 Математикалық есептерді шығаруды оқытудың мәселелері.....	30
Бірінші бөлім бойынша тұжырым.....	48
2 МАТЕМАТИКАДАН ЕСЕПТЕРДІ ШЫҒАРУДЫ ОҚЫТУДЫҢ ӘДІСТЕМЕСІ БОЙЫНША ТӘЖІРИБЕЛІК ЖҰМЫС.....	49
2.1 Мектепте математикадан есептерді шығаруды оқытуды ұйымдастыру	49
2.2 Алгебра курсында мәтінді және стандартты емес есептерді шығаруды оқытудың әдістемесі.....	65
2.3 Математикадан есептерді шығаруды оқыту бойынша педагогикалық эксперимент.....	108
Екінші бөлім бойынша тұжырым	115
ҚОРЫТЫНДЫ.....	116
ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ.....	118
ҚОСЫМШАЛАР.....	124

КІРІСПЕ

Зерттеудің өзектілігі. Елбасымыз Н.Назарбаев «Қазақстан – 2050» стратегиясы қалыптасқан мемлекеттің жаңа саяси бағыты» атты халыққа Жолдауында «...бәсекеге қабілетті дамыған мемлекет болу үшін біз сауаттылығы жоғары елге айналуымыз керек. Қазіргі әлемде жай ғана жаппай сауаттылық жеткіліксіз болып қалғалы қашан. Біздің азаматтарымыз үнемі ең озық жабдықтармен және заманауи өндірісте жұмыс жасау машығын меңгеруге дайын болуы тиіс. Сондай-ақ, балаларымыздың, жалпы барлық ұрпақтың функционалдық сауаттылығына да зор көңіл бөлу қажет. Балаларымыз қазіргі заманға бейімделген болуы үшін бұл аса маңызды» деп тұжырымдады. Ендеше, еліміз сенім артып отырған бүгінгі оқушы, ертеңгі студент, яғни мамандар заман талабына сай, терең білімді, пайым-парасаты мол, өрелі жастар болуы керек [1].

Қазіргі заман талабына сай еліміздің білім беру жүйесін жаңғыртудың негізгі бағыттары Қазақстан Республикасында Білім беруді және ғылымды дамытудың 2016-2019 жылдарға арналған мемлекеттік бағдарламасында анық көрсетілген. Ондағы басты міндет – білім беру сапасын көтеру және және ұлттық білім беру жүйесінің бәсекеге қабілеттілігін арттыру. Сондықтан оқыту әдістемесін жетілдіру және оқушыларды даярлау тиімділігін одан әрі көтеру қажеттілігі анық мәселе [2].

Математикалық білім беру үздіксіз білім беру жүйесінің бір бөлігі және қазіргі қоғамда адамның зияткерлік қабілетінің дамуын қамтамасыз етуде маңыздылығы жоғары. Ал, орта білім беру жүйесінде математиканы оқыту оқушылардың танымдық қабілеттері мен логикалық ойлауын дамытумен ерекше орын алады.

Қазақстан Республикасы орта білім берудің (бастауыш, негізгі орта, жалпы орта білім беру) мемлекеттік жалпыға міндетті стандартына сәйкес «Математика» пәнінен оқу бағдарламаларында оқытудың мақсаты: «...практикалық іс-әрекетте пайдалануға, сабақтас пәндерді оқып үйренуге, білім алуды жалғастыруға қажетті нақты математикалық білімді меңгерту және оқушылардың логикалық ойлауын, дәлелдеулер жасай білу, есептерді шығару біліктері мен дағдыларын дамыту, математикалық сауаттылығын қалыптастыру», – деп анықталған [3].

Математиканы оқытуда есептерді шығару маңызды рөл атқарады. Оқытудың түпкілікті мақсаты оқушылардың белгілі бір есептер жүйесін шығарудың әдістері мен тәсілдерін меңгеруі және мектеп математика курсындағы ұғымдар мен әдістерді игеруі болады. Математикалық есептерді шығаруды оқытудың дұрыс ұйымдастырылған әдістемесі оқушылардың ойлауы мен математикалық мәдениетін дамытуға, сондай-ақ математиканың практикалық қолдану білігі мен дағдыларын қалыптастыруға үлкен септігін тигізеді.

Дегенмен, математикадан пәндік білімге негізделген дәстүрлі оқыту жүйесі теорияны оқытуға баса назар аударылып, есептер шығаруды оқыту төмен деңгейде жүзеге асыратыны белгілі. Нәтижесінде, оқушылар алған

математикалық білімін тиімді қолдану қабілеттері мен есептерді шығару біліктерінің жеткіліксіз мөлшерде екенін байқауға болады. Сонымен қатар, жоғары оқу орындарына түсуге арналған іріктеу емтихандарының бір нысаны болатын ұлттық бірыңғай тестілеудің нәтижелері мектеп түлектерінің математикадан есептерді шығару біліктері мен дағдыларының әлі де болса төмен деңгейде екенін көрсетіп отыр. Осыған орай, оқушылардың математикадан ойлау қабілеті мен сауаттылығын дамытудың бірден бір негізгі құралы есептер және оларды шығаруды оқыту әдістемесі болып табылатыны айқын.

Зерттеудің тақырыбын таңдау орта мектеп оқушыларына математикалық есептерді шығаруды оқытып-үйретудің педагогикалық теориясы мен практикасын одан әрі дамытудың қажеттіліктерімен, оқушылардың дайындық деңгейіне қойылатын талаптар мен нақты нәтижелері арасындағы қарама-қайшылықтардың болуымен, сондай-ақ жаңартылған білім беру мазмұны бойынша есептерді шығаруды оқытудың әдістемелік негіздерінің жеткіліксіз әзірленуімен негізделеді.

Жалпы білім беретін мектеп оқушыларының математикалық білімдерін қалыптастыру мен дамыту бойынша көптеген диссертациялық зерттеулер жүргізілген. Сонымен қатар, психологиялық-педагогикалық, әдістемелік әдебиеттерде оқушыларды оқыту мен тәрбиелеу процесінде есептерді қолданудың әртүрлі аспектілері (қырлары) қарастырылған.

Есептердің мәні, олардың оқу процесіндегі маңыздылығы мен функциялары Д.Б.Богоявленский, Дж.Брунер, В.В.Давыдов, К.Дункер, А.В.Запорожец, В.П.Зинченко, А.Н.Леонтьев, А.М.Матюшкина, Н.А.Менчинская, Л.Рубинштейн және т.б. психологтардың зерттеулерінде қарастырылған.

Есептерді шығаруды оқытудың әдістемесін жетілдіру, математиканы оқытудағы есептердің ролі мен орнын анықтау және қолдану мәселелері И.Б.Бекбоев, Д.В.Клименченко, Ю.М.Колягин, Д.Пойа, Л.М.Фридман, В.И.Крупич, П.М.Эрдниев, Б.П.Есипов, И.Я.Лернер, А.В.Усованың еңбектерінде орын алған.

Қазақстанда математикалық білім беруді дамытумен оқушылардың ойлау іс-әрекетін жандандыру және математиканы оқыту әдістемесінің теориялық негізі болатын есептерді шығаруды оқытудың мәселелері белгілі ғалым-әдіскерлер А.Е.Әбілқасимова, Б.Б.Баймұханов, М.Е.Есмұхан, Ә.К.Қағазбаева, А.М.Мүбараков, Л.У.Жадраева, Е.Ж.Смағұлов, Л.Т.Искакованың және т.б. еңбектерінде қарастырылған [4-17].

Математика мұғалімдерінің жұмыстарының іс-тәжірибелеріне талдау жасау оқушылардың есеп шығару процесі оларды есептерді шығаруға үйрету құралы болмайтынын көрсетті. Көп жағдайда оқушылар мен мұғалімдердің ең басты назары есепте берілген сұраққа жауап табуға бағытталады. Осылайша оқушыларды есептің шешімін іздеуге оқытудың келесідей маңызды сұрақтары ескерусіз қалады: есепті шығару жолын өздігінен қалай іздестіруге болады, ол үшін не істеу керек, есептердің шешімін іздестірудің қандай жолдары мен әдістері бар?

Аталған ғылыми еңбектер мен зерттеулерді талдай келе, бүгінгі күні осы сұрақтарға өз деңгейінде жауап берілмегеніне, заман талабына сәйкес оқушылардың есептерді шығару біліктілігін қалыптастыратын оқу іс-әрекеттерін ұйымдастыру әдістері мен тәсілдері әлі де болса шешімін табу қажеттігіне көз жеткіздік.

Жоғарыда айтылғандарды ескере отырып, орта мектепте білім беру процесінде математикалық есептерді шығаруды оқытудың әдістемелік негіздерінің жеткіліксіз әзірленуі мен оқушылардың математикадан есептерді, оның ішінде стандартты емес және қиындығы жоғары есептерді шығару білігін меңгерудің қажеттілігі арасындағы белгілі дәрежедегі объективті қарама-қайшылықтардың бар болуы біздің зерттеу жұмысымыздың *көкейкестілігін* айқындайды. Ал, оқушыларға математикалық есептерді, оның ішінде стандартты емес және қиындығы жоғары есептерді шығаруды оқытудың заманауи әдістемелерін әзірлеудің қажеттілігі біздің зерттеу жұмысымыздың тақырыбын «Орта мектепте математикалық есептерді шығаруды оқытудың әдістемелік негіздері» деп алуымызға себеп болды.

Жоғарыда тұжырымдалған қарама-қайшылықтар орта мектепте оқушыларды математикалық есептерді шығаруды оқытудың теориялық-әдістемелік негіздемесі ретінде зерттеу мәселесін анықтады.

Зерттеудің мақсаты: орта мектепте математиканы оқыту процесінде есептерді шығаруды оқытудың әдістемелік негіздерін жасау және оны тәжірибе жүзінде іске асыру.

Зерттеу нысаны: орта мектепте математиканы оқыту процесі.

Зерттеу пәні: негізгі мектеп оқушыларын математикалық есептерді шығаруды оқыту әдістемесі.

Зерттеудің ғылыми болжамы: егер орта мектепте математика сабағында оқушылардың оқу іс-әрекетін ұйымдастыру тәсілдері мен математикалық есептерді шығаруды оқытудың әдістемесі заман талаптарына сәйкес жүйелі түрде жасалса, онда оқушылардың математика курсынан танымдылығы ғана емес, математикалық есептерді шығару білігінің қалыптасу деңгейі және математиканы оқып білуге деген қызығушылығы мен саналылығы, білімді меңгеру сапасы артады.

Диссертациялық жұмыстың мақсаты, пәні және болжамы **зерттеудің келесі міндеттерін** шешуге мүмкіндік берді:

- математиканы оқыту процесінде оқушылардың ойлау қабілетін дамыту құралы ретінде есептердің рөлі мен маңыздылығын, функцияларын, классификациясын, есептерді шығаруды оқытудың әдістемелік негіздерін айқындау;
- оқушыларды математикалық есептерді шығаруға оқытуды ұйымдастырудың әдістемесін жасау;
- алгебра курсында мәтінді және стандартты емес есептерді шығаруды оқыту әдістемесін жасау;
- орта мектепте математикалық есептерді шығаруды оқыту әдістемесінің тиімділігін эксперимент жүзінде тексеру және оны оқу процесіне енгізу.

Зерттеудің әдістері:

– математикадан есептерді шығаруды оқытуға бағытталған ғылыми-теориялық мәселелерге, философиялық, психологиялық, педагогикалық, әдістемелік және математикалық әдебиеттерге, сонымен қатар жалпыға міндетті білім беру стандарттарына, математика пәнінен оқу бағдарламаларына, оқулықтарға, оқу құралдарына және оқу-әдістемелік кешендеріне теориялық талдау жасау;

– зерттеудің болжамын тексеру үшін педагогикалық эксперимент жүргізу және олардың нәтижелерін өңдеу;

– зерттеудің нәтижелерін әдістемелік семинарларда, ғылыми-практикалық конференцияларда талқылау.

Зерттеудің әдіснамалық негіздері: П.Я.Гальпериннің ақыл-ой қызметін қалыптастыру теориясы, жеке тұлғаның дамуындағы теория мен практиканың диалектикалық өзара байланысы туралы қазіргі ғылымның қағидасы; оқу процесін ұйымдастырудағы тұлғаға бағытталған теориясы; оқушылардың оқу іс-әрекетін қалыптастыру теориясы; математикадан есептер шығаруды оқыту мәселелері бойынша белгілі ғалым-педагогтардың, әдіскерлердің (А.Е.Әбілқасымова, Г.А.Балл, Г.П.Бевз, А.М.Пышкало, З.А.Скопец, А.А.Столяр, Ю.М.Колягин, В.И.Крупич, Д.Пойа, Р.С.Черкасов, П.М.Эрдниев, Л.М.Фридман, И.Б.Бекбоев, Б.Б.Баймұханов, Ә.К.Қағазбаева, Л.Т.Искакова, Е.Ж.Смағұлов және т.б.) жұмыстары.

Зерттеудің теориялық негіздері: зерттеу мәселелері бойынша философиялық, психологиялық, педагогикалық, әдістемелік және математикалық еңбектер; орта мектепте математикалық есептерді шығаруды оқытудың әдіснамалық негіздері.

Зерттеу көздері: Қазақстан Республикасының «Білім туралы» заңы; Қазақстан Республикасында білім беруді және ғылымды дамытудың 2016-2019 жылдарға арналған мемлекеттік бағдарламасы, Қазақстан Республикасының орта білім берудің мемлекеттік жалпыға міндетті стандарты, оқу бағдарламалары, оқулық, оқу-әдістемелік кешендері, математиканы оқыту мен тәрбиелеу мәселелері бойынша философиялық, психологиялық, педагогикалық, әдістемелік еңбектер.

Зерттеу кезеңдері:

Бірінші кезеңде (2014-2015ж.ж.) психологиялық-педагогикалық, әдістемелік әдебиеттермен танысу, эмпирикалық материалдарды жинақтау жүргізілді, қолданыстағы оқу-әдістемелік әдебиеттерге, заңнамалық және бағдарламалық құжаттарға талдау жасалды, орта мектепте оқушыларға математикадан есептерді шығаруды оқытудың тәжірибесінде қалыптасқан қарама-қайшылықтар айқындалды; болжамның нұсқасы тұжырымдалды; зерттеудің ұғымдық аппараты қалыптасты және жүйеленді. Дидактикалық материалдар жасалынды, сонымен қатар математикадан есептерді шығаруда білік пен дағдыны қалыптастыру құралы болатын есептер жүйесі жасалынды.

Екінші кезеңде (2015-2016ж.ж.) теориялық және эмпирикалық мәліметтер жүйеленіп және сыни тұрғыда талдаулар жүргізілді, тұжырымдамалық деңгейде айқындалып және жапыланды, болжамы нақтыланды; оқушылардың

математикадан есептерді шығару біліктігінің қалыптасу деңгейін анықтау мақсатында диагностикалық жұмыстар жүргізілді; тәжірибелік-эксперименттік жұмыстар іске асырылды және есептерді шығаруды оқытудың ұсынылған әдістемесі сынақтан өткізілді.

Үшінші кезеңде (2016-2017ж.ж.) оқу эксперименттері іске асырылды және зерттеу барысында алынған эксперименттік және теориялық материалдар қорытындыланды, оларды оқу процесіне енгізу бойынша ұсынымдар жасалды, диссертациялық жұмыс рәсімделді.

Зерттеудің ғылыми жаңалығы:

1. Математиканы оқыту процесінде оқушылардың ойлау қабілетін дамыту мен жаңа ұғымдарды қалыптастыру құралы ретінде есептердің рөлі мен маңыздылығы, функциялары, классификациясы, «есеп», «есепті шығару» ұғымдарының мәні нақтыланды.

2. Оқушылардың логикалық ойлауын дамытуға бағытталған деңгейлік есептер, оның ішінде стандартты емес есептер жүйесін құрастыру принциптері және оларды шығару тәсілдері нақтыланды.

3. Математикалық есептерді шығаруды оқытуды ұйымдастырудың тәсілдері мен негізгі мектептің алгебра курсына мәтінді және стандартты емес есептерді шығаруды оқыту әдістемесі жасалды.

Зерттеудің теориялық маңыздылығы тұтастық принцип негізінде алгебра курсы бойынша математикалық есептер және математиканы оқыту процесінде оқушылардың оқу іс-әрекетін қалыптастыруға бағытталған деңгейлік тапсырмалар жүйесі жасалынуынан тұрады. Сонымен қатар, математикалық есептерді шығарудың тиімді тәсілдері ұсынылған.

Зерттеудің практикалық маңыздылығы: диссертацияда тұжырымдалған теориялық қағидалар және математиканы оқыту процесінде оқушыларды есептерді шығаруға оқыту мен оқу іс-әрекеттерін ұйымдастыру бойынша әдістемелік ұсынымдарды математика мұғалімдері өздерінің практикалық қызметтерінде оқушылардың білім, білік және дағдыларының сапасын арттыру үшін тиімді пайдалана алады. Зерттеу нәтижелерін орта мектепте және жоғары оқу орындарында болашақ математика мұғалімдерін даярлауда математиканы оқыту мазмұны мен әдістемесін жетілдіруде пайдалануға болады.

Қорғауға ұсынылатын негізгі қағидалар:

1. Орта мектепте математикалық есептерді шығаруды оқытудың теориялық негіздері және білім беру процесіндегі жүйелі-әрекеттік тәсіл негізінде тұжырымдалған «есеп», «есепті шығару» ұғымдарының сипаттамалары.

2. Математикалық есептерді шығару біліктігін қалыптастыруға бағытталған оқушылардың оқу іс-әрекетін ұйымдастырудың және деңгейлік есептер жүйесін құрастырудың әдістемелік ерекшеліктері.

3. Орта мектеп оқушыларының математикалық білім деңгейін көтеруге ықпал ететін алгебра курсына мәтінді және стандартты емес есептерді шығаруды оқытудың әдістемесі.

Зерттеу нәтижелері бойынша жарияланымдар. Диссертациялық жұмыстың мазмұны бойынша жарияланған еңбектердің жалпы саны – 15, оның ішінде ҚР білім және ғылым саласын бақылау комитеті тізіміндегі басылымдарда – 3, халықаралық ғылыми конференциялар жинағында – 5, республикалық ғылыми конференциялар жинағы мен журналында – 2, Scopus базасына енген журналдарда – 1, Ресейдің ғылыми журналында – 1, оқу құралы – 3.

Орта білім беру мазмұнын жаңарту аясында ҚР Білім және ғылым министрлігі бекіткен математикадан оқу бағдарламасы бойынша қазақ, орыс, ұйғыр және өзбек тілдерінде жалпы білім беретін мектептерге арналған «Алгебра: Есептер жинағы» оқу құралдарын (Алматы: Мектеп, 2017. – 36 б.) әзірледік және олармен республиканың негізгі мектеп оқушылары білім алуда. Сонымен қатар «Методические основы обучения решению математических задач в школе» оқу құралын (Алматы: Мектеп, 2017. – 252 б.) әзірледік. Ол мектеп мұғалімдеріне, жоғары оқу орнының математиканы оқыту әдістемесі кафедрасының оқытушыларына, біліктілік арттыру институттарының мамандарына, PhD докторанттар, магистранттар мен студенттерге арналған.

Диссертациялық жұмыстың қағидалары мен нәтижелері халықаралық конференцияларда: «Мектепте және жоғары оқу орындарында математиканы, физиканы және информатиканы оқытуды жетілдіру мәселелері» (Алматы, 2014 жыл), «Актуальные проблемы преподавания математики в школе и педвузе» (Мәскеу, 2015 жыл), «Радиациялық-термиялық құбылыстар және инновациялық технологиялар» (Алматы, 2015 жыл), «Актуальные проблемы обучения математике в школе и вузе в свете идей Л.С.Выготского» (Мәскеу, 2016 жыл), «Механика жүйелерін және физикалық процестерді математикалық модельдеу» (Алматы, 2015 жыл), «Актуальные научные исследования в современном мире» (Переяслав-Хмельницкий, 2017 жыл), сонымен қатар Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті Математика, физика және информатика институтының математика, физика және информатиканы оқыту әдістемесі кафедрасының мәжілістерінде талқыланды.

Диссертация құрылымы және көлемі. Диссертация кіріспеден, екі бөлімнен, қорытындыдан, пайдаланылған әдебиеттер тізімінен және қосымшалардан тұрады.

Кіріспеде зерттеу тақырыбының көкейкестілігі негізделді, зерттеудің мақсаты, міндеттері, нысаны, әдіснамалық және теориялық негіздері мен болжамы анықталды, ғылыми жаңалығы, зерттеудің теориялық және практикалық маңыздылығы, жүргізілген жұмыстың кезеңдері мен әдістері, қорғауға ұсынылатын негізгі қағидалар, сынақтан өткізу мәліметтері мен зерттеу нәтижелері бойынша жарияланымдар тұжырымдалды.

Бірінші «Мектеп математикалық есептерін шығаруды оқытудың теориялық негіздері» бөлімінде «есеп», «есепті шығару» ұғымдарының мәні, математиканы оқыту процесіндегі есептердің рөлі мен функциясы, классификациясы айқындалды, математикалық есептерді шығару біліктігін қалыптастыруға бағытталған деңгейлік есептер жүйесін құрастыру принциптері, есептерді шығару әдістері негізделді.

Екінші «Математикадан есептерді шығаруды оқытудың әдістемесі бойынша тәжірибелік жұмыс» бөлімінде математикалық есептерді шығаруды оқыту бойынша оқушылардың оқу іс-әрекетін ұйымдастыру тәсілдері мен негізгі мектептің алгебра курсына мәтінді және стандартты емес есептерді шығаруды оқыту әдістемесі берілді. Эксперименттік зерттеу жұмысының нәтижелері жинақталды, талдау жасалынды және қорытындыланды.

Қорытындыда зерттеу барысында алынған ғылыми-педагогикалық нәтижелердің маңыздылығы сипатталып, негізгі теориялық және тәжірибелік қорытындылары, әдістемелік ұсынымдар тұжырымдалған, зерттеу мәселесінің одан әрі келешегі айқындалған.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі зерттеу барысында талданған философиялық, психологиялық, педагогикалық, әдістемелік және арнаулы әдебиеттер қамтылған.

Қосымшада зерттеу барысында қолданылған материалдар келтірілген.

1 МЕКТЕП МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЕСЕПТЕРІН ШЫҒАРУДЫ ОҚЫТУДЫҢ ТЕОРИЯЛЫҚ НЕГІЗДЕРІ

1.1 Математиканы оқыту процесіндегі есептердің рөлі мен функциясы

Білім беру жүйесінің қазіргі даму кезеңінде есептің математиканы оқытудағы рөлі біріншіден, олардың оқу нәтижесін береді, оқушылардың қандайда бір есептерді шығара алуы болып табылады; екіншіден, оқытудың мақсатына жету оқушыларды математикадан есептерді шығаруға үйрету арқылы жүзеге асады; үшіншіден, бірқатар тақырыптарды (мысалы, сызықты, квадратты және тағы басқа теңдеулерге арналған есептерді шығару әдістерін оқытуда) оқыту пәні болып табылады. Демек, есептерді шығару математиканы оқытудың нәтижесі, құралы және пәні болып табылады. Оқушылардың қандайда бір есепті шығару іс-әрекеті оның есепті шығару процесіндегі ойлануымен байланысты. Математикалық есептерді шығаруға оқытудың дұрыс әдістемесі оқушылардың математикадан білім, білік және дағдыларының жоғары деңгейде қалыптасуына әсер етеді.

Осылайша, есеп – әрбір оқушының ойының шындалуының негізгі құралы болып табылады. Сондықтан, математиканы оқыту барысында есептер әртүрлі функциялар атқарады. Математикалық оқу есептері оқушылардың мектеп математика курсына, сонымен қатар жалпы теорияның ұғымдары мен әдістерін меңгерудің ең тиімді және таптырмас құралы болады. Есептер оқушылардың ойлауын дамытуда және тәрбиелеуде, сонымен қатар, математиканы практикада қолданудың білігі мен дағдысын қалыптастыруда үлкен рөлге ие [4].

Математиканы оқытудағы есептер мәселесіне байланысты әдістемелік сұрақтарды шешуде айтарлықтай үлес қосқан әдіскер-математиктердің (Г.Д.Балк, Г.А.Балл, Г.П.Бевз, А.М.Пышкало, З.А.Скопец, А.А.Столяр, Ю.М.Колягин, В.И.Крупич, В.В.Фирсов, Р.С.Черкасов, П.М.Эрдниев, Л.М.Фридман, А.Е.Әбілқасимова, В.А.Гусев, Г.В.Дорофеев, К.И.Нешков және т.б.), жұмыстарына талдау жасай келе есепті шығару математикадан білім мен іс-әрекеттер тәсілін қалыптастырудың негізгі құралы, есептерді шығару оқушылардың математикалық білімін дамытудың тиімді тәсілі болып табылатынын көреміз [18].

Қазіргі кезеңде заман талабына сай жаңартылған білім мазмұны бойынша орта мектептегі білім беру процесінің ұйымдастырылуы іс-әрекеттік тәсіл негізінде іске асып жатыр. Іс-әрекеттік тәсіл педагогикалық және психологиялық зертеулерде тұлғаның дамуы мен қалыптасуының негізгі категориясы болып табылады. Мұнда, есепті тұтас жүйелі объект ретінде қарастырады. В.Г.Афанасьев: «Тұтастықты, тұтас жүйені тану – адамның санасына белгілі бір ұғымдармен, категориялармен, теориялармен оның ішкі табиғатын, негізгі ерекшеліктерін бейнелеу», - дейді. Тұтастықты тану ол:

– оның болмысын, оған тән сапалық ерекшеліктері мен біріктіруші қасиеттерін білу;

– құрамын, яғни оның бөліктерінің сандық және сапалық белгілерін, олардың координациясын және субординациясын, тұтас объектінің

қозғалысының және дамуының маңызды көзі болып табылатын әртүрлі қасиеттері мен қайшылықтарын білу;

- құрылымын, яғни ішкі бөліктерінің құрылуын, компоненттерінің өзара байланысын білу, және оларды анықтау;

- функциясын, яғни оның бөліктерінің функцияларын, дамуын, белсенділігін анықтау және олардың тұтастықтың жалпы функциясына әсерін анықтау;

- жүйенің тұтастығын, оның дамуы мен жетілуін, сыртқы ортамен байланысын және өзара әсерін, тұтастықпен байланысын қамтамасыз ететін біріктіруші, жүйелеуші факторларды, механизмдерді анықтау;

- берілген тұтастықтың тарихын, бастамалары мен пайда болуын, дамуының бағыты мен болашағын, жаңа тұтас жүйеге айналуын білу [19].

«Есеп» ұғымының мағынасын ашуда жүйелік тәсіл берілген ұғымды объект, құрал және нәтиже ретінде қарастыруға мүмкіндік береді. Психологиялық әдебиеттерде «есеп» ұғымын анықтаудың бірнеше тәсілдері бар. Соның ішінде көп қолданылатыны есепті қандайда бір танымдық нәтижеге қол жеткізудегі ойлау әрекетінің мақсаты ретінде түсіну. Ғалымдар арасында математика, психология және педагогика салаларында «есеп» терминіне пәннің ерекшелігіне байланысты әртүрлі көзқарастар қалыптасқан, есепті шығару процесінде адам мүмкіндіктерінің іске асуы мен дамуы тұрғысынан да қарастырады.

Мысалы, Г.А.Балл өзінің зерттеуінде есептің дәстүрлі педагогикалық ұғым шеңберінен шығып оны қандайда бір жүйе ретінде қарастырады. Есептік тәсілді «субъектілердің барлық іс-әрекеттерін, соның ішінде мұғалім мен оқушының әртүрлі есептерді шығару процесіндегі іс-әрекетін жүйе ретінде сипаттау және жобалау жөн болады» деп тұжырымдайды.

Г.А.Баллдың есепті міндетті компоненттері бар жүйе ретінде а) бастапқы күйінде болатын есептің пәні; ә) есептің пәні бойынша талап ететін моделі (есептің шартына ұқсас). Сонымен қатар, енгізілген ұғым кең мағынада болғандықтан, ол тек психология мен педагогикада ғана емес сонымен қатар басқа ғылымдарда да бар [20].

Л.М.Фридманның пікірінше «есеп» ұғымы «мәселелі жағдай» ұғымымен байланысты болады. Демек автор, «есептің генезисын іс-әрекет процесінде субъектінің тап болған мәселелі жағдайды модельдеуі деп, ал есептің өзін – табиғи белгілер немесе жасанды тілдер көмегімен көрсетілетін мәселелі жағдайдың моделі» деп қарастырады [21].

Л.Л.Гурова есеп – белгілі және белгісіз элементтері арасындағы байланысты анықтайтын, қойылған шығармашылық сұраққа жауап беру немесе есеп шартын түрлендіруді талап ететін ойлау қызметінің құралы деп айтады [22].

А.М.Матюшкин «есеп» және «мәселелі жағдай» ұғымдарды мүлдем әртүрлі ұғымдар деп тұжырымдайды [23].

Математиканы оқытудағы есептердің рөлі мен функциясы Д.Пойа, Г.П.Бевз, А.Е.Әбілқасимова, Ю.М.Колягин, К.И.Нешков, В.И.Крупич, Л.М.Фридман, Л.Т.Искакова, Е.С.Канин, Р.С.Черкасов, А.А.Столяр және т.б.

еңбектерінде қарастырған.

Американдық ғалым-математик Д.Пойа есептің математикадағы рөлін қарастыра отырып, математиканы меңгеру стандартты есептерді шығару ғана емес, сонымен қатар дұрыс, түпнұсқалық, тапқырлық ойды талап ететін есептерді де шығара білу деп түсінеді [24].

Г.П.Бевз бойынша есептің математиканы оқыту процесіндегі рөлі келесі түрде анықталған:

- 1) оқушылар есепті шығару процесінде алған теориялық білімдерін практикада қолдана білуге үйренеді;
- 2) есепті шығару процесі оқушылардың ойлауын және кеңістіктік елестетуін дамытуға мүмкіндік береді;
- 3) ерік, табандылықты және т.б. тәрбиелеуге жағдай жасайды;
- 4) оқушылардың ойлау процесін жандандырады, олардың шығармашылық қабілеттерін дамытады [25].

Осылайша, математиканы оқыту барысында есептердің маңыздылығы жоғары болып табылады.

Р.С.Черкасов пен А.А.Столярдың «Методика преподавания математики в средней школе» кітабында математикалық есептердің жан-жақты маңыздылығы көрсетілген: білім беру, практикалық, тәрбиелеу және ойлауды дамытудағы маңыздылығы [26].

Математикалық есептердің білім беру маңыздылығы

Математикадан есептерді шығару барысында оқушы жаңа мәліметпен танысады, математикалық теорияны қолданады, сонымен қатар есепті шығаруға қажетті жаңа әдістерді немесе математиканың жаңа теориялық бөлімдермен танысады және т.б. Демек, оқушылар математикалық есептерді шығара отырып, өзінің математикалық білімін жетілдіреді. Есептердің қандай да бір тобын шығару әдісін меңгергеннен кейін оқушыларда осындай есептерді шығару білігі, ал жеткілікті түрде жаттыққаннан кейін – дағдысы қалыптасады, бұл өз кезегінде математикадан білім деңгейін арттырады.

Математикалық есептердің практикалық маңыздылығы

Математикалық есептердің оқытудағы практикалық маңыздылығы оқушылардың болашақтағы қызметіне дайындығына қажетті алған білімдерін практикалық қажеттіліктеріне қолдану болып табылады. Математикалық есептер физика, химия, биология, электро-радиотехника және т.б. кездеседі. Оқушыларға математиканы оқытқан кезде пәнаралық (физика, химия, география және т.б.) байланыстары бар есептерді, сонымен қатар техникалық және практикалық мазмұнды есептерді де ұсынған жөн.

Математикалық есептердің ойлауды дамытудағы маңыздылығы

Математикалық есептерді шығару барысында алғы шарттар мен қорытынды, берілгендер мен ізделінді, жалпы және дербес, сәйкестендіру мен қарсы қою фактілерін үйренеді. Сонымен қатар, оқушыларда ойлаудың ерекше стилі: пайымдаудың формалді-логикалық үлгісін ұстану, ойды ықшамды жеткізу, ойлау жүрісін нақты бөліктеу, символдардың нақтылығы қалыптасады.

Математикалық есептердің тәрбиелік маңыздылығы

Математикалық есептердің тәрбиелік маңыздылығы өзінің мәтіні,

мазмұны, фабуласымен тәрбиелейді. Сонымен қатар, математикалық есептерді шығаруға оқыту бүкіл оқыту процесінде іске асады. Дұрыс жолға қойылған математикалық есептерді шығаруға оқыту оқушыларды адалдық және шынайылық, қиындықты табандылықпен төзуге, өзінің жолдастарының еңбегіне құрметпен қарауға тәрбиелейді.

Білім берудегі есептердің функциялары туралы Ю.М.Колягиннің, Е.И.Лященконың, В.И.Крупичтің, И.Б.Бекбоевтың, В.А.Гусевтің, Г.В.Дорофеевтің, А.Е.Әбілқасымованың, К.И.Нешковтың және т.б. әдістемелік еңбектерінде көп көңіл бөлінген.

А.Е.Әбілқасымованың «Математиканы оқытудың теориясы мен әдістемесі: дидактика-әдістемелік негіздері» оқу құралында оқытудағы математикалық есептер білім беру, тәрбиелеу, дамыту және бақылау функцияларын атқаратыны көрсетілген [4, б.158-159].

Барлық есептер білім беру функциясын орындайды, өйткені оқушылар математикалық есептерді шығару барысында білім алады, олардың есептерді шығару біліктігі мен дағдысы қалыптасады, жалпы алғанда математикалық білімі артады.

Сонымен қатар, әрбір есептер тәрбиелеу функциясын да атқарады. Мысалы, қоғам дамуының әртүрлі кезеңдеріне байланысты қарастырылатын мәтінді және практикалық есептердің мағынасыда да өзгеріп отырады. Қазіргі заманғы оқулықтарда есеп мазмұны оқушылардың жоғары өнегелік қасиеттерін қалыптастыруға, ғылыми көзқарастарын дамытуға, отан сүйгіштікке тәрбиелеуге бағытталған. Оқушыларды есептің мазмұны ғана емес, сонымен қатар оларды шығаруды оқыту да тәрбиелейді. Есептерді шығаруды оқыту оқушылардың сөйлеу мәнерін, табандылық, шыдамдылық, қиындықты жеңе білу, бастаған істі соңына дейін жеткізу сияқты қасиеттерді қалыптастырады [27].

Есеп оқушылардың логикалық ойлау, кеңістікті елестету қабілеттерін дамытуға көмектесетін басты құрал болып табылады. Сонымен қатар білімнің, білік пен дағдының қалыптасуы көп жағдайда есептер арқылы тексеріледі [28].

Есептің функцияларына қарай оларды келесі түрлерге бөлуге болады: танымдық, дидактикалық, дамытушылық [7; 29].

Танымдық функциялары (теориялық, практикалық) бар есептерде оқушыларға қажетті жаңа ақпараттар қамтылады және мектеп курсының негізгі материалдарын терең игертуге бағытталған. Мұндай есептерді шығару барысында оқушылар танымдық жағынан жаңа теориялық біліммен, яғни жаңа маңызды ұғымдар, есептерді шығарудың жаңа әдістерімен танысады.

Дидактикалық функциялары (кіріспе, машықтандыру) бар есептерге теориялық мәліметтерді енгізуді және қорытындылауды жеңілдетуге арналған есептер жатады. Мұндай есептер абстрактылы ұғымдарды қалыптастыруда маңызды рөл атқарады, сонымен қатар әртүрлі терминдер арасындағы байланыстарды анықтауға мүмкіндік береді.

Жалпы білім беру жүйесінде есептің әрбір функциясы маңызды, бірақ кейінгі жылдары әдіскерлер есептің дамытушы функциясының рөлін ерекше атап көрсетеді.

Дамытушылық функциялары бар есептер – мазмұны негізгі курстан алшақ, бағдарлама сұрақтары күрделене түскен (тапқырлыққа, сандық және геометриялық интуицияларын дамытуға, кеңістіктік елестетуге, логикалық ойлауға, сауаттылығын дамытуға берілген) есептер. Дамытушылық функциялары бар есептердің мазмұны негізгі математика курсынан алыстау болғанымен, кез келген оқушы осы есептерді өзінің қабілетіне қарай шығара білуі керек.

Сонымен қатар оқушылар көп жағдайда есептерді шығаруға ойланбайды, үлгі бойынша әрекет ете отырып, дұрыс жауап алумен ғана шектелетіндігін ескерте кету керек.

И.Ф.Шарыгин бойынша, оқушылар есептерді шығару процесінде, есептің шешімін іздеу кезеңі болмай, есептің шартын оқудан бастап, жауабын алуға дейінгі стандартты схема түрінде есептеуді іске асырады [30].

Есепті шығаруда оның негізін түсінбестен берілген шамаларға амалдарды механикалық орындауға алып келмеуі керек. Кері жағдайда пайымдау қисыны, дәлелдеу және шығару әдістерін қолдануы екінші орынға кетеді, демек оқушылардың (әсіресе орташа және нашар) қажетті логикасы дамымайды [31].

Есептерге қойылатын талаптарға талдау жасай келе, Е.И.Лященко да есептерді дидактикалық, танымдық, дамытушылық деп бөледі [32].

Дидактикалық функциялары бар есептерге:

1) оқытылатын ұғымдардың қасиеттерін және олардың арасындағы қарапайым өзара байланыстарды қалыптастыру қабілеттеріне;

2) амалдарды орындау алгоритмін және есептер шығару әдістерін қалыптастыруға;

3) пәнді оқыту және есептерді шығару барысында қолданылатын ойлау амалдарын қалыптастыруға арналған есептер жатады.

Танымдық функциялары бар есептерге:

1) қалыптастырылатын ұғымның жекелеген қырларын ашатын және дидактикалық функциялары бар есептер;

2) қалыптастырылатын ұғымның жекелеген аспектілері арасындағы байланысты ашатын дидактикалық функциялары бар есептер;

3) білімді тасымалдау элементтері бар бірақ дидактикалық функциялары сақталған есептер;

4) дидактикалық функциялары бар есептердің элементін сақтаған бірақ танымдық функциясы бар есептер;

5) шығаруы үшін математикалық деректер мен шығару әдістерін қиыстыруды талап ететін есептер;

6) қалыпты мәліметтер мен жағдайлардан жаңа есепті байқауды талап ететін есептер және т.б.жатады.

Дамытушылық функциялары бар есептерге:

1) шығаруы үшін пән бойынша жаңа білімді қажет етпейтін, тек бар білімді басқа қиыстыруда қолдануды талап ететін есептер;

2) пән бойынша терең білімге ие болуды қамтамасыз ететін есептер [32].

Біз А.Е.Әбілқасымованың және Ю.М.Колягиннің зерттеулерінде келтірілген математикадан есептердің білім беру, тәрбиелеу, дамыту және

бақылау функциялары түсінігін ұстанамыз. Есептердің білім беру функциялары деп білімді меңгерудің әртүрлі кезеңдерінде математикадан білім, білік және дағдыны (бағдарламаларда көрсетілген, мазмұны бойынша тереңдетілген, кеңейтілген) қалыптастыруға бағытталған функцияларын түсінеміз [4, б.158-159; 33].

Ю.М.Колягин бойынша білім беру функцияларын жалпы сипаттағы, арнайы және нақты деп бөлінеді. Оқушыларда жалпы білім беру функцияларын қалыптастыру қатарына:

- 1) ұғым анықтамасы;
- 2) жетекші идеялар, заңдар, пайымдаулар;
- 3) жетекші білік және дағды;
- 4) сөйлемдегі және жазбалардағы ойларды жеткізу білігі мен дағдысы;
- 5) ұғымдар арасындағы әртүрлі байланыстарды орнату;
- 6) ой-тұжырымдардың негізгі түрлері, оларды өткізудің әдістері мен тәсілдері;
- 7) оқу және анықтама әдебиеттерімен, кестелермен жұмыс жасау білігі мен дағдысы, жетекші заңдар, ой-пікірлер, олардың арасындағы негізгі байланыстарды және олардың иерархиясын орнату [33].

Ю.М.Колягиннің пікірінше дамытушылық функциялары бар есептер оқушыларда:

- 1) ғылыми танымның белгілі әдістері оқып-білудің, зерделеудің әдістері ретінде меңгеруді (бақылау, салыстыру, тәжірибе, талдау және синтез, жалпылау және даралау, абстрактілеу және нақтылауды тиімді қолдана білу іскерлігі);
- 2) индуктивті және дедуктивті сипаттағы ой-қорыту қабілетін;
- 3) ойша және практика жүзінде дұрыс тәжірибе қоя білу, болжамдарды айта білу және оларды тексеру іскерлігін;
- 4) оқу жағдайларында қарапайым модельдерді жасай білу және бар модельдерді объектілердің қасиеттерін (графиктерді, диаграммаларды, суреттерді, схемаларды салу және қолдану) оқып-білу үшін қолдану білігін;
- 5) зерттелетін объектілерді классификациялау, бар білімді жүйелеу, олардың арасындағы себеп-салдар және құрылымдық байланыстарды орнату білігін;
- 6) қойылған мақсатқа жету құралдары мен әдістерін таңдай білу, нақты шарттарды ескере отырып, бастысын бөліп алу білігін;
- 7) зерттелетін материалдың қоршаған ортамен байланысын, адамдардың практикалық іс-әрекетін, зерттелетін материалдың практикалық маңыздылығын бағалау білігін;
- 8) ғылыми ойлауға (сөйлеу мен жазудың түп нұсқалығы, кеңдігі, тереңдігі, сыншылдығы, анықтықтығы, нақтылығы) тән негізгі қасиеттерді игеруін;
- 9) тапқырлық пен берік зейінге және оқылған материалдардың ішінен негізгілерін есте қайта жаңғырту қабілетіне ие болу [34].

К.И.Нешков пен А.Д.Семушиннің пікірлері бойынша дамытушылық есептер «мазмұны негізгі математика курсына есептерден өзгешелеу; мектеп бағдарламасында бұрын өткен сұрақтары оқушылардың шамалары

келетіндей күрделенген; бұл материалдарды оқушылардың барлығы есте сақтап меңгерулері міндетті емес есептер. Бұл есептерді шығарғанда оқушыларға тек оқылған теориялық мәліметтерді немесе белгілі шығару әдістері қолдану жеткіліксіз, ол оқушылардан зеректілікпен, тапқырлықты қажет етеді» [35].

«Развивающие задачи на уроках математики в 5-8 классах» оқу құралының авторы Т.Н.Миракова дамытушылық есептер деп оқушылардың ойлау қабілеттерін дамытуға бағытталған есептерді түсінеді. Мұндай есептерді шығару үшін жалпы немесе нақты сипаттағы эвристикалық тәсілдерді меңгеру қажет. Математика сабағында осындай есептермен жүйелі түрде жұмыс жасау білімді барынша терең меңгеруге, сонымен қатар эвристикалық тәсілдерді меңгеру білігін бекітуге мүмкіндік береді. Оның оқу құралында оқушылардың логика-лингвистикалық қабілеттерін дамытуға бағытталған 38 эвристикалық тәсіл және оларды нақты есептерде қолдану мысалдары көрсетілген [36].

Н.Б.Истомина 5-6 сыныптарға арналған оқу-әдістемелік кешендерге талдау жасай отырып, бағдарлама мазмұнын меңгеру процесінде барлық оқушылардың ойлауын дамыту басты мақсат дейді. Ойлауды дамыту өлшемдері деп ақыл-ой іс-әрекетінің мынадай тәсілдерінің қалыптасуын айтады: талдау және синтез, салыстыру, аналогия классификация және жалпылау. Оның пікірінше дамытушылық есептер мәселелі есептер рөлін атқарады. Есептерді шығару процесінде оқушылардың алдында белгісізді табу мәселесі туындайды. Бұл «жаңалықтың» басты механизімі – оқушыларға белгісіз қасиеттер, заңдылықтар арасындағы жаңа байланыстарды орнату. Мәселелі есептерді шығаруда оқушылар алдында өткен материалдарды қайталайды, белсенді түрде ойланады, ақырында өздері жаңа есеп қалыптастырып оны шешеді [37].

Есептердің функцияларын зерттеген көптеген әдіскерлер есептің математиканы оқытудағы рөлі мен орнын ұғынуға мүмкіндік алды. Көптеген зерттеулерде авторлар бірауыздан есеп білім мен білікті меңгертуге, сонымен қатар ойлаудың белгілі бір стилін қалыптастыруға жағдай жасайтынын атап көрсеткен.

Сонымен қатар, оқушылардың білім алулары мен оқығандық деңгейлерін көрсететін есептердің бақылаушы функциялары ерекше қызығушылық туғызады.

Математикадан есептердің бақылаушы функциялары деп біз оқушылардың математикадан білім мен біліктер жүйесін қалыптасқандығын тексеруге бағытталған функцияларын түсінеміз.

Білім мен білікті бақылау процесінде қолданылатын, жоғарыда көрсетілген функциялар алгебралық, сонымен қатар геометриялық есептерде жүзеге асады.

Оқу процесінде есептер әр түрде көрініс табуы мүмкін: білімді меңгеру құралы ретінде, іс әрекетті тасымалдаушы, оқушылардың танымдық іс әрекеттерін ынталандырушы, оқыту әдісінің бір формасы ретінде, білім беру мазмұнын игеруді бақылау құралы және т.б.

Есептердің әрбір белгісі басқалардан жеке-дара алынған кезде олардың қандайда бір жағын ғана сипаттайды. Сондықтан, есептің маңызын түсіну үшін

оның барлық жағын есепке алу қажет. Бірақ, нақты жағдай үшін жоғарыда көрсетілген қырларының біреуі ғана қолданылуы мүмкін, мысалы, есептерді икемділікті қалыптастыру құралы ретінде қарастыру. Әлбетте, кейбір нақты есептер жаттығулар болып табылады. Нақты бір есепті жаттығуға жатқызу үшін оны қолданудың мақсаты, мазмұнын игерудегі орны, оны шығарудың қандай да бір іс әрекетке сәйкестігі маңызды.

Тікелей өнімі алынған білім, білік және дағды болатын есепті *жаттығу* деп атаймыз. Демек, мектеп курсындағы теоремалар есептер қатарына жатады, оның тікелей өнімі берілген жағдайдың өзінің өзгеруі болып табылады.

Есептер оқыту құралы ретінде келесі функцияларды атқарады:

- математикалық іс-әрекетке үйрету;
- білім, білік және дағдыны қалыптастыру;
- оқушыларды дамыту (ойлау қасиетін);
- тәрбиелеу (мазмұны, әрекетті ұйымдастыру, тілдесу арқылы);
- нақты құбылыстарды модельдеуге үйрету [29, б.45-46; 38].

Бір ғана есеп оның білім беру процесіндегі рөліне байланысты, бірнеше функция атқаруы мүмкін.

Жоғарыда айтылғандардан, есептер келесі негізгі белгілерге ие болып, математиканы оқытудағы көп қырлы құбылыс екенін көрсетеді:

- 1) математиканы оқыту мазмұнына сәйкес іс әрекетті тасымалдаушы;
- 2) білім, білік және дағдыны меңгерту құралы;
- 3) оқушылардың оқу-танымдық іс-әрекетін басқару және ұйымдастыру құралы, жекелеген жағдайда оларға жағдай жасаушы және ынталандырушы, білім мен білікті меңгеруін бақылау әдісі;
- 4) оқыту әдісінің бір түрі ретінде көрініс табады;
- 5) теория мен практиканы байланыстыру құралы.

Есепті оқытудың мазмұны тұрғысынан, есепіс-әрекеттің тасымалдаушысы, әдістер тұрғысынан, есеп – көрініс беруінің бір түрі. Амалдар жағынан білім, білік және дағдыны меңгеру құралы болып табылады. Іс-әрекет тұрғысынан есептер өзінің мақсаттары, әдістері және құралдары бар оқу-танымдық іс-әрекеттің бір түрі болып табылады. Бұл әрекеттің *мақсаты* есептер шығару арқылы білім, білік және дағдыны меңгеру, *әдістері* – есеп, оқушы және мұғалімнің (есептерді өз бетімен орындау, есептің шешімін ұжым болып іздестіру және т.б.) өзара әрекеттесуінің ерекше әдістері. Есептер ұғымына қатысты жаттығулар есепті шығарудың тікелей өнімі оны шығарушының алған білімі, біліктілігі мен дағдысын қалыптастыруды сипаттайтын бір түрі ретінде көрініс табады.

Математиканы оқытудың тиімділігін арттыруды математикалық есептердің барлық дидактикалық функцияларын іске асыру арқылы қол жеткізуге болады деп ойлаймыз [39].

Сонымен жоғарыда келтірілген есептің функцияларының мағыналарын келесідей болады демекпіз.

Ұғым қалыптастыру, жандандыру функциясының мағынасы – есеп көмегімен оқушыларды мәселені қоюға қызықтыруға, ұғымдарды, амалдарды, алгоритмдерді енгізуге ынталандыруға болады.

Білім беру функциясының мағынасы – есептің мазмұнында және оны шығару барысында оқушыға жаңа білім беріледі, яғни білімді меңгеру құралы және іс-әрекет тәсілдері болып табылады. Есеп мынадай үш түрдегі тәжірибені тасымалдаушы функциясын атқарады:

- танымдық іс әрекет тәжірибесі, оның нәтижесі білім;
- белгілі іс-әрекеттерді іске асыру тәжірибесі – үлгі бойынша іс-әрекет ету;
- шығармашылық іс-әрекет тәжірибесі – мәселелі жағдайларда тиімді шешімдер қабылдай алу білігі.

Осы үш тәжірибені меңгеру оқушыларға күрделі іс-әрекеттерді орындау қабілеттерінің қалыптасуына мүмкіндік береді. Осындай қабілеттерді қазіргі кезде педагогикалық әдебиеттерде *құзіреттілік* деп атайды.

Дамытушылық функциясының мағынасы – есеп шығару процесінде оқушының танымдық психикалық функцияларының (түйсіну, қабылдау, ойлау, елестету, зейін) дамуы іске асады; оқушылар оқу-математикалық әрекетінің субъектісі ретіне және жеке тұлға ретінде дамиды.

Тәрбиелік функциясының мағынасы – есептерді шығару процесінде оқушыларда өзін-өзі реттеу, ерік-жігерді; өнегілік пен шынайылықты; мәдениет пен тиімді ойлау стилін (негіздеудің толықтығы, заңсыз жалпылаудың және негізсіз аналогияның болмауы, классификацияның ұстамдылығы, символдарды қолданудағы аса дәлдік, ықшамдылық) қалыптастырады; арнайы есептер көмегімен эстетикалық тәрбие беру жүзеге асады. Сонымен қатар қолданбалық, өндірістік-техникалық, тарихи, өлкетану, экономикалық, экологиялық мазмұндағы есептерді шығару оқушылардың бойында табиғатқа, туған жерге деген ынтасын оятады, дүниеге деген көзқарасын қалыптастырады, табиғи ресурстарды үнемді пайдалануға үйретеді.

Жүзеге асыру (тарату) функциясының мағынасы – оқытудың нақты бір әдісін іске асыру барысында (репродуктивті, эвристикалық, зерттеушілік) есептер оқыту тәсілін тасымалдаушы қызметін атқарады.

Болжам жасау функциясының мағынасы – ағымдағы нәтижелерді бақылау және бақылауға негізделген болжам есептер шығару барысында қолданылады.

Басқарушылық функциясының мағынасы – есеп шығару белгілі бір мақсатқа бағытталған процесс ретінде оқытуда және тәрбиелеуде жетістікке қол жеткізу үшін белгілі бір жағдайлар жасайды. Есеп шығарудың басқарушылық сипаты дидактикалық принциптерді іске асыруға көмектеседі: оқытудың бағыттылығы, жүйелілігі және реттілігі.

Прагматикалық функциясының мағынасы – қолданбалы және практикалық есептерді шығару күнделікті өміржағдайында кездесетін мәселелік жағдаяттарды шешуге және есептерді шығаруға мүмкіндік береді; күрделі есептерді шығару – ҰБТ табысты тапсырып, ЖОО-на түсуге мүмкіндік береді.

Иллюстративтілік функциясының мағынасы – математикалық заңдар мен құбылыстарды модельдеу және нақтылау арқылы оқушылардың алған білімін тереңдете түседі. Игерген математикалық заңдар мен заңдылықтарды есеп шығару барысында қолдану есептің мазмұнын терең түсінуге, алған білімді

бекітуге және білімінің немқұрайлы сипатын жеңуге көмектеседі.

Таныстыру-ақпараттық функциясының мағынасы – тарихи есептермен танысу; математика тарихы элементтерімен танысу; ұлттық құндылықтар мен компоненттерді меңгеру, қосымша әдебиеттерде іздеу жұмыстарын жүргізу; ғаламтор және т.б.

Байланыс орнату функциясының мағынасы – есепті шығару барысында мұғалім мен оқушының арасында, оқушылардың өзара іс-әрекетінің түрлері қалыптасады.

Біріктіруші функциясы – бұл құрылымдаушы және жүйелеуші функциясы жаңа білімді беру, білімді бекіту және жалпылау сабақтарында іске асады.

Математикалық есептерді шығарудың функцияларының ішіндегі маңыздысы – *пәнаралық байланысты* (есептеу, дененің кеңістіктегі орнының координаталарын анықтау, графиктерді салу және оған талдау жасау, тағы басқа көптеген тапсырмалар) қалыптастыру және дамыту.

Бақылау функциясының мағынасы – арнайы таңдалып алынған есептер көмегімен оқу амалдарын, білімді меңгеруін, оқу іс-әрекет тәсілдерін бақылау іске асады; есептер арқылы өзара бақылау, пәндік және жеке рефлексия, өзін-өзі бақылау қалыптасады.

Бағалау функциясының мағынасы – бақылау жұмыстары, ағымдағы емтихандар, сынақтар, ҰБТ – осының барлығы есеп түрінде жүргізіледі. Есептер көмегімен оқушылардың білімін және білігін тексерудің қарапайым, ыңғайлы және қатесіз тәсілі болып табылады.

1.2 Математикалық есептердің классификациясы

Есептердің классификациясы мәселесіне әдістемелік, психологиялық әдебиеттерде көптеген жұмыстар арналған. Математикалық есептер математика ғылымының да, математика оқу пәнінің де мазмұнын құраушыларының негізі болып табылады. Математика өзінің бастауын практикалық есептерден алатыны және сондай есептер арқылы дамитыны белгілі.

Математика пәнінің теориясын есептерсіз құру мүмкін емес. Сондықтан есептерді шығару математиканы оқытудың негізгі құралы болып табылады. Белгілі педагог-математик С.И.Шохор-Троцкий өз уақытында «есеп арқылы оқыту» әдістемесін ұсынған болатын [40].

Есептің анықтамасын берудің әртүрлі жолдары бар:

1. Белгілі жағдайларда мақсат ретінде қарастыру (А.Н.Леонтьев) [41].

2. Қандайда бір практикалық түрлендірулерге қойылатын талаптарды немесе объектінің белгісіз және белгілі элементтері арасындағы байланысты (қатынасты) ашуға мүмкіндік беретін шарттарды іздестіру арқылы теориялық сұраққа жауап беретін ойлау қызметінің объектісі ретінде [42].

3. Есеп дегеніміз белгілі бір анықталған жүйе (Г.А.Балл, Ю.М.Колягин, Л.М.Фридман, А.Ф.Эсаулов және басқалары) [20; 42-44].

А.Е.Әбілқасымованың «Математиканы оқытудың теориясы мен әдістемесі» оқу құралында көрсетілгендей есеп ұғымының анықтамасы түрлі тәсілдермен берілгенімен, жалпы компоненттерінің (есептің құрылымындағы ойлау қызметінің объектісі ретінде) ара-жігін ажыратуға болады:

– шарты (Ша) – есептің (объектілер) пәндік аймағы және объектілер арасындағы байланыс;

– негіздемесі (базис) (Н) – есептің шешімін құрайтын амалдар арқылы оның шартынан қорытындысына көшудің теориялық немесе практикалық шарттары;

– шешім (оператор) (Ш) – қорытындыда көрсетілген талаптарды орындау үшін үшін белгілі компоненттермен орындалатын амалдар, әрекеттер жиынтығы;

– нәтиже (Н) – белгісіз компоненттерді табу, дұрыстығын тексеру, құрастыру, тұрғызу, дәлелдеу және т.б. [4, б.155-156; 27, б.60-62].

Есептің құрылымын қысқаша ШаНШН деп жазуға болады.

Есептерді мәселе қою деңгейіне қарай, яғни есеп шығарушыға ШаНШН-ның қандай компоненттері белгісіз екеніне байланысты топтастыруға болады [40].

Стандартты есептер – ШаНШН-ның барлық компоненттері белгілі есептер.

Мұндай есептер теориялық материалдарды игеру барысындағы барлық кезеңдерінде қолданылады. Мысалы, ережені бергеннен кейін оқушыларға оны тікелей қолдану немесе қандай да бір объектінің осы ұғымға жататынын (анықтауға арналған есептер) тексеру ұсынылады. Есептің бұл түрі ұғымды меңгерумен қатар кері байланысты орнатуға, оқушыларды жаңа материалды қалай түсінгенін бағалауға мүмкіндік жасайды.

Оқыту есептері – құрылымының бір компоненті белгісіз (ШаНШх, ШахНШҚ, ШаНхН, хНШН) болатын есептер.

Мәселе есептер – компоненттердің үшеуі белгісіз Шахуу, хНуу, хуШу, хууН.

Есептің құрылымы оны шығаруға бағытталған қызметтің қиындығын да анықтайды: репродуктивті немесе алгоритмдік (игерілген тәсілді анықтау), продуктивті (белгілі тәсілді, білімді жаңа жағдайда қолдану, курстың басқа тақырыптарынан алған білімдерін қолдану), шығармашылық (эвристиканы қолдану)[26].

Математикалық есептердің құрылымы мен мәселесіне қарай жіктеуден басқа да жіктеу түрлері бар.

Оқушыға математиканы оқу кезінде тек бір есеппен емес, есептер жиынымен жұмыс жасауға тура келеді. Есептердің жиынына талдау жасау оларды классификациялауды талап етеді. Сондықтан математикалық есептердің келесідей классификациясын жасауға болады:

– есептердің атқаратын функциясына байланысты: *танымдық, дидактикалық, дамытушылық есептер*;

– оқу іс-әрекетінің компонентіне байланысты: *іс-әрекеттік, ынталандырушы, бақылау-бағалау есептері*;

– мәселесінің шамасына байланысты: *стандартты, оқыту, іздестіру, мәселе есептер*;

– есептің шарты мен талабы арасындағы қатынасына байланысты: *анықталған, толық анықталмаған, анықтауды қажет ететін есептер*;

– есептің шартындағы объектілердің санына байланысты: *жай және*

құрама;

– объектілердің сипатына байланысты: *практикалық, математикалық есептер*.

Егер есепте қарастырылатын объектінің бірі нақтылы өмірден алынатын болса, онда ол практикалық есеп. Есепте қарастырылатын объектілер таза математикалық ұғымдар мен түсініктер болса, ол математикалық есеп болады.

– теорияға байланысты: *стандартты және стандартты емес* есептер.

Дайын ережелердің көмегімен шығарылатын есеп стандартты есеп делінеді де, ал шығару жолдары дайын ережелер арқылы табыла қоймайтын, арнайы әдістермен шығарылатын есеп – *стандартты емес есеп* болып болады.

– математикалық мазмұнына байланысты (Ша мен Н математиканың белгілі бір бөліміне жатады): *арифметикалық, алгебралық, геометриялық, тригонометриялық, комбинаторикалық және т.б.*;

– шығару кезінде ойлау деңгейіне байланысты есептерді *алгоритмдік, жартылай алгоритмдік, жартылай эвристикалық және эвристикалық* деп шартты түрде төртке бөлуге болады.

Танымдық есептер негізінен жартылай алгоритмдік, дамытушылық – эвристикалық есептерге жатады. Формула немесе ереже бойынша шығарылатын есептер алгоритмдік және жартылай алгоритмдік, дамытушы – эвристикалық есептер болады. Формула немесе ереже бойынша шығарылатын есептер алгоритмдік және жартылай алгоритмдік болып келеді.

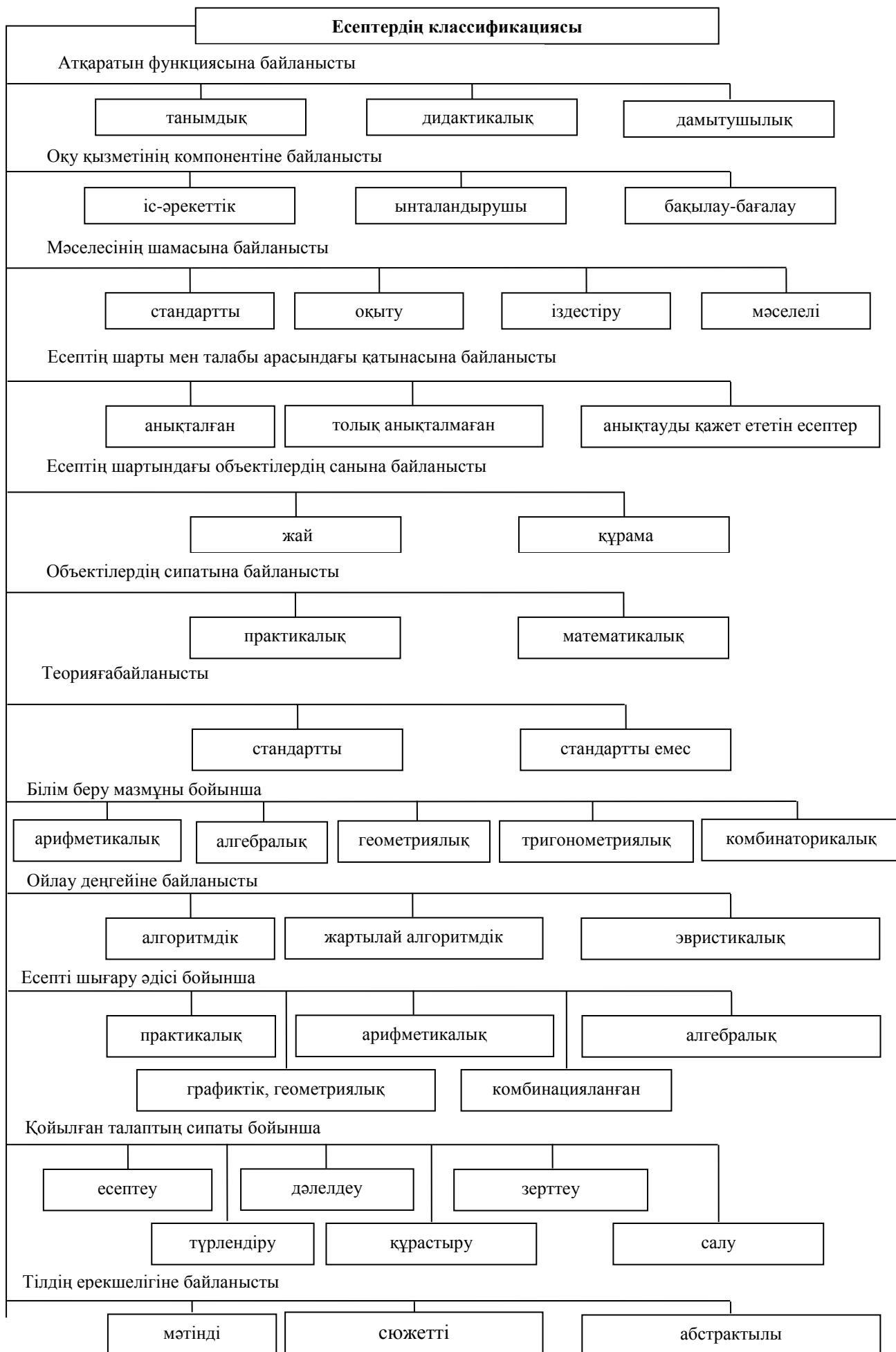
– есепті шығару тәсілі бойынша (Нмен III берілген): *практикалық, арифметикалық* (арифметикалық амалдардың компоненттерінің арасындағы тәуелділік негізінде), *алгебралық, графиктік* (теңдеулер, теңсіздіктер және олардың жүйелерін құру), *геометриялық* (геометриялық фигуралар және олардың қасиеттерін қолдану арқылы), комбинаторикалық;

– қойылған талаптардың сипаты бойынша: *есептеуге, дәлелдеуге, зерттеуге, түрлендіруге, құрастыруға, салуға және т.б.* берілген есептер;

– тілдің ерекшелігі бойынша: *мәтінді* (есептің шарты табиғи тілмен берілген), *сюжеттік* (фабуласы берілген), *абстрактілі* (пәндік) болады.

Сонымен, математикалық есептердің атқаратын функциясына, мәселенің шамасына, оқу қызметінің компонентіне, шарты мен талабы арасындағы қатынасына байланысты, есеп шартындағы объектілердің санына және олардың арасындағы байланысына, теорияға, білім мазмұнына, есепті шығару тәсілдеріне және т.б. байланысты жіктелеуін кесте түрінде көрсетуге болады (сурет 1).

Есептің типі шарты мен жағдайларға тәуелді. Дегенмен типтің әртүрлі болуы мұғалімге оқытудың мақсатына қарай есептерді іріктеуге мүмкіндік береді.



Сурет 1- Математикалық есептердің классификациясы

Стандартты емес жағдайда оқушылардың шығармашылық қабілеттерін және математикалық ойлауын дамыту, математикалық қабілеттерін анықтауда стандартты емес есептердің рөлі ерекше. Стандартты емес есептерді шығара білу икемділігі – оқушыларды бейінді математикалық сыныптарға таңдаудың негізгі өлшемі болып табылады. Алдында көргеніміздей, көптеген отандық және шетелдік ғалымдардың зерттеу жұмыстарында оқыту бағдарламасына сәйкес «міндетті» есептерден басқа есептердің ерекше түрлерінің оқушылардың ойлау қабілетін дамытуда алатын ерекше орны көрсетілген. Олардың әрқайсысы стандартты емес есептердің анықтамасын ұсынады. Кейбіреулері мұндай есептерді мәселелік есептер десе, келесілері зерттеу немесе іздену есептері деп атайды, ал үшіншілерінің еңбектерінде стандартты емес деп аталады.

«Стандартты емес» есепке авторлар бірнеше анықтамалар берген.

Л.М.Фридман және Е.Н.Турецкий «Как научиться решать задачи» кітабында стандартты емес есептерге мынадай анықтама берген: «стандартты емес есеп – математика курсына жалпы ережелері мен тәртібі жоқ, нақты шығарылу бағдарламасы анықталмаған есептер» [43, б.45].

Ю.М.Колягин «Стандартты емес есеп – шығарылуы оқушыларға белгілі іс-әрекеттер тізбегі болып табылмайтын есептерді айтады», берілген ұғымның салыстырмалы екеніне ерекше көңіл бөледі [45, б.26].

Г.В.Дорофеев, М.К.Потапов, Н.Х.Розов стандартты емес есептер әртүрлі болады деген. Дербес жағдайда стандартты емес есептер өте ерекше болып көрінуі мүмкін, сондықтан бастапқыда оларға қалай «жақындауға» болатыны түсініксіз. Кей есептер бүкпеленіп тұрады, түріне қарағанда қарапайым квадрат теңдеу болғанымен оны стандартты әдістермен шығару мүмкін емес. Ал үшінші есептер тобының шығарылуына өте шебер нақты және анық логикалық ойлау қажет болады. Мұндай ерекше «стандартты емес есептер» тек қана тапқырлықты, математиканың әртүрлі бөлімдерін еркін меңгергендікті, жоғары логикалық мәдениетті және психологиялық дайындықты қажет етеді. Сонымен қатар олар мектеп математикасы бағдарламасы аясында болады [46].

Г.Л.Балл стандартты емес есептерді жаңашылдыққа негізделген есептер деп атайды. Егер есеп шығарушы есепті шығарудың алгоритмін білсе, онда есепті ескілікке негізделген деп атайды. Жаңашылдыққа негізделмеген есептерді ескілік есептер деп атайды [20, б.184].

Б.А.Кордемский оқудан тыс деп аталатын «білім алушылар математиканы жүйелі оқу барысында қарастырмайтын ерекше есептер жиынын» қарастырады [47].

А.А.Столяр есептердің типологиясы туралы айта келіп, типтік есептер қатарына жатпайтын шығару алгоритмі жоқ немесе белгісіз болатын типтік емес есептерді қарастырады [48].

Келтірілген және басқа анықтамаларды жалпылай келе, стандартты емес есептерді кең мағынада қарастырамыз. «Стандартты емес есептің» анықтамасын стандартты есеп ұғымының анықтамасы тұрғысынан береміз.

Жалпыға міндетті білім беру стандарттары мен оқу бағдарламалары белгілі бір тақырыпты оқу барысында оқушыларда қалыптасуы тиіс білім, білік,

дағдыларды анықтап көрсетеді. Оқушылар белгілі бір тақырыпты оқу барысында есептердің нақты бір типтерін шығара алуы тиіс, ал мұндай есептерді «стандартты есептер» деп атаған жөн.

Сонымен, «*стандартты есеп*» деп шығару алгоритмі мектеп математика курсына қарастырылатын, оқушылардың шығара білуіне білім беру стандарты мен оқу бағдарламасы талап қоятын есептерді айтамыз. «Стандартты есептерден» басқа есептерді «*стандартты емес*» есептер деп атаймыз.

Жоғарыда айтылғандай, қызықты есептерді стандартты емес есептер ретінде қарастырамыз. Стандартты емес есептердің көбісін қызықты есептер қатарына жатқызуға болады. Я.И.Перельман «қызықты есептер мидың жұмысын жоққа шығармайды, керісінше, жұмыс жасау туралы ой туғызады» деп есептейді [49].

Стандартты емес есептердің толық классификациясын жасау өте қиын. Олардың бір бөлігін оларды шығару әдісі бойынша классификациялауға болады. Мысалы, логикалық есептер, комбинаторлық есептер, екі әдіспен есептеу әдісімен шығарылатын есептер, графтарға берілген есептер, Дирихле принципіне берілген есептер, инвариант, бояу, ұтымды стратегияға берілген есептер және т.б. Бірақ көптеген есептер бірнеше топтарға жатуы мүмкін. Стандартты емес есептердің қатарына жоғарыда келтірілген есептерден басқа теңсіздіктерді дәлелдеуге берілген есептерді, стандартты емес әдістермен шығарылатын теңдеулерді жатқызуға болады. Параметрі бар теңдеулер мен теңсіздіктерді де стандартты емес есептер қатарына жатқызуға болады, себебі оларды шығару әдістері мектепте қарастырылмайды. Геометриялық есептер ішінен салуға берілген есептерді және нүктенің геометриялық орнын табу табуға берілген есептерді жатқызуға болады.

Математиканың бастама курсына «есеп» (арифметикалық есеп) ұғымы нақты объектілер арасындағы сандық қатынастарды бейнелейтін мәтін түрінде тұжырымдалады. Әдістемелік әдебиеттерде «мәтінді есептерді» анықтаудың әртүрлі жолдары болғанымен, математиканы оқыту әдістемесінде бүгінгі күнге дейін осы ұғымның нақты дұрыс анықтамасы жоқ.

Мәтінді есептер қандай да бір жағдайдың құраушы компонентіне сандық сипаттама беруді, компоненттері арасындағы қатынастың бар болуын, осы қатынастың түрін анықтауды талап етумен жағдайды табиғи тілмен сипаттайды.

Е.С.Березанскаяның жұмысында арифметикалық есептердің ішінен «мәтіні бар есептер», яғни шартында ізделіндіні табу үшін орындалатын амалдары көрсетілген есептер, әдетте оларды мысалдар деп атайтын, жаттығуларға карама-қарсы болатын, ізделіндіні табу үшін берілген сандарға қандай амал орындайтыны шартында айқын көрсетілмеген есептер деп бөледі [50].

«Мәтіні бар есеп» ұғымына осыған ұқсас түсіндірмені математиканы оқыту әдістемесінде С.Е.Ляпин де береді [51].

Қазіргі кезде математикадан әдістемелік әдебиеттерде Е.С.Березанская ұсынған мағынада қолданылатын «мәтінді есептер» термині жиі кездеседі. Дегенмен, кейбір әдіскерлер осындай топтағы есептерді «арифметикалық есептер» деп атайды. Орта мектептегі математиканы оқыту әдістемесінде

мәтінді есептерге мынадай анықтама береді: «Мәтінді есеп деп кіріс ақпаратында тек қана математикалық берілгендер емес сонымен қатар, есептің қандайда бір сюжеті «фабуласы» бар есептер. Шындығында, «математикалық есептер» ұғымы қандайда бір танымдық әрекетті іске асыруды талап ететін кез келген жаттығуға немесе тапсырмаға қатысты айтыла береді. Бұл «сөз түрінде тұжырымдалған сұрақтарға» да қатысты[50].

Математика курсында *сюжеттік* есептер маңызды рөл атқарады. Ондай есептерді шығару барысында математика курсында модельдеу оқыту жүзеге асырылады. Мектептегі математика курсында модельдеуді нақты процестерді математика тілінде баяндау деп сипаттауға болады. *Сюжеттік есептер* дегеніміз – сандық сипаттамалары немесе мәндерін табу мақсатында қандайда бір өмірлік сюжеттің (кұбылыс, оқиға, процесс) баяндалуы берілген есептер.

Сюжеттік есептерге жоғарыда келтірілген есептердің типологияны қолдануға болады. Бұдан басқа типологияны сюжет(қозғалыс, сатып алу, жұмыс және т.б. берілген есептер) бойынша ажыратады. Сюжеттік есептер арасында шығармашылыққа жатқызуға болатын бейнелік сипаттағы есептер жоғары деңгейлі мәселе есептер болады. Олардың шешімі бейнеге түрленеді және және есепте баяндалған жағдайды толығымен қабылдауды талап етеді. Мұнда есептің берілгені мен жалпы тәсілін ажырату қиын [4, б.157].

Р.С.Черкасов пен А.А.Столярдың «Методика преподавания математики в средней школе» жұмысында білім беру рөліне қарай есептердің бірнеше түрлерін келтіреді [26, б.119]:

Математикалық ұғымдарды меңгеруге арналған есептер

Математикалық есептерді шығару, жаттығуларды орындау арқылы оқушылар көптеген математикалық ұғымдарды меңгереді. Ұғымдарды, олардың анықтамаларын және қасиеттерін анықтау арқылы математикалық ұғымдар да анықталады. Ұғымды терең түсіну үшін оның анықтамасын жатқа білу жеткіліксіз, анықтамадағы әрбір сөздің мағынасын терең түсініп, танысып отырған ұғымның қасиеттерін, белгілерін түсіну қажет.

Мысалы, квадрат теңдеу ұғымын басқа теңдеулерден ажырата білу үшін әртүрлі жаттығулар беріп, оқушылардың білімін, түсініктілік деңгейін арттыруға болады.

Төмендегі теңдеулердің қайсысы квадрат теңдеу болады?

а) $8x^2 - 7x = 1$; ә) $48x^2 - x^3 - 9 = 0$; б) $14 - 7x^2 = 0$; в) $\sqrt{x} + x^2 - 1 = 0$.

Бұл жаттығуларды орындаған кезде оқулықтағы анықтамамен салыстыра отырып, ұғымды бекітуге болады.

Математикалық таңбаларды меңгеруге арналған есептер

Математиканың тілін игеру, соның ішінде математикалық таңбаларды қолдана білу – математиканы оқытудың мақсаттарының бірі болып табылады. Математикалық таңбаларды дұрыс қолдану арқылы есептер дұрыс шешімін табады. Бастауыш сыныптарда, 5-6-сыныптарда қарапайым математикалық таңбалар енгізіледі: амалдардың, теңдік пен теңсіздік, жақша, бұрыш және оның шамасының, параллельдік және т.б. белгілері. Математикалық таңбалардың есептер шығарудағы рөлі мен маңызын түсіндіре

отырып, таңбаларды дұрыс қолдана білуге үйрету қажет. Мәселен, жақшаны ашқанда таңбалардың өзгеру, өзгермеу белгілері, амалдар қатар келгенде қайсысын алдымен орындау және т.б.

Сондықтан белгілермен жұмыс жүргізгенде есептерге көп көңіл бөлу керек. Мысалы, келесі есептерде жақша қандай рөл атқарып тұр, қандай өрнектерде жақша амалдардың орындалу ретін өзгертпейді.

$$а) (1,5 + 2 \cdot 3,2) - 0,1; \quad ә) 1,5 + (3 - 2,3) \cdot 0,1.$$

Амалдардың орындалу ретін түсіндіріңіздер және жақша қандай рөл атқарады? Сонымен математикалық таңбаларды үйренудегі басты мәселе есептер шығару барысында оны дұрыс қолдану.

Дәлелдеуге үйретуге арналған есептер

Математиканы оқытудың мақсаттарының бірі есеп-сұрақ және зерттеуге берілген элементар есептерден басталатын дәлелдеуге үйрету болып табылады. Мұндай есептердің шешімі қойылған сұраққа жауап табу және оның дұрыстығын дәлелдеу болып табылады. Есептерді шығару барысында объектілерді топтастыруға тура келеді. Объектілерді толық топтастырмау берілген есептің кейбір мәліметі оны шығаруда назардан тыс қалуына әкеліп соғады. Осындай қателерді табуға берілген есептер толық топтастыру жасамаудың алдын алуға көмектеседі. Есептерді шығару зерттеуді, дәлелдеуді қажет етеді, яғни мұндай дәлелдеу арқылы есептердің жауабын іздеу олардың дұрыс шешімін табуға мүмкіндік береді. Дәлелдеу алғашында есеп-сұрақ түрінде немесе қарапайым зерттеу түрінде болып келеді, ондағы мақсат сабақта өтілген ұғымдарды нақтылай түсуге және ұғымдардың арасындағы байланысты көре білуге баулу.

Математикалық білікті қалыптастыруға арналған есептер

Математиканы оқытудың маңызды міндеттерінің бірі – математикалық біліктілігін қалыптастыру болып табылады. Есеп шығару барысында оқушылардың жаңа тәсілдерді меңгеру, алгоритмдерді құру, өрнектерді ықшамдағанда амалдар қолдану арқылы біліктері шындала түседі.

Есеп шығаруда қарапайымнан күрделіге, белгіліден белгісізге көшу принципін сақтай отырып, оқушылардың алдыңғы игерген білімдерін пайдалана отырып, жаңа тақырыпқа байланысты есептердің жан-жақты түсіндірмесін беріп, тақтаға толық жазып шығарған дұрыс. Сонда ғана оқушылардың математикалық білігін тиянақты қалыптастыруға болады.

Мысалы, келесі алгебралық өрнекті ықшамдау үшін ең алдымен орындалатын амалдарды анықтап алған дұрыс:

$$\frac{8-a}{\sqrt[3]{a}+2} : \left(2 + \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}+2} \right) + \left(\sqrt[3]{a} + \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}+2} \right) \cdot \frac{\sqrt[3]{a^2}-4}{\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{a}}.$$

Мәтінді есептерді шығару біліктілігін қалыптастыру едәуір қиындық туғызады. Себебі, оның құрамына есепті талдау, есептің моделін құру, теңдеу құру және т.б. амалдарды орындау біліктігі енеді. Білікті қалыптастыру үшін келесі тапсырмаларды орындау керек:

- 1) есепті талқылаңдар және оның шарты мен қорытындысын айырыңдар;
- 2) есептің қысқаша моделін жазыңдар;

3)есептің моделі бойынша оның математикалық моделін (теңдеуін) құрыңдар және т.с.с.

Мұнда ескеретін жағдай, бір уақытта әртүрлі білікті қалыптастыру қиын, сондықтан бір білікті толық шыңдап болғаннан кейін, баскасына көшкен дұрыс.

Оқушылардың ойлау қабілетін дамытуға арналған есептер

Математикадан есептерді шығару арқылы ерекше ойлау стилі, ойымыздың формальді – логикалық схемасы, ойдың орнықтылығы, ойлау жолының дәлдігі, таңбаларды қолдана білу, еске сақтау, көз алдына келтірудің дәлдігіне үйрету қалыптасады. Есеп оқушылардың логикалық ойлау, кеңістікті елестету, жеке бастарының қабілеттерін дамытуға бірден-бір себепші болатын басты құрал болып табылады. Есептер толығымен дәлелді, белгілі заңдар негізінде жалпы қорытындылар жасайды, дәлелді аналогияға сүйеніп, барлық жағдайларды қарастырады. Математикалық ойлауды дамытуға арналған есептерді шығару есептің берілгендеріне талдау жасауды, мәліметтер мен шамаларды, бұрын өтілген есептермен салыстыруды, берілген жағдайдағы қасиеттерді анықтауды, қарапайым модельдерді құрастыру мен ойша экспериментті іске асыруы, синтездеуді, есеп шығаруға қажетті ақпаратты таңдауды, оны бір жүйеге келтіруді, зерттеуді талап етеді. Алайда математикалық есептерді шығару оқушылардың жеке шығармашылық қабілеттеріне байланысты, осыған орай, есеп шығарудың басты мақсаттарының бірі оқушылардың ойлау қызметін жандандыру. Сондықтан оқушылардың ойлау іс-әрекетін ынталандыратын есептер мен жаттығулар қажет. Математикалық ойлауды дамыту үшін оқушыларды қызықтыратын, ынтасын арттыратын есептерді қарастыру дұрыс. Ондай есептерге зерттеу элементтері бар есептер, ойын есептер, күрделі есептер және ертегі есептер жатады. Бұған берілген есепті шығарғанда кеткен қатені табу, есепті бірнеше жолмен шығару өздігінен есеп құрастыру және т.с.с. кіреді.

А.Ф.Эсаулов есептерді келесі түрлерге бөледі: қайталауға арналған есептер (мұндай есептерді шығару үшін есте сақтау қабілеті мен зейін қою қабілетіне сүйенеді); шығару барысында бұрыннан белгісіз идеяны, ойға келтіретін есептер; шығармашылық есептер [44].

Жоғарыда келтірілген соңғы екі түрге жататын есептер оқушының ойлау қабілетін дамытады. Сонымен бірге тек зерттеуге берілген есептер емес, құрамында зерттеу компоненті міндетті болып табылатын есептерді беру қажет. Геометриялық салу есептерінің (планиметрия және стереометрияның), теңдеу және теңсіздіктерді шығаруға берілген есептердің (тригонометриялық, параметрі бар көрсеткіштік және логарифмдік теңдеулер мен теңсіздіктер) құрамына зерттеу элементтері кіреді.

Оқушылар амалдардың заңдарын еркін қолдана білулері қажет, сондықтан алгебраның алғашқы ұғымдарымен танысу барысында (мысалы, рационал сандарға амалдар қолдану) амалдардың заңдары, оның ішінде, дистрибутивтік заң қолданылатын есептерді шығарту қажет. Берілген түбірлері бойынша теңдеулер құруға, берілген шешімдері бойынша теңдеулер жүйесін құруға, берілген теңдеу немесе олардың жүйелері бойынша есептер құрастыруға берілген есептер фабуласы әртүрлі болғандықтан, өте пайдалы, ал бұл

математикалық әдістердің жалпылығын көрсетеді [26].

Орта мектепте математикалық есептер мен жаттығулар шығаруға математика пәніне бөлінген уақыттың жартысы жұмсалады. Жоғарыда айтылғандардан мектеп математика курсына математикалық есептер шығару оқушыларды тек математикалық ұғымдармен таныстырып, математикалық символдарды қолдануға, дәлелдеуге үйретіп қана қоймайды. Математиканы оқытудың осындай жолын таңдау арқылы мұғалім әртүрлі есептер шығарудың алдына математиканы есеп шығару арқылы оқытуды қамтитын дидактикалық мақсаттар қояды.

Математикалық есептердің алдына қойылған дидактикалық мақсаттар келесі түрде болады [26]:

а) Жаңа білімді меңгеруге дайындық (жаңа ұғымдар, әдістер, теоремалар). Бұл мақсатқа жету үшін жаңа материалды игеруге қажет бұрыннан белгілі мәліметтерді оқушының есіне түсетін есептер шығару қажет және мұндай есептер қиын болмауы немесе ауызша шығарылатын есептер болуы қажет.

Мысалы, рационал көрсеткішті дәреже тақырыбын түсіндіру алдында бүтін көрсеткішті дәрежелерге берілген есептерді шығару пайдалы.

Көбейтудің үлестірімділік заңын (қосу амалына қатысты) оқыту алдында осы заңның бүтін сандар үшін қолданылуына берілген есептерді шығарту пайдалы. Осылай оқушылар аналогияны дұрыс қолдана білуге үйренеді.

ә) Жаңадан алынған теориялық білімді бекіту. Мұндай есептердің қатарына жаңа ұғыммен, оның анықтамасымен танысу, аксиомалар мен теоремаларды дұрыс айта білу, дәлелдеу әдістерін, бекітуге берілген есептерді жатқызуға болады. Мұндай есептер теориялық мәліметтермен танысқаннан кейін шығарылады.

Мысал ретінде оқушылардың сыбайлас және вертикаль бұрыштар туралы алған білімдерін бекітуге арналған есептерді қарастырайық: екі бұрыштың төбелері ортақ. Олар сыбайлас емес немесе вертикаль емес бұрыштар бола ма? Виет теоремасы туралы алған білімдерін бекіту мақсатында келесі есепті берген жөн: берілген квадрат теңдеудің бір түбірі – 7. Берілген теңдеудің екінші түбірі мен p коэффициентін табындар.

б) Жаңа материалдың қолданысын көрсету математикалық есептің алдына қойылған дидактикалық мақсат болады. Мұндай мысалдар ретінде математиканың техникадағы, тұрмыстағы қолданысын, математиканың басқа пәндермен арасындағы байланысын көрсететін есептер ұсынылады. Мұндай есептер қатарына есептеуді азайту мақсатында түрлендірулер жүргізілетін есептерді де жатқызуға болады.

в) Білік пен дағдыларды қалыптастыру. Белгілі бір есептерді шығарудың жаңа тәсілдерін, алгоритмдерін, әдістерін игеруге берілген алғашқы есептер мен жаттығуларды шығару алдына білік пен дағды қалыптастыру мақсаты қойылады. Мұндай есептердің мазмұны оқушылардың жаңа алған білімдерін қолдана білу, жалпы әдіс, алгоритм, тәсілдерді нақты жағдайларға қолдана білу қабілеттерін дамытуға бағытталған болуы тиіс. Алғашқы есептер қиын болмауы қажет, бірақ есептерді біртіндеп қиындата беру керек.

Алғашқы сабақтарда есептердің шешімін егжей-тегжейлі түсіндіріп,

есептің шешімін тақтаға толық жазып, көрсеткен жөн. Бұл өз кезегінде қалыптасқан білік пен дағдының оқушы есінде ұзақ сақталуына септігін тигізеді.

Математикадан дағдыны қалыптастыру мақсаты тек бір есептің ғана емес, есептер мен жаттығулардың жүйелерінің де алдына қойылуы мүмкін. Есепті шығарудың техникалық жақтары есеп шығарушының ойын бөлмеуі үшін математикалық әдістер мен есептеулерді дағдыға айналдырған жөн. Оқушылардың бойында математикалық есептеулердің, теңбе-тең түрлендірулердің, теңдеулер мен теңсіздіктер және олардың жүйелерін шешудің, геометриялық салулардың және т.б. дағдылары қалыптасуы керек. Ал бұл есептерді шығарудың тәсілдерін, әдістерін, алгоритмдерін есептерді шығаруда бірнеше мәрте қолдану арқылы қалыптасады. Сондықтан математикалық білік пен дағдыны қалыптастыру үшін ойланып жасалған есептер мен жаттығулардың реттелген жүйесін құру және мұндай жүйені құру барысында әрбір оқушының жеке қабілеттері мен ерекшеліктері ескерілуі және қарапайымнан күрделіге принципі сақталуы қажет.

Жаттығулар мен есептердің жүйелерін құру кезінде есептер мен жаттығулардың әртүрлілігі сақталады, себебі әрбір есепті шығару арқылы оқушылардың білімдері дамып отыруы тиіс. Сонымен қатар оқушыларда білік пен дағдыны қалыптастыру үшін жұмсалатын уақытты үнемдеуді де ескерген жөн.

Бұрыннан қалыптасқан білік пен дағдына қолдана отырып амалдар жасау жаңадан тұрақты, мықты білік пен дағды қалыптастыруға көмектеседі. Бұрыннан қалыптасқан білік пен дағдыны есептер шығаруда қолдану оқушылардың математикадан алған білімдерін әртүрлі жағдайларда қолдана білуге үйретеді.

г) Алдында өтілген материалды қайталау.

Математиканың ерекшелігі – оның әрбір бөлімінің бір-бірімен байланысты болуы, сондықтан оқушылар көптеген есептерді шығарғанда бұрын өтілген материалдардан алған білім, білік, дағдыларын пайдаланып отырады. Белгілі бір есепті шығарудың алдына қойған мақсаттан тәуелсіз есепті шығару барысында бұрын өтілген материалды міндетті түрде қайталап отырады. Белгілі бір тақырыпты қорытындылау сабақтарында шығарылатын есептердің дидактикалық мақсаты болып өткен тақырып бойынша алынған білімді қайталау, жүйелеу және нақтылау, қалыптасқан білік пен дағдыны бекіту болып табылады. Тоқсанның соңында шығарылатын есептер дәл осындай есептер болып табылады.

д) Математикалық есептер мен жаттығулардың алдына қойылатын дидактикалық мақсаттардың бірі – оқушылардың жаңа материалды меңгеруін бақылау. Әрбір есептің өзінің атқаратын функциясы болады – ағымдық бақылау немесе өзін-өзі бақылау. Тақтада шығарылатын есептердің тағы бір функциясы – оқушылардың алған білімдерінен түсінбеген ұғымдарын, қалыптасқан білік пен дағдының қаншалықты тұрақтылығын анықтайды.

Тексеру және бақылау жұмыстарында шығарылатын есептердің негізгі функциясы – мұғалім берілген бөлім бойынша материалды қаншалықты дұрыс

бергенін және оқушылардың қаншалықты меңгергендігін анықтап, қорытындылау.

Сонымен математикалық есептерді классификациялауда келесі жағдайларды ескеру қажет:

- математикалық есептер көпфункционалы, яғни бір ғана есеп бір уақытта бірнеше функция атқара алады, өйткені есепті шығару барысында бірнеше өзгертулер болуы мүмкін;
- барлық функцияларының ішінен әрқашанда бастысын бөліп алуға болады;
- кез келген типология немесе классификация шартты түрде жүреді;
- кез келген математикалық есеп әртүрлі классификациялық схемалардың белгілеріне ие болуы мүмкін.

1.3 Математикалық есептерді шығаруды оқытудың мәселелері

Есеп шығару математиканы оқыту процесінде маңызды рөл атқарады және пәнді оқытудың түпкі мақсаты тек теориялық білім беру мен есептердің белгілі бір жүйесін шығарту емес, есеп шығару арқылы пәндік білімді меңгеруді іске асыру болады. Білім беруде толық нәтижеге қол жеткізу үшін оқушылар алған теориялық білімін практикалық есептерді шығаруда қолдана білулері қажет. Осындай мағынада есеп шығару оқытудың мақсаты және құралы болып табылады.

Оқушылардың оқу-тәрбие процесінде пәндерді оқу қызметінің негізгі элементтерінің бірі – есеп шығару. Оқу іс-әрекетінің бұл түрі ойлау қабілетін қалыптастырудың және дамытудың құралы ретінде қызмет атқарады; ұғымдарды, заңдарды, теорияны терең ұғынуға септігін тигізеді; кәсіби бағыт алуға жағдай жасайды; білік пен дағдыны қалыптастыруға көмектеседі [18].

А.Е.Әбілқасымованың «Математиканы оқытудың теориясы мен әдістемесі» еңбегінде оқытудың қалыптасқан практикасында *есептерді шығару* термині үш жағдайда қолданылады:

- есептің шартын жүзеге асыру жоспары (әдісі, тәсілі);
- жоспарды, талапты орындау процесі ретінде [4, б.157-158].

Есепті шығару процесі есептің күрделілігі мен қиындығы сияқты белгілермен анықталатын, сәйкес, объекті (есептер) және субъектінің (оқушы) арасындағы тікелей байланыс арқылы жүзеге асатындықтан, күрделілік және қиындық критерийлерімен сипатталатын объективтік және субъективтік компоненттерден тұрады.

Есептің күрделілігі – байланыстың санына, сипатынан, есептің тұжырымына (табиғи немесе жасанды тілде тұжырымдалуы, әртүрлі пәндердің ұғымдары мен терминдерін қолдану), мәтіннің құрылымына (мәтіннің логикалық және грамматикалық құрылымы; мысалы, құрылымы ШaН болатын мәтіндер нәтижесі НШa шартының алдында келетін немесе шарты мен нәтижесі ШaНШ, НШaН мәтініне енгізілген мәтіндерден жеңіл қабылданады) тәуелді болатын есептің объективтік сипаттамасы.

Есептің қиындығы – оқушының субъективті тәжірибесіне (пәндік облыстарды білуі, оның ішінде математикалық білімдер, ойлау қабілеті, типтік

қасиеттерімен байланысты) тәуелді болатын есептің субъективтік сипаттамасы.

Есеп шығару – ерекше ой жұмысы. Ал кез келген жұмысты дұрыс атқару үшін, оның неден тұратыны және оны орындау үшін қандай құрал, әдіс керек екендігін алдын ала анықтап алу қажет. Кез келген есеп шарттардан және талаптардан тұратыны белгілі. Яғни, есеп шығару дегеніміз – математиканың жалпы заңдылықтарын (анықтамалар, аксиомалар, теоремалар, заңдар, формулалар), есеп шартына немесе оның салдарына белгілі бір ретпен қолдана отырып, есеп талабына жауап беру болып табылады.

Есеп шығару оқу-тәрбие процесінде белгілі бір функциялар атқарады. Осыны ескере отырып, мұғалім оқушыларға тапсырма берген кезде есеп шешімінің басты мақсатын, тұлғаны оқытудағы және дамытудағы рөлін анық білуі тиіс. Кез келген есепті шығару көпфункционалы, сондықтан есеп шығарушы адамның біліміне, қызметінің құрылымына және психикасына көп өзгеріс әкеледі. Нақты бір есептің әкелетін өзгерістерінің ішінде бастысы болады. Математикалық есептерді шығарудың функцияларын айтқан кезде осы басты өзгерісті айту керек. Кейбір маңызды есептерді шығаруды талдаумен аяқтаған дұрыс, мұның мақсаты – есепті шығару барысында оқушылар нені үйренді, есептің қандай ерекшеліктері бар, нені есте сақтап қалған жөн және тағы басқаларын түсіну [52].

Есеп шығарудың негізгі функцияларымен қатар, ол төмендегі жағдайларға көмектеседі:

- оқытылып отырған математикалық заңдар мен заңдылықтардың практикалық қолданыстарын түсіну;
- оқушыларда арнайы математикалық білік пен дағдыны қалыптастыру және дамыту;
- оқушыларда пәнаралық және зерттеушілік білік пен дағдыны қалыптастыру және дамыту;
- оқушылардың есеп шығару туралы жалпы түсінік қалыптастыру және дамыту.

Шығармашылық ойлау мәселесіне арналған еңбектерде (Дж.Брунер, К.Дункер, Е.И.Ефимов, В.П.Зинченко, Н.Нильсон) есептер және есеп шығару жүйелері белгіленген. Есептерге пәні, шарты және талабы (берілгені және ізделінді шамалар), есеп шығару жүйесіне есепті шығарудағы алгоритмдік және эвристикалық тұрғыдағы негізі болатын ғылыми әдістер, тәсілдер және құралдар енеді (сурет 2).

Нақты ғылыми түсінік бойынша «есеп» ұғымы барлық ғылыми бағыттардың қажетті және маңызды элементі болып табылады, ал «есеп шығару» ұғымын оқу іс-әрекетінің құрылымында қарастыру – оны дидактикалық категорияға айналдырады.

Дидактикалық мағынада есеп бір уақытта таным объектісі және оқушылардың танымдық қызметін басқару құралы болып табылады.

«Есеп» ұғымының мағынасын ашу есепті шығаруға оқытудың теориялық негіздерін құру үшін жеткіліксіз. Заманауи ұғым болып табылатын «есепті шығару» ұғымын талдау қажет, ал бұл ұғым іс-әрекет әдісін таңдау процесі болып табылады [53].



Сурет 2-Есеп және есеп шығару жүйесінің құрылымдық бірліктері

Есепті шығаруға оқытудың теориясы мен есепті шығаруды меңгеру тәжірибесі арасында, мұғалім мен оқушының іс-әрекеттері арасында қайшылықтар бар, ал бұл қайшылықты жоюдың бір жолы – оқушылардың «есепті шығару» ұғымын дұрыс түсінуі болады.

Философ ғалымдардың еңбектерінде «шығару» және «есепті шығару» ұғымдарының бірнеше анықтамалары бар. «Шығару бұл мақсатты және іс-әрекет әдісін таңдау процесі мен нәтижесі» [53].

Психология әдебиеттерінде «шешу» мен «шешім қабылдау» ұғымдары бірдей ұғымдар және «іс-әрекет мақсаты пен іс-әрекет әдісін таңдаумен байланысты ерікті әрекеттің кезеңі ретінде дәстүрлі түрде» қарастырылады [54].

«Есепті шығару» ұғымы – нақты құрылымы бар, күрделі динамикалық ұғым. Оның сипаттамасы әртүрлі жәйттармен анықталады: процес мақсатымен, түрлендірілетін ахуал мазмұнымен, шешудің қолда бар әдістері және тәсілдерімен, есеп мазмұны және оны шығару құралдарының өзара үйлесімділігімен, шығарылатын есептің нақты типі және түрімен сипатталады.

Есеп шығаруды ерікті түрдегі іс-әрекет ретінде зерттеу жұмыстары психологияда А.С.Выготский, А.В.Запорожец, Е.Л.Рубинштейн еңбектерімен тығыз байланысты [55-57].

С.Л.Рубинштейн әрбір ойлау қызметін есеп шығару деп есептейді, «есепті шығару барысында есептің объективті пәндік мазмұны ойлау процесін анықтайды». Одан әрі ол: «Есепті шығару ойлаудың алдында тұрған қиындықтарды жеңу үшін адамның ерікті түрде күш салуын талап етеді», -дейді. Сонымен, «психологияда есепті шығару дегеніміз есептің шарты мен қойылып тұрған талаптарының арасындағы қайшылықтарды шешу үшін жасалған белгілі

бір ерікті түрдегі іс-әрекетті айтады» [57].

«Есепті шығару» ұғымы ойлау психологиясы мен оқыту психологиясын біріктіреді. Есепті шығару барысында адамның ойлау қызметінің негізгі заңдылықтары байқалады, сонымен бірге білімді меңгеру және қолдану процестері жүреді. Бұл жағдайда ойлау – әртүрлі амалдарда жүргізілетін тұтас және көпбейнелі іс-әрекет болып табылады. Солардың ішіндегі негізгілері – талдау және синтез. Талдау объектіні оны құраушы бөліктеріне ойша бөлу, негізгі белгілерін, қасиеттерін, элементтерін ажырату. Синтез, талдау жасау кезінде объектінің элементтерінің арасындағы негізгі байланыстар және қатынастар, тұтастай қалыптастырады. Талдау және синтез әрқашан бірлікте, өзара белгілі бір байланыста, ал есеп шығару барысында бүтіндей аналитикалық-синтетикалық қызмет атқарады.

Іс-әрекет дегеніміз философиялық категория ретінде адамның қоршаған ортаны тану процесі болып табылады. «Іс-әрекет – құрамында өзгеру мен түрлендіру элементтері бар адамның қоршаған ортаға деген қатынасының формасы болып табылады. А.Н.Леонтьев бойынша «іс-әрекет сыртқы ортадан, сонымен бірге, организмнің өзінде болатын күрделі және көп бейнелі белгілермен басқарылатын динамикалық функционалдық жүйе болып табылады» [41].

Есеп шығару теориясында «есепті шығару» ұғымы жөнінде екі түрлі көзқарас бар. Бірінші көзқарас бойынша әмбебап есепті шығаруға негізделеді және жетілдіріледі [58-61].

Екінші көзқарас бойынша есептердің жеке түрлері мен типтерін шығарудың әдістері мен тәсілдерін жетілдіруге жоғары баға беріледі және т.б. [62, 63].

Есепті шығаруды сипаттайтын құрылымдардың екі типі белгілі, олар: сыртқы және ішкі. Сыртқы құрылым есепті логикалық схемалар, алгоритмдік және эвристикалық ережелер арқылы сипаттайды, және сол арқылы есептің жүйесін түрлендірудің тізбегін анықтайды. Ойлау амалдарын пайдалану ішкі құрылымды құруды қарастырады. Әртүрлі ғылымда (психологияда, жалпы және дербес дидактикаларда) есепті шығару процесінде осы құрылымдардың екеуін де қажетіне қарай пайдаланады. Есептерді шығару теориясында, өздерінің құрамдарына ойлау амалдарымен қатар логикалық операциялар да енетін амалдарға құрылымдарын анықтау орын алып отыр. Жалпы және дербес дидактикаларда есепті шығару процесін сипаттау үшін сыртқы да, ішкі де құрылымдарды пайдаланады [64].

«Есепті шығару» ұғымын процесс және оның нәтижесі ретінде қарастыру керек. Процесті Н.И. Кондаков ұсынған нұсқада қарастырамыз. «Процесс (лат. processus – жүріс, қозғалыс) – дамудың әрбір сәтінің заңды, тізбектелген, үзіліссіз алмасуы». Мысалы, есеп шығару процесі, ойлау процесі [65].

Осындай мағынада есепті шығару құрылымы жоспарлаудан, оны құру және іске асырудан тұрады. Процесті іске асыратын негізгі элементтер төмендегідей:

- амал тәсілдерінің бірін тандап алу;
- амалды орындаудың мақсаттары мен құралдарының арасындағы өзара

байланысты және өзара әрекеттестіктерді ұғыну;

- амалды модельдеу;
- амалдың салдарын бағалау;
- амалдың ұйғарылған нәтижесін талқылау;
- шешім қабылдау;
- шешімді жүзеге асыру;
- орындалатын амалды және сол амал арқылы алынған нәтижені талқылау [66, 67].

Бұдан, есепті шығару – оқушының есеп ұғымымен танысудан бастап, нәтижені талқылауға дейінгі іс-әрекетін қамтитыны шығады.

Есепті шығару - есептің мазмұнында берілген объектіні түрлендіру процесі. Бұл объектіні түрлендіру белгілі бір әдістермен, тәсілдермен, құралдармен жүзеге асырылады. Есепті шығару түрлендіру процесін тануды қажет етеді. Ол алгоритмдік және эвристикалық алғышарттармен сипатталатын ойлау процесі мен ойлау іс-әрекеті көмегімен анықталады. Сонымен, *есепті шығару адамның есептің шарты мен талаптарының арасындағы қайшылықтарды шығаруға, объектіні түрлендіруге бағытталған ойлау қызметінің күрделі процесі болып табылады.*

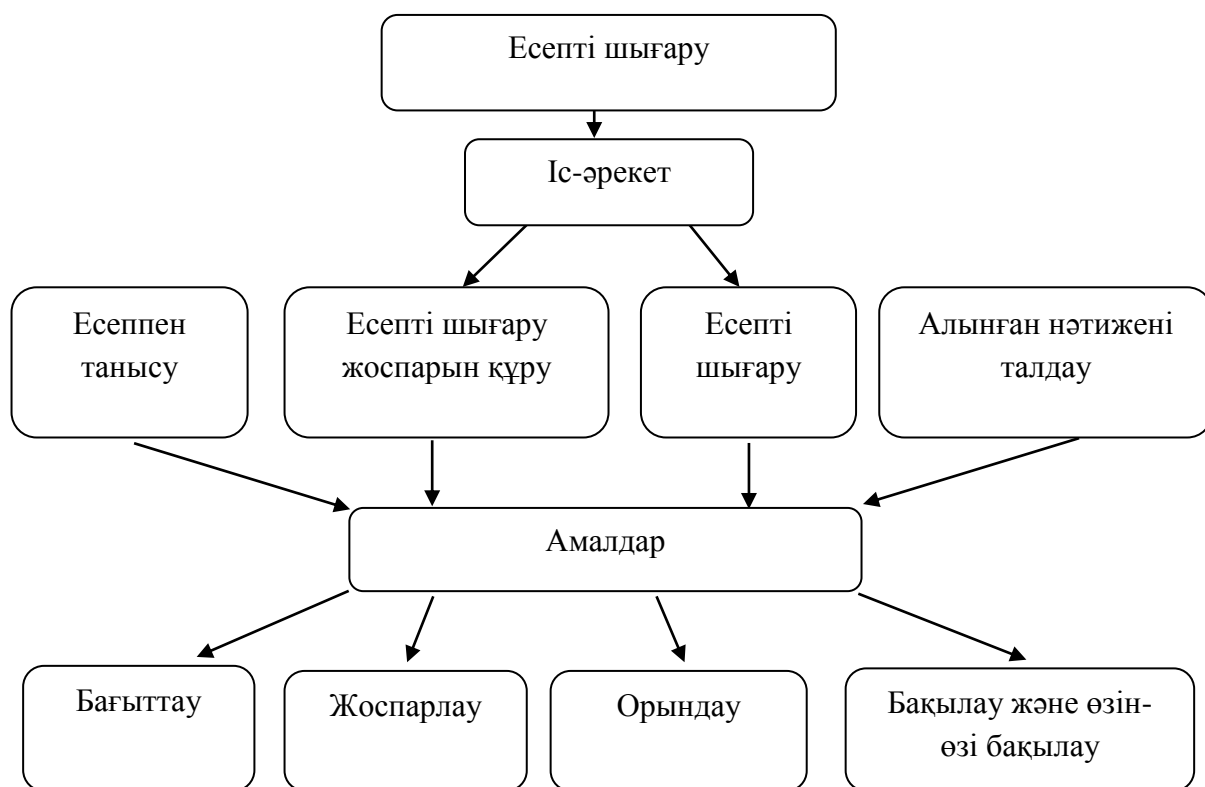
Есеп шығару кезінде білім оқушылардың іс-әрекетінің құрылымдық элементтерін қалыптастыру қажет. Бұл мәселені жобалау барысында іс-әрекеттің жүйелік-құрылымдық талдауына сүйенген жөн, ал бұл А.Н.Леонтьевтің, П.Я.Гальпериннің, Н.Ф.Талызинаның еңбектерінде зерттелген. Іс-әрекет құрылымы, олардың пікірі бойынша, белгілі бір амалдар жүйесінен құралады. П.Я.Гальперин әрбір әрекеттің бағыттаушы, орындаушы, бақылаушы құраушыларын анықтайды [68].

Л.М.Фридман іс-әрекеттің келесі компоненттерін анықтайды: шартқа талдау жасау, есепті шығарудың жоспарын іздеу, шығаруды іске асыру, алынған нәтижеге талдау жасау [21; 43].

Л.М.Фридманның осы көзқарасын ұстана отырып, есепті шығарудың төрт қадамын айқындауға болады: есеппен танысу, есепті шығарудың жоспарын құру, есепті шығару, алынған нәтижеге талдау жасау.

Есеп мазмұнында берілген және ізделінді шамалар анықталады (есептің шарты және талабы) және олардың арасындағы байланыс және ол байланысты анықтау барысында ойлау процесі анықталады. Берілген шама ретінде шарт пен талап арасындағы байланысты синтетикалық әрекет суреттейді. Талдау осы байланыстарға синтез жасау арқылы іске асырылады. Физиологиялық тұрғыда, мұндай байланыстар негізі болып белгілі бір динамикалық стереотиптер арқылы анықталатын уақытша шартты байланыстар болып табылады. Уақытша шартты байланыстардың тұрақты жүйесі есеп шығара білуді қалыптастырудың негізі болып табылады.

Есеп шығарудың психологиялық теориясын талдай келе, әрбір іс-әрекеттің негізгі амалдарын анықтауға болады: бағыттау, жоспарлау, орындау, бақылау. Төртінші амалды өзін-өзі бақылаумен толықтырған дұрыс, ал бұл өз кезегінде оқытудың жеке тұлғаға бағытталған әдісінің негізін құрайды (сурет 3).



Сурет 3 - Есептерді шығарудағы іс-әрекеттердің мазмұны

Есеп шығару барысында объектілер арасындағы байланыстарды өрнектеп жазу үшін символдар қолданылады. Есепті шығарудың құрамына формальды семантикалық компоненттер кіреді, олар бейнелік және сөздік-логикалық ойлаудың бірлігі нәтижесінде білінеді. Есеп шығару процесінің формальды компоненттері әріпті, сандық және графикалық символдарға олардың функционалдық тәуелділігін ескере отырып, жасалатын амалдардан тұрады [60].

Семантикалық компоненттер есептің мазмұнын және шығаруын толықтай ашу үшін көрнекілік амалдар тұрады.

П.Я.Гальперин іс-әрекеттерді бағыттаудың негізін жасады, оның құрамына іс-әрекеттің нәтижелі болуы үшін қажетті білім (толық немесе толық емес), іс-әрекет туралы мәлімет (мақсаты, құрамы, амалдардың орындалу тізбегі). Осыған сәйкес, ол бағыттаудың үш кезеңін көрсетті:

- әрекеттер тізімі көптеген байқаулар мен қателіктерден кейін құралады;
- жаңа материалмен дұрыс жұмыс жасауға нұсқау;
- есепті дұрыс шығарудың жолын көрсететін жаңа тапсырмаларды орындауды жоспарлы түрде үйрету [68].

Есепті шығару барысында адам мақсат пен әдісті таңдайды. Бұрынғы ережелерді және алғышарттарды қолдануға болмайтын жаңа, бұрын кездеспеген есепті шығару барысында адам жаңа мәселелермен кездеседі. Адамға әртүрлі салада күрделі шешім қабылдауға тура келеді. «Әртүрлі белгілеріне баға беру бойынша баламалы нұсқалардың ішінен біреуін таңдау шешім қабылдау деп аталады», - дейді О.И.Ларичев [67].

Ойлау қызметінің мағынасы – зерттеліп отырған объектіні басқа объектілермен немесе белгілермен сипаттау. Сондықтан, «есеп шығару процесін осы процесс барысында зерттеліп отырған объект қандай объектілермен және қалай алмастырылатынына сәйкес топтарға бөлу қажет», - дейді Г.П. Щедровицкий. Сонымен қатар, ол есепті шығаруға қажетті амалдар тобын келесідей бөледі [69]:

1) белгілі бір таным амалдарының болуы, мысалы, санау, өлшеу және басқалары;

2) тек бір танымдық амалдың жеткіліксіздігі, мысалы, әртүрлі жерде орналасқан қозғалмайтын заттардың ұзындықтарын салыстыру;

3) таным процесін іске асыру үшін күрделі белгілеулер жүйесін қалыптастыру және қолдану;

4) белгілі бір объектіні символдармен алмастыру операциясын орындау.

Л.Секей есеп шығару іс-әрекетінің өнімді және репродуктивті сипаттамасына көңіл бөледі [70].

Есепті шығару өзара бөлек бөліктердің және жағдайлардың күрделі, динамикалық құрылымы болып табылады.

Д.Н.Богоявленский, Н.А.Менчинская есеп шығарудың төмендегі сәттерін көрсетеді [71]:

1) есепті қабылдау белгілі бір сұрақты қабылдаумен бірдей;

2) есептің шарты ізделінді шаманың қасиеттерін сипаттауы қажет.

Дидактикалық жүйе көпдеңгейлі әдіснамалық, дидактикалық және әдістемелік принциптерге негізделіп құрылған жағдайда тиімді жұмыс жасайды.

Принцип – қандайда бір теорияның негізгі, бастапқы жағдайы, жетекші идея, қызмет ережесі [53;65;72].

Келесі принциптер есептердің дидактикалық жүйесін құрудың негізі болып табылады: *тұтастық, көпфункционалды, көпдеңгейлік және жиынтық*.

Енді осы жүйелік принциптердің есептердің дидактикалық жүйесін құруда қалай өзгертетінін қарастырайық.

Тұтастық – өзінің мазмұны және құрылымы жағынан күрделі объектілердің жалпы сипаттамасы болып табылады. Біздің жағдайда объект есептер жүйесінің ішкі жүйесі математикалық есеп ретінде қарастырылады. Жүйенің қасиеттері жүйені құрайтын өзара бөлек есептердің қасиеттерінің қосындысы түрінде болмайтындығы оның тұтастығын анықтайды. Ішкі жүйені құрайтын әрбір есеп оқу процесінде белгілі бір функция атқарады. Тұтастық – құрылымдылықты, өзара байланыстылықты, өзара шарттастықты, өзара тәуелділікті, иерархиялықты және интегративтілікті анықтайды.

Құрылымдылық – жүйені құрайтын өзара бөлек есептердің арасында белгілі байланыстың және қатынастың барын білдіреді. Жүйеге жоғарыда қарастырылған классификацияға жататын түрі және типі жағынан әртүрлі есептер кіреді.

Дидактикалық жүйеге кіретін есептер *өзара шарттастықта, өзара байланыста, өзара тәуелділікте* болады, ғылым негіздерін оқыту процесінде

маңызы бар және тұтастық міндет атқарады, білім беру мазмұнына қойылатын әлеуметтік-экономикалық талаптарға тәуелді. Мысал ретінде скаляр және векторлық шамаларды қарастырайық. Бұл шамалармен оқушылар математика және физика сабақтарында танысады. Сондықтан математика және физика сабақтарында скаляр және векторлық шамалардың сипаттамалық белгілерін және оларды талдау және қолдану бірмәнді еместігін ескеріп отыру маңызды.

Жүйенің *иерархиялылығын* екі аспектіні ажырату арқылы қарастырған жөн: біріншіден, әрбір есеп жүйе ретінде қарастырылуы мүмкін; екіншіден, жүйеде есептердің тізбектілігі олардың реттілік негізінде анықталады. Есепте шарт пен талап бірлікте, тұтастықта болады. Есептің жауабын алу барысында адамның ойлау қызметі шарт пен талап арасындағы қайшылықты шешуге бағытталады. Жүйеде есептер білім мен білікті қалыптастыру процесінде дидактикалық шарттарды, маңыздылығын және құндылығын ескере отырып, тізбектелген түрде орналасады.

Интегративтілік дидактикалық жүйенің тұтастығын, оның дамуы мен жетілуін, сыртқы ортамен байланысын қамтамасыз етеді.

Есептер жүйесін құрудың негізінде оның *көпдеңгейлілігін*, яғни жоғарыда көрсетілген классификацияға кіретін есептердің әртүрлілігін ескерсе, онда жүйе аяқталған болып саналады. Түрі және типі жағынан әртүрлі әрбір есепті шығаруға, алгоритмдік және эвристикалық алғышарттарын құруға, шығару тәсілдеріне өзіне тән жолдарын іздеу керек, ал бұл есептер жүйесінің көпдеңгейлілігін қамтамасыз етеді. Есепті шығару тәсілдерінің *жиыны* оқытылып отырған курстың белгілі бір тарауы бойынша түрі және типі жөнінен әртүрлі есептер құрастыру екенін білдіреді.

Есептер жүйесін құрудың және оның қызмет етуінің негізін қалайтын дидактикалық принциптерді негіздеу олардың түпкі мағынасын және педагогикалық ғылымда пайда болуының және дамуының тарихи аспектісінде нақты дидактикалық номенклатурасы мәселесін анықтау арқылы іске асады.

«Дидактикалық принциптер – оқытудың принциптері – оқыту процесіне қойылатын негізгі талаптар жүйесі және бұл талаптарды сақтау заңды түрде оқыту есептерін шешуге алып келеді» [72].

Оқыту принциптері қоғамның әлеуметтік-экономикалық даму деңгейімен және білім беру жүйесінің алдында тұрған проблемалармен анықталады.

Оқыту процесінде оқушыларды есеп шығаруға үйретудің әдістемелік принциптері тек қана келесі жағдайларды ескергенде ғана сәтті болады. Біріншіден, әдістемелік принциптер дидактикалық тұрғыда әдіснамалық және дидактикалық принциптермен байланысты. Екіншіден, әдістемелік принциптер өзара байланыста болып, оқыту әдістері арқылы анықталады. Осылайша, әдістемелік принциптер көп айнымалы күрделі процесс болып табылады.

Біздің көзқарасымыз бойынша жүйенің құрамына кіретін есептерді байланыстыру үшін келесі дидактикалық принциптерді ұстанған жөн: дамыта оқыту, ғылымилық, теория мен практиканың байланысы, қол жетімділік, жүйелілік және реттілік, саналылық, мақсатқа бағыттылық, мәселелік, оқытудың және дамудың сабақтастығы [13; 16].

Кейбір еңбектерде оқу есептерінің жүйесін құрастырудың дидактикалық

принциптері зерттеледі және нақтыланады. Есептердің дидактикалық жүйесін құру үшін оның үш жағын ескерген жөн: оқыту, дамыту, басқару. Есептер жүйесі білім беру процесінде танымның дидактикалық әдісі, ойлауды қалыптастырудың және дамытудың құралы және реттелген педагогикалық процесті ұйымдастыру тәсілі болып табылады. Осыған сәйкес, дидактикалық жүйенің мазмұнында және құрылымында жоғарыда көрсетілген аспектілер көрініс табуы тиіс. Есептердің дидактикалық жүйесінің оқыту аспектісін іске асыру үшін оқыту процесінің компоненттері мен нәтижелеріне сүйенген дұрыс. Әрине, осылайша бөлу шартты болып табылады, себебі кез келген процесс нәтижесімен тығыз байланысты, ал нәтижеге сәйкес процесс болмаса қол жеткізу мүмкін емес. Мақсат, есептер, әдістер, оқу пәнінің мазмұны мен құрылымы оқыту процесінің құраушылары болып табылады. Көрсетілген әрбір бөлік өзінің мазмұны, құрылымы, құрамы болатын, өзінің құрамына кіретін элементтер арасында, қасында орналасқан басқа жүйелермен және сыртқы ортамен функционалдық байланыста болатын, жүйенің элементтері арасында иерархиялық байланыс және тәуелділік болатын жүйе болып табылады.

Есептердің дидактикалық жүйесінің жоғарыда көрсетілген аспектілеріне ғылыми негізделген терең талдау жасау үшін заманауи әлеуметтік-экономикалық жағдайда оқыту мазмұнына сүйенеміз (сурет 4).

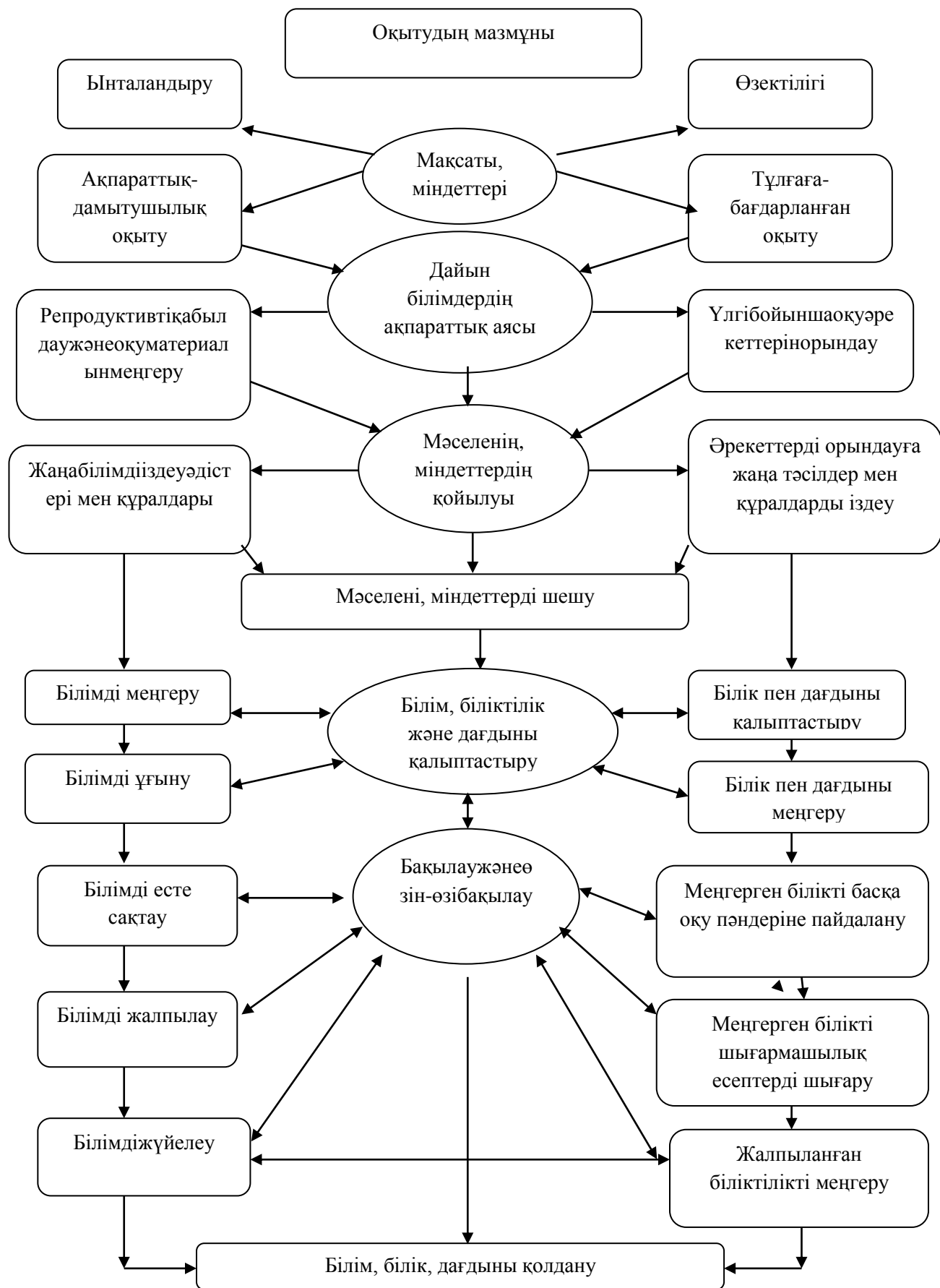
4-суреттен көріп отырғанымыздай, оқыту мазмұнының құрамына ақпараттық-дамыту және тұлғаға бағдарлы оқыту кіреді, ал бұл оқытудың субъективтілігін қамтамасыз етеді, яғни оқытудың мақсаты мен міндеттерінің оқушылардың тұлғасына бағытталуын қамтамасыз етеді.

Есеп шығару оқыту мазмұнының және онымен байланысты оқыту процесінің құраушыларының бірі болып табылады.

Есеп шығару барысында жеке тұлғаға бағытталған оқытуды іске асыру үшін ақпараттық-мазмұндық және амалдық құраушыларын қарастырған жөн. Құраушыларды белгілі бір дидактикалық байланыста және бір бірімен белгілі бір қатынаста болатындай қарастыра отырып, есептердің дидактикалық жүйесін жасау үшін қажетті әдістемелік принциптерді атап өткен жөн.

Дидактика және оқыту әдістемесі бойынша іргелі зерттеулер есептер жүйесін құрудың және жұмыс жасауының негізгі әдістемелік принциптерін анықтауға мүмкіндік берді:

- 1) есептің мазмұнында келтірілген мәліметтердің ғылымилығы;
- 2) есеп шығаруды оқытудың дамытушылық сипаты;
- 3) есеп шығара білуді қалыптастырудың және дамытудың жүйелілігі мен реттілігі;
- 4) есеп мазмұнының кәсіби бағыттылығы;
- 5) есеп мазмұнының мәселелілігі;
- 6) есеп шығаруды оқытудың саналылығы және белгілі бір мақсатқа бағытталғандығы.



Зерттеулер көрсеткендей, есеп шығару өзінің нәтижесін беру үшін дидактикалық принциптерден шығатын төмендегі дидактикалық шарттар орындалуы қажет:

- «есеп» және «есеп шығару» ұғымдарының мазмұнын және көлемін білу;
- оқу есептерінің белгілі бір түрі мен типінің қолданысын негіздеу;
- білім мен білікті қалыптастыру кезіндегі есептердің белгілі бір мақсатқа сай қолданылуы;
- әртүрлі және әртипті есептердің қолданысының жүйелілігі мен реттілігі;
- әртүрлі есептерді шығарудың белгілі бір әдістері мен тәсілдерінің қолданысын негіздеу;
- есеп шығару процесінің мазмұны мен құрылымын саналы түрде игеру;
- есеп шығарудың алгоритмдік және эвристикалық тәсілдерін қалыптастыру;
- жаратылыстану-математикалық және гуманитарлық пәндерді оқытуда есептерді шығарудың көзқарастарының жалпылығы;
- есеп шығару барысында қалыптасқан дағдыны техникалық, инженерлік, арнайы және гуманитарлық білімге көшіру.

Есептің мазмұнында келтірілген материалдарды таңдау келесі шарттарды қанағаттандыруы қажет:

- ғылымилығы;
- материалдың оқып жатқан материалмен ішкі байланысы;
- материалдың практикалық маңыздылығы;
- түсінуге жеңіл болуы;
- оқытылып жатқан тақырып пен бөлімдерге бірқалыпты үлестірімділігі.

Мектеп математика курсы бірнеше тараулардан тұрады. Олардың әрқайсысында қандайда бір есептер жиынтығын шығару ұсынылған.

Мысал ретінде математикадан есептерді шығарудың жалпы амалдарын көрсетейік:

- есептің мазмұнын оқу;
- түсініксіз терминдерді түсіндіру және сәйкес ұғымдарды есте қайта қалпына келтіру;
- математикалық маңызын түсіну мақсатында есеп мазмұнын алдын ала талдау;
- есептің шартын қысқаша түрде жазу;
- бірліктер жүйесін анықтау;
- математикалық байланыстарды анықтау және сәйкес теңдеулер құру, график немесе сызба салу;
- ізделінді шаманы немесе жалпы формула арқылы шамалардың мәнін қоя отырып, келесілерін анықтайтын шамалардың сандық мәндерін табу;
- алынған нәтиженің шынайылығы мен бағалаудың орындылығы.

Әдістемелік әдебиеттерді талдай отырып, мынадай қорытындыға келеміз: есептерді шығарудың жалпы тәсілі – бірізділікпен орындалатын іс-әрекеттердің анықталған жүйесі. Оның орындалуынсыз оң нәтиже алынбайды, есептің мазмұнындағы берілгендері мен ізделінді шамалар арасында қайшылықтар болуы мүмкін.

Есептерді шығарудың жалпы тәсілдері негізгі әрекеттерден (есеппен танысу, есепті шығару жоспарын құру, шығаруды іске асыру, нәтижені талдау), өз кезегінде әрбір есептің түрі мен типіне байланысты құрылымы мен мазмұны ерекшеленетін кезеңдерді қамтиды.

Негізгі мектеп оқушыларының жас ерекшеліктері және білім деңгейі мен біліктерін ескере отырып, есептер шығару барысында ойлау іс-әрекетінің жақсы дамымағанын байқауға болады.

Осындай іс-әрекеттердің негізгі элементтеріне мыналарды жатқызуға болады:

- 1) есептің мазмұнын оқу;
- 2) есептің мазмұнындағы шарты мен талабын бөліп алу (берілген және ізделінді шамалар);
- 3) шарты мен талабын қысқаша жазу (есеп мазмұнын кодтау);
- 4) физикалық құбылыстың немесе процестің маңызын анықтау;
- 5) суреттің немесе сызбаның үлгісін орындау;
- 6) негізгі заңдар мен теңдеулерді жазу;
- 7) шешімін жалпы түрде алу;
- 8) ізделінді шаманың аталуын тексеру;
- 9) есептің шартындағы алынған жауапқа талдау жасау.

Осылайша, белгілі бір амалдар арқылы кеңейтілген әрекеттерді меңгеру амалдар мен іс-әрекеттер құрамын қысқаша қалыптастыруға алып келеді.

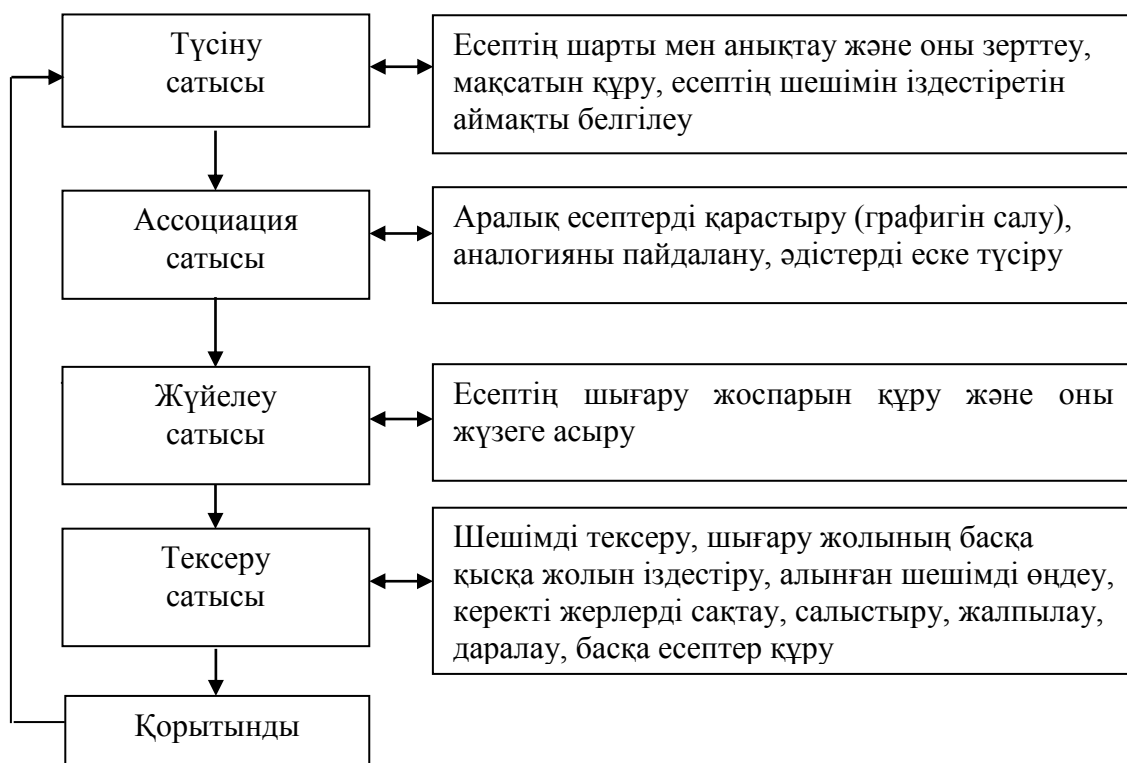
Мектеп математика курсының мазмұны ұғымдар және анықтамалар, математикалық деректер және теоремалар, пайымдарды дәлелдеу әдістері мен есептер шығаруды қамтитын теориялық материалдардың және осы теориялық материалдарға сәйкес есептерден тұрады.

Математиканы табысты оқыту оқушыларға сабақ барысында және үй тапсырмасына қандай есептер, қандай ретпен және қандай көлемде берілетініне де байланысты.

Сондықтан, мұғалім математикалық есептерді шығаруды оқыту процесін ұйымдастыру барысында ең алдымен есептерді таңдау, оларды реттеу, оқушылардың орындайтын ақыл-ой іс-әрекеттеріне талдау жасау және т.б. кездеседі. Бұл мұғалімге қойылған дидактикалық мақсаттарға сәйкес таңдау жасауға көмектесетін есептерді классификациялауды талап етеді. Сонымен бірге оқушылардың есеп шығару жұмысын ұйымдастыруға көмектесетін, әдістер мен тәсілдер маңызды рөл атқарады [73].

Зерттеу мақсаты мен міндетіне сәйкес есеп шығарудың психологиялық ерекшеліктерін талдаған (Д.Пойа, Л.М.Фридман, М.Колягин, Э.Ф.Эсаулов) зерттеушілердің есеп шығару процесіндегі іс-әрекет кезеңдері талданып және салыстырылып, осы кезеңдерге амалдар қайта топтастырылды. Сондықтан, есеп шығару процесінің іс-әрекет үлгісін ұсынамыз (сурет 5).

Есеп шығару процесінің бірінші *түсіну сатысында* есептің шарты мен талабы қарастырылып және оған талдау жасау арқылы мақсаттары мен талаптарын қою, яғни, есептің шарты қаншалықты жеткілікті түрде берілгеніне көңіл бөлу, есептің шешімін іздейтін аймақты белгілеу іс-әрекет амалдары жатады.



Сурет 5- Есеп шығару процесінің сатылары

Екінші *ассоциация сатысында* есептің шарты мен талаптарын өткен тақырыптармен байланыстыра отырып, аралық, көмекші есептерді қарастыру, аналогияны пайдалану, әдістерді еске түсіру сияқты іс–әрекет амалдары іске қосылады.

Осы іс–әрекет амалдарында адамның ойлау қызметінің көріністері: жинақтау, ұйымдастыру және қорыту мен құрастыру дамиды.

Үшінші *жүйелеу сатысында* есептің шығару жоспары құрылады және ол жүзеге асырылады. Бұл сатының маңыздылығын Дж. Миллер, Ю. Галантер, К. Прибрам: «Жоспарлаудың өзі есептің шығару жолын құратын мидың ойлау амалы, эвристикалық бір түрі» – деп атап көрсеткен. Ал жоспар екі түрлі жүйелі немесе эвристикалық болуы мүмкін.

Есептің шығару процесінің ең маңыздысы – *тексеру сатысы*. Мұнда сатыға есепті шығарудың қысқаша жолын іздестіру, алынған шешімдерді өңдеу, басқа есептер құру, керекті жерлерді есте сақтау, салыстыру амалдарымен қатар, жалпылау, даралау амалдары жатады.

Есепті соңғы *қорытынды* сатысында ерекше жағдайларға көңіл бөлу және оны белгілеу, түйіндеу амалдары іске асырылады.

Қорытындыны бөлек жеке саты түрінде қарастыру мынадай іс–әрекеттерге негізделген:

1) Есептің шешімі тексеруде сыннан өтеді. Ол кейде қате құрылуы да мүмкін. Ондай жағдай есепті басынан қайта қарастырып, іс–әрекет алдыңғы төрт сатыны қайталайды. Олай болса, қорытынды сатысының тексеру сатысынан кейін тұруы орынды.

2) Есеп дұрыс шықпаның өзінде, кей жағдайда оны жалпылау немесе

даралау іс-әрекеті орындалады. Алынған шешімнің қысқаша жолын іздестіру үшін де, есепті жалпылау немесе даралау жағдайларында да есепті шығару процесінің бірінші сатысына қайта ораламыз. Себебі, бізде жаңа мақсат пен шарттар пайда болады. Егер осы іс-әрекеттерден кейін есептің шешуі табылса, онда алынған нәтижелердің арақатынасын анықтау мен есепті аяқталған күйге әкелу қорытынды сатысының үлесіне тиеді. Адам өз еңбегінің жемісін қорытындылап және оны толығымен бағалай білуі қажет. Толықтырылған «қорытынды» деп аталатын бесінші сатының құндылығы осында жатыр.

Г.И.Саранцев оқушылардың білімді меңгеру сапасын қалыптастыру бойынша келесі нұсқауларды ұсынады:

1) есепті шығарудың бірнеше жолдарын іздеу қажет, кей жағдайда оларды бірнеше рет кезектестіру керек;

2) есепті шығаруды интуитивтік болжамнан бастау қажет;

3) есептің шартын талдау және түсіну, шарты мен талабындағы жекелеген элементтерді бөліктеп алу керек;

4) есепті шығару процесінде оқушының ойлау іс-әрекеті мен есеп мазмұнын түрлендіру арасындағы байланысты орнату қажет (схема, сызбалар, модельдер) [74].

Оқушыларға білімді меңгерту теориялық білімдерін таныс емес жағдайда қолдануды, есептерді шығару барысында қиындықтарды жеңуге бағытталған күрделі процесс.

Оқытудың ақпараттық-рецептивті, репродуктивті әдістері дайын білімді меңгеруді, сонымен қатар үлгі бойынша білік пен дағдыны қалыптастыруды қамтамасыз еткенінмен, оқушылардың шығармашылық қабілеттерін дамытып, тәрбиелеуге мүмкіндік бермейді. Ал оқушылардың шығармашылық іс-әрекетін қалыптастырып, дамытуда оқытудың мәселелі, эвристикалық, зерттеушілік әдістері қолданылады.

Мәселелі оқыту әдісінің маңызы оқушылар таным процесінде қарама-қайшылықтар арқылы әрбір қадамын негіздей отырып, есепті шығарудың жолы мен логикасы анықтайды. Дегенмен мәселелі оқыту шығармашылық іс-әрекетті жеткілікті деңгейде қалыптастыра алмайды, бұл жерде есепті оқыту процесіне «жекелеген элементтерді» қосу қажеттілігі туындайды. Элементтер арқылы шығармашылық іс-әрекетті қалыптастыру эвристикалық әдіс негізінде жүргізіледі, яғни мұғалім оқушыларға бүкіл мәселені емес, оның қандайда бір бөлігін шешуді береді. Бұл әдіс әртүрлі нұсқада көрініс табуы мүмкін: мұғалім нақты материалды баяндап береді де қорытынды жасауды оқушылардан талап етеді немесе оқушыларға болжам айту, есеп шығарудың баламалы жолын іздеу, болжамды тексеру жоспарын құру және т.б. қажеттіліктерді шешу сұрағын қояды. Демек, оқытудың эвристикалық әдісінің негізгі принципі оқушыларды бір сарынды тапсырмалар арқылы олардың табиғи қабілеттерін жоғалтып алмай, керісінше оқуға деген қызығушылыққа сүйене отырып оқыту. Өз кезегінде эвристикалық әдіс оқушыларда шығармашылық іс-әрекеттің элементтерін ғана қалыптастырып, тұтас шығармашылық тапсырмаларды орындауға мүмкіндік бермейді. Оқушылардың жалпы шығармашылық қабілеттерін дамыту зерттеушілік әдісте жүзеге асады. Бұл әдіс оқушыларға

жүйелі түрде зерттеу элементтері бар тапсырмаларды: күрделілік дәрежесі бойынша орналасқан мәтіндік және мәселелі (стандартты емес) есептер жүйесін орындау арқылы жүзеге асады.

Осылайша, эвристикалық, зерттеушілік, репродуктивтік әдістерді мәселелі оқыту әдісімен үйлестіргенде сапалы білімнің кепілі болатын оқушылардың шығармашылық ойлауын қалыптастыруға жағдай жасайды.

Жоғарыда айтылғандарды ескере отырып, қазіргі кезде мектептерде білім беру көп жағдайда *«игеру=түсіну+есте сақтау»* формуласы түрінде жүргізіледі. Ал оның негізінде мына формула жатуы қажет:

«меңгеру=игеру+білімді практикада қолдана білу»,

ал, бұл өз кезегінде қабылдау, түсіну, қолдану, жалпылау және жүйелеу процесінде толық көлемде жүзеге асады.

Енді есептерді шығаруға үйретудің тәсілдеріне тоқталайық:

1) *Есепті жаппай шығару*. Есепті жаппай шығару деп бір есепті барлық оқушылардың бір уақытта шығаруын түсінеміз. Жаппай шығаруды ұйымдастырудың алуан түрі бар:

а) *Есепті ауызша шығару*. 5-7 сыныптарда кең тараған. Мұндай есептер негізінен ауызша тез орындауға болатын есептеулерді, теңбе-тең түрлендірудегі және т.б. жаттығуларды қамтиды. Есепті ауызша шығару арқылы оқушыны ойша шапшаң есептеуге, ойлау қабілетін дамытуға мүмкіндік береді. Есепті ауызша шығару барысында әртүрлі кестелерді, анықтама және көрнекі материалдарды пайдаланса, оқушылардың уақытын үнемдеуге, сабақты жандандыруға көмектеседі.

ә) *Есепті жазбаша шығару*. Барлық оқушылар бір мезгілде есепті тақтада шешеді. Мұнда есепті не оқушы, не мұғалім шығарады, не мұғалім нұсқауы бойынша: 1) жаңа ұғым, не жаңа әдіс көрсеткеннен кейін тақтада есеп шығарады; 2) өз бетінше есепті барлық оқушылар шығара алмағанда; 3) бір есепті бірнеше әдіспен шығарып олардың тиімділерін таңдап алу қажет болғанда; 4) есептерді шығаруда кеткен қателерді талдағанда тақтада шығарылады. Бұл жағдайларды жаппай түрде талдау пайдалы.

2) *Өз бетінше есепті жазып шығару*. Оқушылар өздігінен жазып шығарғанда олар шығармашылық жолмен ойлайды. Өздігінен талдап, әртүрлі теориялық материалды есепке қажетінше қолданады. Оның көп пайдасы бар: 1) оқуға деген белсенділігі артады, қызығушылық шығармашылық бастамасы орнығады, ойлау іс-әрекеті дамиды; 2) тақтадан көшірмей оқушы өзі ойлауға мәжбүр болады, амалсыз сабаққа дайындалады; өз білімін бағалайды; 3) мұғалім әр оқушының жұмысындағы жіберілетін қателерді жоюға мүмкіндік береді; 4) есеп шығару үшін оқушы қажетті теориялық материалды еске түсіреді, ұқсас есеппен мұғалім айтқан есептің шығару үлгісін талдап, есепті оқушы жеке өзі шығарады; 5) есептердің шығарылуын түсіндіреді. Түсіндіретін оқушы өзі орындаған амалдарды, түрлендірулерді, қосымша ойларын, есептің шығарылуы негіздемелерін түсіндіреді. Есептің әр жолы белгілі математикалық теорияға негізделетіні айтылуы керек. Есептерді таңдағанда оны оқушылар қабілетіне қарай бір жүйеге салу керек, ол оқушылардың қабілетін дамытатындай болуы тиіс. Бұл жағдайда мұғалімнің қызметі есептің шығару

жолын түсіндіруі, сыныптағы әр оқушының қабілетіне, мүмкіндігіне қарай есептерді шығаруды ұйымдастыру болып табылады. Оқушылардың өздігінен есеп шығаруын өрістетіп, олардың дербестігін одан әрі дамыту әр мұғалімнің міндеті.

Сондықтан оқушыларға қажетті нұсқаулар беріп, оқулықтағы тиісті тақырыптарды, анықтама материалды көрсетіп отырғаны жөн. Өздігінен есеп шығару іскерлігін қалыптастыруда үй тапсырмасының маңызы ерекше. Үй тапсырмасының басты мақсаты – сыныпта өткен теориялық материалды үйде пысықтап, қайталаумен бірге, оқушылардың математикалық білімін, іскерлігі мен машықтарын одан әрі дамыту. Сондықтан үй тапсырмасын бере отырып, мұғалім есеп шығару барысында кездесетін қиындықтарға қатысты кеңестер мен нұсқаулар беруі керек.

3) *Есеп шығаруды қорытындылау* берілген есептің мазмұны мен шығару тәсілдерін талқылауды, олардың ішінен ең тиімдісін таңдауды, берілген есептен туындайтын жаңа есепті тұжырымдауды және оны шығаруды, берілген есепті шығару тәсіліне үлгі боларлық фактілерді қамтиды. Әр алуан есептерді шығару арқылы оның шешуі қандай жағдайда табылатынын анықтау үшін қандай амалдарға жүгіну қажеттілігін және шығару жолының қандай айырықша белгілері тиімді тәсілдерді таңдауға мүмкіндік беретінін көрсету керек. Үлгі боларлық қорытындыларды үнемі жинақтап, жүйелеп және оларды оқыту процесінде ұдайы қолдану, оқушылардың ізденгіштік қасиеттерін шыңдаудың, шығармашылық іс-әрекетін жандандырудың пәрменді құралы болып табылады.

Математиканы оқыту процесінде *алгоритмдік әдіспен* есептерді шығарудың маңызы зор. Көптеген математикалық есептерді шығару үшін оны нақты орындау арқылы белгілі бір сыныптың кез келген есебін шығаруға алып келетін *есепті шығару* алгоритмі болады. Мұнда әртүрлі теңдеулер мен теңсіздіктерді, олардың жүйелерін шығару, туындылар мен интегралдарды есептеу және т.б. жатады. Осындай есептерді шығаруды алдын ала оқушылармен есепті шығару алгоритмін үйретумен арнайы жұмыс жүргізе отырып, айтарлықтай жеңілдетуге болады [75].

Оқушыларды алгоритмдік әдіспен үйрету барысында олардың алгоритмдік икемділіктері мен біліктілігі қалыптасады. Оқушылар алғашқы кезде алгоритмді «берілген әрекеттер жүйесі» ретінде қабылдап, ұғым мен оның негізгі қасиеттерін белгілі деңгейде түсінеді, ал кейін ол оқушылардың өзіндік жұмысының белсенді әдісіне айналады. Ол кезде алгоритмнің кейбір жалпы түрлері әртүрлі есептерді шығарудың тиімді тәсілдерін іздестіруге мүмкіндік туғызып, ой еңбегінің мәдениетін арттырады, іс-әрекетті салыстыра саналы бағалауға үйретеді. Орта мектептің математика сабақтарында алгоритмдік әдіспен есептерді шығаруға үйрету оқушылардың іс-әрекетін бір арнаға түсіреді, оларға кәсіптік бағдар беруге, өмірге дайындауға мол мүмкіншілік туғызады. Алгоритмді алға қойған мақсатқа жету жолында немесе берілген есепті шығару бағытында біртіндеп, қандай әрекеттер жасау керектігін орындаушыға түсінікті түрде әрі дәл көрсететін нұсқау деп түсінеміз. Орта мектеп математика курсына оқушыларда төмендегідей алгоритмдік бейімділік қалыптастыруға көңіл бөлінуді ұсынамыз:

1. Алгоритм ұғымы мен оның қасиеттерін оқушылардың интуициялық деңгейде игеруі. Алгоритмнің орындаушыға арналған нұсқау ретінде берілген түсініктің жеке-жеке пункттерден тұратынын, оның көмегімен көптеген есептер шығарылатыны, көрсетілген амалдар тізбегінің қайталану мүмкіндігі бар екенін оқушы жете түсінуі керек, сондықтан алынған алгоритмді орындау барысында оның пункттерінің реті, әрбір нұсқауы жазылуында келтірілгендей қатал сақталып, дәлме-дәл орындалуы қажет.

2. Алгоритмнің кейбір жазылу әдіс-тәсілдерін, яғни оның толық жазылуын және көрнекі блок-схема ретінде берілуін білу.

3. Математиканы оқып үйрену барысында есептеулер схемасын құру, кестелер толтыру, алгоритмді жазудың формулалық түрін пайдалану.

4. Алгоритмді жазаудың бір түрінен екінші түріне көшу.

5. Бір есептің әртүрлі шығарылуы болатын бірнеше алгоритмдердің ішінен ең тиімдісін таңдай білу.

6. Бұрыннан белгілі немесе есепті шығару барысында құрастырылған алгоритмді ұқсас есептер шығару үшін пайдалану.

Алгоритм схемасын қолдану оқушылардың есептеу дағдыларын қарқынды қалыптастыруға мүмкіндік береді. Мысалы, a және b екі сандарының қосындысын табу үшін келесі 1-сызбаны ұсынуға болады [4, б. 165-166].

Сызба бойынша жұмыс:

1) оқушыға сызбаны оқып және оны қолдана отырып екі санды қосудың ережесін тұжырымдау тапсырылады: «Екі бүтін санды қосу үшін...»;

2) қосу ережесін айту барысында оқушы қиналатын болса, онда оған қатесін түзету үшін қажетті блокқа назар аудартады;

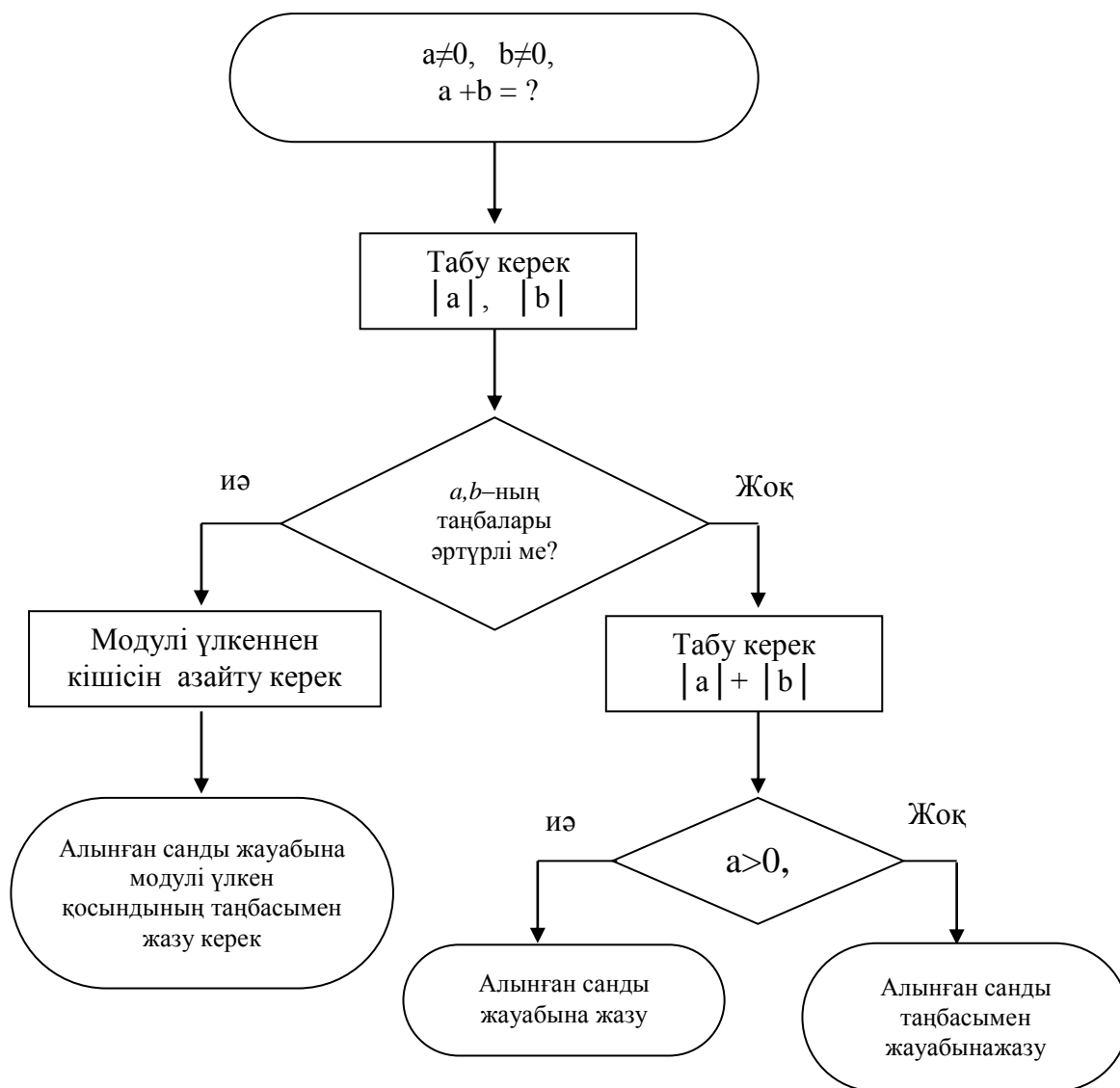
3) оқушыға есептеуді орындау ұсынылады (алгоритм сызба бойынша: $2 + 3$; $-2 + 3$; $2 + (-3)$; $-2 + (-3)$);

4) оқушыға өздеріне кез келген сандарды алып сызбаны қолдана отырып қосуды орындау тапсырылады;

5) оқушыға басқа сандарды сызбаның көмегімен орындау тапсырылады (ойлауын ауызша айта отырып).

Есептерді әртүрлі тәсілдермен шығару әдістемелік тұрғыдан маңызды және математиканы оқыту процесін жетілдіруге үлкен мүмкіндік береді. Біріншіден, есептерді әртүрлі тәсілдермен шығару жолдарын іздестіру оқу материалын меңгерудегі дидактиканың саналылық және белсенділік принциптерін іске асырудың бірден-бір тиімді жолы болып саналады. Бір есепті әртүрлі әдістермен шығару барысында оқушылар бұрын орындап жүрген тапсырмалары сапалық деңгейге аусып, жаңа байланыстар мен үйлесімдері орнайды. Екіншіден, есептерді әртүрлі тәсілдермен шығару барысында оқушылар көптеген теориялық деректерді, тәсілдер мен әдістерді талдай отырып ойлау дағдысын қалыптастыруға және дамытуға жағдай жасайды. Үшіншіден, бір есептің шешімін әртүрлі тәсілдермен шығару процесінде шығармашылық ойлау басым болады да, ол ақыл-ойдың ғана дамуына емес, оқушылардың дүниетанымын дамытады. Сонымен қатар, есептерді түрлі әдістермен шығару оқушыларға эстетикалық тәрбие беруге бағытталған. Дәл осы жерде оқушылар өз беттерімен есептердің барынша қарапайым және әдемі

шешімдерін тауып, математиканың барлық бөлімдері арасындағы байланыстарды яғни, осы ғылымның әдемілігін көреді.



Сурет 6

Есептерді әртүрлі әдістермен шығару сабақты өткізу процесімен барынша үйлеседі. Бағдарламаның қандайда бір тарауын қорытынды қайталауда бірнеше әдіспен шығарылатын және барынша көп теориялық материалды қамтитын есептерді қолдану жөн болады [75].

Жұмыс барысында оқушыларда кездескен барлық кедергілер есепке алынады, олардың неліктен туындағаны анықталып және жойылып отырады. Есепті шығару барысындағы бағытталу оқушыларды есепті шығарудың жалпы сызбасымен танысуға жағдай жасайды.

Іс-тәжірибе көрсеткендей әрбір есепті шығару ішкі элементар есептерді шығарудан құралады. Сондықтан, аралық есептер тізбегін жасап оларды шығара алу негізгі есепті табысты шығаруға жол ашады. Алгоритмдік алдын ала жазып қойылатын қарапайым әрекеттердің арнайы сызбасы көмегімен жұмыс жасау арқылы оқушылардың дағдысын қалыптастыруға болады.

Бірінші бөлім бойынша тұжырым

Диссертацияның бірінші бөлімінде философиялық, психологиялық, педагогикалық, әдістемелік зерттеулер мен әдебиеттерге жүргізілген талдау арқылы математикалық есептерді шығаруды оқытудың теориялық мәселелері анықталды.

1. Математиканы оқыту процесінде оқушылардың оқу нәтижесі, ойлау қабілетін дамыту құралы және оқыту мен тәрбиелеу пәні ретінде есептердің рөлі мен маңыздылығы, білім берудегі функциялары айқындалды, «есеп» ұғымына талдаулар жасалып, олардың мәні нақтыланды.

Математикалық есептер оқушылардың мектеп математика курсының ұғымдары мен әдістерін, теорияны меңгеру құралы және ойлауды дамыту мен тәрбиелеуде, математиканы практикалық қолдану біліктері мен дағдыларын қалыптастыруда үлкен рөл атқарады. Жұмысымызда математиканы оқытудағы есептердің білім беру, тәрбиелеу, дамыту және бақылау функцияларының мазмұндық ерекшеліктері сипатталып, танымдық, дидактикалық, дамытушылық есептері тұжырымдалды.

2. Әдістемелік, психологиялық әдебиеттерге талдаулар жасай отырып, математикалық есептердің атқаратын функциясына, мәселенің шамасына, оқу қызметінің компонентіне, шарты мен талабы арасындағы қатынасына, есеп шартындағы объектілердің санына және олардың арасындағы байланысына, теорияға, білім мазмұнына, есепті шығару тәсілдеріне және т.б. байланысты классификациясы нақтыланды.

Математикалық есептердің ішіндегі стандартты емес есептер мен мәтінді есептерге талдаулар жасалып, білім берудегі ұғымдарды, таңбаларды меңгеруге, дәлелдеуге, білікті қалыптастыруға, ойлау қабілетін дамытуға арналған есептердің түрлері келтірілді. Математиканы оқыту процесінде мұғалімге есептердің классификациясымен қатар, олардың дидактикалық мақсатын білуі маңызды. Жұмысымызда жаңа білімді меңгеруге дайындау, алған теориялық білімді бекіту, жаңа білімнің қолданылуын көрсету, білік пен дағдыларды қалыптастыру, алдында өтілген материалды қайталау, жаңа материалды меңгеруін бақылау мақсаттарына сәйкес есептердің мазмұны мен оларға қойылатын талаптар қарастырылды.

3. Есеп шығару – оқушының ойлау мен шығармашылық қабілетін дамытуға септігін тигізетін оқу іс-әрекетінің маңызды түрі. Есептерді шығаруды оқытудың теориясы мен тәжірибесіне талдаулар жасай отырып, «есеп шығару» ұғымының мәні ойлау процесі мен оқу іс-әрекеті ретінде айқындалды, есептің пен есеп шығару жүйесінің құрылымдық бірліктері, есеп шығарудағы іс-әрекеттердің мазмұны, есептерді құрастыру мен шығарудың әдістемелік ерекшеліктері тұжырымдалды.

Есепті шығару процесіндегі іс-әрекет кезеңдері талданып және салыстырылып, осы кезеңдерге сәйкес есеп шығару процесінің түсіну, ассоциация, жүйелеу, тексеру және қорытындылау сатылары мен есептерді жаппай, ауызша, жазбаша, өздігінен жазып шығару, есеп шығаруды қорытындылау, алгоритмдік әдіспен шығаруға үйрету тәсілдері ұсынылды.

2 МАТЕМАТИКАДАН ЕСЕПТЕРДІ ШЫҒАРУДЫ ОҚЫТУДЫҢ ӘДІСТЕМЕСІ БОЙЫНША ТӘЖІРИБЕЛІК ЖҰМЫС

2.1 Мектепте математикадан есептерді шығаруды оқытуды ұйымдастыру

Математиканы оқытудың негізгі сұрақтарының бірі есептерді шығаруға оқыту болып табылады. Оқушыларды есеп шығаруға оқыту үшін оларды есептің шартын талдауға, яғни есеп шартының құрылымын, ол қандай бөліктерден тұратынын, есептің шығарылуы неден және қалай басталатынын үйрету қажет. Есептің шартын оқу барысында осы шартқа сүйене отырып, жауап беруді талап ететін сұрақ немесе талапты ажыратуға болады. Есепті оқып, берілгендерді, олар есептің шарттары деп те аталады, белгілі бір талапты, яғни табу керек нәрсені бөліп алуға болады.

Математиканы оқыту әдістемесінде есептерді шығару процесіндегі іс-әрекетті жүзеге асырудың негізгі тәсілі – есептерді кезең бойынша талдау. Д.Пойа, Ю.М.Колягин, Е.И.Лященко, В.И.Крупич, А.Е.Әбілқасымова және т.б. есепті шығару процесін келесі кезеңдерден тұрады деп қарастырады:

- 1) есеп мәтінін талдау;
- 2) есеп шешімін іздеу тәсілі және сәйкесінше есеп шығару жоспарын құру;
- 3) есепті шығару жоспарын іске асыру;
- 4) табылған шешімді талдау.

Осы кезеңдер оқушылардың есеп шығарудағы іс-әрекетін көрсетеді [6; 7; 24; 32; 33; 34; 38; 61].

Есептің құрылымдық бөліктерін және есеп шығару барысында оқушыларға берілетін ұсыныстарды қарастырайық. А.Е.Әбілқасымованың «Математиканы оқытудың теориясы мен әдістемесі: дидактикалық-әдістемелік негіздер» оқу құралында тұжырымдалғандай, есептерді шығаруды оқытуды төрт кезеңге бөлуге болады [4]:

1-кезең – *есептің мәтінін талдау*. Оның мақсаты есептің объективті мазмұнын, шартын және қорытындысын ажырату, есептің сипатын анықтау, егер есеп шығаруға қажет болса, онда қысқаша жазбалар, сызба, схемалар жасау. Есепті шығару үшін алдымен оның мазмұнын жақсылап талдап алу керек. Берілген шамаларды, ізделінді шамаларды немесе пайдаланылатын тұжырымдарды (теоремалар, аксиомалар, анықтамалар) және есептің қорытындысын ажырата білу қажет. Ол үшін «не белгілі?», «не белгісіз?», «нені табу керек» т.с.с. сұрақтар көмегімен есепті тиянақты түрде анықтаған жөн.

Есеп шығарудың алдында келесі дайындық жұмыстарын жүргізілуді ұсынамыз:

а) алдымен есептің мазмұнын мұқият оқып, есеппен танысу. Бұл кезде есепте сипатталып тұрған жалпы жағдай анықталады;

ә) есеппен танысу арқылы оның мазмұнын түсіну. Ол үшін келесі кеңесті береміз: есепте берілген және ізделінді шамаларды анықтау, егер дәлелдеуге берілген есеп болса, онда оның шарты мен қорытындысын анықтау.

1-мысал. Егер тікбұрышты параллелепипедтің қабырғаларының ұзындықтары белгілі болса, онда диагоналының ұзындығын табу формуласын қорытып шығарындар.

Алдымен есепте берілген және ізделінді шамаларды анықтаймыз. Параллелепипед және оның қабырғасының ұзындықтары – есептің берілгендері, параллелепипедтің диагоналін есептейтін формула – ізделінді шама болып табылады.

2-мысал. Өрнекті ықшамдандар:

$$\frac{1}{1-a^2x^2} - \frac{a^2x^2+1}{ax} \left(ax^2 + a^2x^2 + \frac{a^3x^4+1}{a^2x^2} \right)$$

Бұл есепте, бірінші кезекте, амалдардың орындалу ретін анықтау қажет (алдымен жақша ішіндегі амалдарды орындау сосын, сосын одан шыққан өрнек пен екінші бөлшектің көбейтіндісін түрлендіру, үшінші кезекте азайту амалы орындалады). Түрлендіру үшін берілген өрнектің ерекшеліктерін анықтап алу пайдалы болады.

б) геометриялық есептерде немесе геометриялық фигураға қатысты есептерде есептің сызбасын жасау, сызда берілген және ізделінді шамаларды белгілеу қажет;

в) егер есепте берілген (ізделінді) шамалар көрсетілмесе, онда қажетті белгілеулер енгізу керек. Мысалы, алгебра курсына мәтінді есептерді шығару барысында ізделінді шамалар үшін қосымша белгілеулер енгізеді;

г) есепті шығарудың осы кезеңінде – есепті талдауда, берілген шарттарыбойынша есепті шығаруға болатыны немесе болмайтыны, яғни есеп бір мәнді шығарыла ма, берілген шамалар арасында жетіспеушілік немесе қарама-қайшылық бар ма, басқаша айтқанда, берілген шамалардың есепті шығару үшін жеткіліктілігі анықталады.

2-кезең – *есепті шығарудың жоспарын құрастыру* (есепті шығару жолдарын іздеу).

Бұл есепті шығарудың маңызды кезеңі болады, себебі есеп нәтижесінің дұрыстығы жоспардың дұрыс құрылуына байланысты болады. Жоспар ауызша немесе жазбаша мәтін түрінде, сонымен қатар модель немесе схема түрінде құрылуы мүмкін [4].

Есепті шығарудың жоспарын құру барысында оқушыларға ретімен қойылған сұрақтар немесе ұсыныстар арқылы бағыт беріп отыру қажет:

а) осыған ұқсас есепті бұрын кездестіндер ме? Ол есептің мазмұны, шарты қалай болады, қандай жағдай болды, ал бұл есепте ше? Егер оқушыларға алдында берілген ұқсас есеп кездескен болса, онда есепті шығарудың жоспарын құру қиынға соқпайды. Олай болмаған жағдайда келесі ұсыныстарды беру керек: берілген есепке ұқсас есеп құрастыру. Егер оқушы мұндай есепті құрастыра алатын болса, онда оны шығару жоспарын құру жеңіл болады;

ә) егер берілген ұқсас есеп құрастыра алмаса, онда есепті басқаша оқу керек, яғни есептің шартында берілген ұғымдардың анықтамаларын қолдану, олардың қасиеттерін еске түсіру немесе есептің шарты мен талабын математика

тіліне аудару ұсынылады (бұл жағдай мәтінді есептерді шығару процесінде кездеседі).

Егер оқушыға мұндай есеп, яғни берілген есепке ұқсас есеп таныс болса, онда оныңжоспары анық болады: шығарылып отырған есепті бұрыннан белгілі есепке келтіру керек. Ұқсас есеп оқушыға бұрыннан белгілі болса да, берілген есепті ұқсас есепке келтіре алмауы мүмкін. Бұл жағдайда жоспарды бірден құру күрделі болады.

б)Есепті шығарудың жоспарын құру кезінде келесі сұрақты қою өте маңызды: «Есепте берілгендердің барлығы қолданылды ма?». Қолданылмай қалған шарттарды анықтау жоспарды құруды жеңілдетеді.

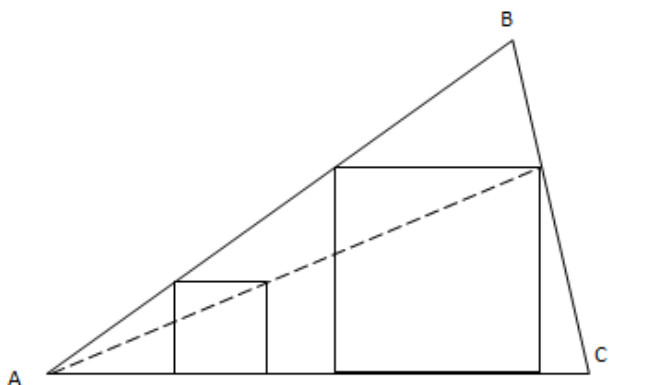
в) есепті шығарудың жоспарын құру кезінде мынадай ұсынысты ескерген жөн: «Есептің шарты мен қорытындысын түрлендіруге тырыс». Есептің шарты мен қорытындысын түрлендіру оныңжоспарын құру процесін тездетеді.

Теңбе-тең түрлендіру берілген есепті белгісіздермен байланыстырады. Мысалы, теңдеулерді (теңсіздіктерді) немесе олардың жүйелерін шығару үшін басқа мәндес теңдеулерге (теңсіздіктерге) немесе олардың жүйелеріне көшу есептің шешімін табуды жеңілдетеді.

г)Егер жоспарды құру қиын болса, онда есептің бір бөлігін шығару керек, яғни келесі ұсынысты ескерген жөн: есептің шарттарының белгілі бір бөлігін қанағаттандырып алу керек, сосын қалған шарттарды қанағаттандыру оңай болады.

3-мысал. Берілген шеңберге және түзуге радиусы белгілі жанама шеңбер жүргізіңдер.Алдымен берілген түзуге немесе берілген шеңберге жанама шеңбер жүргізудің жоспары жасалады. Содан кейін бұл екі жоспарды біріктіріп, берілген есепті шығарудың жоспары құрылады. Бұдан шығатын қорытынды – берілген есепті бөліктерге бөлу арқылы есепті шығарудың жоспарын құруды жеңілдетуге болады.

4-мысал. Берілген үшбұрышқа екі төбесі осы үшбұрыштың әртүрлі екі қабырғасында, ал қалған екі төбесі үшбұрыштың үшінші қабырғасында жататын квадратты іштей сызыңдар. Алдымен, есептің шартының қанағаттандырып көрейік: үшбұрыш сызып, оған екі төбесі осы үшбұрыштың бір қабырғасында, ал үшінші төбесі үшбұрыштың екінші қабырғасында жататындай, квадратты сызайық (сурет 7).



Сурет 7

Мұндай квадраттарды шексіз көп салуға болады. Квадраттардың барлығы центрі үшбұрыштың A төбесі болатын гомотетия арқылы алынатыны анық. Бұдан квадраттың төртінші төбесі және салынған үшбұрыштың A төбесі, және салынған квадраттың төбесі арқылы өтетін түзу мен үшбұрыштың BC қабырғасының қиылысу нүктесі болады. Енді есепті шығару жоспары белгілі болды. «Есептің бөлігін шығарып көріңдер» деген кеңесті «Берілген есепті қарапайым есептерге бөліңдер» дегенге дейін толықтыруға болады. Мәтінді есептерді арифметикалық әдістермен шешу барысында (сұрақтар арқылы) есептерді шығару кезіндегі жауаптар қарапайым есепті шығаратын болады), геометрияның кейбір конструктивті есептерін шығару барысында, теңдеу немесе теңсіздікті құруға берілген есептерді шығару барысында (әрбір теңдеуді немесе теңсіздікті құру үшін берілген есептің бөліктері қарапайым есептердің біреуі шығарылып отырады) дәл осылай жасалады.

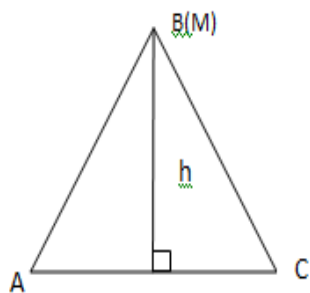
д) Кейде есепті дербес жағдай үшін шығарып, оның шешуін жалпы жағдайға көшіреді, яғни жалпылайды.

Оқушылар мұндай дербес жағдайды тапқан соң, оның шешуін жалпы жағдай үшін пайдаланады. Осындай жалпылау процесі берілген есепті шығаруға дейін жүргізіледі.

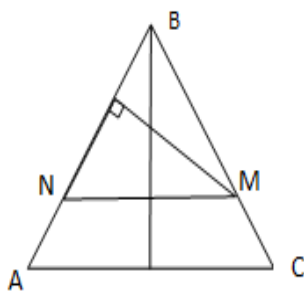
5-мысал. Дұрыс үшбұрыштың кез келген M ішкі нүктесінен оның қабырғаларына дейінгі қашықтықтарының қосындысы тұрақты болатынын дәлелдендер.

5-суретте индукция әдісімен талдаудың схемасы көрсетілген. Мұндай есептің ең қарапайым нұсқасы – берілген M нүктесі үшбұрыштың бір төбесімен беттескен жағдайы: M нүктесінен берілген үшбұрыштың екі қабырғасына дейінгі қашықтық 0-ге тең (8, а-сурет). Бұдан жалпы жағдай – M нүктесі берілген үшбұрыштың бір қабырғасында жатыр (8, ә-сурет). $MN \parallel AC$ етіп жүргізу арқылы көмекші $\triangle MNB$ үшбұрышын аламыз, M – осы үшбұрыштың төбесі. Ары қарай есептің шешуі сызбадан түсінікті. Соңғы жағдай – M нүктесі берілген $\triangle ABC$ үшбұрышының кез келген ішкі нүктесі (8, б-сурет). M нүктесі арқылы $A'B' \parallel AC$ жүргізу арқылы алдыңғы есептерге келтіреміз. Есепті шығару жоспары белгілі болды.

е) Есепті шығару жоспары есепті шығару процесінің жалпы схемасы болып табылады. Ол үшін есепті шығарудың әрбір кезеңі мұқият тексеріледі және негізделеді. Келесі сұрақтарға жауап берілуі тиіс: неге бұлай болады? Себептері қандай?

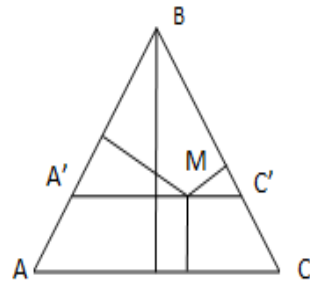


а-сурет



ә-сурет

Сурет 8



б-сурет

3-кезең – *есепті шығару жоспарын, іске асыру.*

Есепті шығару жоспары есептің шешімінің жалпы схемасын көрсетсе, жоспарды іске асыру барысында осы схемадағы әрбір қадамға нақты тоқталады. Әрбір қадамды мұқият және шыдамдылықпен қарастыру қажет. Ол үшін оқушыға төмендегі кеңестерді ескерген жөн:

а) жасаған әрбір қадамыңды тексер және оның дұрыстығына көз жеткіз, яғни әрбір қадамды бұрыннан белгілі математикалық деректерге, тұжырымдарға сүйеніп, дәлелдеу қажет;

ә) жоспарды іске асыру барысында терминдер мен символдарды олардың анықтамаларымен ауыстырған дұрыс. Мысалы, геометриялық есептерде «параллелограмм» термин оның «қарама-қарсы қабырғалары өзара параллель болатын төртбұрыш» деген анықтамасымен ауыстырған жөн.

б) есептің шартында берілген объектілердің қасиеттерін қолдана білу қажет.

6-мысал. Параллелограммның қарама-қарсы бұрыштары тең болатынын дәлелдендер.

Есепті шығару үшін (дәлелдеу үшін) параллелограммның анықтамасын пайдалануға болады (екінші кеңес) немесе оның қасиетін де пайдаланып шығаруға болады. Мысалы, қарсы қабырғаларының параллелдігі және теңдігін пайдаланып шығаруға болады (үшінші кеңес).

4-кезең – *есептің шешімінің дұрыстығын тексеру және оның жауабын жазу* (есепті тексеру және зерттеу).

Есепті шығару жоспарын іске асырғаннан кейін, оның дұрыстығын тексеру қажет. Тіпті, үлгерімі өте жақсы оқушылар есептің шығаруын егжей-тегжейлі түсіндіріп жауабын алғаннан кейін есепті шығарылған деп есептейді. Есептің жауабын алу оның дұрыстығын, есепті шығару үшін ең тиімді әдіс таңдалғанын білдірмейді [4].

В.М.Брадистің пікірінше, егер есептің шешімі: 1) қатесіз болса; 2) негізделген болса; 3) толықтылық сипатқа ие болса, онда есепті шығарылған деп есептеуге болады. Сондықтан, есептің шешімін талдау және нәтиженің дұрыстығын тексеру есепті шығарудың кезеңі болуы тиіс. Есептің шешімі мен алынған нәтижені міндетті түрде тексеру қажет. Нәтижені тексеру әртүрлі әдістермен жүргізілуі мүмкін. Есептің шешуінің дұрыстығын тексеру арқылы оның нәтижесінің де дұрыстығына көз жеткіземіз [76].

Нәтиженің дұрыстығын есепті басқа әдіспен шешу арқылы да тексеруге болады. Егер әртүрлі әдістермен шығарылған есептің жауаптары сәйкес келсе, онда нәтиженің дұрыс болғаны. Нәтиженің дұрыстығын мағынасы бойынша да тексеруге болады, яғни есептің шартында берілген қасиеттерді қанағаттандыратын нәтижеде алынған объектінің болуы мүмкін бе; логикалық және математикалық амалдардың орындалуының дұрыстығын тексеру және т.б. Сонымен қатар есепті шығарудың бұл кезеңінде жинақталған тәжірибені жалпылау және жүйелеу, рефлексия, берілген есеп қандай әдіспен және қалай шығарылды деген сұрақтарға жауап беріледі. Кейбір жағдайларда есепті зерттеу жүргізіледі (есепті шығарудың басқа әдістері мен тәсілдері, объектінің бар болуы мен жалғыздығы).

Сонымен, жоғарыда келтірілген кеңестер көптеген есептерді шығаруда көмек болады, бірақ кез келген есепті шығарудың жолы болмайды. Айтылған кеңестердің ішіндегі Д. Пойа келтірген көптеген кеңестер оқушыларға дұрыс бағдар береді және есептерді шығару уақытын үнемдейді, тиімді және дұрыс әдістерін табудың ықтималдығын жоғарылатады [61].

Есепті шығаруда белгілі бір әдісті пайдаланудың тиімділігі туралы мәселелер қарастырылған жағдайда ғана есепті шығарудың әртүрлі әдістері қолданылады [75].

Қарапайыман күрделіге көшу принципін есепті шығарудың ауызша және жазбаша әдістерінің бірігуі және т.б. сипатқа ие әдістерді мұғалім оқушыларға есептерді шығару барысында көрсетіп отыруы тиіс.

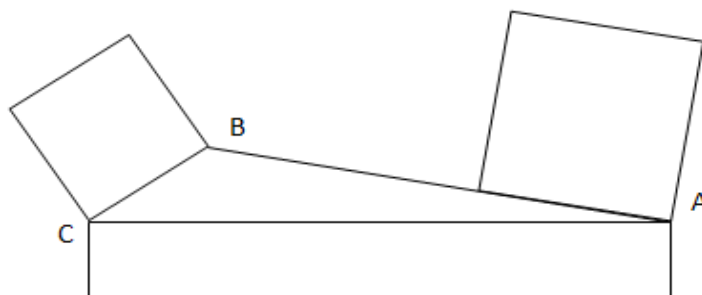
4-кезең кейбір жағдайларда (есепте сипатталатын объектінің бар болуы және жалғыздығы) 2-кезеңнің басында қарастырылуы мүмкін. Бұл, әсіресе, геометриялық есептерді шығарудың тиімді әдістерін іздеуде көмектеседі. Іс жүзінде, яғни есеп шығару процесінде жоғарыда көрсетілген кезеңдер бір-бірімен араласып кететінін және оқушы өтіп кеткен кезеңге бірнеше мәрте қайта оралуы да мүмкін екенін ескерген жөн. Сондықтан, оқушыны барлық төрт кезеңді пайдалануға үйрету қажет. Осы кезеңдердің жүзеге асырып, оқушыларды есептер шығаруға үйретуге мысал қарастырайық.

7-мысал. *A, B, C* пунктері тура жолдардың бойында орналасып қосылған. *AB* жолының бойына қабырғасы *AB* кесіндісінің ұзындығының жартысына тең болатын, *BC* жолының бойына қабырғасы *BC* кесіндісінің ұзындығына тең болатын квадрат пішіндес алаңдар салынған. *AC* жолының бойына ұзындығы *AC* кесіндісіне ені 4 км-ге тең болатын тіктөртбұрыш пішіндес орман алқабы салынған. Орман алқабының ауданы квадрат пішіндес алаңдарының аудандарының қосындысынан 20 км²-ге үлкен. Орман алқабының ауданын табыңдар.

Есеп мәтінін талдау. 1) Есеппен танысып болғаннан соң, оның мазмұнын түсінуге кірісеміз.

2) Берілгендерді талдайық: *A, B, C* пункттері – аудандары $(0,5AB)^2$, BC^2 болатын квадрат пішіндес алаңдар және ауданы 4 *AC* болатын тіктөртбұрыш пішіндес орман алқабы. Орманың ауданы квадрат пішіндес алаңның аудандарының қосындысынан 20 км² - геартық екені белгілі. Орманның ауданы, яғни оның *AC* кесіндісі – ізделінді шама.

3) Есеп шығаруда оның сызбасын салған пайдалы болады (сурет 9).



Сурет 9

4) $AB=x$, $BC=y$, $AC=z$ белгілеулерін енгізейік.

Соңғы жағдайды есептің мәтінін талдаудың соңы, есепті шығару жоспарының басы деп есептеуге болады.

Есепті шығару жоспарын құру. Берілген және ізделінді шамалар арасындағы байланысты орнаттық. Енді осыбайланысты келесі теңдеу арқылы жазуға болады: $4z = \frac{x^2}{4} + y^2 + 20$.

Егер осы есепке ұқсас есептер бұрын кездеспеген болса, онда бұрыннан белгілі басқа есептерге келтіруге тырысу қажет. Бірақ мұндай есептерді бірден еске түсіре алмауымыз мүмкін, сондықтан тек бір мүмкіндік: берілген есепті шығаруды $4z = \frac{x^2}{4} + y^2 + 20$ теңдеуін шешуге алып келу ғана қалады.

Бір қарағанда бұл теңдеу анықталмаған теңдеу (шынында, бұл теңдеудің үш белгісізі бар), ал берілген есептің жауабы болмайтын сияқты. Бірақ қорытынды жасауға асықпаған жөн. Өзімізге келесі сұрақты қояйық: «Есептің барлық шарты қолданылды ма?». Басқаша айтқанда, «есептің берілгені мен ізделінді шамалары арасында айқын түрде берілмеген байланыстар бар шығар?».

Егер есептің шартын мұқият зерттесек («Есепті шығаруға көмектесетін объектілерді тану»), онда берілген және ізделінді шамалар арасында төмендегідей келесі байланысты орнатуға болатынын көреміз: x, y, z – $\triangle ABC$ үшбұрышының қабырғалары болса, онда олар үшбұрыш аксиомасын қанағаттандыратын болады: Сондықтан,

$$\begin{cases} 4z = \frac{x^2}{4} + y^2 + 20, \\ x + y \geq z, \text{ немесе } x + y \geq \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + 5 \end{cases}$$

Алынған теңсіздікті мұқият қарастырғанда екімүшенің квадратын аңғарамыз. Сонымен есепті шығару жоспары құрылды.

Жоспарды іске асыру. Барлық белгісіздерді теңсіздік белгісінің бір жағына көшіріп, белгісіздердің кез келген мәнінде теріс емес көпмүшелікті аламыз:

$$\frac{x^2}{16} - x + \frac{y^2}{4} - y + 5 = \frac{x^2}{16} - 2 \cdot \frac{x}{4} \cdot 2 + 4 + \frac{y^2}{4} - 2 \cdot \frac{y}{2} \cdot 1 + 1 = \left(\frac{x}{4} - 2\right)^2 + \left(\frac{y}{2} - 1\right)^2.$$

Квадраттардың қосындысының таңбасы теріс емес болғандықтан, қарастырылып отырған жүйеге эквивалентті $\left(\frac{x}{4} - 2\right)^2 + \left(\frac{y}{2} - 1\right)^2 = 0$ теңдеуін

аламыз. Бұдан $\frac{x}{4} - 2 = 0$, $\frac{y}{2} - 1 = 0$, немесе $x = 8$ және $y = 8$. Сонда $4z = \frac{x^2}{4} + y^2 + 20$ теңдеуінен, $z = 10$, ал орманың ауданы $4 \cdot 10 = 40$ (км²).

Есептің шешімінің дұрыстығын тексеру.

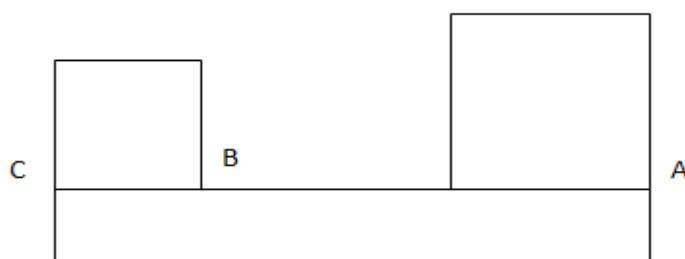
1) x, y, z мәндерін $4z = \frac{x^2}{4} + y^2 + 20$ теңдеуіне қою арқылы бұл теңдеудің шешімдері дұрыс екеніне көз жеткіземіз.

2) Берілген квадрат пішінді алаңдардың аудандарын есептеп, орманның ауданымен салыстыруға болады:

$$(0,5AB)^2 = 16(\text{км}^2), BC^2 = 4(\text{км}^2), 4AC = 20 = (0,5AB)^2 + BC^2.$$

Соңғысы есеп шартына сәйкес келеді.

3) Нәтиженің геометриялық мағынасын анықтау ғана қалды. x, y, z - үшбұрыштың қабырғалары болғандықтан, және $x+y=z$ болғандықтан, A, B, C пункттері бір түзудің бойында жататынын көреміз. Есептің шартының геометриялық кескіні 6-суреттегідей емес, 10-суреттегі түрде болу керек.



Сурет 10

Есепті шығарудың басында бұл суретті салу мүмкін болмады, себебі x, y, z шамаларының арасындағы байланысты есепті шығару барысында анықтадық.

Мұғалімге оқушыларды математикалық есептерді шығаруды оқытудың нақты тәсілдерін меңгеру айтарлықтай маңызды. Сондықтан, оқушылардың есептер шығару біліктігін қалыптастыруға бағытталған оқу іс-әрекетін ұйымдастыру жолдарын қарастырайық.

Жаңартылған білім мазмұны бойынша 7-сыныпқа арналған «Алгебра» пәнінен есептер жинағы әзірленіп, Республиканың мектептерінде математиканы оқыту процесіне енгізіліп отыр. Оның мақсаты – оқушылардың алған білімдерін пайдаланып, есептер шығару дағдыларын дамыту. Есептер жинағында тапсырмалар пәннің оқу бағдарламасымен оқулығына сәйкес тақырыптар бойынша жүйеленген және оны мұғалім оқушыларды есептер шығаруды оқытуды, білімді меңгеру деңгейін тексеруде, бақылау жұмыстары мен өзіндік жұмыстарды ұйымдастыруда пайдалана алады [77-79].

Алгебрадан есептер шығару барысында аналитикалық және синтетикалық әдістер қолданылады. Аналитикалық әдісте есептер белгісізден белгіліге, ал синтетикалық әдісте белгіліден белгісізге қарай шығарылады.

Арифметикада есепке талдау жасау есептің шешімін іздеу жоспарын табуға мүмкіндік береді, бірақ ол синтетикалық әдіспен шығарылады. Алгебрада есептерді шығарудың негізгі құралы – талдау болып табылады. Мысалы, есептің шарты бойынша теңдеулерді құруда белгісіздерді таңдап, белгілеп алады; белгісіздерді есептің шартымен байланыстыра отырып теңдеу

құрады. Бұл жағдайда белгісізден белгіліге қарай, яғни аналитикалық жолмен жүреді. Кейіннен теңдеуді шешіп белгісізді табады, әрі қарай белгіліден белгісізге өтіп, синтетикалық әдіспен шығарады.

Әдетте оларды дәлелдеу барысында қолдану пайдалы болады.

Теореманы дәлелдеуде алдында мұғалім оның қорытындысына талдау жасап алуына болады және ол оқушыларға дәлелдеуді өздері жүргізуге үйретеді. Мысалы, «келтірілген квадрат теңдеудің түбірлерінің қосындысы қарама-қарсы таңбамен алынған екінші коэффициентке, ал көбейтінділері бос мүшеге тең» деген Виет теоремасын қарастырайық.

Теорема бойынша $x^2 + px + q = 0$ теңдеуінің x_1 және x_2 түбірлері, болса

$$1) x_1 + x_2 = -p, 2) x_1 \cdot x_2 = q$$

болатынын дәлелдеу керек.

Талдау: теорема шартына сәйкес x_1 және x_2 түбірлері мен $x^2 + px + q = 0$ теңдеуінің коэффициенттері арасындағы тәуелділікті табу қажет. x_1 және x_2 түбірлері p және q коэффициенттерімен мына түрде байланысқан.

$$x_1 = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, x_2 = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad (1)$$

Ары қарай не жасау қажеттілігін оқушылардың өздері айтады. Егер олар өздігінен талдау жасай алмайтын болса, онда келесі қосымша сұрақтар қоя отырып көмектесуге болады:

Виет теоремасында қандай тәуелділікті орнату керек?

$x^2 + px + q = 0$ теңдеуінің x_1 және x_2 түбірлері мен p және q коэффициенттері арасында қандай тәуелділік бар?

Осындай сұрақтардан кейін тақтаға (1) теңдіктерін жазып, келесі сұрақтар қойылады:

(1) теңдіктерін Виет теоремасын дәлелдеу үшін не жасауға болады?

Оқушыларға талдау жасауды үйрету үшін мұғалімдер жаттығуларды орындау мен есептерді шығару барысында алдын ала есептің шығару жоспарын жасап алуды талап ету керек.

Алгебра курсына өрнектерді түрлендіруде, теңдеулерді шешуде алгоритмдік тәсілді қолдануға қажетті ережелер беріледі. Оқушылардың есептер шығаруды меңгеруі осы ережелерді білуге байланысты. Мұғалімдер оқушылардан есеп шығару барысында ережелер мен мысалдарды шығаруды жекелеп жиі сұрап отырған жөн. Мысалы, оқушы алдымен ережені айтады, кейін есепті шығарады немесе керісінше. Алгебра курсына алгоритмдерді барынша саналы меңгеруі үшін оқушылардың іс-әрекетін есеп шығару ережесімен байланыстыра отырып ұйымдастыру қажет.

Мысалы, оқушы көпмүшеліктерді көбейтуді $(3a + 5)(8a - 7)$ орындау барысында, өзінің іс-әрекетін «бірінші көпмүшенің әрбір мүшесін $8a$ -ға көбейтіп, $24a^2 + 40a$ аламыз (жазып қояды); содан кейін -7 -ге көбейтіп, $21a - 35a$ аламыз» және т.с.с.

Келесі мысалда $(-9)+(-7)$, оқушы «таңбалары бірдей болатын екі санды қосамыз, абсолют шамаларының қосындысы 16; ортақ таңбасы минус болғандықтан – 16 болады».

Оқушылардан алгоритмдік тәсілді қолдануды жеткілікті меңгергендігін талап етіп, одан әрі қарата дағды қалыптасқаннан кейін, оқушылар қате жіберген тұстарын ғана түсіндіру қажеттілігі туындайды. Мұнда алгоритм сипаттама, формула немесе олардың жиынтығы түрінде беріледі. Мысалы, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ екімүшесін квадраттаудың алгоритмін беретін формула болады. Квадраттаудың ауызша ережесі формула түрінде берілген алгоритммен

толық сәйкес келеді. Керісінше, $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ формуласы, бөлшектерді бөлудің әдеттегі: «бөлшекті бөлшекке бөлу үшін, бірінші бөлшектің алымын екінші бөлшектің бөліміне, бірінші бөлшектің бөлімін екінші бөлшектің алымына көбейту қажет және бірінші көбейтіндіні бөлшектің алымы, екінші көбейтінді бөлімі болады» ережесіне қарағанда анық болады. Берілген ережеде амалдардың орындалу реті дұрыс көрсетілмеген: екі көбейтінді алынғаннан кейін ғана көбейтінділерді алынған бөлшектің алымына және бөліміне жазамыз делінген. Бірақ бұл алгебра курсына байқалмайды, өйткені оқушылар 5-6 сыныптарда бөлшектермен жұмыс жасау дағдыларына ие болады. Демек, оқушыларға ережені тек қана алгоритмді толық көрсету арқылы үйрету қажет.

Сонымен, алгоритмдік тәсілді қолдану барысында дидактиканың келесі қағидаларын ұстанған жөн:

- 1) бір сабақта шығаруға ұсынылған есептің күрделілігі бірден аспауы тиіс;
- 2) ереже бойынша орындалатын алгоритмдерді қадамдарға бөлу;
- 3) әрбір қадамды оқушылардың түсінгендігін тексеру және мысалмен көрсету
- 4) сабақта берілген ережені және алгоритмдерді келесі сабақтар да бірнеше рет қайталап отыру.

Бір оқушының жауабын тыңдағанда, есепті шығару жолын тексергенде басқа оқушыдан оның дұрыстығы, неліктен бұлай болатындығы және т.б. сұрақтар қойып отыру пайдалы. Мұндай сұрақтар оқушылардың зейінін арттырады және өздерінің айтқандарына талдау жасауға мүмкіндік береді. Қосымша сұрақтарды көп беруге болмайды, олар аз болған сайын оқушылар белсенді жұмыс жасайды. Ең дұрысы мұғалім сұрақты (есепті) береді, ал оқушылар оны талдайды, мұғалім тек қана түзетулер (қажет болған жағдайда) енгізіп, бақылау жасап отырады.

Алгебра курсына уақыттың көп бөлігі оқушының білігін дамыту мақсатында есептерді шығаруға жұмсалады. Бұл ретте оқушылардың есептің шығару жолын түсіндіруіне және сыныптастарымен талқылауға қатесіз жұмыс жасауына және сабақта түзетілмеген қателер болмауына баса назар аудару қажет.

Көптеген алгебралық өрнектерді түрлендіру барысында берілген көпмүшелікті екі немесе одан көп мүшелердің көбейтіндісі түрінде немесе

көпмүшеліктерді бірімүше мен көпмүшенің көбейтіндісі түріне келтіруге тура келеді. Бірақ кез келген көпмүшелікті нақты сандар өрісінде көбейткіштерге жіктей алмаймыз. Мысалы, $x+3$, $x^2+6x+10$ көпмүшеліктері көбейткіштерге жіктелінбейді. Мұндай көпмүшеліктер келтірілмейтін деп аталады. Көпмүшеліктер көбейткіштерге жіктелінді, егер алынған көбейткіштердің барлығы келтірілмейтін болса. Көпмүшеліктерді көбейткіштерге жіктегенде түрлі тәсілдер қолданады: ортақ көбейткіштерді жақша сыртына шығару, топтастыру, қысқаша көбейту формулаларын қолдану және т.б. Математикада бір ғана тәсілді қолданып шығаратын есептер аз, көп жағдайда бірнеше тәсілді қолданып шығаратын есептер жиі кездеседі. Мұндай есептерді сәтті шығару үшін сол тәсілдерді біліп қана қою жеткіліксіз оны ретімен пайдалану дағдысын қалыптастыру, яғни білім мен қатар тәжірибеде қажет [80].

Осы әдістердің комбинациясын қолданып шығарылатын есептерге тоқталайық:

8-мысал. Көбейткіштерге жіктейік:

$$1) ab(a+b) - bc(b+c) + ac(a-c).$$

$$2) a^4 + 4a^2 - 5.$$

$$3) (a^2 - 7)^2 - 36a.$$

$$4) (a+b)^5 - (a^5 + b^5).$$

$$5) (a+b)^3 + (b-c)^3 + (a-c)^3.$$

$$6) (a+b+c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3).$$

$$7) a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 + 3abc.$$

Шешуі:

1) Екінші және үшінші жақшалардың қосындысы бірінші жақшаға тең екендігін пайдаланамыз: $a+b = (b+c) + (a-c)$. Онда

$$ab((b+c) + (a-c)) - bc(b+c) + ac(a-c) = ab(b+c) + ab(a-c) - bc(b+c) + ac(a-c)$$

Мүшелерді біріктіріп, ортақ көбейткіштерді жақша сыртына шығарамыз:

$$(ab(b+c) - bc(b+c)) + (ab(a-c) + ac(a-c)) = (b+c)(ab-bc) + (a-c)(ab+ac) = (b+c)b(a-c) + (a-c)a(b+c) = (a-c)(b+c)(a+b).$$

$$2) a^4 + 4a^2 - 5 = a^4 + 4a^2 + 4 - 9 = (a^2 + 2)^2 - 9 = (2^2 + 2 - 3)(a^2 + 2 + 3) = (a^2 - 1)(a^2 + 5) = (a-1)(a+1)(a^2 + 5)$$

Мұнда біз үшмүшеліктен толық квадратты бөліп алып, екі өрнектің квадраттарының айырымына келдік.

$$\begin{aligned} 3) a^3(a^2 - 7)^2 - 36a &= a(a^2(a^2 - 7)^2 - 36) = a(a(a^2 - 7) - 6)(a(a^2 - 7) + 6) = \\ &= a(a^3 - 7a - 6)(a^3 - 7a + 6) = a(a^3 - a - 6a - 6)(a^3 - a - 6a + 6) = \\ &= (a(a^2 - 1) - 6(a-1))(a(a^2 - 1) - 6(a+1)) = a(a-1)(a+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4) (a+b)^5 - (a^5 + b^5) &= a^5 + 5a^3b^2 + 10a^2b^3 + 10a^2b^3 + 5a^4b + b^5 - a^5 - b^5 = \\
&= 5ab^4 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^4b = 5ab(a^3 + b^3) + 10a^2b^2(a+b) = \\
&= 5ab(a+b)(a^2 - ab + b^2) + 10a^2b^2(a+b) = (a+b)(5ab(a^2 - ab + b^2) + 10a^2b^2) = \\
&= 5ab(a+b)(a^2 - ab + b^2 + 2ab) = 5ab(a+b)(a^2 + ab + b^2) \\
5) (a-b)^3 + (b-c)^3 + (a-c)^3.
\end{aligned}$$

Бірінші қосылғыш екінші және үшінші қосылғыштардың айырымына тең екенін ескеріп,

$$\begin{aligned}
a-b &= (a-c) - (b-c) \Rightarrow ((a-c) - (b-c))^3 + (b-c)^3 + (a-c)^3 = \\
&= (a-c)^3 - 3(a-c)^2(b-c) + 3(a-c)(b-c)^2 - (b-c)^3 + (b-c)^3 + (a-c)^3 = \\
&= 3(a-c)(b-c)(b-c - (a-c)) = 3(a-c)(b-c)(b-a)
\end{aligned}$$

$$6) (a+b+c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) \text{ жаңа айнымалыны енгіземіз } a+b=t$$

$$(t+c)^3 = t^3 + 3t^2c + 3tc^2 + c^3$$

$$(t+c)^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3c(a^2 + 2ab + b^2) + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3.$$

$$\begin{aligned}
&= 3a^2b + 3ab^2 + 3ac^2 + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 = 3(a^2b + ab^2 + ac^2 + 2abc + bc^2 + ac^2 + bc^2) = \\
&= 3(b(a^2 + c^2 + 2ac) + ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2) = 3(b(a+c)^2 + b^2(a+c) + ac(a+c)) \text{ ортақ}
\end{aligned}$$

көбейткішті жақша сыртына шығарып,

$$3(a+c)(b(a+b)+c(a+b)) = 3(a+c)(a+b)(b+c) \text{ көбейткіштеріне жіктеледі.}$$

$$7) a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 + 3abc =$$

Соңғы қосылғышты бөліп жазып, $a+c$ қосындысы шығатындай мүшелерді топтастырып ортақ көбейткіштерді жақша сыртына шығарамыз:

$$\begin{aligned}
&a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 + 2abc + abc \\
&= b(a^2 + c^2 + 2ac) + b^2(a+c) + ac(a+c) \\
&= b(a+c)^2 + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + abc \\
&= b(a+c)^2 + c(a^2 + b^2 + 2ab) - abc + ab^2 + ac^2 \\
&= b(a+c)^2 + c(a+b)^2
\end{aligned}$$

9-мысал. Көбейткіштерге жіктейік:

$$a^6 + a^4 + a^2b^2 + b^4 - b^6.$$

$$\begin{aligned}
\text{Шешуі: } a^6 - b^6 &= (a^2)^3 - (b^2)^3 = (a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4) \text{ болғандықтан,} \\
&(a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4) + (a^4 + a^2b^2 + b^4) \\
&= (a^4 + a^2b^2 + b^4)(a^2 - b^2 + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Мұнда, } a^4 + a^2b^2 + b^4 &= (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 = \\
&= (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)
\end{aligned}$$

$$\text{Нәтижесінде: } (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)(a^2 - b^2 + 1).$$

10-мысал. Көбейткіштерге жіктейік:

$$a^3 + 9a^2 + 27a + 19.$$

Шешуі: көпмүшеге толық кубтық қосынды болу үшін 8 деген қосындының жетпейтіні көрініп тұр. Сол үшін оны мына түрде жазуға болады:

$$f(a) = (a^3 + 9a^2 + 27a + 27) - 8 = (a+3)^3 - 2^2$$

$$\begin{aligned} & ((a+3)-2)((a+3)^2)+(a+3)\cdot 2+4) \\ & (a+1)(a^2+8a+19) \end{aligned}$$

Есептер шығару жолдарын іздеу тәсілдерінің көпшілігі жеткілікті логикалық мазмұнға негізделеді. Сондықтан оларды жүйелі және мақсатты түрде қолданғанда ғана оқушылар тиімді меңгереді. Осы мақсатта оқушыларға есеп шығару тәсілінің мәнін қысқаша әдіснамалық түсінік беру арқылы ашып отырған тиімді. Алгебра курсына «Алгебралық бөлшектер және оларға амалдар қолдану» тарауын игеруде оқушылар үшін белгілі бір қиындықтар туғызады [81].

«Бөлімдері әртүрлі алгебралық бөлшектерді қосуда» оқушылардың жұмыстарын жеңілдету үшін, келесі алгоритмдік әдісті ұсынамыз.

Бөлшектердің қосындысын бөлшекке түрлендіру үшін:

- 1) бөлшектің ең кіші ортақ бөлімін табу;
- 2) бөлшектердің алымдарын толықтауыш көбейткіштерге көбейтіп бөлшектерді ортақ бөлімге келтіру;
- 3) бөлімдері бірдей бөлшектерді қосу;
- 4) алымындағы жақшаларды ашу;
- 5) алымындағы ұқсасқосылғыштарды біріктіру;
- 6) мүмкін болған жағдайда, алымын көбейткіштерге жіктеу;
- 7) мүмкін болған жағдайда, бөлшекті қысқарту.

Осындай қадамдар алгоритмі тек үздік оқушылардың ғана нәтижелерін жақсартуға ғана көмек көрсетті. Ал қалғандары 1, 2 және 6-шы қадамдарды орындау барысында қателіктер жіберді. Осы амалдарды орындау барлықтарына оңай болуы үшін, біз әрбір қадамды жекелей дара қайтадан қарап шықтық. Осылайша, бірқатар жаттығуларды орындағаннан кейін және алдын ала берілген алгоритммен жұмыс жасау барысында біз төмендегілерді алдық:

Бөлшектердің қосындысын бөлшекке түрлендіру үшін:

- 1) әрбір бөлшектің бөлімін көбейткіштерге жіктеу;
- 2) ең кіші ортақ бөлімді табу;
- 3) әрбір бөлшек үшін қосымша көбейткішті табу;
- 4) алынған бірдей бөлімді бөлшектерді қосу;
- 5) алымындағы жақшаларды ашу;
- 6) алымындағы ұқсас қосылғыштарды біріктіру;
- 7) мүмкін болған жағдайда, алымын көбейткіштерге жіктеу;
- 8) мүмкін болған жағдайда, бөлшекті қысқарту;
- 9) есеп шешілді.

Берілген қадамдар алгоритмі бойынша оқушылардың ешқайсысы 4-6-шы қадамдарды орындауда қателіктер жібермеді, осылайша алдын ала берілген қадамдарды «Бөлімдері бірдей бөлшектерді қосу және өрнекті ықшамдау» деп бір топқа топтастырдық. Оқушылар «Өрнекті ықшамдау» деген сөз тіркесінен не жасау керектігін түсіну керек. Өйткені оларда осы амалды орындау дағдылары әлдеқашан қалыптасқан болатын.

Алгебра курсына оқушылар бүтін өрнек пен бөлшекті қосқанда қиындықтарға кездеседі. Осы қиындықты жою үшін бірінші нұсқауға «Егер

бүтін өрнек болса, онда оны бөлімі бірге тең бөлшек түрінде көрсету қажет» деген түзету енгізу керек. Бұдан кейін осыған ұқсас жаттығуларды шығаруда қателіктер кездеспеді [82].

Әрі қарай бақылау барысында оқушылар ауызша есептеуде бөлімінде қарама-қарсы таңбалы өрнектер болатын екі бөлшекті қоса алмайтындары анықталды. Осылайша оқушылар, алгоритм бойынша әрекет ете отырып, берілген бөлшектердің ортақ бөлімі бөлімдерінің көбейтіндісі болады деп есептейді. Нәтижесінде, бөлімінде үлкен өрнектер алып, оларды ықшамдауда қателіктер жібереді. Енді осы қателікті жою қажеттілігі туындайды. Осындай түрдегі есептерді шығара отырып оқушылардың өздері қажетті ережені тұжырымдайды: «Егер бөлшектің бөліміндегі өрнектердің таңбалары қарама-қарсы болса, онда бір бөлшектің алымын мен бөлімін (-1) -ге көбейтуіміз қажет».

Кейін әртүрлі есептерді шығару нәтижесінде біз оқушыларға тиімді болатын алгоритмдік ұйғарымға келдік.

Өрнекті бөлшекке түрлендіру үшін:

- 1) егер өрнек бүтін болса, онда оны бөлімі 1-ге тең бөлшек түрінде жазу;
- 2) егер екі бөлшектің бөліміндегі өрнектердің таңбалары қарама-қарсы болса, онда біреуінің алымы мен бөлімін (-1) -ге көбейту;
- 3) әрбір бөлшектің бөлімдерін көбейткіштерге жіктеу;
- 4) ең үлкен ортақ бөлгішін табу;
- 5) әрбір бөлшек үшін толықтауыш көбейткіштерін табу;
- 6) бөлімдері бірдей бөлшектерді қосып, өрнекті ықшамдау;
- 7) егер мүмкін болса, онда алымын көбейткіштерге жіктеу;
- 8) егер мүмкін болса, онда бөлшекті қысқарту;
- 9) есеп шешілді.

Сонымен, оқушыларды есепті шығаруды оқытуда оның алгоритмін құруға үйрету қажет. Сонымен қатар, есепті шығару барысында оның алгоритмі оқушылармен жетілдіріліп отыруы тиіс.

Уақыт өте бөлімдері әртүрлі өрнектерді ықшамдау алгоритмі оқушылар үшін жеңіл бола бастайды. Оқушыларға «Бөлімдерінде айнымалы шамалар бар өрнектерді ықшамдау» тақырыбы бойынша есептерді шығару алгоритмін құруға үйретуге болады:

- 1) өрнектерді теңдік белгісінің бір жағынан екінші жағына қарама-қарсы таңбамен көшіре отырып, теңдік белгісінің бір жағына жинақтау.
- 2) өрнекті бөлшекке түрлендіру.
- 3) бөлшектің 0-ге тең болу шартын қолдану.
- 4) алынған теңдеуді шешу.
- 5) шешімді тексеру.
- 6) есеп шешілді.

Бірақ мұндай алгоритмді құруды өрнекті бөлшекке түрлендіру дағдысы қалыптасқаннан кейін беруге болады.

Қарастырылып отырған тақырыпқа берілген есептерді шығаруды үйрету барысында оқушылардың есеп шығаруға шығармашылық тұрғыда қарауын қадағалап отыру қажет.

11-мысал. Өрнекті ықшамдаңдар: $\frac{b^2 - 4by}{y(2y - b)} - \frac{4y}{b - 2y}$.

Шешуі.

2) қадам бойынша, егер бөлшектердің бөліміндегі өрнектердің таңбалары әртүрлі болса, онда біреуін (-1) санына көбейту қажет:

$$\frac{b^2 - 4by}{y(2y - b)} - \frac{4y}{b - 2y} = \frac{b^2 - 4by}{y(2y - b)} - \frac{-4y}{2y - b} =$$

3-5) қадамдар бойынша, бөлімдерін көбейткіштерге жіктеп, ең үлкен ортақ бөлгіштерін табамыз:

$$= \frac{b^2 - 4by}{y(2y - b)} - \frac{-4y \cdot y}{y \cdot (2y - b)} =$$

6) қадам бойынша, бөлімдері бірдей бөлшектерді қосамыз:

$$= \frac{b^2 - 4by + 4y^2}{y(2y - b)} =$$

7) қадам бойынша, пайда болған бөлшектің алымын көбейткіштерге жіктейміз:

$$= \frac{(b - 2y)^2}{y(2y - b)} = \frac{(2y - b)^2}{y(2y - b)} =$$

8) пунктке сәйкес, бөлшекті қысқартамыз:

$$= \frac{2y - b}{y}.$$

9) Есеп шешілді.

Есепті шығаруға дұрыс оқыту бұрыннан таныс аксиомалар мен теоремалар, тұжырымдарға сүйенуді қажет етеді. Есептің шешімін дәлелді түрде айтуға үйрету үшін есептің шешімін екі бағанға жазуға болады: сол жағында жасалған амалдар, оң жағында жасалған амалдардың негіздемесі [26].

Мысал ретінде, осы тәсілмен рационал теңдеулерді шығаруға үйретуді қарастырайық.

12-мысал. Теңдеуді шешіңдер: $\frac{2}{3x^2 + 2} = \frac{2}{2x^2 + 11}$.

Шешуі.

$$1) \frac{2}{3x^2 + 2} = \frac{2}{2x^2 + 11} \Leftrightarrow$$

$$2) 2x^2 + 11 = 3x^2 + 2 \Leftrightarrow$$

$$3) 3x^2 + 2 - 2x^2 - 11 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4) x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

Теңсіздік белгісінің екі жағын

$\frac{1}{2}(3x^2 + 2)(2x^2 + 11) \neq 0$ өрнегіне көбейтеміз

Теңдік таңбасының екі жағындағы өрнектерді қарама-қарсы таңбамен бір жағына жинақтаймыз.

Ұқсас мүшелерді біріктіреміз.

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ теңдігін пайдаланамыз.

- 5) $(x-3)(x+3)=0 \Leftrightarrow$
 6) $x-3=0$ немесе $x+3=0 \Leftrightarrow$
 7) $x=3$ немесе $x=-3$.

Өрнектің 0-ге тең болу шартын қолданамыз.
 Теңдік таңбасының екі жағындағы өрнектерді қарама-қарсы таңбамен бір жағына жинақтаймыз.

Алғашқы сабақтардан бастап оқушылардан есептің шешімін алгоритм бойынша жазуын талап ету қажет. Кейінгі сабақтарда кейбір қадамдардағы амалдарды ойша орындауға рұқсат етуге болады. Егер оқушы есепті тақта алдында шығарып тұрса, онда есептің шешімінің әрбір қадамын түсіндіріп беруді талап ету пайдалы, себебі бұл өз кезегінде оқушының өз ойын жеткізе алу қабілетін дамытады.

Алгебра сабақтарында есеп шығару барысында мұғалім әрдайым қандай есептерге белгілі бір ережелерді қолдануды, ал қандай есептер зерттелетін нақтылы объектілердің кеңістіктегі формаларын немесе сандық қатынастарын математикалық түрге келтіруді, яғни математикалық модель құруды біліп, әртүрлі процестер мен құбылыстарға көп жағдайларда бірдей математикалық модельдердің сәйкес болатынына тоқталғаны жөн.

Жаңартылған білім мазмұны бойынша 7–9 сыныптардың алгебра курсына оқушыларға практикалық мазмұнды, мәтінді есептерді теңдеу, теңдеулер жүйесін құруға арналған есептерге жеткілікті назар аударылады. Бұл математиканы оқыту процесіндегі өте маңызды есептердің бірі болып саналады. Ол үшін мұғалімдер әртүрлі әдіс тәсілдерді қолдану арқылы оқушылардың есеп шығару біліктігін бағдарламаның талабына сай дәрежеге жеткізуі тиісті. Әсіресе, үлгерімі нашар оқушылармен жекелей жұмыстар ұйымдастыра отырып, алгоритмдік тәсілдерді жүзеге асырғаны жөн. Өйткені әріппен белгілейтін шаманы таңдап алуға, басқа бір шаманы белгілі және белгіленген шамалар арқылы өрнектеуге мәндері тең екі шаманы анықтап, теңдеу құруға үйрету алгоритмінің қадамдар тізбегі толық жазылған карточканың тигізетін көмегі зор [82].

Мысалы, екі автобус қаладан 72 км қашықтықтағы демалыс орнына бір мезгілде шықты. Бірінші автобустың жылдамдығы екіншісінен 5 км/сағ артық болғандықтан, ол демалыс орнына 15 мин ерте келді. Әр автобустың жылдамдығы қандай?

Есепті шығару үшін оның математикалық моделін құру керек.

Екінші автобустың жылдамдығын x деп белгілесек, бірінші автобустың жылдамдығы $x-5$, автобустардың жолға жұмсаған уақыты, сәйкесінше $\frac{72}{x}$

және $\frac{72}{x-5}$ болады, ал екінші автобус біріншіге қарағанда жолға 15 мин кем

уақыт жұмсаған, яғни $\frac{72}{x-5} - \frac{72}{x} = \frac{1}{4}$. Осы теңдеу оның математикалық моделі болып табылады.

Бұдан кейін осындай есептерде оқушыларды қатыстыра отырып талдап,

содан соң өздігінен шығаруды ұсынуға болады. Ал нашар оқитын оқушыларға келесі алгоритмдік нұсқау карточкасын беруге болады:

- 1) Екінші автобустың жылдамдығын x км/сағ деп белгілендер.
- 2) Бірінші автобустың жылдамдығы туралы не айтылған? Оны есептің мәтінінен тауып оқындар.
- 3) Бірінші автобустың жылдамдығын белгісіз x арқылы өрнектендер.
- 4) Бірінші, екінші автобус қанша жол жүргенін есептің мәтінінен тауып айқындандар.
- 5) Бірінші, екінші автобустың жүрген жолы мен жылдамдығы бойынша, жолға жұмсаған уақытына сәйкес өрнек құрастырындар.
- 6) Табылған уақыттарды салыстырындар. Бірінші автобус демалыс орнына 15 мин ерте келгенін ескеріп, теңдеуді құрастырындар.

7) Теңдеуді шешіндер.

Осындай алгоритмдерді үлгерімі нашар оқушылардың мәтінді есепті теңдеу құрып шығару біліктерінің белгілі бір дәрежеге жеткенге дейін қолданған жөн. Есептің шартын түсініп оқып, қандай объектілер туралы не айтылғанын және олардың арасындағы байланыстарды айқындағаннан соң, карточкадағы қадамдар тізбегі жазылған ретімен орындалады. Теңдеу құрылатын мәтінді есептерді шығару барысында оқушылар есепте берілген, іздеп отырған шамаларды анықтауды, оның математикалық моделін жасауды, шығару әдісін, яғни шығару алгоритмін құрастыруды үйренеді. Сонымен, алгебра курсының әрбір сабағында оқушылардың алгоритмді сөз, ереже немесе қадамдар тізбегі, көрнекі блок-схема, кесте түрінде келтіруіне формуладан қадамдар тізбегіне, блок-схемаға, кестеге көшуіне, оны жаттығулар орындауға, есеп шығаруға пайдалануына, сөйтіп алгоритм ұғымы оның қасиеттерін терең түсінуіне мүмкіндіктері мол.

Сонымен, есеп шығаруды ұйымдастыруда оқушылардың жеке әдісін кеңірек пайдаланған жөн: нашар оқитын оқушыларға ұсынылатын есептердің қиындық деңгейі оқу бағдарламасының талаптарына сай анықталуы керек; ал бұл деңгейге жеткен оқушыларға бұдан да күрделірек есептер берген пайдалы. Дайындықтардың міндетті деңгейіне барлық оқушылармен жетуге қойылатын талаптарды саралау оқушыларға қиындық келтірмеудің негізін қалайды, оларды шамалары келетін жұмыспен қамтамасыз етеді және математиканы оқуға дұрыс көзқарасын қалыптастырады.

2.2 Алгебра курсына мәтінді және стандартты емес есептерді шығаруды оқытудың әдістемесі

7-9 сыныптардың алгебра курсының бағдарламаларында теңдеу, теңсіздік, теңдеулер жүйелерін құру арқылы шығарылатын мәтінді есептерді оқып-үйрену жүзеге асырылады. Фабуласы бойынша бұл есептер дененің бірқалыпты қозғалысына, бірлескен жұмысқа, дененің массасын анықтауға, аудандарды есептеуге, құндық қатысқа және т.б. арналған.

Алгебра курсына мәтінді есептер – математикалық мәліметтерді, қандай да бір ақпаратты қамтитын математикалық есептер [4].

Кейбір әдістемелік жұмыстарда мәтінді есептер (бұл есептің шарты мен

талабы хабарлы және сұраулы сөйлемдермен байланысқан мәтіннен тұратын кезде) тобынан сюжеттік есептер (егер мәтінде нақты объектілер, процестер, байланыстар және қатыстар туралы сөз болса) ажыратылып көрсетіледі [8; 87].

Мәтінді есептердің мазмұнында геометриялық немесе физикалық объектілер, математикалық немесе физикалық процестер сипатталуы мүмкін. Оларды біз сәйкесінше геометриялық немесе физикалық есеп деп аламыз. Көбінесе математикалық есептерде нақты процестер арасынан: қозғалыс, жұмыс, түрлі қоспалар немесе ерітінді, құйма алу, заттарды алмастыру және басқа ұқсас әрекеттер көрсетіледі. Сюжеттік есептер арасынан қозғалысқа, бірлескен жұмысқа, қоспаға, құймаға және концентрацияға, айырымдық және еселік қатыстарға берілген есептерді бөліп көрсетуге болады. Сюжет бойынша бұлай жіктеу шартты түрде болғанмен дәстүрлі, себебі, мысалы, қозғалысқа берілген қарапайым есептерді айырымдық және еселік қатыстағы есептер категориясына жатқызуға болады.

Әдістемелік әдебиеттерге талдау жасай келе мәтінді есептер жүйесін шығаруды оқытудың әдістемесіне қойылатын негізгі талаптар келесідей болатынын анықтадық:

1) мәтінді есептерді шығару процесінде оқу іс-әрекетін қалыптастыру танымдық іс-әрекеттің төрт деңгейінде іске асуы қажет:

- репродуктивті деңгейдегі оқу іс-әрекетінің негізгі мақсаты оқытудың жартылай-іздеу кезеңінде оқушыларды іздестіру-зерттеу жұмыстарына дайындау;

- жартылай-іздеу деңгейіндегі оқу іс-әрекетінің негізгі мақсаты танымдық есептерді шығару процесінде оқушыларда іздеу іс-әрекетін жүзеге асыру білігін қалыптастыру;

- шығармашылық деңгейдегі оқу іс-әрекетінің негізгі мақсаты оқушылардың шығармашылық іс-әрекетке қызығушылықтарын арттыру;

- зерттеушілік деңгейдегі оқу-іс әрекетінің негізгі мақсаты оқушылардың өздігінен, оған белгісіз тәсілдер, ережелер және жаңаша әдістерді іздеу, стандартты емес есептерді шығару біліктерін қалыптастыру;

2) оқу іс-әрекеті тұжырымдамасы тұрғысынан оқушылардың танымдық іс-әрекетінің жартылай-іздеу деңгейінде жаңа материалды оқу әдісі ірі блоктармен (тақырып, тарау) теория мен есептердің барлық типтерін кезекпен шығару арқылы жүзеге асуы керек;

3) оқушылардың танымдық іс-әрекетінің жартылай-іздеу деңгейіндегі есептер оқытудағы дамыта оқыту принципін іске асыру мақсатында күрделілігі бойынша жүйеленуі қажет;

4) оқу іс-әрекетінің тәсілдер жүйесі оқушыларды ынталандырушы-бағыттаушы, амалдық-орындаушылық және бақылау-бағалаушылық компоненттерін қалыптастыруға бағытталуы қажет [87].

Жоғарыда көрсетілген мәтінді есептер жүйесіне қойылатын негізгі талаптардың бірі ол нәтижелі іс-әрекетті бірте-бірте қалыптастыруды қамтамасыз ету. «Методические основы обучения решению математических задач в школе» оқу құралында осындай есептер жүйесі келтірілген [88]. Оқушының шығару кезінде ойлау деңгейіне байланысты олар келесі төрт түрлі

есептерге бөлінеді: алгоритмдік, жартылай алгоритмдік, жартылай эвристикалық және эвристикалық.

Алгоритмдік есептер – арасындағы қатынастарда айқын немесе айқын емес байланыстар орнаған, негізгі қатынастармен сипатталатын, бір немесе екі жағдайдан (элементтен) тұрады. Есептерді шығарудың тәсілдерінің негізінде есепті қабылдау, яғни басты қатынастарды анықтау және оны моделдеу жатыр.

Жартылай алгоритмдік есептер – әртүрлі түрдегі айқын байланыстар орнаған үш жағдайдан (элементтен) тұратын есептер. Осы есептерді шығару барысында оқушылар бастапқыда белгілі алгоритмдерді қолдану мүмкіндігін қарастыру керек, содан кейін алгоритмді қолдануды анықтаулары қажет.

Жартылай эвристикалық және эвристикалық түрдегі есептерде олар негізгі қатынастармен сипатталатын, айқын және айқын емес байланыстар орнаған төрт немесе одан көп жағдайлардан (элементтерден) тұрады.

Біз жұмысымызда танымдық іс-әрекеттің, яғни ойлау деңгейлері бойынша жүйеленген мәтінді есептерді ұсынамыз (қосымша А).

Мұндағы 1-7 есептері алгоритмдік түрге жатады, өйткені оның құрылымы $a \cdot b = c$ қатынасымен сипатталатын бір-екі жағдайдан (элементтен) тұрады. Есептің күрделілігі 1-4 аралығында өзгереді. Бұл есептерді шығару алгоритмі сәйкесінше шамалардың элементтерінің қатынасы арқылы анықталады. 8-15 есептері жартылай алгоритмдік түрге жатады, оның құрылымы анық және анық емес байланысатын үш жағдайдан (элементтен) тұрады. Жоғары деңгейлі есептерді шығару тәсілі $a \cdot b = c$ қатынасымен және элементтерінің арасындағы қатынаспен анықталады. Есептердің күрделілігі 4-6 аралығында өзгереді. 16-18 есептер жартылай эвристикалық түрдегі есептерге жатады, олардың қиындығы 5-7. Есептерді шығару тәсілдері негізгі қатынаспен, есеп жағдайларын таңдаумен және әртүрлі шамалардың арасындағы қатынастармен анықталады. 19-22 есептер эвристикалық түрдегі есептерге жатады. Есептердің құрылымы 5 және олардан көп элементтерден тұрады.

Осы төрт түрлі мәтінді алгебралық есептердің шешімін іздеу бойынша оқушылардың іс-әрекетіне талдау жасап, олардың оқушылардың білімі мен дағдыларын қалыптастыруға қолданылуын қарастырайық.

Алгоритмдік түрдегі есептерді шығару тәсілдері белгілі амалдарды жүйелі түрде орындау болып табылады, сондықтан осындай есептерді шығару барысында оқушылардың танымдық іс-әрекеті меңгерген алгоритмдерді қайта жаңғырту деңгейінде ғана жүреді. Алгоритмдік түрдегі есептерді оқу іс-әрекетінің тәсілдерімен танысу кезеңінде оның құрылымын қабылдау, әрбір амалды зерделеу барысында қолданады.

Жартылай алгоритмдік түрдегі есептерді шығару меңгерген білімді осы білім қалыптасқан жағдайлардан өзгеше жаңа жағдайда қолдануды қажет етеді. Мәтінді есептерді шығарудың өңделген әдісі есептің шешімін іздеу мәселесінің бір бөлігін ғана шеше алады, сондықтан есепті шығаруда басқа алгоритмдерді табу және басқа білімді қолдану мақсатында есепті қосымша оқу қажеттілігі туындайды. Осындай есептерді шығару барысында оқушылардың іс-әрекеті негізінен репродуктивті сипатқа ие болады.

Жартылай эвристикалық түрдегі есептерді шығару тәсілдері тек есептің шешімін іздеуде белгілі тәсілдерді пайдалану ғана емес сонымен қатар есептегі шарты мен талаптарының арасындағы байланыстарға мұқият талдау жүргізуді де талап етеді. Осы түрдегі есептерді шығарудағы оқушылардың іс-әрекеті есеп шығару да меңгерген білімді белгілі жағдайдан өзге жағдайда қолдана білуге негізделген жартылай-іздеу сипатына ие. Сондықтан жартылай эвристикалық есептерді талдауда оқушылар оқу іс-әрекетін пайдалануға үйренеді, яғни меңгерген әдісті жаңа жағдайларда қолданады. Сәйкесінше жартылай эвристикалық есептер оқу іс-әрекетінің тәсілдерін оқытуда жартылай алгоритмдік есептерден кейін қолданылады.

Мәтінді есептерді шығару барысында эвристикалық түрдегі есептер оқушылардың оларға беймәлім заңдылықтар, тәсілдер, ережелер оқу іс-әрекетінің жаңа тәсілдерін (мұғалімнің басшылығымен) өз бетінше меңгеру деп болжамдайды. Бұл оқушылардың шығармашылық іс-әрекетінің дамуына жағдай жасайды. Мәтінді есептер жүйесінде эвристикалық түрдегі есептер жартылай эвристикалық түрдегі есептерден кейін қолданылады.

Осылайша мәтінді есептердің төрт түрден тұратын: алгоритмдік, жартылай алгоритмдік, жартылай эвристикалық, эвристикалық жүйесі оқушылардың танымдық іс-әрекетінің қайта жаңғыртудан бастап, зерттеушілік деңгейге дейін біртіндеп өсуін қамтамасыз етеді.

Оқу іс-әрекетін қалыптастыруға бағытталған, есептердің ерекшелігіне байланысты мәтінді есептерді шығару барысында оқушылардың осы тәсілдерді меңгеру бойынша іс-әрекетін арнайы ұйымдастыруға мүмкіндік беретін *оқыту мақсаттарының жүйесі* қажет.

Оқу мақсаттарының жүйесінен екі ішкі жүйені бөліп алуға болады:

1. Мәтінді есептерді меңгеруге қажетті білімді (құрылымы, шамалар және олардың арасындағы тәуелділіктер, құбылыстар, объектілер мен олардың қасиеттері) және оқу іс-әрекет тәсілдерін (мәтінді есептерді шығару кезеңдері, есеп мәтінінен негізгі қатынасты бөліп алу мен осы қатынастың моделін құру; есептің шешімін іздеу моделін құру тәсілдері; жалпы тәсілмен шығарылатын, есептер құрастыру тәсілдері; есепті шығару процесі мен нәтижесін бақылау мен бағалау тәсілдері) меңгеруге бағытталған мақсаттар;

2. Мәтінді есептерді шығару процесінде оқу іс-әрекеті тәсілдерін іске асыру білігін қалыптастыруға бағытталған мақсаттар (есептердің шарты мен талабын, шамалар мен олардың арасындағы қатынасты бөліп алу, есептік жағдайды айқындап алу, негізгі қатынасты моделдеу, жалпы тәсілмен шығарылатын есептерді құрастыру, есептердің берілгендері мен сұрағын бөліп алу, модель бойынша есеп шешімін рәсімдеу, есептерді шығару іс-әрекетінің нәтижелерін және оқу іс-әрекетінің тәсілдерін меңгеруін бағалау).

Мәтінді есептерді шығару процесінде оқу іс-әрекетінің тәсілдерін қалыптастыруға бағытталған есептердің сәйкес мақсаттары болуы керек. Біз осы тапсырмаларды орындау барысында оқушылардың танымдық іс әрекетіне сәйкес екі түрдегі есептерді қарастырамыз: танымдық және зерттеушілік есептер.

Танымдық есептер оқу іс-әрекетінің немесе олардың құрамына енетін амалдардың тәсілдерін қолдануға бағытталған. Зерттеушілік есептер оқушыларды айқын түрде зерттеу жүргізуге бағыттайды: есеп құрылымына талдау жасайды, бірнеше есептердің құрылымын салыстырады, қандайда бір іс-әрекетті орындаудың жаңа тәсілдерін іздейді және тағы басқалары.

Оқушылардың мәтінді есептерді шығару бойынша оқу іс-әрекетінің репродуктивті деңгейінің әдістемелік ерекшелігі осы кезеңде танымдық есептерді қолданылады. Оқушыларға мәтінді есептерді шығаруды оқытуға дайындық жұмысының негізі – дидактикалық функциясы бар есептер болады. Осы кезеңдегі мәтінді есептерді шығаруды оқытудың әдістемесі оқушылардың оқу іс-әрекетінің негізгі үш түрін қамтиды: жаппай, ұжымдық (топтық) және дербес.

Танымдық іс-әрекетінің жартылай-іздеу деңгейі оқушылардың іс-әрекетін қалыптастыру әдістемесінің негізі болып табылады. Мұнда мәтінді есептерді шығарудың негізгі тәсілдері, сонымен қатар зерттеудің де тәсілдері қалыптасады. Мәтінді есептерге қойылатын талаптардан, осы материалды баяндаудың әдістемелік ерекшелігінен және оқушылардың сәйкес оқу іс-әрекеті тәсілдерін қалыптастыру келесідей:

- оқушылардың оқу іс-әрекетінің мақсатының қойылуы;
- іздену және шығармашылық іс-әрекетке дайындықты жүзеге асыру;
- мәтінді есептердің шешімін іздеу тәсілдерінің теориялық материалдарын мұғалім толығымен екі сабақта баяндайды;
- оқушыларды мәтінді есептерді шығару тәсілдерін қалыптастыратын оқу іс-әрекеттері танымдық функциялары (эвристикалық сұхбат және өз бетінше іздеу жұмыстары) бар есептер көмегімен жүзеге асады;
- оқушылардың негізгі оқу іс-әрекетінің негізгі түрлері: жаппай, топтық және дербес іс-әрекеті (өздігінен іздеу жұмыстарын орындау процесінде).

Оқушылардың өзбетінше зерттеушілік (шығармашылық) жұмыстарды орындау процесіндегі оқу іс-әрекеті оқушылардың шығармашылық іс-әрекетін ұйымдастыруға бағытталған. Бұл жерде оқушыларға өзіндік тапсырма ретінде дамытушы функциясы бар есептерді беруге болады. Мұндай есептер оқушылардың ойын дамытуға арналған және оқу объектісі болып табылмайды. Дегенмен бұл есептер оқытылатын материалдармен байланысты және оқушылардың шамалары жететіндей болуы керек. Әрине оқушылардың барлығы қиындығы жоғары бұл есепті шығара алмайды. Ол оқу іс-әрекетінің жартылай-іздеу кезеңінде оқушылардың сәйкес білікті қаншалықты берік меңгергеніне байланысты. Сондықтан көптеген оқушыларға осындай есептерді шығару барысында мұғалім тарапынан айтарлықтай көмекті қажет етеді. Оқушылардың оқу іс-әрекеті тәсілдерін қалыптастыруға бағытталған есептерді қарастырайық:

- 1) есептерді қабылдау білігін қалыптастыруға бағытталған есептер;
- 2) негізгі қатынасты бөліп алу мақсатында есеп мәтінін түрлендіре алу білігін қалыптастыруға бағытталған есептер;
- 3) есептің шешімін іздеу моделін құрастыру білігін қалыптастыруға бағытталған есептер;

4) жалпы тәсілмен шығарылатын, есептер жүйесін құрастыру білігін қалыптастыруға бағытталған оқу есептері;

5) есепті шығару процесі мен нәтижесін бақылау және бағалау білігін қалыптастыруға бағытталған оқу есептері.

Оқушылардың оқу іс-әрекетін қалыптастыруға бағытталған мәтіндіесептерді құру принципін анықтауда мына жағдайларды негізге аламыз:

1. 7-9 сынып алгебра оқулықтарындағы мәтінді есептерді: сызықты теңдеулерді құрастыруға, бөлшек рационал теңдеулерді, квадрат теңдеулерді және сызықты теңдеулер жүйесі мен екінші ретті теңдеулер жүйесін құрастыруға берілген деп төрт түрге бөлуге болады.

2. Мәтінді есептер жүйесіндегі: алгоритмдік, жартылай алгоритмдік, жартылай эвристикалық және эвристикалық есептердішығарудағы іс-әрекетті қалыптастырудың ерекшеліктері.

3. Оқушылардың танымдық іс-әрекетінің сипатына тәуелді есептердің екі түрін қолдану.

Психологтардың, әдіскерлердің зерттеулерінде оқушының есептерді шығара білуі, ол шығарған есептер санына тәуелді емес оның есепті талдау дағдысының, есепті шығару жоспарын іздеу дағдысының дұрыс қалыптасуына байланысты екенін дәлелдеген. Бұл дағдылар қалыптаспаған жағдайда, оқушы есепті өздігінен шығаруға үйренбейді.

Мәтінді есептерді теңдеулер мен теңсіздіктерді пайдалана отырып шығарудың оқушыларға қиындық туғызу себептері:

1) есептің шартын дұрыс талдай алмауы;

2) шамалар арасындағы байланысты дұрыс меңгермеуі;

3) тірек-есептерді шығару дағдыларының дұрыс қалыптаспауы;

4) есеп шығару барысында мұғалім тарапынан оқушының ойлау әрекетін жеткіліксіз басқаруы;

5) белгілі бір түрдегі теңдеуді немесе теңсіздікті (олардың жүйелерін) шеше алмауы;

6) есеп шығару әдістерін меңгертуде мұғалімнің сабақтастылық, бірізділік және жүйелік принциптерін дұрыс сақтамауы.

Мәтінді есептерді теңдеулер мен теңсіздіктерді пайдалана отырып шығаруда ең алдымен дайындық кезеңінің дұрыс ұйымдастырылуының маңызы өте зор. Дайындық кезеңінде тірек-есептерді дұрыс таңдап алып, оны шығару әдістерін жүйелі қайталап отыруға көңіл бөлу керек [89].

Орта мектеп мұғалімдеріне, жоғары оқу орнының математиканы оқыту әдістемесі кафедрасының оқытушыларына, PhD докторанттар, магистранттар мен студенттерге арналып әзірленген «Методические основы обучения решению математических задач в школе» оқу құралымызда біз математика курсындағы санның пайызын және пайызы бойынша санды табуға, пропорцияны қолдануға, пропорционалдық бөлуге және сандық байланыстарға, қозғалысқа, жұмысқа және еңбек өнімділігіне, бассейн мен құбырға арналған, қоспа мен концентрацияға (қосылымға) арналған мәтінді есептерді және оларды шығарудың тиімді әдістері мен тәсілдерін жүйеледік [88].

Мәтінді есептерді шығарудың әртүрлі әдістері бар, олар: арифметикалық, алгебралық, геометриялық, логикалық, практикалық, кестелік. Әрбір әдістің негізінде әртүрлі математикалық модельдер құрастырылады.

Есепті арифметикалық әдіспен шығару – есептің шартындағы талабына сәйкес сандарға арифметикалық амалдар орындау арқылы табу. Көптеген жағдайда бір есепті әртүрлі арифметикалық тәсілдермен шығаруға болады.

Есепті алгебралық әдіспен шығару – есептің шартындағы талабына сәйкес теңдеу (теңсіздік) немесе теңдеулер (теңсіздіктер) жүйесін құру мен шешу арқылы табу. Бір есепті әртүрлі алгебралық тәсілдермен шығаруға болады.

Есепті геометриялық әдіспен шығару – есептің шартындағы талабына сәйкес геометриялық салуларды немесе геометриялық фигуралардың қасиеттерін үшбұрыштардың ұқсастығын, фигуралардың ауданын және т.б. қолданып табу.

Есепті логикалық әдіспен шығару – есептің шартындағы талабына сәйкес есептеуді орындамай, тек логикалық ойлау арқылы табу.

Есепті практикалық әдіспен шығару – есептің шартындағы талабына сәйкес заттармен немесе олардың көшірмелерімен (модельдер, макеттер) практикалық амалдарды орындау арқылы табу.

Есепті кестелік әдіспен шығару – есептің шартындағы талабына жауапты есептің мазмұнын сәйкесінше құрылған кестеге енгізу арқылы табу. Ол есепті толығымен көруге мүмкіндік береді [88].

Ж.Т.Билялова диссертациялық жұмысында бастауыш мектепте теориялық материалдарды оқып білуде түсініктер мен ұғымдарды қалыптастыруда математикалық есептерді есеп шығарудың арифметикалық тәсілдерін қолдануға бағдарлайды [90].

Орта мектептің математикадан оқу бағдарламасында оқушылардың математикалық дайындығына қойылатын талаптарының қатарына мәтінді есептерді шығарудың арифметикалық тәсілдерін меңгеру, теңдеулерді қолданып шығару біліктерін қалыптастыру берілген [78].

Орта мектеп математика курсына мәтінді есептерді шығарудың екі: арифметикалық және алгебралық тәсілі қарастырылады. Арифметикалық тәсіл санды өрнек құру арқылы белгісіз шаманың мәнін табудан және нәтижені есептеуден тұрады. Алгебралық тәсіл есептерді шығару кезінде құрылатын теңдеу және теңдеулер жүйесін қолдануға негізделеді. Осыған байланысты бұл зерттеуде алгебралық тәсілмен шығарылатын мәтінді есептерді мәтінді алгебралық есептер деп атаймыз.

Сонымен, оқушыларды мәтінді есептерді шығаруға оқытуда есепті шығару кезеңдерінің бірізділігін және оны қалай жазуды ұсынамыз:

- 1) белгісіз шаманы таңдау және оны әріппен белгілеу;
- 2) қалған белгісіздерді осы әріптің көмегімен өрнектеу;
- 3) теңдеу құру;
- 4) теңдеуді шешу;
- 5) есептің сұрағына жауап алу;
- 6) есептің шарты бойынша алынған шешімді және жауапты тексеру.

Математикалық есептерді шығаруда талдау мен синтез кеңінен қолданылады. Талдау – ізделіндіден берілгенге ойлау әдісі, синтез – берілгеннен ізделіндіге әкелетін ойлау әдісі. Осы екі әдістер әдетте өзара байланыста қолданылады.

Енді мәтінді есептерді жоғарыда тұжырымдалған әдістермен шығарудың ерекшеліктерін көрсетейік.

Алгебралық әдіспен мәтінді есепті шығару (әдетте ол теңдеу және олардың жүйесін, теңсіздік және олардың жүйесін құруға арналған есептер) тек талдауды немесе синтезді қолданумен жүзеге аспайды [88].

Теңдеулерді (теңдеулер жүйесін, теңсіздіктер және т.б.) құру ізделіндіден (белгісіз айнымалы) берілгенге, яғни талдау қолданылады. Теңдеуді (теңдеулер жүйесін, теңсіздікті және т.б.) шешу синтез әдісімен орындалады.

Алгебра курсындағы сызықтық теңдеулерді құрастыруға арналған мәтінді есептерді шығаруға оқытудың әдістемелік ұсынымдарын қарастырайық.

13-мысал. Тракторшы үш жер телімін жырты. Бірінші телімнің ауданы барлық үш телім ауданының $\frac{2}{5}$ -не, ал екіншісі ауданының үшіншісі ауданына қатынасы $\frac{3}{2} : \frac{4}{3}$. Егер үшінші телімде біріншіге қарағанда 16 га кем болса, барлық үш телімде қанша гектар болды?

Шешуі. Барлық ауданды табу үшін, жер телімдерінің аудандарын тауып, оларды қосу керек. Айталық телімдердің ауданы x , y , $x - 16$ (га) болсын.

	Синтез
$x = \frac{2}{5}(x + y - 16 + x)$ және	есептің шарты бойынша.
$y : (x - 16) = \frac{3}{2} : \frac{4}{3} \Leftrightarrow$	
$\Leftrightarrow y = \frac{9}{8}(x - 16) \Leftrightarrow$	Теңдеудің мүшелерін бір жағынан екінші жағына қарама-қарсы таңбамен көшіреміз.
$x = \frac{2}{5}\left(2x - 16 + \frac{9}{8}x - 18\right) \Leftrightarrow$	y -тің мәнін бірінші теңдеуге қойып, көбейтудің үлестірімділік заңын қолданамыз.
$\Leftrightarrow x = \frac{2}{5}\left(\frac{25x}{8} - 34\right) \Leftrightarrow$	Өрнекті ықшамдау.
$\Leftrightarrow x = \frac{272}{5}.$	Теңдеудің түбірін, яғни x -тің мәнін табу.

$$y = \frac{9}{8} \left(\frac{272}{5} - 16 \right) = \frac{216}{5}.$$

$$\frac{544}{5} + \frac{216}{5} - 16 = 136 \text{ (га)}$$

у-тің мәнін табамыз, жай бөлшектерге амалдар қолдану.

Жай бөлшектерге амалдар қолдану.

Жауабы: 136 га.

Кестелік әдіспен мәтінді есепті шығаруда оның шешімін аналитикалық іздеудің жалпы тәсілін тұжырымдаймыз -

1. Есепке талдау жасап, анықтаймыз:

а) есепте қамтылған шамалардың атауларын;

ә) осы шамалардың арасындағы функционалдық байланысты, яғни есепте жүзеге асырылған негізгі қатынасты;

б) есептегі есептік жағдайлар (элементтер) саны;

в) әрбір есептік жағдайдағы белгілі және белгісіз шамаларды;

г) белгісіз шамалар арасындағы байланысты;

ғ) ізделінді шаманы.

2. Әрбір жағдайдағы берілген және белгісіз шамалардың кестеге енгіземіз және теңдік, теңсіздік, арифметикалық амалдар белгілерін пайдаланып, белгісіз шамалардың сәйкесінше мәндерін өзара салыстырамыз.

3. Есептің мәтінің кестелік жазбасы негізінде есептің шешімін іздеу кестесін (моделін) құрастырамыз, ол үшін:

а) белгісіз шаманы таңдау және оны әріппен белгілеу (мысалы, x);

ә) белгісіз шамалардың сәйкесінше мәндері арасындағы орнатылған байланысты және есепте жүзеге асырылған негізгі қатынасты пайдалану;

б) теңдеуді алуға негіз болатын теңдеуді немесе теңсіздікті жазу.

4. Жазылған теңсіздікті пайдаланып, теңдеуді құрастырамыз.

5. Есептің шешімін іздеуді аяқтау және алынған теңдеуді шешуге көшу [91].

Есептің шартына сәйкес құрылатын теңдеулер әдетте қашықтықты, қозғалыстағы денелердің жылдамдығын, уақытты, су ағынының жылдамдығын (өзен бойымен қозғалыста) қамтиды.

Түзу сызықты қозғалысқа арналған есептердің негізгі компоненттері:

s – жүрген жол, v – жылдамдық және t – уақыт.

Көрсетілген шамалар арасындағы байланыс келесі формуламен өрнектеледі:

$$s = v \cdot t; \quad v = \frac{s}{t}; \quad t = \frac{s}{v}.$$

Денелердің қозғалысы кезінде әртүрлі жағдайлар болады.

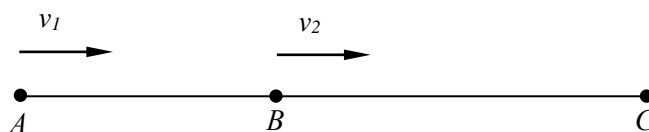
A және B нүктелерінің арақашықтығы s болсын. Екі дене бірқалыпты қозғала бастады, бірақ олардың жылдамдықтары әртүрлі v_1 және v_2 . C нүктесі – кездесу нүктесі, ал t – кездескенге дейінгі қозғалыс уақыты болсын.



Бір біріне қарама қарсы қозғалысы кезінде $AC=v_1t$, $BC=v_2t$ болады. Осы екі теңдікті қосамыз:

$$AC + CB = v_1t + v_2t = (v_1 + v_2)t \Rightarrow AB = s = (v_1 + v_2)t \Rightarrow t = \frac{s}{v_1 + v_2}.$$

Егер бір дене екіншісін қуып жетсе, онда аламыз: $AC=v_1t$, $BC=v_2t$.



Осы теңдіктерді азайтамыз:

$$AC - BC = (v_1 - v_2)t.$$

$AC - BC = AB = s$ болғандықтан, бірінші дененің екіншісін қуып жетуге кеткен уақыты келесі теңдікпен анықталады:

$$t = \frac{s}{v_1 - v_2}.$$

14-мысал. Екі велосипедші арақашықтығы 76 км екі ауылдан бір-біріне қарама-қарсы бір мезгілде шығып, 2 сағаттан кейін олар кездесті. Егер бір велосипедшінің жылдамдығы екіншісінен 3 км/сағ-қа кем болса, олардың жылдамдықтарын табыңдар.

Шешуі. Оқушылармен бірлесіп, есептің мәтініне талдау жасаймыз. Оқушыларға келесі сұрақтар қойылады:

Жүрген жол, жылдамдық және уақыт өзара қалай байланысқан?

Әр жағдайда қандай шамалар белгілі?

Бір велосипедшінің жылдамдығы екіншісінен қаншаға артық?

Велосипедшілер 2 сағатта қандай қашықтық жүріп өтеді?

Есепте қандай белгісіз шама ізделінді болады?

Есепте қандай шамалар берілген?

Есептің шешімін аналитикалық іздеудің негізі үш кесте болатыны белгілі: берілгендер мен белгісіз шамалар кестесі және есептің шешімін іздеу кестесі (модель).

Есептің мәтініне талдау жасап, берілгендер мен белгісіз шамаларды келесі 1-кестеге енгіземіз.

Кесте 1

Шама	Велосипедші	
	бірінші	екінші
Қозғалыс жылдамдығы, км/сағ	?	< ? 3-ке артық
Қозғалыс уақыты, сағ	2	2
Жүрген жол, км.	?	+ ? = 76

Бірінші велосипедшінің жылдамдығын x км/сағ арқылы белгілесек, онда есепті шығару моделі келесідегідей болады:

Кесте 2

Шама	Велосипедші	
	бірінші	екінші
Қозғалыс жылдамдығы, км/сағ	x	< $x + 3$
Қозғалыс уақыты, сағ	2	2
Жүрген жол, км	$2x$	+ $2(x+3) = 76$

Ізделінді теңдеу: $2x + 2(x + 3) = 76$, осыдан $x = 17,5$.

Жауабы: 17,5 км/сағ; 20,5 км/сағ.

Оқушылармен есепті шығарудың әртүрлі тәсілдерін қарастырған жөн. Мысалы, осы есепте егер іздеу стратегиясын өзгертсек, яғни бірінші велосипедшінің екіншімен кездескенге дейінгі жүрген жолын x км арқылы белгілесек, онда есепті шығару моделі келесідегідей болады:

Кесте 3

Шама	Велосипедші	
	бірінші	екінші
Қозғалыс жылдамдығы, км/сағ	$\frac{x}{2}$	< $\frac{x}{2} + 3$
Қозғалыс уақыты, сағ	2	2
Жүрген жол, км	x	< $76 - x$ қаншаға?

Ізделінді теңдеу: $\left(\frac{x}{2} + 3\right) \cdot 2 = 76 - x$, осыдан $x = 35$.

Жауабы: 17,5 км/сағ; 20,5 км/сағ.

15-мысал. Екі темір жол бекетінің арақашықтығы 120 км. Бірінші поезд осы қашықтықты екіншіге қарағанда 50 мин жылдамырақ жүреді. Бірінші поездың жылдамдығы 12 км/сағ-қа артық. Екі поездың жылдамдықтарын

табындар.

Шешуі. Оқушылармен есептің шешімін аналитикалық іздеудің жалпы тәсілін пайдаланып, оның шартына талдаулар жасап, белгісіз шаманы таңдаумен оны әріппен белгілейміз:

Екінші поездың жылдамдығы x км/сағ ($x > 0$), сонда бірінші поездың жылдамдығы $(x + 12)$ км/сағ.

$$50 \text{ мин} = \frac{50}{60} = \frac{5}{6} \text{ сағ.}$$

Есептің шарты бойынша 4-кесте құрамыз:

Кесте 4

Шама	Поезд	
	бірінші	екінші
Жүрген жол, s (км)	120	120
Қозғалыс жылдамдығы, v (км/сағ)	$x + 12$	x
Қозғалыс уақыты, $t = \frac{s}{v}$ (сағ)	$\frac{120}{x + 12}$	$\frac{120}{x}$

$< \frac{5}{6} \text{ сағ. жылдам}$

Ізделінді теңдеу: $\frac{120}{x} - \frac{120}{x + 12} = \frac{5}{6}$, осыдан $x_1 = -48$; $x_2 = 36$.

Есептің шарты бойынша $x > 0$, демек: бірінші поездың жылдамдығы 48 км/сағ; екінші поездың жылдамдығы 36 км/сағ.

Жауабы: 48 км/сағ; 36 км/сағ.

16-мысал. Арақашықтығы 180 км A және B қалаларынан бір уақытта бір-біріне қарама-қарсы бағытта екі поезд шықты. Олар кездескеннен кейін A қаласынан шыққан поезд B қаласына 2 сағаттан соң жетеді, ал екіншісі A қаласына 4 сағат 30 минуттан соң жетеді. Поездардың жылдамдықтарын (жылдамдықтары тұрақты) табындар.

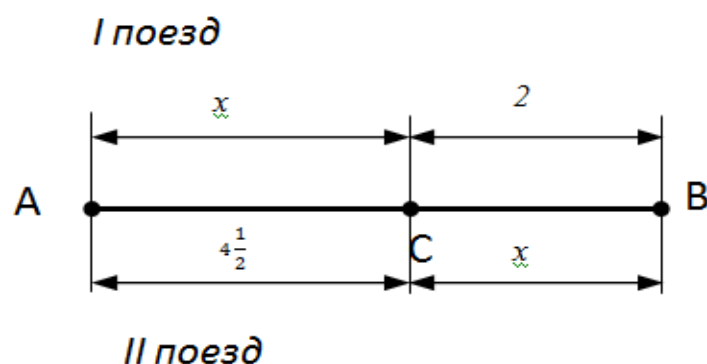
Шешуі. 1) Талдау. Есепте екі байланыс бар: біреуі анық, екіншісі жасырын түрде, яғни:

(B қаласынан шыққан II поездың уақыты) – (A қаласынан шыққан I поездың уақыты) = $4\frac{1}{2}$ сағ – 2 сағ = $2\frac{1}{2}$ сағ

I және II поездары бір уақытта шықты, сондықтан олардың кездескенге дейінгі уақыты бірдей.

2) Есепті шығарудың бірнеше тәсілдері бар.

Поездардың кездескенге дейінгі қозғалыстарының бірдей уақытын x сағ ($x > 0$) арқылы белгілейік:



Сурет 11

I поезд тұрақты жылдамдықпен жүреді, сондықтан оның жүрген жолы қозғалыс уақытына пропорционал. Осыдан: $\frac{AC}{BC} = \frac{x}{2}$. Осыған ұқсас, II поезд

үшін $\frac{AC}{BC} = \frac{4\frac{1}{2}}{x}$. Осы теңдіктерді салыстыра отырып, аламыз: $\frac{x}{2} = \frac{9}{2x}$ немесе $x^2 = 9$, осыдан $x = 3$ сағ (екінші түбір теріс сан).

Екі поездың жылдамдықтары жеңіл табылады.

A қаласынан шыққан поезд $AB = 180$ км жолға $x + 2 = 3 + 2 = 5$ сағат кетіреді, демек оның жылдамдығы $180 : 5 = 36$ км/сағ, ал B қаласынан шыққан поездың жылдамдығы $\frac{180}{x + 4\frac{1}{2}} = \frac{180}{7\frac{1}{2}} = \frac{180 \cdot 2}{15} = 24$ км/сағ.

Жауабы: 36 км/сағ; 24 км/сағ.

Өзен бойымен қозғалысқа арналған есептерді шығаруды оқыту барысында келесі жылдамдықтардың ара қатынасын есте сақтауды ұсынамыз:

$$\begin{aligned} v_{\text{ағынмен}} &= v_{\text{менш}} + v_{\text{ағын}}. & v_{\text{менш}} &= \frac{v_{\text{ағынмен}} + v_{\text{ағынға қарсы}}}{2}. \\ v_{\text{ағынға қарсы}} &= v_{\text{менш}} - v_{\text{ағын}}. & v_{\text{ағын}} &= \frac{v_{\text{ағынмен}} - v_{\text{ағынға қарсы}}}{2}. \\ v_{\text{сал}} &= v_{\text{ағын}}. \end{aligned}$$

17-мысал. Қайық өзен бойымен 15 сағатта ағысқа қарсы жүрген жолын, ағыспен 13 сағатта жүріп өтеді. Егер қайықтың меншікті жылдамдығы 70 км/сағ болса, өзеннің ағысы жылдамдығын табындар.

Шешуі. Оқушылармен бірлесіп, есептің мәтініне келесі сұрақтар арқылы талдау жүргіземіз:

Әр жағдайда қандай шамалар белгілі?

Қайықтың ағыспен және ағысқа қарсы жылдамдығы өзара қалай байланысқан?

Қайық қандай уақытта ағыспен және ағысқа қарсы жол жүрді?

Қайық ағыспен және ағысқа қарсы қандай қашықтықта жол жүрді?

Есепте қандай шамалар берілген?

Талдаудан алынған нәтиже бойынша берілгендер мен белгісіз шамалардың келесі кестесін толтырамыз:

Кесте 5

Шама	Қайық	
	ағыспен	ағысқа қарсы
Қозғалыс жылдамдығы, v (км/сағ)	$70 + ?$	$70 - ?$
Қозғалыс уақыты, t (сағ)	13	15
Жүрген жол, s (км)	$?$	$= ?$

Есептің шешімін іздеу кестесі (модель)

Кесте 6

Шама	Қайық	
	ағыспен	ағысқа қарсы
Қозғалыс жылдамдығы, v (км/сағ)	$70 + x$	$70 - x$
Қозғалыс уақыты, t (сағ)	13	15
Жүрген жол, $s = v \cdot t$ (км)	$13(70 + x)$	$= 15(70 - x)$

Ізделінді теңдеу: $13(70 + x) = 15(70 - x)$, осыдан $x = 5$.

Жауабы: 5 км/сағ.

Алгебра курсындағы квадрат теңдеулерді құрастыруға және олардың көмегімен мәтінді есептерді шығаруға үйрету тәсілдерін қарастырайық.

18-мысал. Моторлы қайық 28 км өзен ағысымен және 25 км ағысқа қарсы жүріп өтіп, 54 км тұнық суда жүруге кеткен уақытты жұмсады. Егер ағыстың жылдамдығы 2 км/сағ болса, онда қайықтың тұнық судағы жылдамдығын табындар.

Шешуі. x км/сағ – қайықтың тұнық судағы жылдамдығы болсын, $x > 0$.

Кесте 7

Шама	Моторлы қайық		
	ағыспен	ағысқа қарсы	тұнық суда
Жүрген жол, s (км)	28	25	54
Қозғалыс жылдамдығы, v (км/сағ)	$x + 2$	$x - 2$	x
Қозғалыс уақыты, $t = \frac{s}{v}$ (сағ)	$\frac{28}{x + 2}$	$+$	$\frac{25}{x - 2} = \frac{54}{x}$

Теңдеу құрастырамыз және шешеміз:

$$\frac{28}{x+2} + \frac{25}{x-2} = \frac{54}{x},$$

$$53x^2 - 6x = 54(x^2 - 4) \text{ немесе } x^2 + 6x - 216 = 0,$$

$$x_1 = -18 \text{ есептің шартын қанағаттандырмайды; } x_2 = 12.$$

Жауабы: 12 км/сағ.

Жұмысқа және еңбек өнімділігіне арналған есептерді шығаруды оқытуда оқушыларға оның келесі негізгі компоненттерін ескеркен жөн:

A – орындалған жұмыс көлемі, t – жұмыс уақыты,

N – еңбек өнімділігі, яғни бірлік уақытта орындалған жұмыс.

Көрсетілген шамалар арасындағы байланыс келесі формуламен

$$\text{өрнектеледі: } A = N \cdot t, \quad N = \frac{A}{t}, \quad t = \frac{A}{N}.$$

Жұмысқа арналған есептер екі типке бөлінеді:

1) жеке орындалатын жұмысқа арналған есептер (бұл есептер қозғалысқа арналған есептерге ұқсас шығарылады);

2) бірігіп орындалатын жұмысқа арналған есептер [88].

Жеке орындалатын жұмысқа арналған есептерді шығаруды үйретуді қарастырайық.

19-мысал. Токарь белгілі бір уақытта 240 бөлшекті жасау керек еді. Ол аспабын жаңартып, жоспарланғаннан сағатына 2 бөлшек артық жасады және тапсырманы белгіленген уақыттан 4 сағатқа ерте орындады. Токарь сағатына неше бөлшек жасауы керек еді?

Шешуі. Есептің мәтініне талдау жүргіземіз:

Есепте қандай шамалар берілген?

Еңбектің өнімділігі, жұмыс уақыты және орындалған жұмыс көлемі өзара қалай байланысқан?

Есепте әртүрлі неше жағдайды (оқиға, деректі) белгілеуге болады?

Әр жағдайда қандай шамалар белгілі?

Токардың еңбек өнімділігі қандай жағдайда үлкен және қаншаға?

Қандай жағдайда тапсырысты орындау бойынша токардың жұмыс уақыты аз және қаншаға?

Есепте қандай белгісіз шама ізделінді болады?

Бұл есепте екі жағдай суреттеледі. Мысалы, токардың бөлшекті жасау бойынша екі жағдайы суреттеледі: жоспар бойынша және нақты.

Талдау жасауымыз есептің шарты мен талабын кесте түрінде жазуға мүмкіндік береді:

Кесте 8

Шама	Токарь	
	жоспар бойынша	нақты
Еңбек өнімділігі (сағатына бөлшек)	? < ?	2-ге
Жұмыс уақыты (сағ)	? > ?	4-ке
Орындалған жұмыс көлемі (бөлшектер)	240	240

Шамалардың мәндері арасындағы белгілі байланыстарды, берілгендер кестесін пайдаланып, есепті шығару кестесін толтырамыз:

Кесте 9

Шама	Токарь	
	жоспар бойынша	нақты
Еңбек өнімділігі (сағатына бөлшек)	x	$x+2$
Жұмыс уақыты (сағ)	$\frac{240}{x}$	$\frac{240}{x+2}$ 4-ке
Орындалған жұмыс көлемі (бөлшектер)	240	240

Есепті шешу моделінен $\frac{240}{x} > \frac{240}{x+2}$ (4-ке) теңсіздігін жазамыз, осыдан теңдеуді аламыз:

$$\frac{240}{x} - 4 = \frac{240}{x+2}.$$

Теңдеуді шешіп, есептің жауабын табамыз:

$$\frac{240}{x} - 4 = \frac{240}{x+2} \text{ немесе } x^2 + 2x - 120 = 0, x = 10, x = -12.$$

Жауабы: 10 бөлшек.

20-мысал. Бірінші элеваторда екіншіге қарағанда 2 есе көп астық болды. Бірінші элеватордан 600 т астықты шығарып, екіншіге 400 т әкелгенде екі элеватордағы астық мөлшері тең болды. Бастапқыда әр элеваторда қанша тонна астықтан болды?

Шешуі. Есептің мәтініне талдау жасау, есептің шартын және талабын кесте түрінде жазуға мүмкіндік береді:

Кесте 10

Астық мөлшері	Элеватор	
	бірінші	екінші
Бастапқыда (т)	?	? 2 есе
Тасымалданды (т)	600	400
Қалды (т)	?	?

Есептің мәтінінің кесте түріндегі жазылымындағы ізделінді шамаларға белгілеулер енгізіліп, сәйкесінше өрнектермен алмастырылады, яғни есептің шешімін іздеу кестесі толтырылады:

Кесте 11

Астық мөлшері	Элеватор	
	бірінші	екінші
Бастапқыда (т)	$2x$	x
Тасымалданды (т)	600	400
Қалды (т)	$2x-600$	$x+400$

Есептің шешімін іздеу моделі келесі теңдеуді береді:

$$2x - 600 = x + 400, \text{ осыдан } x = 1000.$$

Жауабы: 1000 т; 2000 т.

21-мысал. Жоспар бойынша бригада белгілі бір уақытта 540 га жер телімінен өнім жинауы керек еді. Бригада 30% өнім жинағаннан кейін қосымша комбайн алып, күніне бастапқыға қарағанда 9 га артық жинады және белгілі уақыттан 1 күнге ерте бітірді. Өнімді жинау қанша күнге созылды?

Шешуі. Бригада 30% өнім жинағаннан кейін қалған жер телімінің ауданы $540 \cdot 0,7 = 378$ га болды.

Бригада бастапқыда (жоспар бойынша) күніне x га жерден өнім жинасын, қосымша комбайн алғаннан кейін (нақты) бригада күніне $(x + 9)$ га жерден өнім жинай бастады.

Есептің шарты бойынша $x > 0$.

Орындалған жұмыстың кестесін құрастырамыз:

Кесте 12

Шама	Бригада	
	жоспар бойынша	нақты
Орындалған жұмыс көлемі, A (га)	378	378
Еңбек өнімділігі, N (га/күніне)	x	$x+9$
Жұмыс уақыты, $t = \frac{A}{N}$ (күн)	$\frac{378}{x}$	$\frac{378}{x+9}$ 1 күнге ерте

Теңдеу құрастырамыз және шешеміз:

$$\frac{378}{x} - \frac{378}{x+9} = 1 \text{ немесе } x^2 + 9x - 3402 = 0,$$

$$x_1 = -63, \quad x_2 = 54.$$

$x > 0$ болғандықтан, бригада жоспар бойынша күніне 54 га жерден өнім жинауы керек еді. Өнімді жинауға $540:54 = 10$ күн кетер еді, бірақ нақты жағдайда өнімді жинау 9 күнге созылды.

Жауабы: 9 күн.

Алгебра курсындағы рационал теңдеулерді құрастыруға және олардың көмегімен мәтінді есептерді шығаруға үйрету тәсілдерін ұсынамыз.

Бірігіп орындалатын жұмысқа арналған есептердің мазмұны әдетте келесіге саяды: көлемі көрсетілмейтін және ізделінді болмайтын қандайда бір жұмысты бірқалыпты жұмыс істейтін бірнеше адам немесе механизмдер орындайды.

Мұндай есептерде орындалатын барлық жұмыстың көлемі 1 деп алынады, барлық жұмысты орындауға қажетті уақыт t және бірлік уақытта орындалған жұмыс көлемі, яғни еңбек өнімділігі N келесі қатынаспен байланысады:

$$N = \frac{1}{t}.$$

Бұл типтегі есептерді шығаруға оқытуда келесі стандартты схемасын ұсынамыз.

x – бірінші жұмысшының белгілі жұмысты орындау уақыты;

y – екінші жұмысшының осы жұмысты орындау уақыты.

Сонда, $\frac{1}{x}$ – бірінші жұмысшының еңбек өнімділігі, $\frac{1}{y}$ – екінші

жұмысшының еңбек өнімділігі. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ – бірігіп орындағанда еңбек өнімділігі.

$$\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{xy}{x+y} - \text{тапсырманы бірігіп жұмыс істеу уақыты [88].}$$

Бірігіп жұмыс істеуге арналған есептерді шығаруды оқыту әдісі келесі алгоритмдік әрекеттерді орындаудан тұрады:

1) орындауға қажетті барлық жұмысты 1 ретінде қабылдаймыз (егер жұмыстың көлемі нақты берілмесе);

2) әрбір жұмысшының еңбек өнімділігін $\frac{1}{t}$ ретінде жеке табамыз, мұндағы t – барлық жұмысты жеке орындау уақыты;

3) әрбір жұмысшының жекелей өз уақытында орындаған барлық жұмыстың бөлігін табамыз;

4) әрбір жұмысшының жекелей орындаған бөліктердің қосындысын барлық жұмыстың көлеміне (1-ге) теңестіріп, теңдеу құрастырамыз (егер есеп шартында бірігіп жұмыс істеп барлық көлем орындалғаны көрсетілсе).

22-мысал. Екі бригада бірге жұмыс істеп, жер телімін 12 сағатта өңдеді. Егер бригадалардың жұмысты істеу жылдамдықтары 3:2 қатынасындай болса, олардың әрқайсысы жекелей жер телімін қанша уақытта өңдейді?

Шешуі. $3x$ – бірінші бригаданың жұмысты істеу жылдамдығы, $2x$ – екінші бригаданың жұмысты істеу жылдамдығы болсын.

Бірінші бригада барлық жұмысты $\frac{1}{3x}$ сағатта, екіншісі - $\frac{1}{2x}$ сағатта орындайды.

Олар бірігіп барлық жұмысты $\frac{1}{3x+2x} = \frac{1}{5x}$ сағатта орындайды.

Есептің шарты бойынша, $\frac{1}{5x} = 12$, осыдан $x = \frac{1}{60}$.

Бірінші бригада барлық жұмысты $\frac{1}{3 \cdot \frac{1}{60}} = 20$ сағатта, екіншісі $\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{60}} = 30$

сағатта орындайды.

Жауабы: 20 сағ және 30 сағ.

23-мысал. Екі машина бірге жұмыс істей отырып, жүкті 6 күнде тасып бітіреді. Егер бір машина екіншісіне қарағанда 5 күн жылдамырақ таситыны белгілі болса, онда машиналардың әрқайсысы неше күнде жекелей таситын еді?

Шешуі. Бірінші машина барлық жүкті x күнде таситын болсын. Сонда екінші машина $(x + 5)$ күнде тасып бітіретін болады.

Есептің шарты бойынша, $x > 0$.

Жұмысты орындау кестесін құрастырамыз.

Кесте 13

Шама	Машина		
	Бірінші	Екінші	Екеуі бірге
Орындалған жұмыс көлемі, A	1	1	1
Жұмыс уақыты, t (күн)	x	$x + 5$	6
Еңбек өнімділігі, $N = \frac{A}{t}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x + 5}$	$\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 5}$

$A = N \cdot t$ формуласын пайдаланып, теңдеуді құрастырамыз:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 5} \right) \cdot 6 = 1 \text{ немесе } x^2 - 7x - 30 = 0, \text{ осыдан } x_1 = -3, \quad x_2 = 10.$$

$x > 0$ болғандықтан, онда $x = 10$.

Бірінші машинаға барлық жүкті тасуға 10 күн, екінші машинаға 15 күн қажет болады.

Жауабы: 10 күн, 15 күн.

Бассейн мен құбырға арналған есептер бірігіп орындауға арналған есептерге ұқсас болып табылады. Есептің математикалық моделі сақталады, тек жұмысшыларға қуаттылығы әртүрлі сорғыштар сәйкес келеді, ал жұмыс көлемін суға толтырылатын бассейн атқарады [88].

24-мысал. Бассейнге үш құбыр тартылған. Бірінші екеуі бірге істеп бассейнді жалғыз үшінші құбыр толтыратын уақытта толтырады. Екінші құбыр жалғыз істеп, бассейнді біріншіге қарағанда 5 сағ жылдам, үшіншіге қарағанда 4 сағ баяу толтырады. Әрбір құбыр бассейнді жеке қанша уақытта толтырады?

Шешуі. V – бассейн көлемі, x сағ – екінші құбырдың бассейнді толтыру уақыты болсын. Сонда $(x+5)$ сағ – бірінші құбырдың бассейнді толтыру уақыты, ал $(x-4)$ сағ – үшінші құбырдың уақыты болады.

Әрбір құбырдың сәйкесінше еңбек өнімділігі: $\frac{V}{x+5}, \frac{V}{x}, \frac{V}{x-4}$.

Есептің шарты бойынша, $\frac{V}{x+5} + \frac{V}{x} = \frac{V}{x-4}$, осыдан. V -ға қысқартып, теңдеуді аламыз: $x^2 - 8x - 20 = 0$. Теңдеуді шешіп, табамыз: $x = 10$ (сағ).

Есептің шарты бойынша $x > 0$.

Жауабы: 15 сағ, 10 сағ, 6 сағ.

25-мысал. Бассейн біруақытта жұмыс істейтін екі құбырмен 2 сағатта толтырылады. Егер бірінші құбыр бассейнді жалғыз өзі екіншісіне қарағанда 3 сағ жылдамырақ толтыратын болса, ол қанша уақытта толтырады?

Шешуі. Бірінші құбырдың бассейнді толтыру уақыты x сағ болсын. Сонда екіншісінікі – $(x+3)$ сағ болады. Есептің шарты бойынша $x > 0$.

Бассейннің көлемін 1 деп алып, жұмысты орындау кестесін құрастырамыз.

Кесте 14

Шама	Жекелей толтыру	
	I құбыр	II құбыр
Бассейннің көлемі, V	1	1
Жұмыс уақыты, t (сағ)	x	$x+3$
Еңбек өнімділігі, $N = \frac{V}{t}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x+3}$
	Бірігіп толтыру: екі құбыр	
Бассейннің көлемі, V	1	
Жұмыс уақыты, t (сағ)	2	
Еңбек өнімділігі, $N = \frac{V}{t}$	$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3}$	

$V = N \cdot t$ формуласын пайдаланып, теңдеу құрастырамыз:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} \right) \cdot 2 = 1.$$

Теңдеуді шешіп, табамыз: $x_1 = -2$, $x_2 = 3$. $x > 0$ болғандықтан, бірінші құбыр бассейнді 3 сағатта толтыратын болады.

Жауабы: 3 сағ.

Қоспа мен концентрацияға (қосылымға) арналған есептерді шығару «концентрация (қосылым)», «масса», «пайыздық қамтылу» және т.б. ұғымдарымен байланысқан және келесі жәйттарды негізге алу керек:

- 1) барлық қарастырылатын қоспалар (қорытпалар, ерітінділер) біртекті;
- 2) сыйымдылық бірлігі ретінде литр мен массаның бірлігі ретіндегі литр арасындағы айырмашылық болмайды.

Егер массасы M болатын қоспа (қорытпалар, ерітінділер) A , B , C заттарынан (сәйкесінше массалары m_A , m_B , m_C) тұратын болса, онда $C_A = \frac{m_A}{M}$

шамасы (сәйкесінше $C_B = \frac{m_B}{M}$, $C_C = \frac{m_C}{M}$ шамалары) A затының (сәйкесінше B , C заттарының) қоспадағы *массалық концентрациясы (қосылымы)* деп аталады.

$P_A = \frac{m_A}{M} \cdot 100\%$ шамасы (сәйкесінше $P_B = \frac{m_B}{M} \cdot 100\%$, $P_C = \frac{m_C}{M} \cdot 100\%$ шамалары) A затының (сәйкесінше B , C заттарының) қоспадағы *пайыздық қамтылуы* деп аталады.

C_A , C_B , C_C массалық қосылымдары келесі қатынаспен байланысады:

$$\frac{m_A}{M} + \frac{m_B}{M} + \frac{m_C}{M} = 1,$$

яғни үшінші заттың қосылымы екі заттың қосылымына байланысты болады.

Есепті шығару жоспары:

1. Әдетте белгісіз шама ретінде ізделінді шаманы алынады.
2. Есептің шартында сөз болған заттардың ішінен таза зат таңдап алынады. Көбінесе бұл есептің талабында сөз болған зат немесе есептің шартында барлығынан көп ақпарат үлесі бар зат болады.

Егер C_A – таза заттың үлесі болса, онда $1 - C_A$ – қоспалар үлесі.

3. Үлестерге көшу.

Егер есепте пайыздық қамтылулар бар болса, одан әрі үлестермен жұмыс істеу үшін оларды үлестерге көшіру керек.

4. Қоспаның жағдайын бақылап отыру.

Әрбір кезеңдегі қоспаның өзгеруінде (қосу, азайту) оның жағдайын суреттеу қажетті.

5. Теңдеу құрастыру [88].

Түрлендіру нәтижесінде қоспа қорытынды жағдайға келеді. Ол m_A , M , C_A белгісіз шамалармен сипатталады және олар келесі теңдеумен байланысады:

$$m_A = C_A \cdot M.$$

Теңдеу құрастырғанда қоспада еритін (араласатын және т.б.) бір заттың қамтылуы алынады.

6. Жауапты жазу.

Егер есепте пайыздық қамтылуды табу керек болса, онда алынған пайыздық үлестерді пайыздық қамтылуға көшіру керек.

Есеп шығару барысында қоспаларды бір таза затпен қосу (айыру) кезінде таза заттың мөлшері мен қоспаның жалпы мөлшері қосылатынын (азайтылатынын) есепке алу керек.

Үлестер мен пайыздық қамтылуларды қосуға және азайтуға болмайды.

Қоспаға, қорытпаға және концентрацияға (қосылымға) арналған есептерді кестелік әдіспен шығарған өте ыңғайлы, яғни есептің шарты бойынша кесте құрастыру, кейін массаның сақталу заңымен бос тор көздерді толтыру.

Қоспаға, қорытпаға және концентрацияға (қосылымға) арналған есептерге:

- 1) қоспаға бір затты қосуға (алуға);
- 2) екі ерітіндіні (қорытпаларды) араластыруға;
- 3) қоспаларды төгуге арналған есептер жатады [88].

Қоспаға бір затты қосуға (алуға) арналған есептердің ерекшелігі – бір заттың мөлшері өзгереді, екіншісінікі сақталады.

26-мысал. Массасы 12 кг болатын мыс пен қалайының қорытпасында 45% мыс бар. Құрамында 40% мыс болатын жаңа қорытпа алу үшін, берілген қорытпаға қанша таза қалайыны қосу керек?

Шешуі. Қорытпа мыс пен қалайыдан тұрады. Осы заттардың біреуінің қамтылуын қарастырамыз, мысалы қалайының бастапқыдағы және алынған жағдайдағы.

12 кг қорытпада 45% мыс, ал қалайы 55% бар. Қорытпаға x кг қалайы қосылды. Сонда $(12 + x)$ кг жаңа қорытпа алынды, оның құрамында 60% қалайы бар.

Берілгендер мен белгісіздер шамаларының кестесін құрастырамыз.

Кесте 15

Мөлшері	Қорытпа	
	Мыс	Қалайы
Бастапқыда, P (%)	45 %	55%
Қосылды, кг		x
Қорытынды, P (%)	40 %	60%

Кесте 16 - Есепті шешу моделі

Мөлшері	Қорытпа	
	Мыс	Қалайы
Бастапқыда, $m_A = C_A \cdot M$ (кг)	$0,45 \cdot 12$	$0,55 \cdot 12$
Қосылды, кг		x
Қорытынды, $m_A = C_A \cdot M$ (кг)	$0,4 \cdot (12 + x)$	$0,6 \cdot (12 + x)$

Қорытпадағы қалайының бастапқыдағы және қорытындысындағы (соңындағы) қамтылуына негізделген келесі теңдеуді аламыз:

$$0,55 \cdot 12 + x = 0,6 \cdot (12 + x), \text{ осыдан } x = 1,5.$$

Бастапқы қорытпаға 1,5 кг қалайы қосу керек екені анықталды.

Ескерту. Кестені пайдаланып, қорытпадағы мыстың да бастапқыдағы және қорытындысындағы (соңындағы) қамтылуына негізделген теңдеуді құрастыруға болады. Бастапқыда қорытпада $0,45 \cdot 12$ кг мыс болды.

x кг қалайы қосылды (мыс қосылмады). Сонда $(12 + x)$ кг жаңа қорытпа алынды, оның құрамында 40% мыс бар, яғни $0,4 \cdot (12 + x)$ кг.

$$0,45 \cdot 12 = 0,4 \cdot (12 + x), \text{ осыдан } x = 1,5.$$

Жауабы: 1,5 кг қалайы.

27-мысал. Теңіз суының құрамында 5% тұз бар. Құрамында тұз концентрациясы 4% болуы үшін 80 кг теңіз суына қанша таза су қосу керек?

Шешуі. Теңіз суына қосатын қажетті таза су массасы x кг болсын ($x > 0$).

Есептің шартын кесте түрінде жазамыз, таза зат ретінде тұзды аламыз.

Берілгендер мен белгісіз шамалар кестесі

Кесте 17

Мөлшері	Теңіз суы	
	Таза су	Тұз
Бастапқыда, P (%)	95% + 5 %	= 80 кг
Қосылды, кг	x	
Қорытынды, P (%)	96% + 4 %	= $80 + x$ кг

Кесте 18 - Есепті шешу моделі

Мөлшері	Теңіз суы	
	Таза су	Тұз
Бастапқыда, $m_A = C_A \cdot M$ (кг)	$0,95 \cdot 80$	$0,05 \cdot 80$
Қосылды, кг	x	
Қорытынды, $m_A = C_A \cdot M$ (кг)	$0,96 \cdot (80 + x)$	$0,04 \cdot (80 + x)$

Ізделінді теңдеу: $0,95 \cdot 80 + x = 0,96 \cdot (80 + x)$, осыдан $x = 20$.

Жауабы: 20 кг.

28-мысал. Жаңа терген жидекте 90% су, ал кептірілген жидекте 10% су болады. 18 кг жаңа терілген жидектен қанша кептірілген жидек алуға болады?

Шешуі. Жидек кепкен зат пен судан тұрады.

$$90\% = \frac{18 \cdot 90}{100} = 16,2 \text{ кг.}$$

Кесте құрастырамыз.

Кесте 19

	Жалпы масса	Су	Кепкен зат
Жаңа терген жидек	18кг	$\frac{18 \cdot 90}{100} = 16,2$	$18 - 16,2 = 1,8$
Кептірілген жидек	x кг	$\frac{x \cdot 10}{100} = 0,1x$	$x - 0,1x = 0,9x$

Кептіру процесінде кепкен заттың мөлшері өзгеріссіз қалады. Теңдеу аламыз:

$$1,8 = 0,9x, \text{ осыдан } x = 2 \text{ кг.}$$

Жауабы: 2 кг.

Екі ерітіндіні (қорытпаны) араластыруға арналған есептердің ерекшелігі – көлемнің немесе массаның сақталу заңын орындау болады.

29-мысал. Массалары 80 г және 120 г болатын екі ерітінді бар. Бірінші ерітіндіде 12 г тұз, екіншісінде 15 г тұз қамтылған. Егер екі ерітіндіні араластырсақ, алынған қоспаның концентрациясы қандай?

Шешуі. Есептің шарты бойынша кесте құрастырамыз.

Кесте 20

	Тұздың массасы m_A (г)	Ерітіндінің массасы M (г)	Тұздың концентрациясы соли $C_A = \frac{m_A}{M}$
1-ерітінді	12	80	$\frac{12}{80} = 0,15$
2-ерітінді	15	120	$\frac{15}{120} = 0,125$
Алынған ерітінді	27	200	x

$$\text{Анықтама бойынша } P_A = \frac{27}{200} \cdot 100\% = 13,5\% .$$

Жауабы: 13,5 %.

Алгебра курсындағы теңдеулерді жүйесін құрастыруға және олардың көмегімен мәтінді есептерді шығаруға үйрету тәсілдерін ұсынамыз.

30-мысал. Саяхатшы өзен бойымен 90 км жолды қайықпен жүзіп өтті, содан кейін 10 км жаяу жүрді. Ол жаяу жүрген жолына өзен бойымен жүрген жолына қарағанда 4 сағ аз уақыт жұмсады. Егер саяхатшы өзендегі жолына кеткен уақытындай уақыт жаяу жүрсе, ал жаяу жүрген уақытындай өзенмен жүзсе, онда бұл арақашықтар тең болар еді. Саяхатшы жаяу және өзен бойы қозғалысына қанша уақыт жұмсады?

Шешуі: Саяхатшының өзен бойы қозғалысының жылдамдығы – x км/сағ, ал жаяу қозғалысының жылдамдығы – y км/сағ, $x > 0$, $y > 0$.

Есеп шарты бойынша кесте құрамыз:

Кесте 21

Шама	Саяхатшы	
	Өзен бойымен	Жаяу
Бірінші шарт		
Жүрген жол, s (км)	90	10
Қозғалыс жылдамдығы, v (км/сағ)	x	y
Қозғалыс уақыты, $t = \frac{s}{v}$ (сағ)	$\frac{90}{x}$	$\frac{10}{y}$ 4 сағ.
Екінші шарт		
Қозғалыс уақыты, t (сағ)	$\frac{10}{y}$	$\frac{90}{x}$
Қозғалыс жылдамдығы, v (км/сағ)	x	y
Жүрген жол, $s = v \cdot t$ (км)	$x \cdot \frac{10}{y}$	$y \cdot \frac{90}{x}$

Кестедегі берілгендер бойынша теңдеулер жүйесін құрып оны шешеміз

$$\begin{cases} \frac{90}{x} - \frac{10}{y} = 4, \\ \frac{10x}{y} = \frac{90y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 90y - 10x = 4xy, \\ x^2 = 9y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 - 5y = 0, \\ x = 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5, \\ x = 15; \\ y = 0, \\ x = 0. \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

Турист $\frac{10}{5} = 2$ с жаяу жүрді, $\frac{90}{15} = 6$ с өзенмен жүзді.

Жауабы: 2 с, 6с.

31-мысал. Арақашықтығы 360 км болатын екі қаладан қарама-қарысы бағытта екі поезд жолға шықты. Егер екінші поезд бекеттен бірінші поездға қарағанда 1,5 сағ ерте шықса, онда олар жолдың ортасында кездесер еді. Егер олар бекеттен бір мезгілде шықса, онда 5 сағ-тан кейін олардың арасындағы арақашықтық 90 км болады. Поездардың жылдамдықтарын табыңдар.

Шешуі. Бірінші поезддың жылдамдығы – x км/сағ; екінші поезддың жылдамдығы – y км/сағ болсын; $x > 0$, $y > 0$.

Есеп шарты бойынша кесте құрамыз:

Шама	Поезд	
	Бірінші	Екінші
Бірінші шарт (қозғалыстың басталуы әр мезгілде)		
Жүрген жол, s (км)	180	180
Қозғалыс жылдамдығы, v (км/сағ)	x	y
Қозғалыс уақыты, $s = v \cdot t$ (сағ)	$\frac{180}{x}$	$\frac{180}{y}$ 1,5сағ.
Екінші шарт (қозғалыстың басталуы бір мезгілде)		
Қозғалыс уақыты, t (сағ)	5	5
Қозғалыс жылдамдығы, v (км/сағ)	x	y
Жүрген жол, $s = v \cdot t$ (км)	$5x - 5y = (360 - 90)$ км	

Кестедегі берілгендер бойынша теңдеулер жүйесі құрып, шешеміз

$$\begin{cases} \frac{180}{y} < \frac{180}{x} = 1,5, \\ 5x + 5y = 360 - 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{60}{y} - \frac{60}{x} = 0,5, \\ x + y = 54 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{60}{54-x} - \frac{60}{x} = \frac{1}{2}, \\ y = 54 - x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 186x - 6480 = 0, \\ y = 54 - x. \end{cases}$$

Теңдеулержүйесінен: (30; 24), (−216;270) табамыз.

Есептің шарты бойынша $x > 0$, сәйкесінше:

бірінші поездың жылдамдығы 30 км/сағ; екінші поездың жылдамдығы 24 км/сағ.

Жауабы:30 км/ сағ, 24 км/сағ.

Негізгі мектептің алгебра курсындағы мәтінді есептері анық айқындалатын тақырыптық белгіде болады. Олар дененің бірқалыпты қозғалысына ($S = V \cdot t$), бірлескен жұмысқа ($A = N \cdot t$), дененің массасын анықтауға ($m = S \cdot V$), аудан табуға ($S = a \cdot b$), құндық қатысқа ($S = m \cdot n$) және басқа да есептер. Дегенмен, мұндай есептерді шығарудың тәсілі біреу, тек жалғыз ғана. Себебі есептегі физикалық шамалар арасындағы функционалдық тәуелділік жалпы түрдегі $a \cdot b = c$ теңдігімен өрнектеледі. Бұл теңдік есептегі қатынастар жүйесінің жалпылауы болып табылады. Сондықтан $a \cdot b = c$ теңдігі жоғарыда көрсетілген есептердің нысандық аймақтарында жүзеге асырылатын негізгі (жалпылаушы) қатыс болып табылады [92].

Оқушылардың көпшілігі күнделікті сабақтағы қолдана білетін дағдыларын пайдаланып мәтінді есептерді ретімен орындайды. Жоғары деңгейдегі мәтінді есептерді барлық оқушылар игере алмайды, сондықтан оны меңгеру үшін, яғни есептерді шығаруға оқыту үшін бастапқы деңгейдегі есептерді шығарудан бастау керек. Жоғары деңгейлік тапсырмаларды орындауда оқушының дарындылық қабілеті анықталады. Оқушыны теориялық материалдарға талдау жасатқыза отырып, өз бетімен іздене білуге баулуға, жүйелі ойлау қабілетін дамытуға, математикалық сауаттылығын қалыптастыруға, пәнге деген қызығушылығын арттыруға болады [93].

Оқушыларды есеп шығаруға оқытуда олардың өзіндік ерекшеліктерін ескере отырып, есептердің бірыңғай қисынды құрылымы төмендегідей болуын ұсынамыз:

- 1) есеп шығару әдісін толық түсіндіретін типтік есеп;
- 2) шығарудың және қажетті қосымша көмек көрсетудің жоспары берілетін типтік есепке ұқсас есеп;
- 3) жоспары немесе нұсқаулары қысқартылған есеп, яғни есепті шығару барысында көмек көрсетуді азайтуға арналған есеп;
- 4) есептің мазмұны мен күрделілігі дәрежесін түрлердіру арқылы өз бетімен дербес шығаруға арналған есептер;
- 5) шығармашылық тапсырмалар, стандартты емес есептер.

Әр жаңа тақырып бойынша жасалған деңгейлік жұмыстардың төрт деңгейге бөлінуі, үй жұмысын жақсы ұйымдастыруға және реттеуге мүмкіндік береді. Себебі, тақырыпты меңгерудегі төрт деңгейлік тапсырмалар үлгерімі өте жақсы оқушыға есептеліп, саған сәйкес құрылғандықтан, бұл жұмыстарды толық, сабақ үстінде орындап бітіруге, барлық оқушылардың мүмкіндігі жете бермейді. Сондықтан да, қалған тапсырмаларды сабақтан тыс уақытта мұғалімнің көмегімен мектепте немесе өз бетімен аяқтап келуге үйге беріледі.

Соңғы кезде есептер оның оқыту процесінде қолдану мүмкіндігіне ғана байланысты емес, сонымен қатар есептің оқушылар алдында қандай түрде берілуіне байланысты. Егер осыған дейін оқушыларға ұсынылатын әрбір есептің шарты қысқаша және аяқталған мәтін түрінде рәсімделсе, ал қазіргі кезде жағдай басқаша. Есептер көп жағдайда оқушыларға нақты бір жағдаймен байланысты бүтіндей кешен түрінде беріледі. Осылайша есептердің өзі математиканы оқытудың құралы ретінде, ал олардың реттелген кешені – математиканы оқытудың белгілі бір әдісі болып табылады. Мұндай жағдай, мысалы мәселелі оқытуда орын алады.

Жоғарыда айтылғандай есептер шығару мектептегі білім беру барысында математикалық іс-әрекеттің негізгі түрі болып табылады. Жалпы алғанда Д.Пойа есептерді шығару – математиканы оқытудың өзегі деп тұжырымдайды [61].

Математиканы дәстүрлі оқыту барысында оқушыларда берілген үлгі-стандарт негізінде белгілі бір амалдар орындау дағдылары қалыптасады. Осы себептен оқушылар белгілі бір ереже бойынша шығарылатын стандартты есептердің сәл өзгеше берілген жағдайда есепті шығара алмай қалған жағдайлары болады. Мектеп математика оқулықтарында оқушыларға бақылаудың, аналогияның, индукцияның рөлін көрсететін есептер аз берілген.

Математика сабағында және сабақтан тыс уақыттарында шығарылатын есептербірнеше түрге бөлінетіні белгілі. Енді біз тек қана стандартты емес есептер ұғымына тоқталамыз.

Мектеп математика курсындағы дайын ережелерге (кез келген түрдегі) сүйене отырып шығарылатын немесе осы есептің шығарылуы қандайда бір анықтамалардан немесе теоремалардан тікелей туындайтын, сонымен қатар есепті шығарудың бағдарламасын анықтайтын жүйелі қадамдармен шығарылатын есептерді стандартты есептер деп қарастырады. Стандартты емес

есептер – «математика курсына шығарылуының жалпы ережелері мен қағидалары болмайтын, шығарудың нақты бағдарламасы анықталмаған есептер». Сонымен қатар, стандартты емес есептер – бұл оқушының белгілі әрекеттер тізбегі арқылы шығарылмайтын есептер [94].

«Стандартты емес» есептерді осылай анықтау қызықты және олимпиадалық есептерді де стандартты емес есептер қатарына жатқызады. Берілу тәсілі үйреншікті емес, шығарылуы жаңа идеяны талап ететін есептер де стандартты емес есеп болады. Белгілі бір әдіспен шығаруға «сұранып» тұрған, бірақ бір қарағанда ол әдіс көздеген мақсатқа жеткізбейтіндей көрінетін есептер де стандартты емес есептер қатарына жатады.

Бір қарағанда стандартты емес есептің мысалы ретінде $x^2 - 20062006x + 20062005 = 0$ теңдеуін қарастырайық. Бұл кәдімгі келтірілген квадрат теңдеу болғанымен, квадрат теңдеуді шешу алгоритмі көздеген мақсатқа жеткізбейді. Алгебра пәнінен оқушылардың көпшілігі осы есепті шығара алмайтынын тәжірибе көрсетіп отыр.

Немесе келесі мысал «Кешкі сағат 8-де ұзындықтары бірдей, диаметрлері әртүрлі екі шам жағылды. Біріншісінің толық жану уақыты 5 сағат, екіншісінікі 4 сағат. Белгілі бір уақыттан соң шамдар сөндірілсе, бірінші шам екіншісінен 4 есе ұзын екені белгілі болды. Шамдар қанша уақыттан кейін сөндірілді?».

Есептің берілуінің әдеттегіден өзгешілігі көптеген оқушыны шатастырады және олардың айтатыны «біз мұны өткен жоқпыз». Ал іс жүзінде бұл әдеттегі қозғалысқа берілген қарапайым есеп.

Мысал ретінде тағы бір мәтінді есеп қарастырайық: «Адам бекетке әдетте, бір пойызбен келетін және оны бекеттен үйіне дейін машинамен жеткізетін. Бір күні ол бекетке 1 сағат бұрын келіп, үйіне жаяу бара жатқан жерінен машинаны кездестіріп, үйіне әдеттегіден 20 минутқа ерте барды. Ол жаяу қанша уақыт жүрді?».

Көбінесе, оқушылар бұл есепті шығара бастағаннан-ақ есептің берілгенінде мәліметтер жетіспейді дейді. Бірақ бұл есеп ешқандай есептеусіз, келесі логикалық талдаулар жасап-ақ шығады. Есепті шығару түсінікті болу үшін адам бекетке әдетте сағат 12-де келетін еді, ал бір күні ол сағат 11-де келді делік. Машина әдеттегіден 20 минутқа баяу жүргендіктен, адам машинаны 12-ге 10 минут қалғанда кездестірді (неге?), яғни адам жаяу 50 минут жүрген.

Есептің шығарылуымен танысқаннан кейін есеп өте қарапайым болып көрінеді. Бірақ тәжірибе көрсеткендей, жағдай олай емес. Бұл есепті үздік оқитын көптеген оқушылар да шығара алмайды. Бір жағынан, есептің берілгенінде мәліметтер жетіспейді дейтін оқушылар да белгілі бір мағынада дұрыс айтады. Осыған байланысты 8-9 сынып оқушыларына бұл есепті ұсынған пайдалы, бірақ басқа түрде: жаяу адам мен машинаның жылдамдықтары қандай қатынаста болғанда есептің шешімі болады?

Г.Л. Балл жаңашылдыққа негізделген (стандартты емес) есептерді шығару үшін эвристикалық құралдар қажет деп есептейді. Автор эвристикалық деп төмендегі шарттарды қанағаттандыратын құралдарды атайды: а) олар есеп шығарушының құзырында болады; ә) олар есеп шығарушылар үшін модельдер,

яғни ақпарат көздері болып табылады; б) оларды қолдану есеп шығару процесін мүмкін етеді немесе жеңілдетеді; көбінесе, эвристикалық әдістерді «эвристикалар» деп атайды [20].

Стандартты емес есепті шығарып болған соң көптеген оқушылар есепті қайта қарауға деген ниет туады. А.П. Леонтьев есепті шығарып болған соң әдісін терең түсіну мақсатында есепке қайта оралу оқушының ойлау қабілеті деңгейінің жоғары екендігін көрсетеді деп есептейді [41].

Зерттеу жұмыстарына талдаулар стандартты емес есептерді шығару оқушылардың шығармашылық қабілетін дамытатынын көрсетті. Көптеген стандартты емес есептер шығармашылық есептер болып табылады.

Сонымен қатар, стандартты емес есептерді оқушылардың математикалық ойлау және шығармашылық қабілеттерін дамыту құралы ғана емес, оқушылардың математикалық білімдерінің параметрлерін анықтау құралы ретінде қолдануға болады. В.А. Гусев мұндай құрал ретінде қызықты есептерді де алуға болады деп есептейді, себебі мұндай есептер математиканы оқытудың алғашқы кездерінде оқушыға түсінікті сюжеттерді қамтиды [95].

Стандартты емес есептерді шығару математикаға деген қабілетті оқушыларды анықтау құралы ретінде пайдалануға болады деп есептейміз.

Психологиялық-педагогикалық әдебиеттерге жасалған талдау және сыныптан тыс жұмыстардан жинаған жеке тәжірибеміз стандартты емес есептерді шығаруға үйретуге арналған сабақтар оқушылардың математикалық ойлау қабілеті мен шығармашылық қабілетін дамытады деген ой туғызады. Сонымен қатар, мұндай сабақтар оқушылардың өз бетімен бейіндік бағыт алуына да көмегін тигізеді. Стандартты емес есептерді шығаруды алғашқы сабақтардан бастауға көп көңіл бөлген орынды. Бұл Б.В.Гнеденконың пікірінше: «Оқытушы сабақта, әсіресе, алғашқы сабақтарда материалды оқушылардың қызығушылығын оятатындай етіп, оларға түсінікті баяндауы тиіс [96].

Оқушылардың стандартты емес есепті шығару идеясын дұрыс түсінуі мұғалім мен оқушының бірлескен іс-әрекеті арқылы жүзеге асады. Бұл идеялар бойынша оқушылардың білік пен дағдыларды сабақтағы және үйдегі өзіндік жұмыстары арқылы қалыптасады. Сабақта әрбір оқушының жеке ерекшеліктерін біле отырып, саралап оқытуды іске асыру қажет. Оқушыларға ұсынылатын есептердің қиындық деңгейі және есептердің типтері әртүрлі болуы тиіс, себебі оқушы есепті шығару арқылы өзінің ашқан кішкене «жаңалығына» қуануы тиіс [92].

Математикалық стандартты емес есептерді шығару бойынша сабақта мұғалімге қойылатын негізгі талабы – өзінің педагогикалық шеберлігін және есеп шығару біліктілігін үздіксіз шыңдап отыру деп есептейміз.

Д.Пойа: «Мұғалім үйрететін материалды жақсы білуі тиіс. Ол оқушыларға есепті шығару жолдарын көрсетуі тиіс. Егер өзі білмесе, оқушыларға қалай үйретеді?» деп тұжырымдайды [61].

Алгебра курсының сабақтарында оқушыларына стандартты емес есептерге қатысты олимпиадалық есептерге қатысты классикалық идеяларды қарастыруға болады. Жұптылық, бүтін сандардың қосындысының жұптылығы, бүтін

сандардың көбейтіндісінің жұптылығы, есепті шығару барысында екі әдіспен есептеу тәсілі, Дирихле принципі, инвариантты анықтау, инварианттар көмегімен шығарылатын есептерді ұсынуға болады [97].

7-сыныпта қызықты есептер мен олимпиадалық есептерді шығарудың «классикалық идеяларына» арналған есептер, 8-9-сынып оқушыларына алгебралық өрнектерді түрлендіру, теңдеулерді шешудің стандартты емес әдістері, теңсіздіктерді дәлелдеу, математикалық индукция әдісі, комбинаторика, мәтіндік есептер, салуға берілген есептер және нүктелердің геометриялық орнын табуға берілген есептерді қарастыруға болады.

Теңбе-тең түрлендірулер. Өрнектерді түрлендіре білу теңдеу және теңсіздіктерді шешуде, теңдіктер мен теңсіздіктерді дәлелдеуде және т.б. есептерді шығаруда көмектеседі. Түрлендірулерге берілген есептерді шығару барысында оқушыларды ең қысқа жолды іздеуге машықтандыру қажет.

Теңдеулерді шешу. Теңдеулерді шешуде стандартты емес әдістермен шығара алуы қажетті болады.

Мәтінді есептер. Мәтіндік есептер, яғни теңдеулер мен теңсіздіктер құруға берілген есептер ертеден элементар математиканың дәстүрлі бөлімі болып табылады. Стандартты емес есептерді республикалық журналдардан, «Квант» және «Математика в школе» журналдарынан, кітаптардан табуға болады.

Есепті шығарудың стандартты емес әдісін түсіндіру барысында әдістің мағынасын айтқаннан кейін «бағыттаушы» сұрақтар арқылы оқушылардың есептің жауабына өздері қол жеткізуін қадағалау керек. Әрбір есеп тақтада түсіндіріледі және бұл процесске барлық оқушылардың қатысуын қадағалау қажет.

Сабақтың барысында оқушыларға есептердің шарттарын таратуда оқушылардың интеллектуалдық деңгейлерін ескеру қажет. Оқушылар қажет болған жағдайда мұғалімнен кеңес ала алады. Сабақтың соңында барлық есепке талдау жасалады. Талдауды оқушылардың өздері жасағандары дұрыс. Бір есеп бірнеше әдіспен шығарылған болуы мүмкін. Мұндай жағдайда есепті шығарған әрбір оқушы өзінің шешімін көрсетеді.

8-9 сыныптарға арналған стандартты емес есептерді шығаруды оқытудың мақсаты әртүрлі деңгейдегі математикалық олимпиадаларға оқушыларды дайындау болады. Ол нақты білім беру мен тәрбиелеудің келесідей міндеттерін шешудің құралы болып табылды:

- 1) Оқушылардың математикаға қызығушылығын дамыту;
- 2) Оқушылардың шығармашылық қабілеттері мен зертеушілік дағдыларын дамыту;
- 3) Олимпиада кезінде оқушылардың өздерінің мүмкіндіктерін дұрыс пайдалана білуі (шыдамдылық, жағдайды дұрыс бағалай білу, басты нәрсеге көңіл аудару, табылған шешімді дұрыс жаза білу және т.б.) [98].

Оған келесідегідей тақырыптар бойынша стандартты емес есептерді ұсынған жөн. Жұп және тақ сандар, екі әдіспен есептеу әдісі, ұтымды стратегиялар, есепті соңынан бастап шығару, толық таңдау әдісі, сандардың бөлінгіштігі, қалдықтар арифметикасы, Дирихле принципі (алгебра),

математикалық индукция әдісі, комбинаторика элементтері, квадрат үшмүше, теңсіздіктерді дәлелдеу, процентке берілген есептер.

Стандартты емес есептерді шығарудың алғашқы сабақтарының мақсаты – оқушылардың математикаға деген қызығушылықтарын ояту, әртүрлі математикалық есептермен таныстыру. Сондықтан, бұл сабақтарда оқушылардың барлығы шығара алатын қызықты есептерді қарастыру керек.

Сабақ өткізу барысында И.Ф.Шарыгин ұсынған төмендегі қағидаларды ұстану керек деп есептейміз:

1. *Параллельдік принципі.* Сабақта тек тақырып бойынша емес, басқа тақырыптарға да берілген есептерді шығару керек.

2. *Күрделілігі басым болу принципі.* Оқушылардың мүмкіндіктеріне сәйкес есептер берілу керек.

3. *Тұрақтылық принципі.* Оқушылардың басқа мүмкіндіктерін дамыту үшін сабақты тұрақты өткізу керек [30].

Алғашқы сабақтарды сандардың арасындағы заңдылықтарды ашуға арналған есептерден бастауға болады. Ең қарапайым тізбектерден, мысалы, арифметикалық прогрессиядан бастап, тізбектердің түрлерін біртіндеп күрделендіре берген жөн. Осыған байланысты бірнеше мысал келтірейік:

1) 1, 3, 5, 7, 9, *

2) 2, 4, 8, 16, 32, *

3) 2, 3, 5, 9, 17, *

4) 1, 4, 9, 16, 25, *

5) 7, 17, 37, 77, *, 317

6) 1, 4, 9, 16, 25, *

7) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, *

8) 1, 3, 6, 10, 15, 21, *

Заңдылықтарды іздеу барысында оқушылар мұғалімнің айтқан нұсқаларынан басқа заңдылықтарды табуы мүмкін. Мысалы, төртінші тізбекте жұлдызша орнына 36 тұруы да мүмкін, мұны былай түсіндіруге болады:

$$4=1+3, 9=4+5, 16=9+7, 25=16+9, 36=25+11.$$

Басқа оқушылар мұны тізбектес натурал сандардың квадраттарынан құралған деп түсіндіруі де мүмкін.

Одан күрделірек мысалда, сегізінші тізбекте жауап 28 болады. Оқушылар мұны мүшенің нөміріне алдыңға мүшені қосу керек деп түсіндіреді, сондықтан жауап $7+1+21=28$ түрінде болады. Басқалары төмендегі заңдылықты ұсынуы мүмкін:

$$3=1+2,$$

$$6=1+2+3,$$

$$10=1+2+3+4,$$

Мысалы, төмендегі тізбекте жұлдызша орнына қандай сан тұрады:

$$2, 9, 10, 12, 19, 20, 21, * ?$$

Бұл тізбектің мүшелері орысша нұсқасында «д» әрпіне басталады.

Немесе, төмендегі фигуралар тізбегінде қандай фигура тұруы мүмкін:

«Жұп және тақ сандарға» қатысты есептерді ұсынамыз.

Оқушылар сандардың жұптылығы сияқты қарапайым қасиеттерінің күрделі есептерді шығаруда көмегін тигізетінін білмеуі де мүмкін.

Сабақтың басында натурал сан, бүтін сан, жұп және тақ сандар туралы мәліметтерді қайталап өту қажет. Мысалы, төмендегі сұрақтарды қоюға болады:

1) Екі жұп сандардың қосындысы қандай сан болады? Үш жұп санның қосындысы ше?

2) Екі тақ сандардың қосындысы қандай сан болады? Үш тақ санның қосындысы ше?

3) Екі жұп және тақ сандардың қосындысы қандай сан болады? Жұп және екі тақ сандардың қосындысы ше?

4) Екі жұп сандардың көбейтіндісі қандай сан болады? Екі тақ санның көбейтіндісі неше?

Осы сұрақтардың жауаптарына қарап, оқушыларға қандай ережелерді қайталаған дұрыс екенін анықтауға болады. Келесі есептер осы ережелерге сүйеніп шығарылатынын ескерткен жөн. Сонымен қатар, осы сұрақтардың жауаптарының нәтижесіне қарап, қосылғыштардың жұптылығын біле отырып, бірнеше натурал сандардың қосындысы қандай болатынын көрсететін ережені қорытып шығаруға болады. Осындай ережені натурал сандардың көбейтіндісіне де қорытуға болады. Натурал сандардың көбейтіндісі мен қосындысының осы қарастырылған қасиетінің көмегімен шығарылатын есептердің бірнеше мысалдарын қарастырайық.

32-мысал. Тізбектес он натурал сандардың қосындысы әрқашанда тақ сан болатынын дәлелдендер.

Шешуі. Әдетте бұл есепті шығару оқушыларға қиындық туғызбайды. Дегенмен де қандай ой қорытулар оқушыларды есепті дұрыс шығаруына алып келетінін қарастырайық. Сабақтың басында сұрақтарға жауап бере отырып оқушыларға натурал сандардың қосындысының жұптығы осы қосындыдағы тақ сандардың мөлшеріне байланысты екенін анық болады. Егер қосындыдағы тақ сандардың саны жұп болса, онда қосындының өзі де жұп болады. Ал егер қосындыдағы тақ сандардың саны тақ болса, онда қосындысы да тақ болады. Демек, он натурал санның арасында әрқашанда тақ сандардың тақ мөлшері кездеседі. Шындығында осылай бола ма? Бірнеше тексеруден кейін оқушылар шындығында осындай болатынына сенеді. Жұп сандар мен тақ сандар кезектесіп келетіндіктен, тізбектелген он натурал сандардың арасында әрқашанда бес жұп, бес тақ сан болатыны белгілі. Сабақтың барысында анықталғандай тақ сандардың тақ мөлшерінен тұратын натурал сандардың қосындысы да тақ болатыны белгілі. Демек, есеп талабы дәлелденді.

Стандартты емес есептерді шығару барысында қарастырылатын көптеген тақырыптар оқушылардың логикалық және математикалық қабілетінің дамуына жағдай жасайды. Осындай тақырыптардың бірі – Дирихле принципі. Осы принципті тұжырымдайық: егер n жәшікке мөлшері nk -ға $k \in N$ көп болатын заттары орналастырсақ, онда k -дан көп заттары болатын жәшік табылады. Осы принципті оқушылардың өздеріне дәлелдеуге беруге болады. Принцип барынша қарапайым және оңай дәлелденеді. Бірақ нақты есептерде принциптің

негізгі берілгендері: m -элементтер саны, n -жәшіктер саны, k -әрбір жәшіктің толтырылуы анық көрсетілмейді. Дирихле принципін құру (кіріспе) тапқырлықты, қиялды, зеректікті талап етеді. Сондықтан Дирихле принципіне есептер шығару жалпы және математикалық тұрғыдан дамуына пайдалы. Осы принципке берілген қарапайым есептерді оқушылар Дирихле принципін қолданбай ақ жағдайларды толық іріктеу арқылы немесе қарсы жору әдісін пайдаланып шығарады. Бірақ көп жағдайларда Дирихле принципін қолдану ыңғайлырақ [97].

33-мысал. Кез келген үш натурал санның ішінен қосындысы жұп болатын екі сан табылатынын дәлелдеңдер.

Шешуі. Әрине бұл есепті қарапайым таңдау арқылы оңай шығаруға болады.

Мұнда төрт жағдай орындалуы мүмкін:

- үш санның үшеуі де жұп. Бұл жағдайда кез келген екі санның қосындысы жұп болады;
- бір сан ғана тақ, қалған екеуі жұп. Бұл жағдайда екі жұп санды қосамыз.
- екі сан тақ, ал бір сан жұп. Екі тақ санды қосамыз;
- үш санның барлығы да тақ. Бұл жағдайда кез келген екі санның қосындысы жұп болады.

Сонымен қатар, Дирихле принципін де қолдануға болады. Натурал сандар жұп немесе тақ болады, ал сандар үшеу, онда олардың арасынан жұп-тақтылығы бірдей екі сан кездесетіні анық. Ал жұп-тақтылығы бірдей екі санның қосындысы әрқашан да жұп болады. Енді «жәшіктер» тіліне көшетін болсақ, онда олардың біріне тек қана жұп сандарды «салуға» болатын, ал екіншісіне тек қана тақ сандарды «салуға» болатын екі жәшік бар. Әлбетте, жәшіктердің біріне үш сан түсуі мүмкін.

34-мысал. Мектепте 750 оқушы бар. Олардың ең болмағанда үшеуінің бір жылы туылғандарын дәлелдеңдер.

Шешуі. Бұл есепті шығаруда оқушылар көп жағдайда қарсы дәлелдеуді қолданады. Әрбір күні екіден артық емес бала туылды деп есептейміз. Сонда мектепте $365 \cdot 2 = 730$ артық емес оқушы болады. Қарама-қайшылық аламыз. Сәйкесінше, есептің пайымдауы дұрыс. Бұл есепте «жәшіктің» және «заттың» рөлін нелер атқарып тұр деген қызығушылық туады?

Екі тәсілмен есептеу

Мәтінді есептерді шығару барысында, біз көп жағдайда қандайда бір шаманы екі тәсілмен белгісіз деп алып, содан кейін осы өрнектерді теңестіре отырып, теңдеу аламыз. Осы «екі тәсілмен есептеу» деп аталатын әдіс көптеген олимпиадалық есептерді шығаруда қолданылады. «Екі тәсілмен есептеу» оқушылардың логикалық ойлауын және интуициясын дамытады, өйткені оған нені «екі тәсілмен есептеуге» болады дегенді түсінуі керек. Мысалдар қарастырайық.

35-мысал. Математикалық олимпиадаға қатысушы оқушыларды әр бөлмеде екі оқушыдан болатындай етіп орналастырғанда бір оқушыға бөлме жетпей қалады. Сондықтан оларды әр бөлмеге үшеуден орналастырғанда, 10 бөлме бос

қалды және бір бөлмеде екі ғана оқушы болды. Математикалық олимпиадаға қанша оқушы келген?

Шешуі: Оқушылар мұнда математикалық олимпиадаға қатысатын оқушыларды екі тәсілмен есептеу керек екендігін түсінеді. Мұнын қалай іске асатынын көрейік. Қонақ үйдегі бөлмелер саны – x . Бір жағынан келуші оқушылардың саны $2x + 1$ тең, екінші жағынан әрбір

$x - 11$ бөлмеге 3 оқушыдан, ал бір бөлмеге екеуін орналастырды, сондықтан оқушылар саны $3(x - 11) + 2$. Алынған екі өрнекті теңестіреміз.

$$2x + 1 = 3(x - 11) + 2$$

Алынған теңдеуді шеше отырып, $x = 32$ болатынын аламыз.

36-мысал. Өлшемі 5×5 болатын квадратқа сандарды әрбір жолындағы сандарының қосындысы оң болатындай, ал бағанындағы сандарының қосындысы теріс болатындай етіп орналастыруға бола ма?

Шешуі. Осы есепті шығаруда бізге кестедегі барлық сандардың қосындысын екі тәсілмен есептеу әдісі көмектеседі. Осындай орналастыру бар деп есептейік. Сонда бір жағынан кестедегі барлық сандардың қосындысы жолдарындағы 5 санның қосындысына тең және оң болуы керек, екінші жағынан ол теріс болуы керек, өйткені бағанындағы бес теріс санның қосындысына тең. Алынған қарама қайшылық есеп шартында көрсетілгендей орналастырудың мүмкін емес екендігін көрсетеді.

Оқушылардың эвристикалық ойлау дағдысын дамыту мақсатында келесідей стандартты емес есептерді ұсынуға болады.

Рационал, иррационал және нақты сандарға берілген есептер

37-мысал. $\frac{12n+1}{30n+2}$ қысқармайтын бөлшек болатынын дәлелдендер, мұндағы $n \in N$.

Дәлелдеуі: 1-әдіс. (қысқартатын бөлшектің анықтамасынан) $\frac{12n+1}{30n+2}$ кері жорып, берілген бөлшек қандайда бір p бірге тең емес натурал санына бөлінеді деп алайық. Онда $\frac{12n+1}{30n+2} = \frac{p \cdot m}{p \cdot k}$ болатындай m және k натурал сандары табылады, яғни екі теңдіктен тұратын жүйе орындалады.

$$\begin{cases} 12n+1 = p \cdot m, \\ 30n+2 = p \cdot k. \end{cases}$$

Теңдеулер жүйесіндегі бірінші теңдеуді 5-ке, екінші теңдеуді 2-ге көбейтіп, біріншісінен екіншісін азайтқанда: $1 = p \cdot (5m - 2k)$ аламыз. Алынған теңдікке талдау жасай отырып, оның оң жағында екі бүтін санның көбейтіндісін көреміз, ал сол жағында – бір. Бұл жағдайда p тек қана бірге тең мәнді ғана қабылдайтыны түсінікті. Алынған қайшылық бөлшектің қысқартындығы туралы болжамның орындалмайтынын көрсетеді.

2-әдіс. Есепті шығарудың бұл әдісінде екі ақиқат пікір қолданамыз: біріншіден, $\frac{a}{b}$ және $\frac{b}{a}$ $a, b \in N$ болғанда, бөлшектері бір мезгілде қысқартатын

немесе қысқармайтын бөлшек болсын; екіншіден, $\frac{a}{b}$ бөлшегі және одан бүтін бөлігін алып тастағаннан кейінгі бөлшегі де бір мезгілде қысқаратын немесе қысқармайтын болсын. Осылайша, $\frac{12n+1}{30n+2}$ бөлшегі «төңкерілген» бөлшегімен $\frac{30n+2}{12n+1}$ бір мезгілде қысқаратын (қысқармайтын) болады. Осы бөлшектен бүтін бөлігін бөліп аламыз:

$$\frac{30n+2}{12n+1} = \frac{2 \cdot (12n+1) + 6n}{12n+1} = 2 + \frac{6n}{12n+1}.$$

Сонда, $\frac{30n+2}{12n+1}$ бөлшегі бір мезгілде $\frac{6n}{12n+1}$ бөлшегімен ал ол өз кезегінде $\frac{12n+1}{6n} = 2 + \frac{1}{6n}$ бөлшегімен қысқаратын (қысқармайтын) болады. Осылайша, бастапқы бөлшекті қысқартуға берілген зерттеу есебін жай $\frac{1}{6n}$ бөлшегін қысқартуға ұқсас есепке алып келдік, бұл n натурал сан болғандықтан қысқармайтыны анық.

3-әдіс. Қасиетті ретімен қолдана отырып, «егер $a, b \in N, b > a$, болса, онда $EYOB(a, b) = EYOB(a, b-a)$.

$$EYOB(12n+1; 30n+2) = EYOB(12n+1; 6n) = EYOB(1; 6n) = 1.$$

Осылайша, бөлшектің алымы мен бөлімі өзара жай сандар болатынын көрдік, демек берілген бөлшек қысқармайтын бөлшек болады.

38-мысал. $\frac{0,449291997}{2,1394857}$ бөлшегін қысқартыңдар.

Шешуі. Бөлшектің алымы мен бөлімін 10^9 көбейтіп, $\frac{449291997}{2,139485700}$. Әрі қарата алымын бөліміне «бағандап» бөліп 0,21 аламыз.

39-мысал. $3,1(20)$ периодты бөлшегін жай бөлшекке келтіріңдер.

$$Шешуі. \text{ Ережені қолданып, мына түрге келтіреміз } 3,1(20) = \frac{3120-31}{990} = \frac{3089}{990}.$$

Берілген мысал үшін формуланы қорытып шығару процесін қайталасақ, онда ол мына түрде жазылады. Келтірілетін санды x деп белгілеп аламыз, содан кейін $x = 3,1(20)$ теңдігін 10-ға көбейтеміз: $10x = 31,20$.

Осыдан кейін де $x = 3,1(20)$ теңдігін енді 1000-ға көбейтіп, $1000x = 3120,20$ аламыз. Енді екінші теңдіктен бірінші теңдікті азайтқанда теңдіктің оң жағындағы бірдей периодтары жойылып кетеді де $990x = 3089$ аламыз. Осыдан ізделінген x санын жай бөлшек түрінде табамыз.

Енді стандартты барынша «қысқа» тәсілмен шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның барлық мүшелерінің қосындысының қасиеттерін пайдалануға негізделген. Келесі түрлендірулер тізбегін орындаймыз.

$$3,1(20) = 3,1 + \frac{20}{1000} + \frac{20}{100000} + \dots = 3,1 + \frac{20}{1000} \cdot \left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \dots\right).$$

Жақша ішінде бірінші мүшесі $b_1 = 1$ және еселігі $q = \frac{1}{100}$ болатын шексіз

кемімелі прогрессияның $S = \frac{b_1}{1-q}$.

$$3,1(20) = 3,1 + \frac{20}{1000} \cdot \frac{1}{1-0,01} = \frac{31}{10} + \frac{2}{99} = \frac{31 \cdot 99 + 20}{990} = \frac{31 \cdot (100-1) + 20}{990} = \frac{3120 - 31}{990} = \frac{3089}{990}.$$

Жауабы: $3,1(20) = \frac{3089}{990}$.

40-мысал. $\frac{7}{33}$ немесе $\frac{21212121}{99999999}$ бөлшектерінің қайсысы үлкен?

Шешуі: $\frac{7}{33} = 0,(21) = 0,(21212121) = \frac{21212121}{99999999}$, яғни екі бөлшек тең болады екен.

41-мысал. $0,7(621)$ және $\frac{141}{185}$ бөлшектерінің қайсысы үлкен?

42-мысал. $4,(9)^{5,(0)}$ және $5,(0)^{4,(9)}$ екі бөлшекті салыстырыңдар?

Шешуі: 111111 санын x деп белгілеп алсақ, онда бірінші бөлшекті $\frac{2x-1}{3x-1}$,

екінші бөлшекті $\frac{4x-1}{6x-1}$ түрінде болады. Есептің шарты бойынша осы екі

бөлшектің айырымын тауып таңбасын анықтаймыз:

$$\frac{2x-1}{3x-1} - \frac{4x-1}{6x-1} = -\frac{a}{(3x-1)(6x-1)} < 0.$$

Демек, екінші бөлшек үлкен болады.

43-мысал. 1280000401 санының құрама болатынын дәлелдеңдер.

Шешуі: Калькулятордың көмегімен тікелей тексере отырып бұл санның 421 -ге бөлінетінін көруге болады. Бірақ оның басқада шығару жолы болуы мүмкін: берілген санды $1280000401 = 20^7 + 20^2 + 1$ қосылғыштар түрінде жазып алып, $x = 20$ белгілеуін енгіземіз, сонда $x^7 + x^2 + 1$ көпмүшелігін аламыз. Оны анықталмаған коэффициенттер көмегімен немесе келесі түрлендірулер арқылы көбейтіштерге жіктеуге болады.

$$\begin{aligned} x^7 + x^2 + 1 &= x^7 + x^6 + x^5 - x^6 - x^5 - x^4 + x^4 + x^3 - x^2 - x^3 + 1 = x^5(x^2 + x + 1) - \\ &- x^4(x^2 + x + 1) - x^2(x^2 + x + 1) - (x-1)(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x + 1). \end{aligned}$$

Бұл дегеніміз $20^7 + 20^2 + 1$ саны $20^2 + 20 + 1$ санына бөлінеді дегенді білдіреді, яғни құрама сан болады.

44-мысал. $43^{111} + 8^{37}$ саны жай сан болады ма?

Шешуі: Байқасақ берілген сан – екі санның кубтарының қосындысын береді, демек формула бойынша көбейткіштерге жіктейміз.

$$43^{111} + 8^{37} = (43^{37})^3 + (2^{37})^3 = (43^{37} + 2^{37})((43^{37})^2 - 43^{37} \cdot 2^{37} + (2^{37})^2).$$

Берілген санды екі натурал санын көбейтіндісіне жіктей алғандықтан және олардың әрқайсысы бірден өзгеше екендігі айқын көрінгендіктен, құрама

санның анықтамасынан бастапқы берілген санның құрама сан болатынын көреміз.

45-мысал. $10^{1999} - 1999$ саны 9 санына бүтін бөлінетінін дәлелдеңдер.

Шешуі: Санды мына түрде түрлендіреміз

$$10^{1999} - 1999 = (10^{1999} - 1) - 1998 = \underbrace{99\dots9}_{1999} - 1998.$$

9 санының бөлінгіштік белгілерінен қосылғыштардың әр қайсысы 9-ға бүтін бөлінеді. Сәйкесінше, олардың айырмалары да 9-ға еселі болады, демек дәлелденді.

46-мысал. Ортақ аялдама арқылы өтетін қалалық автобустардың үш бағыты бойынша қозғалыс аралықтары сәйкесінше 15, 20 және 24 минут. Бір күнде 7^{55} және 17^{05} аралығында барлық үш бағыттағы автобустар неше рет кездеседі, егер осындай кездесудің бірі 12^{35} – те болатын болса?

Шешуі: Қандайда бір уақыт аралығында барлық үш автобуста аялдамада кездесті деп болжаймыз. Енді олар қанша минуттан кейін осы аялдамада қайтадан кездесетінін табамыз, $15 = 3 \cdot 5$, $20 = 2^2 \cdot 5$, $24 = 2^3 \cdot 3$, онда ЕҮОБ $(15, 20, 24) = 120$. Осы уақыт аралағын 12^{35} минуттан бастап берілген аралыққа түсетін барлық кездесу мезеттерін табамыз: 8^{35} , 10^{35} , 12^{35} , 14^{35} , 16^{35} . Барлығы 5 рет кездеседі.

Жауабы: 5 рет кездеседі.

47-мысал. 49, 4489, 444889, 444488889, ... тізбегінің әрбір мүшесі толық квадрат болатын дәлелдеңдер.

Шешуі: Берілген тізбектің $a_n = \underbrace{44\dots4}_n \underbrace{88\dots8}_{n-1} 89$ – n -ші мүшесін мына түрде

белгілеп алайық. $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0} = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0$, жазылуын ескеріп, a_n -ді түрлендіріп,

$$\begin{aligned} a_n &= (4 \cdot 10^{2n-1} + 4 \cdot 10^{2n-2} + \dots + 4 \cdot 10^n) + (8 \cdot 10^{n-1} + 8 \cdot 10^{n-2} + \dots + 8 \cdot 10) + 9 = \\ &= 4(10^n + 10^{n+1} + \dots + 10^{2n-1}) + 8(10 + 10^2 + \dots + 10^{n-1}) + 9. \end{aligned}$$

Жақша ішіндегі өрнек геометриялық прогрессияның қосындысы болады. Еселігі q болатын $\{b_n\}$ геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшесінің

қосындысының $S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$ формуласын пайдаланып және осы өрнекті қысқартып,

$$\begin{aligned} a_n &= 4 \cdot 10^n \cdot \frac{10^n - 1}{10 - 1} + 8 \cdot 10 \cdot \frac{10^{n-1} - 1}{10 - 1} + 9 = \frac{4}{9}(10^{2n} - 10^n) + \frac{8}{9}(10^n - 10) + \frac{81}{9} = \\ &= \frac{1}{9}(4 \cdot 10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 1) = \left(\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3} \right)^2 \end{aligned}$$

$2 \cdot 10^n + 1$ саны 3-ке бөлінетін (3-ке бөлінгіштік белгісі бойынша) болғандықтан, есеп дәлелденді.

48-мысал. Мұғалім сыныпқа санақ таяқшаларын алып келді. Оқушылар оны қалташаларға салып шықты. Әрбір қалташаға екі таяқшадан салған кезде,

бір таяқша артық қалады. Содан кейін әрбір қалташаға 13 таяқшадан салған кезде, 7 таяқша артық қалады. Ал таяқшаларды қалташаға 9 данадан салғанда, онда артық таяқша қалмайды. Санақ таяқшаларының мүмкін болатын ең аз санын табыңдар?

Шешуі: Барлығы n санақ таяқшалары болсын. Онда есептің шарты мынатеңдеулер жүйесіне келеді:

$$\begin{cases} n = 2l + 1 & (l = 0, 1, 2, \dots), \\ n = 13k + 7 & (k = 0, 1, 2, \dots), \\ n = 9m & (m \in N), \\ n_{\min} = ? \end{cases}$$

Осылайша, 9-ға бөлінетін және 13-ке бөлгенде қалдығы 7 болатындай n ең кіші тақ натурал санды табуға тура келеді. $n = 13k + 7$ тақ болғандығына байланысты k жұп болуы қажет, яғни $k = 2p$ ($p = 0, 1, 2, \dots$) n -нің кіші мәніне p -нің кіші мәні сәйкес келеді, сонда $n = 26p + 7 = 27p + 9 - (p + 2)$ болады. n және $27p + 9$ сандары 9-ға бүтін бөлінетіндіктен, онда $p + 2$ саны да 9-ға еселі болуы керек (сонымен бірге минимальді болуы керек). Осы шарттар орындалатын p теріс емес бүтін ең кіші сан 7-ге тең, осыдан $n = 26p + 7 = 26 \cdot 7 + 7 = 189$.

Жауабы: санақ таяқшаларының ең кіші саны – 189.

Енді өрнектерді түрлендірулерге және теңдеулерді шешуге арналған стандартты емес есептерді шығаруға үйрету тісілдерін мысалдармен қарастырайық.

Теңбе-тең түрлендірулер

49-мысал. Егер $xy + z = yz + x = zx + y$ болса, онда $(x - y)(y - z)(z - x) = 0$ орындалатынын дәлелдеу керек.

Дәлелдеуі: $xy + z = yz + x$ теңдігінен

$$xy - yz - x + z \Rightarrow y(x - z) - (x - z) = 0 \Rightarrow (x - z)(y - 1) = 0$$

$$\begin{cases} (y - x)(z - 1) = 0 \\ (y - z)(x - 1) = 0 \end{cases}$$

Енді $(x - y)(y - z)(z - x) = 0$ деп есептеп, яғни $y - x \neq 0, y - z \neq 0, x - z \neq 0$.

Сонда $x = y = z = 1$ болатынын аламыз. Ал бұл қарама-қайшылық.

Сонымен қатар оқушыларға келесі мысалды беруге болады.

50-мысал. $\sqrt{170 + \sqrt{2004}} - \sqrt{170 - \sqrt{2004}}$ иррационал өрнекті ықшамдаңдар.

Шешуі: Бірінші әдіс.

$$170 + \sqrt{2004} = 170 + 2\sqrt{501} = 167 + 2\sqrt{167 \cdot 3} + 3 = (\sqrt{167} + \sqrt{3})^2,$$

$$170 - \sqrt{2004} = 170 - 2\sqrt{501} = 167 - 2\sqrt{167 \cdot 3} + 3 = (\sqrt{167} - \sqrt{3})^2, \text{ онда}$$

$$\sqrt{170 + \sqrt{2004}} - \sqrt{170 - \sqrt{2004}} = (\sqrt{167} + \sqrt{3}) - (\sqrt{167} - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}.$$

Екінші әдіс. Берілген өрнектің мәні оң болатынын ескеріп, өрнектің квадратын табайық:

$$\left(\sqrt{170+\sqrt{2004}}-\sqrt{170-\sqrt{2004}}\right)^2=170+\sqrt{2004}-2\sqrt{170^2-2004}+170-\sqrt{2004}=340-2\sqrt{28900-2004}=340-2\sqrt{26896}=340-2\sqrt{164^2}=340-328=12.$$

Сәйкесінше, $\sqrt{170+\sqrt{2004}}-\sqrt{170-\sqrt{2004}}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

Жауабы: $2\sqrt{3}$.

51-мысал. $\cos \frac{\pi}{65} \cos \frac{2\pi}{65} \cos \frac{4\pi}{65} \cos \frac{8\pi}{65} \cos \frac{16\pi}{65} \cos \frac{32\pi}{65}$ есептеу керек.

Шешуі: Берілген көбейтіндіні – А деп белгілеп аламыз. А –ны $2\sin \frac{\pi}{65}$ көбейтіп, бөлеміз. Өйткені $2\sin \frac{\pi}{65} \cos \frac{\pi}{65} = \sin \frac{2\pi}{65}$

$$A = \frac{\sin \frac{2\pi}{65} \cos \frac{2\pi}{65} \cos \frac{4\pi}{65} \cos \frac{8\pi}{65} \cos \frac{16\pi}{65} \cos \frac{32\pi}{65}}{2\sin \frac{\pi}{65}}$$

Осыдан: $\sin \frac{2\pi}{65} \cos \frac{2\pi}{65} = \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi}{65}$; $\sin \frac{4\pi}{65} \cos \frac{4\pi}{65} = \frac{1}{2} \sin \frac{8\pi}{65}$ және т.с.с.

$$\text{Нәтижесінде: } A = \frac{\sin \frac{64\pi}{65}}{2^6 \sin \frac{\pi}{65}} = \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{65}\right)}{64 \sin \frac{\pi}{65}} = \frac{\sin \frac{\pi}{65}}{64 \sin \frac{\pi}{65}} = \frac{1}{64}$$

Жауабы: $\frac{1}{64}$

52-мысал. Егер $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ болса, онда $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \alpha = 1$

орындалатынын дәлелдеу керек.

Дәлелдеуі: Есеп шартындағы $\gamma = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)$ ескеріп, теңдіктің сол жағын түрлендіреміз.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) = \\ &= \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right) (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{ctg} (\alpha + \beta) (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) = \\ &= \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \frac{1}{\operatorname{tg} (\alpha + \beta)} (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) = \\ &= \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + 1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = 1. \end{aligned}$$

Осылайша берілген тепе-теңдік дәлелденді $\left(\alpha, \beta, \gamma = \frac{\pi}{2} + \pi \right)$.

Теңдеулерді шешу.

53-мысал. «Стандартты емес» теңдеулерге мысалы ретінде келесі теңдеуді қарастыруға болады: $x^2 + 200420042005x + 200420042004 = 0$.

Шешуі: Есеп әрине қиын емес. Бірақ тәжірибиеміз көрсеткендей оқушылардың көпшілігі осы теңдеуді стандартты алгоритм бойынша шығарып сәтсіздікке жолығады. Бұл жағдайда тіпті калькулятордың өзі көмектеспейді. Осы теңдеуді шешудің бірнеше әдістерін қарастырамыз.

Бірінші әдіс: Түбірлерді таңдау. Теңдеуге мұқият қарап отырсақ теңдеудің бір түбіріне -1 саны сәйкес келетінін көреміз. Бір түбірін білсек, екінші түбірді оңай табамыз. Мысалы Виет теоремасынан, егер $x_1 = -1$, онда $x_2 = -200420042005 - (-1) = -200420042004$.

Екінші әдіс. Көбейткіштерге жіктеу.

$$x^2 + 200420042005x + 200420042004 = x^2 + 200420042004x + x + 200420042004 = x(x + 200420042004) + x + 200420042004 = (x + 200420042004)(x + 1).$$

Сәйкесінше, $x_1 = -200420042004$, $x_2 = -1$.

Үшінші әдіс. Жаңа айнымалы енгізу. 200420042004 санын a деп белгілеп алсақ, $a + 1 = 200420042005$. Берілген теңдеуді мына түрде жазамыз: $x^2 + (a + 1)x + a = 0$ алынған теңдеудің түбірлері $x_1 = -a$, $x_2 = -1$ болады. Осы жерден a -ның орнына мәнін қойып теңдеудің түбірлерін табамыз: $x_1 = -200420042004$, $x_2 = -1$.

Соңғы әдіс кез-келген квадрат теңдеуді шешуге көмектеседі.

Жауабы: $x_1 = -200420042004$, $x_2 = -1$.

54-мысал. $(x + 2)(x + 6)(12 - x)(x - 4) + 160x^2 = 0$ теңдеуін шешіндер.

Шешуі: $(x + 2)(x + 6)(12 - x)(x - 4) + 160x^2 = 0$, $x \neq 0$

$(-x^2 + 10x + 24)(x^2 + 2x - 24) + 160x^2 = 0$, теңдеудің екі жағын x^2 бөліп, $\left(-x + 10 + \frac{24}{x}\right)\left(-x + 2 - \frac{24}{x}\right) + 160 = 0$ теңдеуін аламыз. $t = x - \frac{24}{x}$ жаңа айнымалысын енгізіп, $(10 - t)(t + 2) + 160 = 0$, $t^2 - 8t - 180 = 0$, келтірілген квадрат теңдеуді шешеміз $t_1 = -10$, $t_2 = 18$. Жаңа айнымалыны алмастырып, $x_1 = -12$, $x_2 = 2$, $x_3 = 9 - \sqrt{105}$, $x_4 = 9 + \sqrt{105}$.

Жауабы: $x_1 = -12$, $x_2 = 2$, $x_3 = 9 - \sqrt{105}$, $x_4 = 9 + \sqrt{105}$.

55-мысал. $x^2 + 1982 = y^2$ теңдеуінің бүтін сандар жиынында шешімі болмайтынын дәлелдеу қажет.

Шешуі: Теңдеудің бүтін сандар жиынында шешімі бар деп, берілген теңдеуді мына түрде жазайық: $1982 = y^2 - x^2$. 1982 жұп сан болғандықтан, теңдеудің шешімі болу үшін $y^2 - x^2$ айырымы жұп сан болуы керек. Ал бұл жағдай x, y сандары бір мезгілде жұп немесе бір мезгілде тақ болғанда ғана мүмкін болады. Енді теңдеуді мына түрде жазайық: $1982 = (y + x)(y - x)x$ және y сандары бір мезгілде жұп немесе тақ болғандықтан, олардың айырымы жұп сан болады. Демек, теңдеудің оң жағы 4 -ке бөлінеді, бірақ сол жағы 4 -ке бөлінбейді. Алынған қарама-қайшылық теңдеудің бүтін сандар жиынында шешімі болмайтындығын көрсетеді.

56-мысал. $x^2 - 2y^2 = 1$ теңдеуін жай сандар жиынында шешіндер.

Шешуі: $2y^2$ азайтқышы жұп, ал айырымы тақ болғандықтан, онда x^2 азайғышы тақ болуы қажет, осыдан x тақ болады. Берілген теңдеуді келесі түрде жазайық: $(x-1)(x+1)=2y^2$. x тақ болғандықтан, онда $x-1$ және $x+1$ жұп сандар, олардың көбейтінділері 4-ке бөлінеді. Егерде теңдеудің сол жағы 4-ке бөлінсе, теңдеудің шешімі болу үшін оң жағы да 4-ке бөлінуі қажет, ал ол y жұп болғанда мүмкін болады. Бірақ x және y жай сандар болғандықтан, демек $y=2$, $x=3$ болады.

Жауабы: $x=3$, $y=2$.

57-мысал. $\left(\frac{x^2}{x+9}\right)^2 + \frac{18x^2}{x+9} - 40 = 0$ теңдеуін шешіндер.

Шешуі: Берілген теңдеудің сол жағын түрлендіру үшін $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$ теңдігін пайдаланып және $\frac{x^2}{x+9} = y$ жаңа айнымалысын енгізіп $y^2 + 18y - 40 = 0$ түрдегі келтірілген квадрат теңдеуді аламыз, оның түбірлері $y_1 = -20$, $y_2 = 2$ болады. Демек, $\frac{x^2}{x+9} = -20$ және $\frac{x^2}{x+9} = 2$ екі теңдеуді шешеміз, яғни $x^2 + 20x + 180 = 0$ және $x^2 - 2x - 18 = 0$, мұндағы $x \neq -9$ ескеріп. Бірінші теңдеудің түбірлері болмайды, ал екінші теңдеуден $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{19}$ аламыз.

Жауабы: $x_1 = 1 - \sqrt{19}$, $x_2 = 1 + \sqrt{19}$.

58-мысал. $x^6 - 3x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$ теңдеуін шешіндер.

Шешуі: Алғашқыда $x=0$ түбір болмайтынына көз жеткіземіз. $x \neq 0$ болғандықтан, теңдеудің екі жағында x^3 -ке бөлеміз. Сонда

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0, \quad y = x + \frac{1}{x} \text{ болсын, онда}$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = y^3 - 3y, \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = y^2 - 2 \quad \text{берілген}$$

теңдеуден $y^3 - 3y - 3(y^2 - 2) + 2y - 3 = 0$ немесе $y^3 - 3y^2 - y + 3 = 0$ аламыз. Соңғы теңдеуді $(y^2 - 1)(y - 3) = 0$ түрде жазамыз. Осыдан $y_{1,2} = \pm 1$ және $y_3 = 3$ аламыз. Әрі қарай $x + \frac{1}{x} = 1$, $x + \frac{1}{x} = -1$ және $x + \frac{1}{x} = 3$ үш теңдеуді қарастырамыз. Алғашқы екі теңдеудің түбірі болмайды, ал үшінші теңдеудің $x^2 - 3x + 1 = 0$ түбірлері $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ болады.

Жауабы: $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

59-мысал. $(16x^{200} + 1)(y^{200} + 1) = 16(xy)^{100}$ теңдеуін шешіндер.

Шешуі. Коши теңсіздігін пайдаланып, берілген теңдеуді мына түрде жазамыз:

$16x^{200} + 1 \geq 2\sqrt{16x^{200}} = 8x^{100}$, $y^{200} + 1 \geq 2\sqrt{y^{200}} = 2y^{100}$ яғни, мынандай теңсіздік орын алады $(16x^{200} + 1)(y^{200} + 1) \geq 16(xy)^{100}$. Берілген теңдеуден жоғарыда

көрсетілген Коши теңсіздігі тек $16x^{200}=1$ және $y^{200}=1$ болғанда теңдікке айналады. Сәйкесінше, $x=\pm\frac{1}{\sqrt[59]{2}}$ және $y=\pm 1$ болады.

$$\text{Жауабы: } x_1 = \frac{1}{\sqrt[59]{2}}, y_1 = 1; x_2 = \frac{1}{\sqrt[59]{2}}, y_2 = -1; x_3 = -\frac{1}{\sqrt[59]{2}}, y_3 = 1; x_4 = -\frac{1}{\sqrt[59]{2}}, y_4 = -1$$

Сонымен, стандартты емес есептерді табысты шығару тек алдында осыған ұқсас есептер шығарылды ма, дұрыс емес шығарылғандарына ғана емес сонымен қатар, есептің қызықты қырларын және есептің барлық үлгі болатын қасиеттерін талдау мақсатында толық ұғынып шығарылғандарына да тәуелді. Сондықтан, бастапқыда оқушыларға ұсынылған стандартты емес есептерді соңында оқушылар табысты шығара алатындай болуы өте маңызды. Бастапқыда стандартты емес есептер нақты анықталған, аяқталған түрде берілуі керек. Әрине мұғалім «қарапайым математикалық мәліметтерді іскерлікпен және пайдалы етіп шығармашылық тұрғыдан меңгерген кезде ғана оқушылар есептің шешіміне өз беттерінше келуге болатынын түсіндіруді» көздейді. Бірақ стандартты емес есептерді мұғалімнің көмегімен шығаруға қол жеткізудің қажеттілігі жоқ. Мектепте стандартты емес есептердің берілу мақсаты – оқушыларды оларды өз беттерінше шығаруға үйрету. Стандартты емес есептерді шығару – бұл көп жағдайда оқушылардың ойлауы бойынша олардың кез келгенін шапшаң шығару емес. Стандартты емес есептерді шығару икемділігіне мынандай өнегелік қасиеттер: табандылық, шыдамдылық, жеңіске жетуге деген ерік оқыту барысында оқушылар бойында қалыптасуы керек. Демек, стандартты емес есептерді шығаруға қажетті біліктер төмендегідей:

1) есептерді шығару әдістерін білу; жаңа әдістерді ойлап табу білігі және шығарудың тәсілдерін білу; негізгі ой іс-әрекетінің саналы түрде басқару;

2) пайдалы ақпаратты таңдай білу білігі, яғни берілген есептегі мүмкін болатын барлық жаңа есептерді таба білу, тек қана ойға қонымды әрекеттерді орындау, есептен негізгісін және екінші кезектегісін көре білу, осыған дейінгі белгілі әдістерді толықтыру және тағы басқалары.

Мектеп математика курсына стандартты емес есептердің маңыздылығына қарамастан, сабақ беру барысында уақыттың тығызды ғана байланысты оларды жүйелі түрде оқыту мүмкін емес. Сонымен қатар, сабақта жаңа түрдегі есепті ендіру (мұндай есептер әлі стандарттылар қатарына енбей тұрып) немесе мәселелі жолмен жаңа материалды беру барысында оларды шығарудың кейбір жаңа әдістері мен тәсілдерін көрсету пайдалы болады.

Біз негізгі мектепте математика және алгебра курстарында келесі типтегі стандартты есептерді шығаруды ұсынамыз:

5-сынып үшін: математикалық фокустар, ойындар, қиюға берілген есептер, өлшеуге берілген есептер, араластыру, бояуға берілген есептер, сіріңкені пайдаланып шығаратын комбинаторикалық есептер, соңынан бастап шығарылатын есептер және т.б.

6-сынып үшін: бөлінгіштік және қалдық, ЕҮОБ және ЕКОЕ, геометриялық фигуралардың периметрі және аудандары, арифметика және логика,

бөлінгіштік белгілері және т.б.

7-сынып үшін: үшбұрыш теңсіздігі, циркульды пайдаланбай салуға берілген есептер, турнирлер, анықталмаған коэффициенттер әдісі, графтар, кеңістіктегі фигураларға берілген есептер, қозғалысқа берілген есептер және т.б.

8-9 сыныптар үшін: алгебралық өрнектерді түрлендіру, теңдеулерді шешудің стандартты емес әдістері, теңсіздіктерді дәлелдеу, математикалық индукция әдісі, комбинаторика, мәтіндік есептер, салуға берілген есептер және нүктелердің геометриялық орнын табуға берілген есептер және т.б.

Жалпы орта мектептегі математика курсына келесі тақырыптар бойынша сабақта және сыныптан тыс жұмыстарында элективті курстарды ұйымдастыру арқылы стандартты емес есептерді шығаруды қарастырған жөн:

1. Бүтін сандар. Бөлінділер және қалдықтар. Бүтін сандарда теңдеулерді шығару. Бүтін сандарға берілген әртүрлі есеп. Сандардың кеңейтілуі. Тақ және жұп сандар. Алгебраның негізгі теоремасы. Натурал сандардың бөлінгіштік белгілері.

2. Бүтін сандарға берілген әртүрлі есептер. Рационал және иррационал сандар. Сандарды салыстыру. Сандық ребустар. Амалдар таңбасын және натурал сандардың цифрларын табу. Жай және құрама сандар. Бөлінгіштікке берілген әртүрлі есептер. Фиббоначи сандары. Сиқырлы квадраттар.

3. Теңдеулер мен теңсіздіктерді шығару барысында стандартты емес әдістерді қолдану.

4. Функционалдық алмастыру әдісі. Функционалдық алмастыру әдісімен көп кездесетін күрделі теңдеулер мен теңсіздіктерді шешу.

5. Тригонометриялық алмастыру әдісі. Функционалдық алмастыру әдісінің дербес түрі тригонометриялық алмастыруларды қолдана білу.

6. Сандық теңсіздіктерді қолдануға негізделген әдістер.

Математикадағы белгілі сандық теңсіздіктер: Коши, Бернулли, Коши-Буняковский теңсіздіктерін қолдануды үйрету.

7. Функцияның монотондығын қолдануға негізделген әдістер. Көптеген есептерді шығару барысында функция монотондылығын пайдаланудың тиімді екенін көрсету. Күрделі есептерді шығару барысында функция монотондылығын пайдаланып есептер шығару дағдысын қалыптастыру.

8. Функционалдық теңдеулерді шешу әдістері. Қиындығы жоғары функционалдық теңдеулерді шешу әдістерін пайдаланып байқау есептерін шығару.

9. Векторларды қолдануға негізделген әдістер. Қиындығы жоғары есептерді векторларды қолдануға негізделген әдістер көмегімен шығару.

10. Құрамдастырылған әдістер. Параметрі бар есептер. Иррационал теңдеулер. Логарифмдік теңдеулер. Модулі бар теңдеулер мен теңсіздіктер. Теңдеулер жүйесі. Теңсіздіктерді дәлелдеу әдістері.

11. Функцияның шектелгендігін қолдануға негізделген әдістер. Тригонометриялық функциялар. Кері тригонометриялық функциялар. Модулі, дәрежесі, жұп дәрежелі түбірі бар функциялар.

12. Симметриялы теңдеулер жүйесін шешу әдістері.

Көріп отырғанымыздай, ұсынылып отырған стандартты емес есептер бойынша тақырыптарды оқу бағдарламасының тақырыптарының шеңберінде оқытуға болады. Мұнда есептерге көмекші шеңбер салуды қажет ететін, векторлық әдісті пайдаланып шығаруды қажет ететін және т.б. есептер жатады. Жұмысымызда арнайы әдістерді пайдаланып шығарылатын стандартты емес есептердің негізгі түрлеріне мысалдар келтіріп, есептің шешімдерін көрсетуге тырыстық.

2.3 Математикадан есептерді шығаруды оқыту бойынша педагогикалық эксперимент

Педагогикалық эксперимент зерттеудің мақсаттары мен міндеттеріне сәйкес 2014-2017 жылдары жүргізілді. Сонымен бірге келесі кезеңдер бойынша ұйымдастырылды:

- айқындаушы эксперимент (2014-2015 ж.ж.);
- қалыптастырушы эксперимент (2015-2016 ж.ж.);
- бақылаушы эксперимент (2016-2017 ж.ж.).

Зерттеу жұмысы тұжырымдаған болжамды тексеру үшін нәтижелері статистикалық өңделген педагогикалық эксперимент ұйымдастырылды. Эксперимент барысында зерттеу жұмысының болжамы тексерілді.

Зерттеудің базасы: жаңартылған білім беру мазмұны бойынша оқу процесін жүзеге асырып жатқан республиканың жалпы білім беретін мектептері.

Орта білім беру мазмұнын жаңарту аясында әзірленген 7-сыныпқа арналған «Алгебра: Есептер жинағы» оқу құралы (Алматы: Мектеп, 2017. – 36 б.) Тараз қаласының № 17, 46, 49 жалпы орта білім беретін мектептерінде апробациядан, яғни бақылау экспериментінен өтті.

Айқындаушы эксперименттің негізгі мақсаты: мәтінді есептерді, стандартты емес есептерді шығару бойынша білім сапасын арттырудың тетіктерін анықтау, оқушылардың есептерді шығару тәсілдерін меңгеру деңгейін тексеру, мәтінді және стандартты емес есептерді шығарудың тиімді және тиімсіз тәсілдерді пайдалануын анықтау.

Бұл кезеңдегі зерттеудің негізгі әдістері: 7-9 сыныптардағы алгебра сабақтарын бақылау, мұғалімдер мен оқушылардан оқу іс-әрекетін қалыптастыру бойынша сұхбат алу, оқушылардың өзіндік жұмыстарының берілуі, оқушылардың жұмыс және бақылау дәптерлеріне талдау жасау, оқушылар мен мұғалімдерден сауалнама алу, 7-9 сыныпқа арналған алгебра пәнінің оқу бағдарламасына және оқулықтарына талдау жасау. Бірінші кезеңде 7-9 сыныптардағы алгебра пәнінің 90-нан астам сабағына қатыстық.

Зерттеу нәтижелері осы сынып оқушыларының есептер және оларды шығару тәсілдері бойынша белгілі бір білімдері бар екендігін көрсеткенімен оқушылардың мәтінді және стандартты емес есептерді шығару біліктерінің жеткілікті емес екенін көрсетті. 7-9 сыныптар оқушыларының оқу іс-әрекетінің қалыптасу процесі стихиялық түрде жүреді; оқушылардың білім сапасын арттырудың қажетті шарты ретінде оқу материалдарын жүйелеуді қарастырмайды, мәтінді есептерді шығаруды оқытуда мұғалім жаппай оқыту

түрін қолданады. Тәжірибелі мұғалімдердің жұмысын бақылай отырып, есеп мәтінің белгілі бір сызбасы, есептерді шығару амалдары мен ережелер жиыны жүйелі берілмейтіні анықталды. Бұл математикадан білім мен біліктің жоғары деңгейде қалыптасуына мүмкіндік бермейді.

Сауалнама нәтижелері 7-9 сынып оқушыларының 75% есептер екі бөліктен тұратынын: шарты мен сұрағы болатынын білетінін көрсетті. Оқушылардың 87% есеп шартын түсіну тәсілдеріне есеп шартын қысқаша етіп жазып алу: үлгі, сызба, ауызша және кесте түрінде көмектесетінін көрсетеді. Оқушылардың көпшілігі есеп шешімін рәсімдеудің ауызша, іс-әрекет бойынша және теңдеуді құру тәсілдерін біледі.

Кесте 23

Есептің негізгі бөліктері			Есепті шығару кезеңдері			Есептің шартын қысқаша жазу			Есеп шешімін іздеу әдістері			Есептің шешімін жазу түрлері		
7с	8с	9с	7с	8с	9с	7с	8с	9с	7с	8с	9с	7с	8с	9с
70	72	75	17	20	21	85	84	90	8	14	16	85	88	92

Кестеден көрініп тұрғандай есептің шешімін іздеу тәсілдерін оқушылардың шамалы бөлігі ғана көрсеткен, сондықтан есептің шешімін іздеу тәсілдерінің оқушылардың жекелеген іс-әрекеттері арқылы анықталатыны: есептегі негізгі қатынасты бөліп алу білігі, негізгі қатынасты моделдеу, есеп шешімін іздеуді іске асыру белгілі болды. Негізгі қатынастар туралы түсінікті анықтау үшін оқушыларға келесі есептердегі ортақ және айырмашылығын анықта деген тапсырмалар ұсынылған:

7 сыныптағы 147 оқушының ішінде есепті дұрыс шығарғандары – 89, есепті шығарудағы ортақ және айырмашылығын анықта деген тапсырманы 47 оқушы ғана дұрыс тапқан, көптеген оқушылар шамалар арасындағы тәуелділіктерді дұрыс тапқандарымен әрбір есептегі негізгі қатынастарды бір екі ғана оқушы тапқан.

№1 бақылау жұмысы бойынша (қосымша Ә) 7, 8, 9-сыныптардың қорытындылары 24-кестеде көрсетілген.

Кесте 24

Жалпы қорытындылар			Есеп шешімін іздеу процесі				Тексеру	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
7-сынып								
60%	2%	38%	29%	32%	24%	5%	27%	6%
8-сынып								
65%	1%	34%	27%	34%	26%	3%	29%	8%
9-сынып								
68%	2%	30%	31%	29%	27%	4%	27%	5%

1. Есеп дұрыс шығарылған.
2. Теңдеу дұрыс құрылған, бірақ түбірлері дұрыс табылмаған.
3. Теңдеу дұрыс құрастырылмаған немесе мүлдем құрастырылмаған.
4. Теңдеу есепті қысқаша жазу арқылы құрылған.
5. Теңдеу есептің шешімін іздеу моделін қолданбай ақ дұрыс құрастырылған.
6. Есептің шешімін іздеуді моделін пайдалана отырып, есептің шешімін іздеу бойынша білімі мен білігін көрсетті.
7. Есеп арифметикалық тәсілмен шығарған.
8. Есепті тексеру дұрыс орындалған.
9. Тек теңдеуді ғана тексерген.

Кестеден оқушылардың тек үштен бір ғана бөлігі есептің шешімін іздеу моделін қолданғанын көреміз. Оқушылардың жұмыстарын зерттеу есепті қысқаша жазуды оның шешімін іздеу моделі ретінде қарастырмай, оқушылар есеп шартында бағыт көрсетуші ретінде ғана қолданғанын байқауға болады. Сабақтар оқушыларға қиындық тудыратыны есептің мәтінін математикалық модельге аудару екенін көрсетті. Осы қиындықтың негізгі себептері:

- а) есеп шартында бейнеленген жағдай мен оның математикалық моделі арасындағы үлкен айырмашылықтың болуы;
- ә) теңдеуді шешудің жалпы алгоритмінің жоқтығы.

Мектепте есепті сипаттайтын мәтінді түсінуі оқушылардан көп уақытты талап етеді. Есепті шешімін талдауда оқушылардың біліктерінің төмендігі байқалды.

Оқушылар есепті тексеруді келесі түрде жүргізеді: табылған санға есеп шартындағы амалдар орындалып, нәтижесі есепте берілген мәндерімен салыстырылады. Басқа тәсілдермен тексеру сирек жүргізіледі.

Қатысқан сабақтарға, мұғалімдер мен оқушыларға жүргізілген сауалнамаларды талдау жүргізу және психологиялық-педагогикалық және әдістемелік әдебиеттерді зерттеу келесі қажеттіліктердің бар екенін көрсетті:

- мәтінді есептерді шығару тәсілдерін қалыптастыруда есептер жүйесінің толықтық сипатқа ие болуы;
- мәтінді есептерді шығару тәсілдерін қалыптастыруға бағытталған оқу есептер жүйесіне қойылатын талаптар;
- оқушылардың өзіндік жұмыстарында мәтінді есептерді шығару тәсілдерін қалыптастыру шарттарын тексеру.

Қалыптастырушы эксперименттің бағдарламасы мен оның нәтижелері

Қалыптастырушы эксперименттің мақсаты (2015-2016ж.ж.) – 7-9 сынып оқушыларына мәтінді және стандартты емес есептерді шығару барысында қалыптастыруға қажетті білім, білік және дағдыларын анықтау. Осы эксперименттің барысында оқу іс әрекеттері, мәтінді және стандартты емес есептер жүйесіне қойылатын талаптар түзетілді, оқушылардың өзіндік жұмысы барысында қалыптасатын іс-әрекеттері тексерілді, есептерді шығарудың тиімді және тиімсіз тәсілдері айқындалды.

Эксперименттік оқытуда 7-9 сыныптарындағы «теңдеулер құрастыру арқылы шығарылатын есептер» тақырыбы бойынша есептер жүйесі жасалынды

және педагогикалық экспериментке қатысуға эксперименттік және бақылау топтары алынды. Мұндағы экспериментке қатысушы оқушылардың дайындық деңгейлері бірдей етіп алынды.

Оқушыларға оқу іс-әрекетінің тәсілдері негізінде мәтінді есептерді шығаруды оқытудың әдістемесіне қойылатын талаптар айқындалды:

- оқушыларға мәтінді есептерді шығару бойынша оқу іс-әрекетін қалыптастыру процесі үш кезеңнен тұруы қажет: таныстыру, өңдеу және тәсілді қолдану;

- тәсілмен таныстыру процесі дайын күйінде немесе өз бетінше іздегенде (мұғалімнің басшылығымен) жүзеге асуы мүмкін;

- мәтінді есептерді шығару бойынша есептер жүйесі оған қойылатын негізгі талаптарды қанағаттандыруы керек;

- мұғалімнің оқушыларға таныстыру кезеңінде жұмыс жасауы, өңдеу кезеңінде – мұғалімнің оқушылармен ұжымдық жұмысы, қолдану кезеңінде – мұғалімнің бақылауымен іс-әрекеттің топтық немесе жеке жұмыс түрі жүргізіледі;

- мәтінді есептерді шығару біліктерінің қалптасуының көрсеткіші олардың есепті шығару әдістерін түсінуі, яғни әдістердің ерекшелігі туралы айта білу, оны қолданып есеп шығаруды негіздеу, сонымен қатар есептерді шығару барысында оқушылардың осы әдістерді пайдалана білуі.

Өзіндік жұмыс барысында оқу іс-әрекетінің қалыптасуын тексеру мақсатында мектептердің 7 сыныптарында «сызықты теңдеулерді құрастыру арқылы шығарылатын есептер» тақырыбында өзіндік жұмыс ұйымдастырылды. Қалыптастырушы экспериментін жүргізу барысында 2.2 бөлімде белгіленген талаптар оқушыларды мәтінді және стандартты емес есептерді оқыту тиімділігін арттырудың қажетті шарты екендігі бағамдалды.

Оқушылардың танымдық іс-әрекетінің төрт деңгейі бойынша бөлінген өзіндік жұмыстарының тапсырмаларынұсынып отырмыз (қосымша А).

Қалыптастырушы эксперимент кезінде оқушыларды бақылау олардың математикалық білім деңгейі әртүрлі болатынын көрсетті. Бірақ әрбір сыныпта өздерінің жалпы математикалық білім деңгейі шамалас және ақыл-ой қызметінің ерекшеліктері ұқсас болып келетін оқушылар тобы болады. Осыған байланысты біз әрбір сынып оқушыларын шартты түрде топтарға бөлдік.

Оқушыларды топтарға бөлудегі мақсат бақылаушы экспериментті әртүрлі топ оқушыларымен жұмыс жасау, яғни саралап оқытуды тиімді ұйымдастыру арқылы жүргізу болды. Айқындаушы эксперимент барысында алынған мәліметтерге сүйене отырып, сонымен қатар жеке оқушылардың ақыл-ой қызметінің психологиялық ерекшеліктерін ескере отырып әрбір сыныпта оқушылардың негізгі үш тобы анықталды. Бірінші топқа оқу үлгерімі жоғары оқушылар: 5, 5 және 4-пен оқитын оқушылар, екінші топқа оқу үлгерімі орташа оқушылар: 4, 4 және 3-пен оқитын оқушылар, ал үшінші топқа оқу үлгерімі төмен оқушылар: 3, 3 және 2-мен оқитын оқушылар болды. Зерттеудің әртүрлі кезеңдерінде әр топтағы оқушыларға есептерді шығару барысында өзіндік жұмыстарын әрі қарай ынталандыратын деңгейлік көмектері: бағыт беру, нұсқау, кеңес беру түрінде жасалып отырды. Осы мақсатта біз деңгейлік

тапсырмаларды жеке карточкалар арқылы пайдаландық.

Эксперименттік оқыту оқушылардың танымдық іс-әрекетінің әртүрлі деңгейлерінде ұйымдастырылған өзіндік жұмыстардың әсіресе: репродуктивті, жартылай-іздеу және зерттеушілік (шығармашылық) деңгейлерінде тиімді екенін көрсетті. Осыған байланысты зерттеу жұмысымызда өзіндік жұмыстың төрт түрі кездеседі: 1) репродуктивті; 2) жартылай іздеу (немесе іздеу); 3) шығармашылық; 4) зерттеушілік.

Өзіндік жұмыстардың және ондағы оқу іс-әрекет тәсілдерінің әртүрінің маңызына дидактикалық талдау өзіндік жұмыстардың репродуктивті, жартылай іздеу, шығармашылық және зерттеушілік түріне сәйкесінше оқу есептерінің танымдық және дамытушылық функциялары сәйкес келетінін көрсетті. Өзіндік жұмыс тапсырмаларын дербес орындай алуы дәрежесіне байланысты әр топтың оқушыларының есептерді толығымен өз білімімен шығаруына бағытталды. Оқу үлгерімі төмен оқушылар іс-әрекеттің барынша толық нұсқаулығын алды. Оқу үлгерімі орташа оқушыларға маңызды жағдайлары белгіленіп көрсетілген карточкалар берілді. Ал оқу үлгерімдері жоғары оқушыларға вариативтік, барынша нақтыланбаған тапсырмалар ұсынылды. Әрбір топқа берілген карточкалардың құрылымында: тапсырманы орындау мақсаты, берілген тапсырманы орындаудың сәйкес тәсілдері көрсетілген. Сабақ мұғалімнің жалпы қорытындысымен немесе оқушылардың осы сабақта жаңадан білгендеріне қатысты өз беттерінше қорытынды жасауымен аяқталды.

Бақылаушы эксперименттің міндеттері мен әдістемесі

Зерттеудің үшінші кезеңінде бақылау эксперимент жүргізілді.

Эксперименттік оқытуда 7-9 сыныптарындағы «теңдеулер құрастыру арқылы шығарылатын есептер» тақырыбы бойынша есептер жүйесі және дайындық деңгейлері бірдей оқушылар мен тәжірибелері бірдей мұғалімдер бойынша эксперименттік және бақылау топтары алынды. Бақылаушы эксперименттің бірінші кезеңінде зерттеу мәселесі бойынша білімді меңгерудегі негізгі ерекшеліктер, қалыптасатын білік пен дағдылар анықталды. Бақылаушы экспериментке Тараз қаласындағы мектептердің 454 оқушысы қатысты.

Бақылаушы эксперименттің бірінші кезеңіндегі нәтижелерге талдау жасай отырып, бірнеше бақылау жұмыстарын жүргізіп, оқушыларға мәтінді және стандартты емес есептерді шығару бойынша білік пен дағдыны қалыптастыру құралы ретінде оқу іс-әрекетінің ұжымдық түрімен қатар өзіндік жұмыстарды жеке орындауын алуға болады деген қорытындыға келеміз.

Эксперименттік сыныптарда: а) оқыту белгіленген талаптарға сай келетін есептер жүйесімен жүргізілді; ә) оқыту іс әрекеттері тәсілдерін қалыптастыру бастапқыда оқушылардың жаппай іс-әрекетінде, содан кейін топтық, соңында жеке іс-әрекет ету жағдайында оқушылардың танымдық іс-әрекетінің деңгейлерін ескере отырып жүргізілді.

Бақылау сыныптарында: а) оқыту қолданыстағы оқулықтардағы жүйеленбеген есептер жүйесімен жүргізілді (оқытудың соңында мұғалімге оқулықта кездеспейтін есепті шығару ұсынылған); ә) оқыту іс-әрекет

тәсілдерін мұғалім дәстүрлі түрде, оқушылардың іс-әрекетінің бірізділігін (жаппай, топтық, жеке) сақтамай жүргізді; б) оқыту оқушылардың танымдық іс-әрекетінің деңгейлерін нақты бөліп көрсетпей жүргізілді.

Эксперименттік сыныптарда 231 оқушы, ал бақылау сыныптарында 223 оқушы қамтылды. Оқушылар теориялық материалдармен бақылау экспериментінің басында танысты. Бірінші сабақты дәріс түрінде түсіндірумен сұрақтар бере отырып өткізілді. Мұнда мұғалім оқушыларды есептің шешімін іздеу моделін құру тәсілдерімен: кесте түрінде, алгоритм түрінде, есептерді құрастыру тәсілдері, алынған нәтиженің бақылау және бағалау тәсілдерімен таныстырды.

Кейінгі сабақтарда оқушылар оқыған тәсілдерін жартылай алгоритмдік түрдегі есептерді шығаруда қолданды, осы кезеңде оқушылармен топтық жұмыс жүргізілді, сюжеттері бірдей, бірақ оқу тапсырмалары әртүрлі болатын есептер берілді. Есепті түрлі әдістермен шығару тәсілдері ұжымдық түрде талқыланды. Оқушылар есепті шығарудың тиімсіз тәсілдерін көре білді. Одан әрі меңгерген тәсілдерін жартылай эвристикалық және эвристикалық мәтінді есептерді шығаруға қолдануды үйренді.

Іс-әрекет түрі топтық және өзіндік жұмыстарды орындаудағы жеке жұмысында іске асырылды. Оқушыларға белгісіздерді жаңа айнымалы арқылы белгілеу, әртүрлі берілген жағдайларды қарастыру оқытылды.

Оқу жылының соңындағы сәуір айында эксперименттік оқытудың нәтижесін бақылау жұмысын алумен жүргізіледі.

25-кестеде 7-сынып эксперименттік және бақылау топтарының № 2 бақылау жұмысының (қосымша Ә) нәтижелері көрсетілген.

Кесте 25

Іс-әрекет	№2 б/ж нәтижелері %	
	бақылау сыныбы	экспер. сыныбы
Іздеу тәсілдері орындалды	59	78
Тендеу дұрыс құрастырылды	71	81
Есеп дұрыс шығарылды	68	79

Бақылау жұмыстарының нәтижесі эксперименттік топ оқушыларының көрсеткіштері бақылау тобы оқушыларының көрсеткішінен айтарлықтай жоғары екенін көрсетеді.

26-кестеде 8-сынып эксперименттік және бақылау топтарының № 2 бақылау жұмысының (қосымша Ә) нәтижелері көрсетілген.

Кесте 26

Іс-әрекет	№2 б/ж нәтижелері %	
	бақылау сыныбы	экспер. сыныбы
Іздеу тәсілдері орындалды	60	82
Тендеу дұрыс құрастырылды	75	83
Есеп дұрыс шығарылды	70	80

Бақылау жұмыстарының нәтижесі эксперименттік топ оқушыларының көрсеткіштері бақылау тобы оқушыларының көрсеткіштерінен айтарлықтай жоғары екенін көрсетеді.

27-кестеде 9-сынып эксперименттік және бақылау топтарының № 2 бақылау жұмысының (қосымша Ә) нәтижелері көрсетілген.

Кесте 27

Іс-әрекет	№2 б/ж нәтижелері %	
	бақылау сыныбы	экспер. сыныбы
Іздеу тәсілдері орындалды	65	88
Тендеу дұрыс құрастырылды	76	87
Есеп дұрыс шығарылды	75	83

Бақылау жұмыстарының нәтижесі эксперименттік топ оқушыларының көрсеткіштері бақылау тобы оқушыларының көрсеткішінен айтарлықтай жоғары екенін көрсетеді.

Бақылау жұмысының нәтижелері бірнеше көрсеткіштері бойынша анықталды. Әрбір анықталатын көрсеткіштің сандық мәні келесі формуламен есептелді: $K_0 = (n_0 + n_1) : N < 1$.

K_d - қалыптасқан білім деңгейінің коэффициенті;

N – сыныптағы оқушылардың саны;

n_0 – барлық сұрақтарға дұрыс және толық жауап бергендер саны;

n_1 - барлық сұрақтарға дұрыс жауап бергендер және толық емес ($n_1 * 0,8$), мұндағы 0,8 дұрыс жауаптар құндылығының шартты коэффициенті.

Зерттеу нәтижесінде алынған барлық таңдама бойынша білімнің қалыптасқандығы көрсеткішінің орташа мәні 28-кестеде көрсетілген.

Кесте 28

№	Анықталатын көрсеткіштер	бақылау тобы	экс. тобы
1	Есеп шартын және талабын түсіну	0,7	0,82
2	Есеп шешімін іздеуді тиімді іске асыру білігі	0,67	0,68
3	Есеп шешімін іздеуді тиімсіз іске асыру білігі	0,30	0,65
4	Есеп шешімін іздеу моделін тендеу немесе теңсіздік ретінде алу	0,5	0,61
5	Алынған тендеуді шешу білігі және есеп шарты мен талабын қанағаттандыратын түбірлерді таңдап алу	0,45	0,58
6	Дұрыс жауап алу	0,4	0,57
7	Білімнің қалыптасу деңгейінің және іс-әрекет тәсілдерінің орташа мәні	0,42	0,65

Бақылау тобындағы білімнің қалыптасу деңгейі көрсеткіштерінің орташа мәні 0,42, ал эксперименттік топ үшін – 0,65 болды. Алынған нәтижелер эксперименттік топтың (деңгейлік есептер жүйесімен) мәтінді және

стандартты емес есептерді шығаруды оқыту деңгейі бақылау тобынан жоғары екенін көрсетеді.

Бұл өңделген мәліметтерден жаңартылған білім мазмұны бойынша орта мектепте математика сабағында оқушылардың есептерді шығару іс-әрекеттерін ұйымдастыру тәсілдері мен оларды оқыту әдістемесінің тиімділігі, қолданылған әдістемелік нұсқаулары мен деңгейлік есептер жүйесінің дұрыстығы нақтыланды. Сонымен қатар зерттеудің ғылыми болжамының дұрыстығы және 7-сыныпқа арналған «Алгебра: Есептер жинағы» мен «Методические основы обучения решению математических задач в школе» оқу құралындағы есептер жүйесі мен әдістемелік ұсынымдар оқушылардың есептерді шығару білімі, білігі мен дағдыларын дамытудағы тиімділігі педагогикалық-тәжірибелік жұмыстар барысында дәлелденді.

Екінші бөлім бойынша тұжырым

1. Математиканы оқыту процесінде негізгі сұрақтардың бірі – есептерді шығаруға оқыту мәселелеріне талдаулар жасай отырып, оқушыларды есептер шығаруға оқытудың төрт кезеңінің (есептің мәтінін талдау, есепті шығарудың жоспарын құрастыру, осы жоспарды іске асыру, шешімнің дұрыстығын тексеру және жауабын жазу) мазмұны және олардың жүзеге асырылуы әдістемелік қолдаумен, мысалдармен және түсіндірмесімен көрсетілді.

Алгебра курсына алгоритмдік әдіспен өрнектерді түрлендіру, ықшамдау, алгебралық бөлшектерге амалдар қолдану және теңдеулерді шешу, мәтінді есептерді шығаруға оқытуда оқушылардың іс-әрекеттерін ұйымдастыру тәсілдері ұсынылды.

2. Алгебра курсының оқу бағдарламасына сәйкес теңдеу, теңсіздік және теңдеулер жүйесін құру арқылы мәтінді есептерді шығаруға оқытудың әдістемелік ұсынымдары мен оқушылардың білімі мен дағдыларын қалыптастыруға бағытталған алгоритмдік, жартылай алгоритмдік, жартылай эвристикалық және эвристикалық түрдегі деңгейлік есептер жүйесі берілді.

Мектеп математика курсына мәтінді есептердің түрлерінің мазмұны беріліп, оларды арифметикалық, алгебралық, геометриялық, кестелік әдістермен шығаруға үйрету және шешімін іздеу тәсілдерінің әдістемелік ерекшеліктері тұжырымдалды.

Алгебра курсына шығару жолдары дайын ережелер арқылы емес, арнайы әдістермен шығаруды талап ететін, яғни оқушылардың математикалық ойлауы мен шығармашылық қабілеттерін дамыту құралы болатын стандартты емес есептер жүйесі және оларды шығаруға оқытудың әдістемесі берілді.

3. Жаңартылған білім мазмұны бойынша негізгі мектепте математика сабағында оқушылардың есептерді шығаруға оқытудың әдістемесінің және әзірленген оқу құралдарының оқу процесінде қолданудың тиімділігі тәжірибе жүзінде тексеріліп, дәлелденді.

ҚОРЫТЫНДЫ

Математикалық есептерді шығару оқушылардың танымдық және логикалық ойлау деңгейін дамытумен қатар, сапалы білім беру негізінде математикалық сауаттылықты қамтамасыз етеді. Жалпы білім беретін мектептерде математиканы оқытудың әдістемесін жетілдіру мәселесі бойынша ғылыми, әдістемелік жұмыстар мен әдебиеттерді зерделей отырып, осы процесті іске асырудың мүмкін жолдары талданды.

Орындалған диссертациялық жұмыс теориялық және эксперименттік сипатқа ие және педагогикалық-психологиялық, дидактикалық-әдістемелік, ғылыми-көпшілік әдебиеттерге талдау жасалып, келесі жұмыстар орындалды:

1. Зерттеу барысында орта мектепте оқушыларды математикалық есептерді және оларды шығаруды оқытудың теория мен практикасы зерттеліп және оның жай-күйі айқындалды. Зерттеу барысында оқушылардың есептерді шығару білігінің қалыптасуы деңгейі олардың математикалық дайындығына қойылатын талаптарға толығымен жауап бермейтінін көрсетті.

2. «Есеп» және «есеп шығару» ұғымдарына әдіснамалық, философиялық, теориялық және әдістемелік деңгейде талдаулар жасалды. Әдіснамалық деңгейде «есеп» ұғымының маңызы жүйелік тәсіл, жүйелік талдау және іс-әрекет теориясы негізінде айқындалды. Философиялық деңгейде есепті әрқайсысы дербес жүйе болатын есептік және шешуші ішкі жүйелерінен тұратын күрделі жүйе ретінде қарастыруға мүмкіндік берді. Теориялық деңгейде «есеп» ұғымы және оны шығару процесінің қазіргі заманғы психологиялық-педагогикалық және әдістемелік әдебиеттердегі тұжырымдары берілді. Әдістемелік деңгейде «есеп» ұғымының маңызы дидактикалық категория – білімді меңгерудің шарты мен нәтижесі, ұғымдарды қалыптастыру және ойлауды дамыту құралы ретінде нақтыланды.

3. Математиканы оқыту процесіндегі есептердің рөлі мен функциясы нақтыланды және есеп шығару – оқушының ойлау қабілетін, шығармашылық қабілетін дамытуға септігін тигізетін оқушының оқу іс-әрекетінің маңызды түрі екендігі көрсетілді.

Математикадан есептердің классификациясы айқындалып, олардың мазмұндық ерекшеліктеріне талдаулар жасалды. Жаңартылған білім мазмұнына сәйкес математиканы оқытудағы дамытушылық есептердің орны мен мазмұны сипатталды.

4. Математикадан есептерді шығаруды оқытудың мәселелерін талдау негізінде оның құрылымдық бірліктері, математиканы оқыту процесінде оқушылардың оқу іс-әрекетін қалыптастыруға бағытталған деңгейлік есептер жүйесін құрастырудың әдістемелік принциптері айқындалды, есептерді шығарудың кезеңдеріне мазмұндық талдаулар жасалып, есеп шығаруды үйретудің тәсілдері қарастырылды.

6. Математикалық есептерді шығаруды оқытудың ұйымдастыру-әдістемелік құраушылары ретінде есептерді шығару кезеңдері тұжырымдалып, олардың жүзеге асырылу жолдары мен мәтінді есептердің деңгейлік жүйесі берілді.

Мектептің алгебра курсындағы мәтінді және стандартты емес есептердің типтері айқындалып, оларды шығаруды оқыту әдістемесі ұсынылды және оның тиімділігі эксперимент жүзінде тексеріліп, дәлелденді.

Ұсынылып отырған диссертациялық жұмыс орта мектепте оқушыларды математикалық есептерді шығаруға оқыту әдістемесін жетілдірудегі зерттеу жұмыстарының бірі болады және диссертацияда тұжырымдалған оқушыларды есептерді шығаруға оқытудағы оқу іс-әрекеттерін ұйымдастыру бойынша әдістемелік ұсынымдарды математика мұғалімдері өздерінің практикалық қызметтерінде тиімді пайдалана алады. Зерттеу нәтижелерін орта мектепте және жоғары оқу орындарында болашақ математика мұғалімдерін даярлауда математиканы оқыту мазмұны мен әдістемесін жетілдіруде де пайдалануға болады.

Математикалық есептерді шығаруды оқыту әдістемесін дамыту мәселелері бойынша зерттеу жұмысының болашағы оқушылардың кәсіби, шығармашылық және тұлғалық қырларында терең қарастырумен байланысты болып табылады.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

- 1 «Қазақстан-2050» Стратегиясы қалыптасқан мемлекеттің жаңа саяси бағыты Қазақстан Республикасының Президенті – Елбасы Н.Ә. Назарбаевтың Қазақстан халқына Жолдауы. - Астана, 2012, желтоқсан - 14.
- 2 Қазақстан Республикасында білім беруді және ғылымды дамытудың 2016-2019 жылдарға арналған мемлекеттік бағдарламасы //Қазақстан Республикасы Президентінің 2016 жылғы 1 наурыздағы №205 Жарлығы.
- 3 Қазақстан Республикасы Орта білім берудің (бастауыш, негізгі орта, жалпы орта білім беру) мемлекеттік жалпыға міндетті стандарты //ҚР Үкіметінің 2012 жылғы 23 тамыздағы №1080 Қаулысымен бекітілген. – Астана, 2012. – 25б.
- 4 Әбілқасымова А.Е. Математиканы оқытудың теориясы мен әдістемесі: дидактикалық-әдістемелік негіздері. – Алматы: Мектеп, 2014. – 224б.
- 5 Абылқасымова А.Е. и др. Научно-методические основы совершенствования содержания общего образования в Республике Казахстан.- Алматы, 2001. -123с.
- 6 Абылқасымова А.Е., Искакова Л.Т. Задачи как средство контроля и оценки знаний учащихся. – Алматы, 2005. – 98с.
- 7 Абылқасымова А.Е., Папышев А.А. Методические основы обучения решению математических задач в средней школе. – Алматы: Комплекс, 2004. – 134с.
- 8 Абылқасымова А.Е. Развитие познавательной самостоятельности студентов в системе методической подготовки в университете. - Алматы: Білім, 1994. – 190с.
- 9 Әбілқасымова А.Е. және т.б. Орта мектепте математика есептерін шығаруға үйретудің әдістемелік негіздері. – Алматы, 2004. – 125б.
- 10 Абылқасымова А.Е. Сборник индивидуальных заданий по курсу:методические основы решения задач. – Алматы: АГУ им.Абая, 1997. – 57с.
- 11 Баймуханов Б.Б. Математика есептерін шығаруға үйрету. – Алматы: Мектеп, 1983.– 145б.
- 12 Есмұқан М.Е. Оқушылардың математикалық білімін қалыптастыруды және ойлау қабілетін дамытуды құрылымдайтын дидактикалық негіздері: дис. ...док. пед.наук. – Алматы: АГУ, 1999. – 208с.
- 13 Кагазбаева А.К. Совершенствование профессионально-методической подготовки учителя математики в системе высшего педагогического образования:дис. ...док. пед.наук. - Алматы: АГУ, 1999. – 324с.
- 14 Мубараков А.М. Научно-методические основы преемственности обучения математике в системе непрерывного образования: дис. ... док. пед. наук. – Алматы: КАО, 2003. – 225с.
- 15 ЖадраеваЛ.У. Дидактико-методические основы создания учебно-методического комплекса по математике для средней школы: дис. ... док. пед. наук. – Бишкек: КАО, 2015. – 207с.
- 16 Смагулов Е.Ж. Дидактические основы формирования математического

мышления учащихся в системе непрерывного математического образования: дис. ...док. пед. наук. – Алматы: КазНПУ, 2009. – 285с.

17 Искакова Л.Т. Методическая система дифференцированных задач как условие контроля и учета результатов обучения математике в средней школе: автореф. ... док. пед. наук. – Алматы: КазНПУ, 2005. - 42 с.

18 Abylkasymova Alma E., Nurmukhamedova Zhanara M., Nurbaeva Dilara M., Zhumalieva Lyazzat D. The Turkish Vector” Influence on Teaching the Exact Disciplines in Modern Educational System of Kazakhstan: on the Example of Teaching Algebra and Mathematics //Global Journal of Pure and Applied Mathematics. – India, 2016. –Vol. 12, №4.– P. 3481-3491.

19 Афанасьев В.Г. Общество: системность, познание и управление. - М.: Политиздат, 1989. – 432с.

20 Балл Г.А. Теория учебных задач: психолого-педагогический аспект. - М.: Педагогика, 1990. – 184с.

21 Фридман Л.М. Логико-психологический анализ школьных учебных задач. - М.: Педагогика, 1987. – 208с.

22 Гурова Л.Л. Исследование мышления как решения задач: дис. ... док. психол. наук. - М., 1975. – 413с.

23 Матюшкин А.М. Проблемные ситуации в мышлении и обучении. - М.: Педагогика, 1972. – 196с.

24 Пойа Д. Математические открытия. – М.: Наука, 1979. – 449 с.

25 Бевз Г.П. Методика викладання математики: навч. посібник. - К.: Вища школа, 1989. – 367с.

26 Черкасов Р.С., Столяр А.А. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика. – М.: Просвещение, 1985. – 336с.

27 Жадраева Л.У., Жумагулова З.А., Жумалиева Л.Д. Системный анализ структуры школьных математических задач //Актуальные проблемы преподавания математики в школе и педагогическом вузе. – М., 2015. – Вып.25. – С.60-66.

28 Блох А.Я., Гусев В.А., Дорофеев Г.В. Методика преподавания математики в средней школе: частная методика. – М.: Просвещение, 1997.–416 с.

29 Жадраева Л.У., Искакова М.Т. Жумалиева Л.Д. Математикалық есептер функциясының кейбір аспектері //Проблемы совершенствования обучения математике, физике и информатике в школе и вузе. – Алматы, 2014. – С.45-48.

30 Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач. - М.: Просвещение, 1989. – 252с.

31 Островский А.И. Что означает «решить задачу»? // Математика в школе. - 1962. - № 2. - С.86-89.

32 Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / под ред. Е. И. Лященко. – М.: Просвещение, 1988. – 223с.

33 Колягин Ю.М., Оганесян В.А. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. – М.: Просвещение, 1977.

- 34 Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике. Обучение математике через задачи и обучение решению задач. – М.: Просвещение, 1977. – 267с.
- 35 Нешков К.И., Семушин А.Д. Функции задачи в обучении //Математика в школе. –1971.№3. – С.3 – 4.
- 36 Миракова Т.Н. Развивающие задачи на уроках математики в V-VIII классах: пособие для учителя. – Львов: Журнал «Квантор», 1991. – 95с.
- 37 Истомина Н.Б. Уроки математики: 5-6 классы. Содержание курса Планирование урока: методические рекомендации: пособие для учителей. – Смоленск: Ассоциация XXI век, 2007. – 224с.
- 38 Крупич В.И. Теоретические основы обучения решению математических задач. – М.: Просвещение, 1992. – 278с.
- 39 Нурмухамедова Ж.М., Жумалиева Л.Д., Нурбаева Д.М., Жансеитова Л.С. Мектептерде және педагогикалық жоғары оқу орындарында математиканы оқытудың кейбір мәселелері //Хабаршы. Абай ат. ҚазҰПУ. «Физика-математика ғылымдары» сериясы.– Алматы, 2016. - №4 (56). – Б.85-91.
- 40 Шохор-Троцкий С.И.Методика арифметики: пособие для учителей средней школы. – 5-е изд. – М.; Л.: Госпедиздат, 1935. – 343с.
- 41 Леонтьев А.Н. Избранные психологические произведения: В 2 т. – М.: Педагогика, 1988. – 392 с.
- 42 Колягин Ю.М., Хурогиевская В.Ф., Гульчевская В.Г.О системе учебных задач как средстве развития математического мышления школьников. – М.: Просвещение, 1997.
- 43 Фридман Л.М., Турецкий Е.Н. Как научиться решать задачи. - 3-е изд., дораб. - М.: Просвещение, 1999. – 192с.
- 44 Эсаулов А.Ф. Психология решения задач. – М.: Издательство «Высшая школа», 1972. – 216с.
- 45 Колягин Ю.М. Учебные математические задания творческого характера//Роль и место задач в обучении математике/ под.ред. Ю.М. Колягина. – М., 1973. – Вып. 2. – С.5-19.
- 46 Дорофеев Г.В., ПотаповМ.К., РозовН.Х. Пособие по математике для поступающих в вузы. – М.: Наука, 1968. – 640 с.
- 47 Кордемский Б.А. Очерки о математических задачах на смалку. – М.: Просвещение, 1958. – 116 с.
- 48 Столяр А.А. Как математика ум в порядок приводит. – Минск: Вышэйшая школа, 1991.– 207 с.
- 49 Перельман Я.И. Занимательная алгебра. – М.: Наука, 1975. – 200с.
- 50 Березанская Е.С. Методика арифметики для учителей средней школы. – 5-е изд. перераб. –М.: Учпедгиз, 1955. – С.393-513.
- 51 Методика перподавания математики в восьмилетней школе/ под.ред. С.Е. Ляпина. –М.: Просвещение, 1965. – 742с.
- 52 Нурмухамедова Ж.М., Нурбаева Д.М., Жумалиева Л.Д., Жансеитова Л.Ж., Дюсов М.С. О некоторых вопросах обучения математике в школах и педагогических вузах Казахстана //Материалы III Международной научной конференции «Актуальные проблемы обучения математике в школе и вузе в свете идей Л.С. Выготского». – М., 2016. – С.201-207.

- 53 Философский энциклопедический словарь/гл.ред. Л.Ф.Ильичев, П.Н.Федосеев, С.М.Ковалев, В.Г.Панов. - М.: Советск.Энцикл., 1993. – 840с.
- 54 Психологический словарь /под ред. В.В.Давыдова, А.В.Запорожца, Б.Ф.Ломова и др. - М.: Педагогика, 1993. – 448с.
- 55 Выготский Л.С. Собрание сочинений // В 6 т. Мышление и речь. - М.: Педагогика, 1984. - Т.2.- С.5-361.
- 56 Запорожец А.В. Восприятие и действие /под ред. А.В.Запорожца. - М.: Просвещение, 1991. – 240с.
- 57 Рубинштейн С.Л. Основы общей психологии // В 2 т. - М.: Педагогика, 1989. - Т.1. – 488с.
- 58 Бенерджи Р. Теория решения задач. - М.: Мир, 1992. – 242с.
- 59 Ефимев Е.И. Решатели интеллектуальных задач. - М.: Наука, 1993. – 320с.
- 60 Козелецкий Ю.К. Психологическая теория. - М.: Прогресс, 1989. -504с.
- 61 Пойа Д. Как решать задачу: пособие для учителей /пер. с англ.; под ред. Ю.М.Гайдука. - М.: Учпедгиз, 1961. – 207с.
- 62 Тулкибаева Н.Н., Усова А.В. Методика обучения учащихся умению решать задачи.– Челябинск: Челяб.гос.пед.ин-т., 1991. – 186с.
- 63 Дункер К., Кречевский О. Процесс решения задач//Психология мышления. - М.: Прогресс, 1996. - С.235-242.
- 64 Тихомиров О.К. Структура мыслительной деятельности человека. - М.: Изд-во МГУ, 1989. – 304с.
- 65 Кондаков Н.И. Логический словарь. - М.: Наука, 1981. - 656 с.
- 66 Дружинин В.В., Конторов Д.С. Идея, алгоритм, решение. - М.: Воениздат, 1982. – 328с.
- 67 Ларичев О.И. Наука и искусство принятия решений. - М.:Наука, 1989. - 200с.
- 68 Гальперин П.Я. Развитие исследований по формированию умственных действий //Психологическая наука в СССР. - М.: Изд-во АПН РСФСР, 1969. - Т. 1С. 441-469.
- 69 Щедровицкий Г.П. К анализу процессов решения задач//Доклады АПН РСФСР. - 1960. - №5. - С.25-28.
- 70 Секей Л. Знание и мышление/под ред. А.М.Матюшкина. - М.: Прогресс, 1965. – 365с.
- 71 Богоявленский Д.Н., Менчинская Н.А. Психология усвоения знаний в школе. - М.: Изд-во АПН РСФСР, 1965. – 347с.
- 72 Коменский Я.А., Локк Д., Руссо Ж.-Ж., Песталоцци Г. Педагогическое наследие/сост. В.М.Кларин, А.Н. Джуринский. - М.: Педагогика, 1999. – 416с.
- 73 Abylkassymova A.E, Zhumaliyeva L.D. On special -methodical training of the future teachers //Хабаршы. Абай ат.ҚазҰПУ. «Физика-математика ғылымдары» сериясы.– Алматы, 2017. – №1 (57). – Б.5-7.
- 74 Саранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе. – М.: Просвещение, 2002. – 224с.

75 Жумалиева Л.Д., Мураталиев Ж.С. Есептерді әртүрлі тәсілдермен шығарудың әдістемелік тұрғыдан тиімділігі // Хабаршы. Абай ат. ҚазҰПУ. «Жас ғалым. Ізденістер. Мәселелер. Зерттеулер» сериясы. – Алматы, 2016. - №2 (8). – Б.44-49.

76 Брадис В.М. Методика преподавания математики в средней школе: Учебное пособие для студентов педагогических институтов/ гл.ред. А.И. Маркушевич. - 2-е изд. – М.: Учпедгиз, 1951. – 503с.

77 Жұмағұлова З.А., Жұмалиева Л.Д. Алгебра: Есептер жинағы. Жалпы білім беретін мектептің 7-сыныбына арналған: оқу құралы. – Алматы: Мектеп, 2017. – 36б.

78 Жалпы орта білім беру ұйымдарына арналған оқу пәндерінен үлгілік оқу бағдарламалары //Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрінің 2013 жылғы 3 сәуірдегі №115 бұйрығымен бекітілген.

79 Әбілқасымова А.Е., Кучер Т.П., Корчевский В.Е., Жұмағұлова З.А. Алгебра: жалпы білім беретін мектептің 7-сыныбына арналған оқулық. – Алматы: Мектеп, 2017. – 272б.

80 Жадраева Л.У., Жумалиева Л.Д. Көпмүшеліктерді әртүрлі тәсілдердің комбинациялары көмегімен көбейткіштерге жіктеу //«Әлемдік ақпараттық білім беру кеңістігі бәсекеге қабілетті ұстаз қолында» атты Республикалық жас ғалымдар арасындағы ғылыми-практикалық конференциясының материалдары. – Алматы, 2015. – Б.411-414.

81 Чичаева И.В. Один из приемов обучения решению задач // Математика в школе. – 1988. - № 2. – С.19-21.

82 Әбілқасымова А.Е., Кучер Т.П., Корчевский В.Е. Алгебра: Әдістемелік нұсқау: жалпы білім беретін мектептің 7-сынып мұғалімдеріне арналған құрал. – Алматы: Мектеп, 2017. – 100б.

83 Колесникова С.И. Текстовые задачи. Математика. – М.: ООО «Азбука-2000», 2014. – 112с.

84 Демидова Т.Е., Тонких А.П. Текстовые задачи и методы их решения. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. – 261с.

85 Гороховцева Л.А. Процесс решения текстовой задачи при изучении математике в средней школе //Теория и практика высш.проф.обр. - 2003. - №9. – С.14-21.

86 Шевкин А.В. Обучение решению текстовых задач в 5-6 классах: книга для учителя. – М.: галс плюс, 1998. – 168с.

87 Занков Л.В. Развитие учащихся в процессе обучения. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1963.

88 Абылкасымова А.Е., Туяков Е.А., Жумалиева Л.Д., Нурмухамедова Ж.М. Методические основы обучения решению математических задач в школе. – Алматы: Мектеп, 2017. – 252с.

89 Кабулова А.Р., Жадраева Л.У., Жумалиева Л.Д. Есептерді теңдеулер мен теңсіздіктер құру арқылы шығару //Сборник научных трудов XIII Международной научной конференции «Актуальные научные исследования в современном мире». – Переяслав; Хмельницкий, 2017. – Вып. 2(22). – С.107-112.

- 90 Билялова Ж.Т. Бастауыш сыныптарда математиканы оқытуда оқу есептерін пайдалану әдістемесі: пед.ғыл.канд. ...автореф. - Алматы, 2000. – 26б.
- 91 Епишева О.Б., Крупич В.И. Учить школьников учиться математике: Формирование приемов учебной деятельности. –М.: Просвещение, 1990. – 128с.
- 92 Захарова А.Е. как помочь школьникам преодолеть некоторые затруднения в овладении решением текстовых задач // Сборник научных трудов математического факультета МПГУ. – М.: МПГУ, 2005. – С.119-124.
- 93 Қайыңбаев Ж.Т., Жумалиева Л.Д. Саралап оқыту қазіргі заманғы білім беру мәселесінің басты проблемалары //Материалы Международной научно-практической конференции «Радиационно-термические явления и инновационные технологии». – Алматы, 2015. – С.94-98.
- 94 Галкин Е.В. Нестандартные задачи по математике: учебное пособие для учащихся 7-11 классов. – Челябинск, 2004. – 449 с.
- 95 Гусев В.А., Орлов А.И., Розенталь А.Л. Внеклассная работа по математике в 6-7 классах. – М.: Просвещение, 1984. – 289 с.
- 96 Гнеденко Б.В. Развитие мышления и речи при изучении математики// Математика в школе.-1991. - №4. – С.3-9.
- 97 Жумалиева Л.Д. Болашақ математика мұғалімдерінің кәсіби құзыреттілігін қалыптастырудағы элементар сандар теориясының есептері//Хабаршы. Абай ат.ҚазҰПУ «Физика-математика ғылымдары» сериясы.– Алматы, 2017. - №2 (58). – Б.40-43.
- 98 Агаханов Н.Х., Подлипский О. Математические олимпиады Московской области: 1993-2002. – М.: Изд-во МФТИ, 2003. – 224с.

ҚОСЫМША А

Кесте А1 - Сызықты теңдеулерді құрастыруға арналған мәтінді есептердің жүйесі

Есептің мәтіні	Тапсырма
1	2
Екі жұмысшы бірігіп 86 тетік дайындады және бірінші жұмысшы екіншіден 8 тетік кем дайындады. Әрбір жұмысшы қанша тетік дайындады?	Есептің шарты мен талабын ажыратыңдар. Негізгі қатынас моделін көрсетіңдер.
Шаруа қожалығы 38 га жерге егін егу үшін 59 ц бидай қажет болды. Бір гектарға қанша бидай қажет?	Берілген есепте қолданылатын негізгі қатынас моделі қандай және оны алдыңғы есеппен салыстырыңдар.
Теплоход өзен ағысы бойымен 9 сағатта жүретін жолды өзен ағысына қарсы 11 сағатта жүріп өтеді. Егер өзен ағысының жылдамдығы 2 км/сағ болса, онда теплоходтың меншікті жылдамдығын табыңдар.	Есепті негізгі қатынасты қолданып, теңдеу құру арқылы шығарыңдар.
Тапсырысты уақытында орындау үшін бригада күніне 40 өнім дайындау қажет болатын. Бірақ бригада күніне 20 бұйым артық дайындап, тапсырысты 3 күнге ерте аяқтады. Бригада жоспар бойынша тапсырысты неше күнде орындауы керек еді?	Тапсырысты уақытында орындаған жағдайда берілген шамалардың мәндері мен олардың арасындағы қатынасты қолданып, теңдеу құрыңдар.
Тапсырысты уақытында орындау үшін бригада күніне 40 өнім дайындау қажет болатын. Бірақ бригада күніне 20 бұйым артық дайындап, тапсырысты 3 күнге ерте аяқтады. Бригада жоспар бойынша тапсырысты неше күнде орындауы керек еді?	Есептің шешімін іздеудің басқа моделін құрыңдар және 4,5 есептердің шешімдерін салыстырыңдар.
Лагерьден өзенге дейін туристер 4,5 км/сағ жылдамдықпен барып, 4 км/сағ жылдамдықпен кері қайтты. Қайтар жолда туристер 15 мин артық жүрді. Лагерь мен өзеннің арақашықтығын табыңдар.	Туристердің жүрген уақыттарын салыстырып, есепті шығарыңдар
Лагерьден өзенге дейін туристер 4,5 км/сағ жылдамдықпен барып, 4 км/сағ жылдамдықпен кері қайтты. Қайтар жолда туристер 15 мин артық жүрді. Лагерь мен өзеннің арақашықтығын табыңдар.	Ізделінді шаманы x деп белгілеп, есепті шығарыңдар
Бағалары 280 тг және 200 тг болатын ұнның екі сортынан 1 кг бағасы 216 тг болатын 50 кг қоспа жасады. Әрбір сорттан қанша кг ұн алынған?	Үш жағдайды қарастырып, есепті шығарыңдар. Негізгі қатынасты қолданып, теңдеу құрыңдар.
Бір пункттен бір бағытта екі теплоход шықты. Бірінші теплоход 1,5 сағатта 37,5 км, ал екінші теплоход 2 сағатта 45 км жол жүреді. Қанша уақыттан кейін екі теплоходтың арасы 10 км болады?	Төрт жағдайды қарастырып, есепті шығарыңдар. Бір жағдайдағы негізгі қатынасты қолданып, теңдеу құрыңдар.

А1 – кестенің жалғасы

1	2
Моторлы қайық бір пункттен екінші пунктке 4 сағ жүзеді, ал қайтар жолда 5 сағат жүзеді. Егер өзен ағысының бойымен 3,5 сағатта 70 км жүзсе, онды моторлы қайықтың тынық судағы жылдамдығы қандай?	Үш жағдайды қарастырып, есепті шығарыңдар. Ара қашықтықтардың арасындағы қатынасты қолданып, теңдеу құрыңдар. Жауаптарыңды есепті басқа әдіспен шығарып, тексеріңдер.
Туристер 1 сағатта 3 км жүрді. Егер осы жылдамдықпен жүре берсе, олар кездесу орнына 40 мин кешігер еді, сондықтан олар жылдамдықтарын $\frac{1}{3}$ -ке арттырып, кездесу орнына көздеген уақыттан 45 мин ерте барды. Туристер жиналу орнына дейін қанша жол жүрді және ол жолға қанша уақыт жұмсады?	Үш жағдайды қарастырып, есепті шығарыңдар. Ара қашықтықтардың теңдігінің арасындағы қатынасты қолданып, теңдеу құрыңдар. Жауаптарыңды есепті басқа әдіспен шығарып, тексеріңдер.
Токарь 6 сағатта жасайтын жұмысты шәкірті 8 сағатта бітіреді. Егер олар бірігіп, 5 сағатта 175 тетік дайындаса, онда әрқайсысы 1 сағатта қанша тетік дайындайды?	Үш жағдайды қарастырып, есепті шығарыңдар. Құрылымы осы есепке ұқсас есеп құрастырыңдар.
Екі ауылдың арасы 9 км. Жолда тегіс, ойлы-қырлы жерлер кездеседі. Жолаушының тегіс жолдағы жылдамдығы 5 км/сағ, қырға қарай жылдамдығы 4 км/сағ, ойға қарай жылдамдығы 6 км/сағ. Жолаушы бір ауылдан екінші ауылға және кері жолға 3 сағ 41 мин жұмсаған болса, онда тегіс жолдың ұзындығын табыңдар.	Үш жағдайды қарастырып, есепті шығарыңдар. Есептің шешімінің моделін құрыңдар және дұрыстығын тексеріңдер.
Бағалары 340 тг және 400 тг болатын қоспаның екі сортынан 1 кг бағасы 364тг болатын 10 кг қоспа жасады. Әрбір сорттан қанша кг цемент алынған?	Үш жағдайды қарастырып, есепті шығарыңдар. Есепті сатып алынған тауарлардың жалпы құнын ескеріп шығарыңдар.
Оқушы 3 қалың дәптер мен 2 қарындашқа 600 тг төледі. Екінші оқушы 2 қалың дәптер және 2 қарындашқа 460 тг төлдеі. Қалың дәптер мен қарындаштың әрқайсысының бағасы қанша?	Төрт жағдайды қарастырып, есепті шығарыңдар. Бір жағдайдағы негізгі қатынасты қолданып, теңдеу құрыңдар.
Бір пункттен бір бағытта екі теплоход шықты. Бірінші теплоход 1,5 сағатта 37,5 км, ал екінші теплоход 2 сағатта 45 км жол жүреді. Қанша уақыттан кейін екі теплоходтың арасы 10 км болады?	Төрт жағдайды қарастырып, есепті шығарыңдар. Бір жағдайдағы негізгі қатынасты қолданып, теңдеу құрыңдар.
Туристер бекетке 3,5 км/сағ жылдамдықпен жүріп келеді. Егер олар осы жылдамдықпен жүре берсе, бекетке көздеген уақыттан 1 сағ кешігетіндерін түсініп, жылдамдықтарын 1,5 км/сағ-қа арттырып, станцияға көздеген уақыттан 30 мин ерте барды. Туристер қанша жол жүрді?	Төрт жағдайды қарастырып, есепті шығарыңдар. Есепті ара қашықтық үшін теңдеу құрыңдар. Есепті шешудегі өздеріңнің қадамдарыңды бағаландар

А1 – кестенің жалғасы

1	2
А және В пункттерінен қарсы бағытта екі мотоциклші жолға шығып. 5 сағаттан соң кездесті. А пунктінен шыққан мотоциклшінің жылдамдығы екінші мотоциклшінің жылдамдығынан 10 км/сағ кем. Егер екі мотоциклші де өзінің жылдамдықтарынан 10 км/сағ артық жылдамдықпен жүрген болса, онда ол 4 сағаттан соң кездесер еді. А және В пункттерінің ара қашықтығын табыңдар.	Төрт жағдайды қарастырып, есепті шығарыңдар. Осы модельмен шығатын басқа есеп құрастырыңдар
Туристік лагерьдегі №1 бағыт төрт кезеңнен тұрды: тауға көтерілу, таудың тегіс бөлігі, төмен түсу және таудың бөктерімен тегіс жолмен жүру. №2 бағыт тегіс жолда бір айналым жасауы тиіс болатын. Қырға қарай жылдамдық 4 км/сағ, тегіс жолда 5 км/сағ төмен қарай 6 км/сағ болды. Бірінші топ жолдың екінші кезеңіне бірінші кезеңмен салыстырғанда 1 сағ артық және үшінші кезеңмен салыстырғанда 2 сағ артық жұмсады, төртінші кезеңге бірінші кезеңмен салыстырғанда екі есе артық уақыт жұмсады. Бағыттардың ұзындықтарын табыңдар.	Есепті №2 бағыт үшін берілген шамаларды есепкеріп шығарыңдар. Өз шешімдеріңді бағалаңдар.
А қаласынан В қаласына жылдамдығы 40 км/сағ болатын автобус жолға шықты. Ширек сағаттан кейін В қаласынан келе жатқан жеңіл көлікпен кездесті. Жеңіл көлік кездескеннен кейін 15 мин ішінде А қаласына барып кейін шықты да, автобусты В қашықтықтан 40 км қашықтықта қуып жетті. Егер жеңіл көліктің жылдамдығы 50 км/сағ болса, онда А және В қалаларының арақашықтығын табыңдар.	Бес жағдайды қарастырып, есепті шығарыңдар. Екі жағдайдың уақыттарының арасындағы байланысты пайдаланып, теңдеу құрыңдар

Кесте А 2 - Сызықты теңдеулер жүйесін құрастыруға арналған мәтінді есептер жүйесі

Есептің мәтіні	Оқу тапсырмасы
1	2
Екі жұмысшы бірлесіп 86 тетік жасап шығарды, бірақ бірінші жұмысшы екінші жұмысшыға қарағанда 8 тетік кем жасады. Әр жұмысшы неше тетіктен жасады?	Есептің шарты мен талабын ажыратыңдар. Екі белгісізді белгілеп көрсетіндер.
Екі санның қосындысы 63-ке, ал айырымы 12-ге тең. Осы сандарды табыңдар.	Берілген есепте қолданылатын негізгі қатынас моделі қандай және оны алдыңғы есеппен салыстырыңдар.
Әкесі қызынан 26 жас үлкен, ал 4 жылдан кейін әкесінің жасы қызының жасынан 3 есе үлкен болады. Әкесі мен қызы қанша жаста?	Есепті негізгі қатынасты қолданып, теңдеу құрып шығарыңдар.
Тік ұшақ екі ауыл арасын желдің бағытымен 1,5 сағатта, ал желге қарсы 2 сағатта ұшып өтті. Екі ауылдың арақашықтығын табыңыз, егер желдің жылдамдығы 10 км/сағ болса.	Бірінші және екінші жағдайлар арасындағы қатынасты қолданып, теңдеу құрыңдар.

А2– кестенің жалғасы

1	2
Екі бригада бірге 1456 ц карабидай жинады. Бірінші бригада карабидайды 46 га жерден, ал екінші бригада 35 га жерден жинады. Әрқайсысы жеке 1 га жерден орташа қанша центнерден жинаған, егер бірінші бригада екіншіге қарағанда 1 га жерден 7 ц артық жинаған болса.	Есептің шешімін іздеудің моделін құрыңдар, бірінші және екінші бригадалардың байланысын ескере отырып, теңдеу құрыңдар.
600 г шоколад пен 1,5 кг вафлиге 4620 тг төленді. Егер 1 кг вафли 1кг шоколадқа қарағанда 1440 тг-ге арзан болса, онда вафлидің бағасы қандай?	5-6 есеп шешімдерінің моделін салыстырыңдар. Ұқсас есептер құрыңдар.
Теплоход өзен бойымен арақашықтығы 80 км болатын екі айлақтың арасын, өзен ағысымен 3 сағ 20 минутта, ағысқа қарсы 5 сағатта жүзіп өтті. Өзен ағысының жылдамдығы мен теплоходтың жылдамдығын табыңдар.	Есептен екі жағдайды бөліп алып, есептің шешімін іздеу қадамының дұрыстығына көз жеткізіңдер.
Егер бөлшектің алымына 3-ті қосып, ал бөлімін өзгеріссіз қалдырса, онда 1 шығады. Ал егер бөлшектің бөліміне 2-ні қосып, алымын өзгеріссіз қалдырса, $\frac{1}{2}$ -ге тең бөлшек шығады. Бастапқы бөлшекті табыңдар.	Үш жағдайды қарастырып, есепті шығарыңдар. Негізгі қатынасты қолданып, теңдеу құрыңдар.
Екі теплоход бір пункттен бірдей бағытта және бірдей уақытта шықты. Бірінші теплоход әрбір 1,5 сағатта 37,5 км, ал екінші теплоход әрбір 2 сағатта 45 км жүзіп өтеді. Қанша уақыттан кейін бірінші теплоход екінші теплоходтан 10 км қашықтықта болады?	Төрт жағдайды қарастырып, есепті шығарыңдар. Бір жағдайдағы негізгі қатынасты қолданып, теңдеу құрыңдар.
Моторлы қайық бірінші пристаньнан екінші пристаньға жүзіп баруға 4 сағат, ал қайтар жолға 5 сағат жұмсады. Егер қайық 70 км-ді ағыспен бірге 3,5 сағатта жүзіп өтетін болса, онда қайықтың тынық судағы жылдамдығын табыңдар.	Үш жағдайды қарастырып, есепті шығарыңдар. Ара қашықтықтардың арасындағы қатынасты қолданып, теңдеу құрыңдар. Жауаптарыңды есепті басқа әдіспен шешіп, тексеріңдер
Туристтер бірінші сағатта 3 км жүріп өтті. Егер де олар осы жылдамдықтарымен жүре берсе, онда олар баратын жерге 40 минут кешігеді. Сондықтан олар жылдамдықтарын $\frac{1}{3}$ -ге арттырып, баратын жерге 45 минут ерте келді. Туристтер қандай жол жүріп өтті және сол жолға қанша уақыт жұмсады?	Үш жағдайды қарастырып, есепті шығарыңдар. Ара қашықтықтардың мәндерінің теңдігінің арасындағы қатынасты қолданып, теңдеу құрыңдар. Жауаптарыңды есепті басқа әдіспен шешіп, тексеріңдер
Шәкірті 8 сағатта жасайтын бұйымды, ұстазы 6 сағатта жасап шығарады. Ұстазы мен шәкірті жеке-жеке 1 сағатта қанша бұйым жасайтынын табыңыз, егер олар бірлесіп жұмыс жасағанда 5 сағатта 175 бұйым жасап шығаратын болса.	Үш жағдайды қарастырып, есептің шешімін іздеудің моделін құрыңдар. Құрылымы бірдей, берілген шамалардың мәндері әртүрлі болатындай есеп құрастырыңдар.

A2– кестенің жалғасы

1	2
Велосипедші белгілі бір жылдамдықпен А пунктiнен В пунктiне келді. Егер ол жылдамдығын 3км/сағ-арттырса, онда көздеген уақыттан 1 сағ ерте келер еді, егер ол сағатына 2 км кем жүрсе, онда көздеген уақыттан 1 сағ кеш келер еді. А және В қалаларының ара қашықтығын, велосипедшінің жылдамдығын және жолға жұмсаған уақытын табыңдар.	Үш жағдайды қарастырып, есепті шығарыңдар. Есептің шешімінің моделін құрыңдар және дұрыстығын тексеріңдер
Жылқыларға белгілі бір уақытқа шөп жиналды. Егер жылқылардың саны 2-ге кем болса, онда жиналған шөп тағы 10 күнге жетер еді, ал жылқылардың саны 2-ге артық болса, онда жиналған шөп 6 күнге жетпей қалар еді. Жылқылардың саны қанша және жиналған шөп қанша күнге жоспарланған еді?	Үш жағдайды қарастырып, есепті шығарыңдар. 13 және 14 есептің шешу модельдерін салыстырыңдар. Шамалардың басқа мәндерімен ұқсас есеп құрастырыңдар.
Бағалары 340 тг және 400 тг болатын цементтің екі сортынан 1 кг бағасы 364тг болатын 10 кг қоспа жасады. Әрбір сорттан қанша кг цемент алынған?	Үш жағдайды қарастырып, есепті шығарыңдар. Есепті сатып алынған тауарлардың жалпы құнын ескеріп шығарыңдар
Оқушы 3 қалың дәптер мен 2 қарындашқа 6600 тг төледі. Басқа оқушы 2 қалың дәптер және 2 қарындашқа 4600 тг төлдеі. Қалың дәптер мен қарындаштың әрқайсысының құны қанша?	Есепті белгісіз енгізіп шығарыңдар
Бір пункттен бір бағытта екі теплоход шықты. Бірінші теплоход 1,5 сағатта 37,5 км, ал екінші теплоход 2 сағатта 45 км жол жүреді. Қанша уақыттан кейін екі теплоходтың арасы 10 км болады?	Төрт жағдайды қарастырып, есепті шығарыңдар. Бір жағдайдағы негізгі қатынасты қолданып, теңдеу құрыңдар.
Екі трактор бірігіп 678 га жер жыртты. Бірінші трактор 8 күн, екіншісі 11 күн жұмыс жасады. Егер бірінші трактор 3 күн ішінде екінші трактордың 4 күнде жыртқан жерінен 22 га кем жыртқан болса, онда әрбір трактор бір күнде қанша жер жыртқан?	Төрт жағдайды қарастырып, есепті шығарыңдар. Бір жағдайдағы негізгі қатынасты қолданып, теңдеу құрыңдар.
Оқушы 3 қалың дәптер мен 3 қарындашқа 6600 тг төледі. Басқа оқушы 2 қалың дәптер және 2 қарындашқа 4600 тг төлдеі. Қалың дәптер мен қарындаштың әрқайсысының құны қанша?	Есепті 18-есеппен салыстырып, шығарыңдар
А және В пункттерінен қарама-қарсы бағытта екі мотоциклші жолға шығып, 5 сағаттан соң кездесті. А пунктiнен шыққан мотоциклдың жылдамдығы екінші мотоциклдың жылдамдығынан 10 км/ сағ кем. Егер екі мотоцикл де өзінің жылдамдықтарынан 10 км/сағ артық жылдамдықпен жүрген болса, онда ол 4 сағаттан соң кездесер еді. А және В пункттерінің ара қашықтығын табыңдар.	Төрт жағдайды қарастырып, есепті шығарыңдар. Осы модельмен шығатын басқа есеп құрастырыңдар

Стандартты емес есептер жүйесі

1. $2x^2 - (\sqrt{3} + 5)x - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 0$ теңдеуінің түбірлері x_1, x_2 екені белгілі болса, $A = x_1 + x_1x_2 + x_2$ өрнегінің мәнін есептеп, A мен 1,999 санын салыстырыңдар.

2. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\frac{100^n}{2^{2n+1} \cdot 5^{2n-2}}$ $n \in N$. 2) $\frac{21^n}{3^{n-1} \cdot 7^{n+1} + 3^n \cdot 7^n}$, $n \in N$. 3) $\frac{4 \cdot 18^n}{3^{2n-1} \cdot 2^{n+1}}$, $n \in N$

3. Көпмүшелікті көбейткіштерге жіктендер:

1) $2x^2y + 4xy^2 - x^2z + xz^2 - 4y^2z + 2yz^2 - 4xyz$. 2) $(x^2 + y^2)^3 - (y^2 + z^2)^3 - (x^2 - z^2)^3$.

3) $x(y - 2z)^2 + y(x - 2z)^2 - 2z(x + y)^2 + 8xyz$.

4. Өрнектің мәнін табыңдар:

1) $\sqrt{|97 - 56\sqrt{3}|} + \sqrt{|97 + 56\sqrt{3}|}$ 2) $\sqrt[3]{4\sqrt{5} - 8\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{13 + 4\sqrt{10}} \cdot \sqrt[3]{144}$

3) $\frac{9}{5 - \sqrt{7}} + \frac{22}{7 + \sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$.

5. Дәлелдендер:

1) $(2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}) : 17$; 2) $(2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1}) : 37$; 3) $(3^{2n+2} \cdot 5^{2n} - 3^{3n+2} \cdot 2^{2n}) : 1053$.

6. Теңдеуді шешіндер:

1) $x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 2x + 1 = 0$. 2) $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = 0$.

3) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$. 4) $15x^4 - 16x^3 - 30x^2 + 16x + 15 = 0$.

5) $(x+1)^3 + (x+2)^3 - 8x^3 - 27 = 0$. 6) $(2x+1)^3 + (x+1)^3 - 27x^3 - 8 = 0$.

7. Теңдеулер жүйесін шешіндер:

1) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 74, \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 73. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 3xy + 4y^2 - 6x + 2y = 0, \\ x - 2y = 3. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19(x - y)^2, \\ x^2 - xy + y^2 = 7(x - y). \end{cases}$

8. Теңсіздікті шешіндер:

1) $(x^2 - 3x + 2)(x^3 - 3x^2)(4 - x^2) \leq 0$. 2) $x^6 - 9x + 8 > 0$.

3) $x^8 - 6x^7 + 9x^6 - x^2 + 6x - 9 > 0$.

9. Егер $a + b + c \geq 0$ болса, онда $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ орындалатынын дәлелдендер.

10. Егер $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$ болса, онда $\frac{a+b+c+d}{2} \geq \sqrt[4]{abcd}$ орындалатынын дәлелдендер.

11. Егер $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$ болса, онда $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$ орындалатынын дәлелдендер.

ҚОСЫМША Ә

7-сыныпқа арналған №1 бақылау жұмысының тапсырмалары

1. Теплоход өзен ағысы бойымен 9 сағатта өзен ағысына қарсы 11 сағатта жүретін жолды жүріп өтеді. Егер өзен ағысының жылдамдығы 2 км/сағ болса, онда теплоходтың меншікті жылдамдығын табындар.

2. Туристер бекетке 3,5 км/сағ жылдамдықпен жүріп келеді. Егер олар осы жылдамдықпен жүре берсе, бекетке көздеген уақыттан 1 сағ кешігетіндерін түсініп, жылдамдықтарын 1,5 км/сағ-қа арттырып, станцияға ойлаған уақыттан 30 мин ерте келді. Турситер қанша жол жүрді?

3. Жылқыларға белгілі бір уақытқа шөп жиналды. Егер жылқылардың саны 2-ге кем болса, онда жиналған шөп тағы 10 күнге жетер еді, ал жылқылардың саны 2-ге артық болса, онда жиналған шөп 6 күнге жетпей қалар еді. Жылқылардың саны қанша және жиналған шөп қанша күнге жоспарланған еді?

4. Оқушы 24 қалам мен дәптерді 5760 теңгеге сатып алды. Қалам 120 теңге, ал дәптер 320 теңге тұрады. Әрқайсысынан қанша данадан алды?

5. Бір қатарға бір бірінің ара қашықтықтары тең болатындай 11 баған тұрғызылды. Бірінші бағаннан соңғы бағанға дейінгі ара қашықтық 110 м-ге тең. Екінші бағаннан алтыншы бағанға дейінгі қашықтық неге тең?

7-сыныпқа арналған №2 бақылау жұмысының тапсырмалары

1. Тапсырысты уақытында орындау үшін бригада күніне 40 тетік дайындау қажет болатын. Бірақ бригада күніне 20 тетік артық дайындап, 3 күнге ерте бітірді. Бригада жоспар бойынша тапсырысты неше күнде бітіру керек еді?

2. Оқушы 3 қалың дәптер мен 2 қарындашқа 600 тг төледі. Екінші оқушы 2 қалың дәптер және 2 қарындашқа 460 тг төлдеі. Қалың дәптер мен қарындаштың әрқайсысының бағасы қанша?

3. Бағалары 280 тг және 200 тг болатын ұнның екі сортынан 1 кг бағасы 216 тг болатын 50 кг қоспа жасады. Әрбір сорттан қанша кг ұн алынған?

4. А мен В-ның ара қашықтығы 130 км. А-дан В-ға шыққан автомобиль дөңгелегін ауыстыру үшін 80 мин-қа тоқтап, ауысытырып болған соң, дәл сол жылдамдықпен тағы 40 мин жүріп, В пунктіне келді. Автомобиль жылдамдығын табындар.

7. Зерттеуші-саяхатшы 6 күндік шөлді жерді жүріп өтуі керек. Қажет жағдайда қасына бірнеше көмекші ала алады. Әрбір адам өзімен ғана 4 күндік азық алып жүре алатын болса, зерттеуші өзімен қанша көмекші алып жүруі керек?

8-сыныпқа арналған №1 бақылау жұмысының тапсырмалары

1. Бірінші сан екінші саннан 1-ге артық және олардың көбейтіндісі 56-ға тең. Осы сандарды табындар.

2. Моторлы қайық өзен ағысымен 11 км және өзен ағысына қарсы 12 км жүріп, барлық жолға 2 сағ жібереді. Егер өзен ағысының жылдамдығы 3 км/сағ болса, онда моторлы қайықтың жылдамдығы неге тең?

3. Бригада белгілі бір уақытта 120 га жерге егін егуді жоспарлады. Бірақ күн сайынғы жоспарды 10 га артық орындап, бригада барлық егінді жоспарлаған уақыттан 2 күн ерет бітірді. Бригада күн сайын қанша га жерге егін еккен?

4. Пәтерде ендері бірдей екі бөлме жасау жобалануда. Бірінші бөлменің ұзындығы енінен 1,5 есе артық, ал екінші бөлменің ұзындығы 7,2 м. Егер пәтердің ауданы $56,7 \text{ м}^2$ болса, онда бөлмелердің енін табыңдар.

5. Үш таңбалы саннан 7-ні алғанда 7-ге бөлінеді, 8-ді алғанда 8-ге бөлінеді және 9-ды алғанда 9-ға бөлінеді. Ол қандай сан?

8-сыныпқа арналған №2 бақылау жұмысының тапсырмалары

1. Тізбектей алынған үш натурал санның қосындысының квадраты олардың квадраттарының қосындысынан 862-ге артық. Берілген сандарды табыңдар.

2. Моторлы қайық өзен ағысымен 17 км және өзен ағысына қарсы 13 км жүріп, барлық жолға 2 сағ жұмсады. Егер моторлы қайықтың жылдамдығы 15 км/сағ болса, онда өзен ағысының жылдамдығы неге тең?

3. Шебер мен оның шәкірті жұмысты белгіленген мерзімге дайындауы керек. Жұмыстың жартысы орындалғанда шәкірті басқа жұмысқа ауыстырылады. Шебер қалған жұмысты 2 күнге кеш бітірді. Егер барлық жұмысты орындау үшін шеберге шәкіртке қарағанда 5 күн кем уақыт қажет болса, олардың әрқайсысы жұмысты жеке орындағанда неше күнде аяқтайды?

4. Екі бригада бірігіп тасжолды 18 күнде жөндейді. Егер алдымен жұмыстың $\frac{2}{3}$ -сін бірінші бригада жеке, ал қалған бөлігін екінші бригада жеке орындаса, онда тасжолды жөндеуге 40 күн кетеді. Тасжолды жөндеу үшін әрбір бригадаға қанша күн қажет?

5. Әрқайсысының ұзындығы 7 метр болатын 5 бөрене бар. Бөренені бір жерден кесуге 0,5 мин уақыт кетеді. Берілген бөренелерді ұзындықтары 1 метр болатын бөліктерге кесіп шығу үшін қанша уақыт кетеді?

9-сыныпқа арналған №1 бақылау жұмысының тапсырмалары

1. Жедел пойыз бағдаршамда 16 мин аялдады. Содан кейін ол жылдамдығын 10 км/сағ-қа арттыра отырып кесте бойынша қалып келе жатқан 192 км жолды толық жүріп өтті. Пойыздың алғашқы жылдамдығын табыңдар.

2. Турист өзен ағысына қарсы 6 км және көлмен 15 км жүзді. Көлмен жүзген уақыт өзен бойымен жүзген уақыттан 1 сағ артық. Егер өзен ағысының жылдамдығы 2 км/сағ болса, онда қайықтың көлмен жүзгендегі жылдамдығын табыңдар.

3. Екі жұмысшы қандай да бір жұмысты бірігіп 16 күнде орындауды жоспарлады. Бірге атқарған төрт күндік жұмыстан кейін бірінші жұмысшы басқа жұмысқа ауысты. Ал екінші жұмысшы қалған жұмысты жалғыз өзі аяқтады. Оның қалған жұмысқа жұмсайтын уақыты бірінші жұмысшының жалғыз өзі жұмыс істегенде барлық жұмысқа жіберетін уақытынан 12 күнге артық. Әрбір жұмысшы жұмысты жеке орындаса неше күнде бітіреді?

4. Егер автобус жылдамдығын 20 км/сағ-қа арттырса, онда ол ауылдан қалаға дейін 1,5 есе аз уақыт жұмсайды. Егер ол жылдамдығын 10 км/сағ-қа кемітсе, онда 1 сағ артық уақыт жұмсайды. Ауылдан қалаға дейінгі қашықтықты табыңдар.

5. Жұмысшыға әрбір жұмыс жасаған күніне 2900 теңге беріледі, ал әрбір жұмысқа шықпаған күні үшін жұмысшадан 600 теңге алынады. 30 күннен кейін жұмысшы оған ештеңе төленбейтінін білді. Ол осы 30 күн ішінді неше күн жұмыс жасаған?

9-сыныпқа арналған №2 бақылау жұмысының тапсырмалары

1. Жай бөлшектің бөлімі алымынан 3-ке артық. Егер алымына 7-ні қосса және бөліміне 5-ті қосса, онда берілген жай бөлшек $\frac{1}{2}$ -ге артады. Берілген жай бөлшекті табыңдар.

2. Тапсырманы екі жұмысшы бірігіп 12 күнде орындайды. Егер бірінші жұмысшы жұмыстың жартысын, ал қалғанын екінші жұмысшы жеке орындаса, онда барлық тапсырма 25 күнде орындалады. Тапсырманы жұмысшының әрқайсысы неше күнде орындап шығады?

3. Екі эксковатор бірігіп жұмысты 3 сағ 45 мин-та орындайды. Бір эксковатор жалғыз өзі жұмысты екіншісіне қарағанда 4 сағ ерте орындаса, онда әрбір эксковатор жұмысты жеке қанша уақытта орындайды?

4. Мотоциклші бір қаладан екінші қалаға 4 сағ жүрді. Кері жолда ол 100 км жолды сол жылдамдықпен, жолдың қалған бөлігінде жылдамдығын 10 км/сағ-қа кемітті. Сондықтан қайтар жолға 30 мин артық уақыт жұмсады. Екі қаланың ара қашықтығын табыңдар.

5. Алты таңбалы сан 2 цифрынан басталады. Егер осы 2 цифрын қалған цифрлардың ретін сақтай отырып, соңына орналастырсақ, онда жаңадан алынған сан бастапқы берілген саннан үш есе үлкен болады? Берілген санды табыңдар.