Tema 1 (I) - Álgebra matricial

1. Dados $a = 3$, $b = -1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Hallar $a\,A + b\,B$, $(ab)B$, $(a+b)(A+B)$, $(a-b)(A-B)$.

b) Resolver las ecuaciones $3X + 2A = B$, $2A - 5X = 3B$ y $b(X-A) = a(B-X)$.

2. Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, hallar cuando sea posible:

a) AB, BA, AC, CA, CB, $(AB)C$, $(BC)A$, $B(AC)$.

b) $(A^t + B)C$, $(BC)^t$, B^tA, A^tB y A^tB^t.

3. Sean A y B matrices cuadradas. Efectuar las operaciones siguientes: $(A+B)^2$, $(A+B)(A-B)$ y $(A-B)^3$.

4. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Comprobar que $A(B+C) = AB + AC$

b) ¿Es cierta la igualdad anterior para matrices cualesquiera $A_{m\times p}$, $B_{p\times n}$ y $C_{p\times n}$?

c) ¿Es cierto que $[A(B+C)]^t = A^tB^t + A^tC^t$? ¿Lo es que $[A(B+C)]^t = B^tA^t + C^tA^t$?

5. *a)* Dada $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, hallar A^tA y $A\,A^t$.

b) Probar que para toda matriz A, se verifica que A^tA y $A\,A^t$ son matrices cuadradas simétricas.

c) Si A es una matriz cuadrada, ¿son necesariamente iguales A^tA y $A\,A^t$?

6. Encontrar dos matrices A y B (no triviales) de orden 3×3 tales que $AB = BA$.
`Indicación: probando sin más es poco probable acertar. Usar la propiedad asociativa.`

7. Sean A, B y C matrices cuadradas, del mismo orden y no nulas tales $AB = AC$ ¿Se sigue necesariamente de esta igualdad que $B = C$? Probar la implicación anterior, o dar un contraejemplo.

8. Dadas la matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Hallar $C = A \cdot B$

b) Expresar las columnas de C como combinaciones lineales de las columnas de A.

c) Expresar las filas de C como combinaciones lineales de las filas de B.

9. Repetir el problema anterior con las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -7 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

10. Dadas $A = \left(\begin{array}{cc|ccc} 4 & 3 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 6 & 3 & -1 \end{array}\right)$ y $B = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 6 \\ \hline 5 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$

a) Hallar $A \cdot B$ directamente.

b) Considerar $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix}$.

Comprobar que $A \cdot B = \begin{pmatrix} A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1} & A_{1,1}B_{1,2} + A_{1,2}B_{2,2} \end{pmatrix}$