Tema 1 (II) - Matrices y sistemas de ecuaciones lineales (1ª parte)

1. Resolver reduciendo a su forma escalonada reducida (método de Gauss) los siguientes sistemas:

$$\begin{aligned} 2x+2y&=5\\ x-4y&=0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x-3y+z&=1\\ x+y+2z&=14 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x+6y&=18\\ 2x+4y&=12 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a+2b+3c+d-e&=1\\ 3a-b+c+d+e&=3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1+x_3&=4\\ x_1-x_2+2x_3&=5\\ 4x_1-x_2+5x_3&=17 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2a+b-c&=2\\ 2a+c&=3\\ a-b&=0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+z+w&=4\\ 2x+y-w&=2\\ 3x+y+z&=7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x+z+w&=5\\ y-w&=-1\\ 3x-z-w&=0\\ 4x+y+2z+w&=9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4y+z&=20\\ 2x-2y+z&=0\\ x+z&=5\\ x+y-z&=10 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+y-2z&=0\\ x-y&=-3\\ 3x-y-2z&=-6\\ 2y-2z&=3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+2y+z&=3\\ 2x+y+w&=4\\ x-y+z+w&=1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x-y+z&=0\\ y+w&=0\\ 3x-2y+3z+w&=0\\ -y-w&=0 \end{aligned}$$

2. Decidir si $w \in \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ en los casos siguientes:

a) $v_1 = \begin{pmatrix} 1\\ 2\\ -1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 2 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 5\\ -6\\ 8 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 2\\ -1\\ 6 \end{pmatrix}$

b) $v_1 = \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2\\ 3\\ -2 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} -6\\ 7\\ 5 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 11\\ -5\\ 9 \end{pmatrix}$

3. Dada una matriz A, llamamos $\mathrm{col}(A)$ al subespacio generado por los vectores columna de A. Determinar si $\mathbf{b} \in \mathrm{col}(A)$ en los casos siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2\\ 0 & 3 & 5\\ -2 & 8 & -4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3\\ -7\\ -3 \end{pmatrix} \qquad\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5\\ -2 & 1 & -6\\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2\\ -1\\ 6 \end{pmatrix}$$

4. Hallar, en cada caso, el valor de α para que el sistema sea compatible. Resolver, usando el método de Gauss, dichos sistemas para el valor de a hallado.

$$\begin{aligned} x+\alpha y&=4\\ 3x+6y&=8 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+\alpha y&=-5\\ 2x-8y&=6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+4y&=-2\\ 3x+\alpha y&=-6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -4x+12y&=\alpha\\ 2x-6y&=-3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \alpha x+y&=3\\ x-y&=1 \end{aligned}$$

5. ¿Son equivalentes pos filas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 2\\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 6\\ 5 & 5 & 10 \end{pmatrix}$?

6. Determinar λ para que el sistema tenga: a) Solución única. b) Infinitas soluciones. c) Ninguna solución.

$$\begin{aligned} x_1+\lambda x_2-x_3&=2\\ \lambda x_1-x_2+x_3&=1\\ 2x_1+(\lambda+1)x_2+(\lambda+1)x_3&=2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1-3x_3&=-3\\ 2x_1+\lambda x_2-x_3&=-2\\ 2x_2+2x_2+(\lambda-3)x_3&=-2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1+x_2+\lambda x_3&=2\\ 3x_1+4x_2+2x_3&=\lambda\\ x_1+x_2+3x_3&=\lambda-1 \end{aligned}$$

7. Hallar los valores de λ para los cuales el sistema homogéneo $\begin{aligned} (\lambda+2)x_1-2x_2+3x_3&=0\\ -2x_1+(\lambda-1)x_2+6x_3&=0\\ x_1+2x_2+\lambda x_3&=0 \end{aligned}$ tiene solución no trivial.

8. Sea $n \geq 3$. Hallar la forma escalonada reducida de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots\cdots & n\\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots\cdots & 2n\\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \cdots\cdots & 3n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & n^2-n+3 & \cdots\cdots & n^2 \end{pmatrix}$$