

فیزیک حرکت تقدیمی

دکتر راهوار

آریانا سیف اللهی 402100837 - نرگس صفری 402100872

۱. فیزیک حرکت تقدیمی و رقص محوری (نوتاسیون) فرفره

۱.۱ تکانه زاویه ای و گشتاور

فرفره (یا زمین) یک جسم در حال دوران است، بنابراین تکانه‌ی زاویه‌ای دارد:

$$L = I\omega$$

که I ممان اینرسی و ω بردار سرعت زاویه‌ای است.

بدون گشتاور خارجی، L هم در اندازه و هم درجهت ثابت می‌ماند؛ یعنی محور دوران در فضا «ثابت» است (به جز حرکت انتقالی).

وقتی گشتاور خارجی وجود داشته باشد:

$$\tau = \frac{dL}{dt}$$

پس گشتاور، جهت بردار L را به آرامی می‌چرخاند.

۱.۲ حرکت تقدیمی (Precession) فرفره

برای یک فرفره‌ی قائم روی میز:

وزن فرفره mg در مرکز جرم اعمال می‌شود.

نیروی تکیه‌گاه در نقطه تماس با میز اعمال می‌شود.

خط عمل این دو نیرو متفاوت است → یک گشتاور نسبت به نقطه تماس به وجود می‌آید:

$$\tau = r \times mg$$

این گشتاور عمود بر L است، پس بهجای این که فرفره را فوراً بخواباند، سبب می‌شود محور فرفره به دور عمود (جهت میدان گرانش) بچرخد؛ این همان حرکت تقدیمی است.

برای یک فرفره‌ی متقارن و سریع، سرعت زاویه‌ای تقدیم (در تقریب ساده) می‌تواند چنین نوشته شود:

$$\Omega_p \approx \frac{\tau}{L \sin \theta}$$

که در آن:

$$mgsin\theta = \tau$$

آندازه‌ی تکانه‌ی زاویه‌ای فرفره است

θ زاویه‌ی بین محور فرفره و عمود است

نتیجه‌ی شهودی: هرچه فرفره سریع‌تر بچرخد (ابزرگ‌تر)، حرکت تقدیمی کندر است.

۱.۳ رقص محوری (Nutation) فرفره

اگر فرفره را «کامل و دقیق» در وضعیت تعادلی روشن نکنیم (یعنی:

کمی تکان اضافی بدھیم،

یا گشتاور به شکل ثابت نباشد)،

علاوه بر حرکت تقدیمی آرام، محور فرفره بالا و پایین هم موج می‌زند. این نوسان زاویه‌ی θ را در اطراف یک مقدار میانگین به جلو و عقب می‌برد. به این نوسان زاویه‌ای می‌گویند:

رقص محوری یا نوتاسیون(Nutation)

در زبان فیزیک:

«یعنی دوران آهسته‌ی محور حول یک راستای مرجع (مثل عمود یا محور عمود بر صفحه‌ی مداری)،

«یعنی نوسان اضافی زاویه‌ی محور حول مقدار متوسط.

۲. مشابهت با زمین: تقدیم و رقص محوری محور زمین

زمین یک «فرفره‌ی چرخان عظیم» است:

زمین با دوره‌ی نزدیک به $23/9$ ساعت به دور خود می‌چرخد.

به علت برآمدگی استوایی، گرانش خورشید و ماه روی این برآمدگی گشتاور اعمال می‌کند.

این گشتاور باعث می‌شود محور دوران زمین حول عمود بر صفحه‌ی مدارش (با حول بردار تکانه‌ی زاویه‌ای مدار) حرکت تقدیمی انجام دهد (دوره‌ی حدوداً 26 هزار ساله).

روی این تقدیم آرام، «نوتاسیون»‌های کوچکی به دلیل تغییرات موضعی گرانش ماه، خورشید و سایر سیارات سوار می‌شود.

همچنین، در مقیاس دهها هزار سال، زاویه‌ی میلِ محوری زمین (Obliquity) بین حدود 22 تا $24/5$ درجه نوسان می‌کند؛ این نوسان‌ها از گشتاورهای گرانشی طولانی‌مدت (مکانیک سماوی، پدیده‌های میلانکویچ) ناشی می‌شود، نه لزوماً یک ضربه‌ی لحظه‌ای.

۳. اگر یک سیاره‌ی برحوردی محور زمین را تا محدوده‌ی ۲۴/۵–۲۲ درجه برده باشد، گشتاور لازم چقدر است؟

در واقع، یک برحورد سیاره‌ای (مثل تئوری برحورد تیا) بیشتر به صورت یک ضربه (impulse) عمل می‌کند و آنچه فیزیکاً بهتر تعریف می‌شود، تغییر تکانه‌ی زاویه‌ای ΔL است، نه گشتاور ثابت. با این حال می‌توانیم:

۱. اول ΔL لازم برای تغییر زاویه‌ی محور را تخمین بزنیم.

۲. بعد اگر فرض کنیم برحورد در یک بازه‌ی زمانی (مثلاً صد ثانیه) اتفاق افتاده، از

$$\tau \approx \frac{\Delta L}{\text{میانگین } \Delta t}$$

یک گشتاور متوسط تخمینی استخراج کنیم.

۱.۳ تکانه‌ی زاویه‌ای فعلی چرخش زمین

از تقریب استاندارد برای چرخش وضعی زمین استفاده می‌کنیم:

۱. جرم زمین:

$$M \approx 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$$

۲. شعاع میانگین:

$$R \approx 6.37 \times 10^6 \text{ m}$$

۳. ممان اینرسی:

$$I \approx 0.3307 MR^2 \approx 8 \times 10^{37} \text{ kg.m}^2$$

۴. سرعت زاویه‌ای دوران زمین:

$$\omega \approx 7.29 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

بنابراین تکانه‌ی زاویه‌ای وضعی زمین:

$$L = I\omega \approx 5.8 \times 10^{33} \text{ kg.m}^2/\text{s}$$

۳.۲ تغییر زاویه‌ی محور و ΔL

برای یک تغییر کوچک در زاویه‌ی محور، اگر قدر L تقریباً ثابت بماند، تغییر جهت آن به اندازه‌ی زاویه‌ی $\Delta\theta$ نیازمند تغییر برداری تکانه‌ی زاویه‌ای با اندازه‌ی تقریبی:

$$\Delta L \approx L\Delta\theta$$

نوسان بین ۲۲ و ۲۴/۵ درجه، یعنی میانگین حدود 23.25° ، دامنه نوسان تقریباً 1.25° .

یا اینکه کل اختلاف دو سر طیف را در نظر بگیریم 2.5°

۱. تبدیل درجه به رادیان:

برای 1.25° :

$$1.25^\circ \times \frac{\pi}{180} = 0.0218 rad$$

برای 2.5° :

$$2.5^\circ \times \frac{\pi}{180} = 0.0436 rad$$

۲. تغییر تکانه‌ی زاویه‌ای:

اگر دامنه را 1.25° بگیریم:

$$\Delta L \approx 1.3 \times 10^{32} kg \cdot m^2/s$$

اگر تغییر کامل 2.5° را مقایسه کنیم:

$$\Delta L \approx 2.6 \times 10^{32} kg \cdot m^2/s$$

پس به طور مرتبه‌ی بزرگی:

$$\Delta L \sim 10^{32} - 10^{33} kg \cdot m^2/s$$

برای بردن محور زمین به محدوده‌ی حدود ۲۲ تا ۲۴/۵ درجه لازم است (نسبت به یک وضعیت مرجع مناسب).

۳.۳ تبدیل به «گشتاور مؤثر» یک بخورد

خود بخورد یک پالس خیلی کوتاه است، پس بهتر است به صورت گشتاور متوسط روی یک بازه‌ی زمانی Δt فکر کنیم. اگر یک بخورد خیلی بزرگ در زمانی در حد مثلاً:

$$\Delta t \sim 100 - 1000 s$$

آنگاه:

$$\tau_{avg} \approx \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

برای $\Delta t = 100 s$:

$$\tau \sim 2 \times 10^{30} N \cdot m$$

برای $\Delta t = 1000 s$:

$$\tau \sim 2 \times 10^{29} N.m$$

بنابراین، گشتاور لحظه‌ای معادل برای چنین تغییری در محور زمین، چیزی در حدود:

$$\tau \sim 10^{29} - 10^{30} N.m$$

خواهد بود (در حد مرتبه‌ی بزرگی، نه مقدار دقیق).

در عمل، نوسان ۲۲-۲۴/۵ درجه‌ی میل محوری، عمدتاً حاصلی گشتاورهای گرانشی طولانی مدت خورشید، ماه و سیارات روی برآمدگی استوایی زمین است، نه یک ضریبی منفرد.

یک برخورد سیاره‌ای واقعی (مثل تئوری تیبا) علاوه بر تغییر جهت محور چرخش:

ممکن است سرعت چرخش را تغییر دهد،

مان اینرسی را عوض کند (تشکیل ماه، ذوب و تفکیک دوباره‌ی زمین)،

و لذا تصویر کامل خیلی پیچیده‌تر از این مدل یکخطی است.