

فیزیک حرکت تقدیمی

دکتر راهوار

آریانا سیف الهی 402100837 – نرگس صفری 402100872

۱. فیزیک حرکت تقدیمی و رقص محوری (نوتاسیون) فرفره

۱.۱ تکانه زاویه ای و گشتاور

فرفره (یا زمین) یک جسم در حال دوران است، بنابراین تکانه زاویه ای دارد:

$$L = I\omega$$

که I ممان اینرسی و ω بردار سرعت زاویه ای است.

بدون گشتاور خارجی، L هم در اندازه و هم در جهت ثابت می ماند؛ یعنی محور دوران در فضا «ثابت» است (به جز حرکت انتقالی).

وقتی گشتاور خارجی وجود داشته باشد:

$$\tau = \frac{dL}{dt}$$

پس گشتاور، جهت بردار L را به آرامی می چرخاند.

۱.۲ حرکت تقدیمی (Precession) فرفره

برای یک فرفره قائم روی میز:

وزن فرفره mg در مرکز جرم اعمال می شود.

نیروی تکیه گاه در نقطه تماس با میز اعمال می شود.

خط عمل این دو نیرو متفاوت است → یک گشتاور نسبت به نقطه تماس به وجود می آید:

$$\tau = r \times mg$$

این گشتاور عمود بر L است، پس به جای این که فرفره را فوراً بخواهاند، سبب می شود محور فرفره به دور عمود (جهت میدان گرانش) بچرخد؛ این همان حرکت تقدیمی است.

برای یک فرفره متقارن و سریع، سرعت زاویه ای تقدیم (در تقریب ساده) می تواند چنین نوشته شود:

$$\Omega_p \approx \frac{\tau}{L \sin \theta}$$

که در آن:

$$mgr\sin\theta = \tau$$
 اندازه گشتاور است

L اندازه‌ی تکانه‌ی زاویه‌ای فرفره است

θ زاویه‌ی بین محور فرفره و عمود است

نتیجه‌ی شهودی: هرچه فرفره سریع‌تر بچرخد (L بزرگ‌تر)، حرکت تقدیمی کندتر است.

۱.۳ رقص محوری (Nutation) فرفره

اگر فرفره را «کامل و دقیق» در وضعیت تعادلی روشن نکنیم (یعنی:

کمی تکان اضافی بدهیم،

یا گشتاور به شکل ثابت نباشد)،

علاوه بر حرکت تقدیمی آرام، محور فرفره بالا و پایین هم موج می‌زند. این نوسان زاویه‌ی θ را در اطراف یک مقدار میانگین به جلو و عقب می‌برد. به این نوسان زاویه‌ای می‌گویند:

رقص محوری یا نوتاسیون (Nutation)

در زبان فیزیک:

«Precession» یعنی دوران آهسته‌ی محور حول یک راستای مرجع (مثل عمود یا محور عمود بر صفحه‌ی مداری)،

«Nutation» یعنی نوسان اضافی زاویه‌ی محور حول مقدار متوسط.

۲. مشابهت با زمین: تقدیم و رقص محوری محور زمین

زمین یک «فرفره‌ی چرخان عظیم» است:

زمین با دوری نزدیک به ۲۳/۹ ساعت به دور خود می‌چرخد.

به علت برآمدگی استوایی، گرانش خورشید و ماه روی این برآمدگی گشتاور اعمال می‌کند.

این گشتاور باعث می‌شود محور دوران زمین حول عمود بر صفحه‌ی مدارش (یا حول تکانه‌ی زاویه‌ای مدار) حرکت تقدیمی انجام دهد (دوره‌ی حدوداً ۲۶ هزار ساله).

روی این تقدیم آرام، «نوتاسیون»‌های کوچکی به دلیل تغییرات موضعی گرانش ماه، خورشید و سایر سیارات سوار می‌شود.

همچنین، در مقیاس ده‌ها هزار سال، زاویه‌ی میل محوری زمین (Obliquity) بین حدود ۲۲ تا ۲۴/۵ درجه نوسان می‌کند؛ این نوسان‌ها از گشتاورهای گرانشی طولانی مدت (مکانیک سماوی، پدیده‌های میلانکوویچ) ناشی می‌شود، نه لزوماً یک ضربه‌ی لحظه‌ای.

۳. اگر یک سیاره‌ی برخوردی محور زمین را تا محدوده‌ی ۲۲-۲۴/۵ درجه برده باشد، گشتاور لازم چقدر است؟

در واقع، یک برخورد سیاره‌ای (مثل تئوری برخورد تیا) بیشتر به صورت یک ضربه (impulse) عمل می‌کند و آنچه فیزیکاً بهتر تعریف می‌شود، تغییر تکانه‌ی زاویه‌ای ΔL است، نه گشتاور ثابت. با این حال می‌توانیم:

۱. اول ΔL لازم برای تغییر زاویه‌ی محور را تخمین بزنیم.

۲. بعد اگر فرض کنیم برخورد در یک بازه‌ی زمانی (مثلاً صد ثانیه) اتفاق افتاده، از

$$\tau_{\text{میانگین}} \approx \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

یک گشتاور متوسط تخمینی استخراج کنیم.

۳.۱ تکانه‌ی زاویه‌ای فعلی چرخش زمین

از تقریب استاندارد برای چرخش وضعی زمین استفاده می‌کنیم:

۱. جرم زمین:

$$M \approx 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$$

۲. شعاع میانگین:

$$R \approx 6.37 \times 10^6 \text{ m}$$

۳. ممان اینرسی:

$$I \approx 0.3307 MR^2 \approx 8 \times 10^{37} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

۴. سرعت زاویه‌ای دوران زمین:

$$\omega \approx 7.29 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

بنابراین تکانه‌ی زاویه‌ای وضعی زمین:

$$L = I\omega \approx 5.8 \times 10^{33} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

۳.۲ تغییر زاویه‌ی محور و ΔL

برای یک تغییر کوچک در زاویه‌ی محور، اگر قدر L تقریباً ثابت بماند، تغییر جهت آن به اندازه‌ی زاویه‌ی $\Delta\theta$ نیازمند تغییر برداری تکانه‌ی زاویه‌ای با اندازه‌ی تقریبی:

$$\Delta L \approx L\Delta\theta$$

نوسان بین ۲۲ و ۲۴/۵ درجه، یعنی میانگین حدود 23.25° ، دامنه‌ی نوسان تقریباً 1.25° .

یا اینکه کل اختلاف دو سر طیف را در نظر بگیریم 2.5°

۱. تبدیل درجه به رادیان:

برای 1.25° :

$$1.25^\circ \times \frac{\pi}{180} = 0.0218 \text{ rad}$$

برای 2.5° :

$$2.5^\circ \times \frac{\pi}{180} = 0.0436 \text{ rad}$$

۲. تغییر تکانه‌ی زاویه‌ای:

اگر دامنه را 1.25° بگیریم:

$$\Delta L \approx 1.3 \times 10^{32} \text{ kg.m}^2/\text{s}$$

اگر تغییر کامل 2.5° را مقایسه کنیم:

$$\Delta L \approx 2.6 \times 10^{32} \text{ kg.m}^2/\text{s}$$

پس به‌طور مرتبه‌ی بزرگی:

$$\Delta L \sim 10^{32} - 10^{33} \text{ kg.m}^2/\text{s}$$

برای بردن محور زمین به محدوده‌ی حدود ۲۲ تا ۲۴/۵ درجه لازم است (نسبت به یک وضعیت مرجع مناسب).

۳.۳ تبدیل به «گشتاور مؤثر» یک برخورد

خود برخورد یک پالس خیلی کوتاه است، پس بهتر است به‌صورت گشتاور متوسط روی یک بازه‌ی زمانی Δt فکر کنیم. اگر یک برخورد خیلی بزرگ در زمانی در حد مثلاً:

$$\Delta t \sim 100 - 1000 \text{ s}$$

آنگاه:

$$\tau_{avg} \approx \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

برای $\Delta t = 100 \text{ s}$:

$$\tau \sim 2 \times 10^{30} \text{ N.m}$$

برای $\Delta t = 1000 \text{ s}$:

$$\tau \sim 2 \times 10^{29} N.m$$

بنابراین، گشتاور لحظه‌ای معادل برای چنین تغییری در محور زمین، چیزی در حدود:

$$\tau \sim 10^{29} - 10^{30} N.m$$

خواهد بود (در حد مرتبه‌ی بزرگی، نه مقدار دقیق).

در عمل، نوسان ۲۲-۲۴/۵ درجه‌ی میل محوری، عمدتاً حاصل گشتاورهای گرانشی طولانی‌مدت خورشید، ماه و سیارات روی برآمدگی استوایی زمین است، نه یک ضربه‌ی منفرد.

یک برخورد سیاره‌ای واقعی (مثل تئوری تیا) علاوه بر تغییر جهت محور چرخش:

ممکن است سرعت چرخش را تغییر دهد،

ممان اینرسی را عوض کند (تشکیل ماه، ذوب و تفکیک دوباره‌ی زمین)،

و لذا تصویر کامل خیلی پیچیده‌تر از این مدل یک‌خطی است.