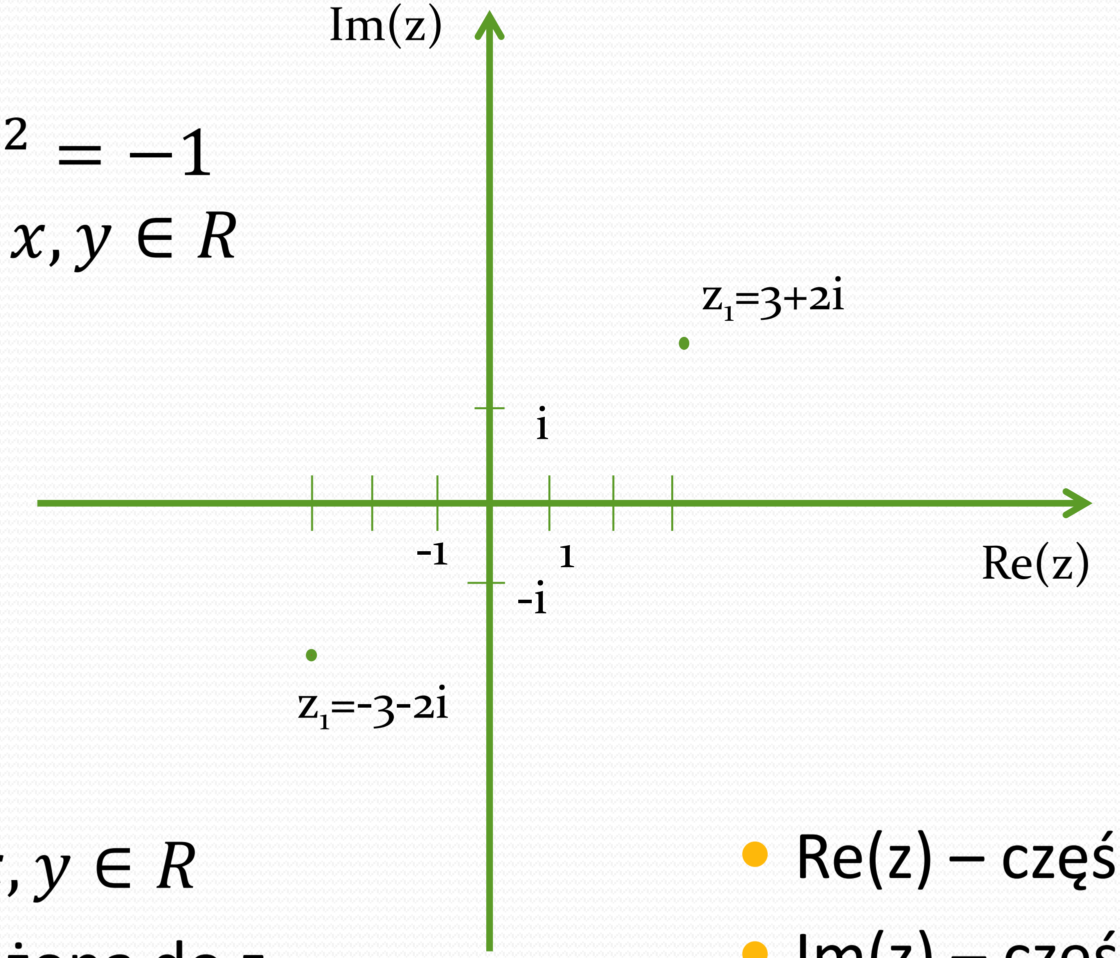
Liczby zespolone

$$i = \sqrt{-1}, i^2 = -1$$
$$z = x + yi, x, y \in R$$



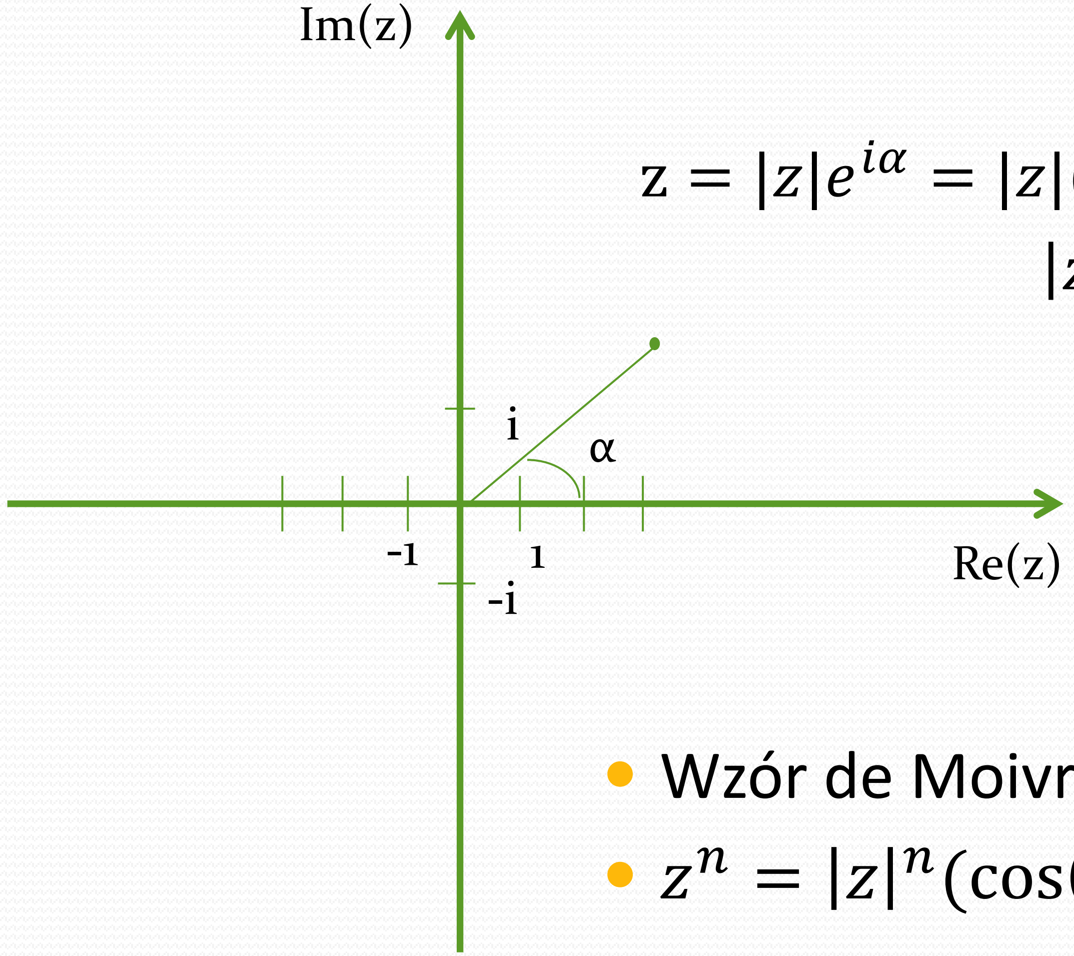
$$\bar{z} = x - yi, x, y \in R$$
– liczba sprzężona do z

- Re(z) – część rzeczywista liczby z
- Im(z) – część urojona liczby z

Działania na liczbach zespolonych

- Przykłady
- $i^5 = i^2 \cdot i^2 \cdot i = i$
- $(3i - 1)(i + 2) = 3i^2 + 6i - i - 2 = -5 + 5i$
- $\frac{1-i}{2+2i} = \frac{(1-i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} = \frac{2-2i-2i+2i^2}{4-(2i)^2} = \frac{-4i}{8} = -0.5i$
- Wykonać przykładowe działania, *, /, +, -, ^ na liczbach zespolonych

Postać trygonometryczna liczby zespolonej



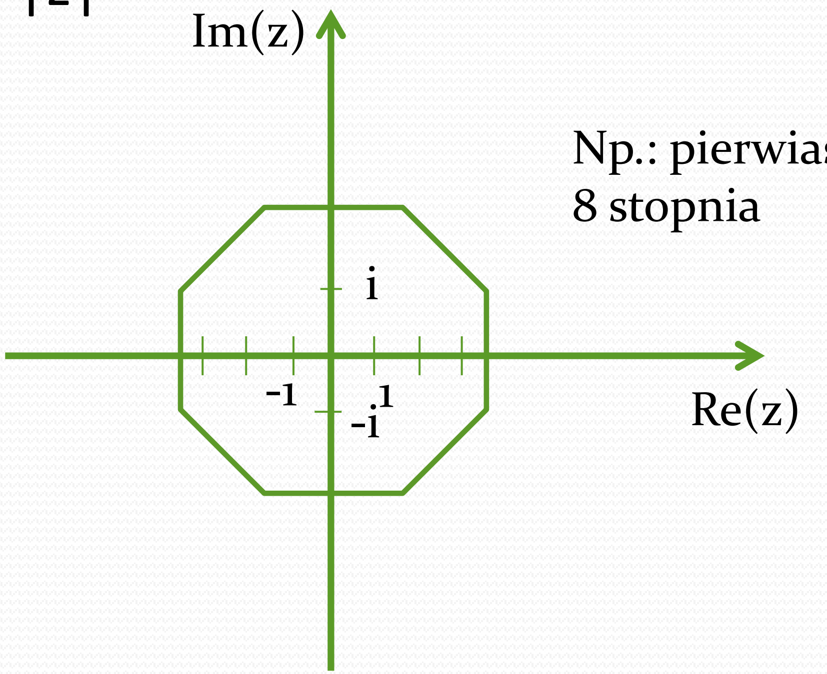
$$z = |z|e^{i\alpha} = |z|(\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha))$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Wzór de Moivre'a:
- $z^n = |z|^n(\cos(n \cdot \alpha) + i \cdot sin(n \cdot \alpha))$

Pierwiastki liczb zespolonych

- Twierdzenie:
  - Każda liczba zespolona z≠0 ma dokładnie n różnych pierwiastków n-tego stopnia:
  - $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\alpha+2\pi k}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\alpha+2\pi k}{n}\right)\right), k = 0, \ldots, n-1$
  - Pierwiastki liczby z leżą na okręgu o promieniu |z| i środku w początku układu współrzędnych w równych odstępach od siebie.



Np.: pierwiastki
8 stopnia

Rozwiązywanie równań kwadratowych

- $az^2 + bz + c = 0,$
  - $\Delta = b^2 - 4ac$
  - $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Rozwiąż równanie i zaznacz pierwiastki na płaszczyźnie zespolonej
  - $z^2 + z + 2 = 0$
  - $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 = -7$
  - $z_1 = \frac{-1+\sqrt{-7}}{2} = \frac{-1+\sqrt{7}i}{2},$
  - $z_2 = \frac{-1-\sqrt{-7}}{2} = \frac{-1-\sqrt{7}i}{2}$

Zadania

- Znajdź pierwiastki(miejsca zerowe) równania
  - $2z^3 + z^2 + z = 0$
- Oblicz $\left(\frac{1}{z}\right)^3$, $\sqrt[3]{z}$, $\quad z = i$
- Znajdź pierwiastki 4-stopnia liczby $\frac{z}{1-\bar{z}}$, $\ z = 1 + 2i$
- Narysuj na płaszczyźnie zespolonej zbiory:
  - $|z - 2 + i| < 4$
  - $|z + 2i - 1| < |z|$
  - $|i \cdot \bar{z}| > |z|$