Iloczyn kartezjański

- Iloczynem kartezjańskim dwóch zbiorów A i B nazywamy zbiór

  C={z: z=(x,y), x ∈A, y ∈B}, zbiór C oznacza się A × B
- Iloczyn kartezjański dwóch odcinków [0,1] oraz [5,7] to prostokąt na płaszczyźnie
- Ogólnie: iloczyn kartezjański n zbiorów jest równy
- $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n,\ \mathrm{A} = \{(a_1, \dots, a_n)\colon\ a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$
- Iloczyn kartezjański trzech odcinków to prostopadłościan w przestrzeni
- Iloczyn kartezjański 4 lub więcej odcinków to kostka (prostopadłościan) w przestrzeni więcej niż 3-wymiarowej.

Przykłady

- Znaleźć iloczyn kartezjański zbiorów $A=\{1,2\}$, $B=\{a,b,c\}$
  - $A \times B = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a),(2,b),(2,c)\}$
  - $B \times A = \{(a,1), (b,1), (c,1), (a,2),(b,2),(c,2)\}$
  - $A \times A =\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$
- Co na płaszczyźnie lub przestrzeni przedstawia iloczyn kartezjański poniższych zbiorów
  - $A=\{-1,1\}$, $B=[0,1]$, $A \times B$ oraz $B \times A$?
  - $A=[0,1]$, $B=[0,1]$, $C=\{1,2,3,4\}$, $A \times B \times C$?

Własności iloczynu kartezjańskiego

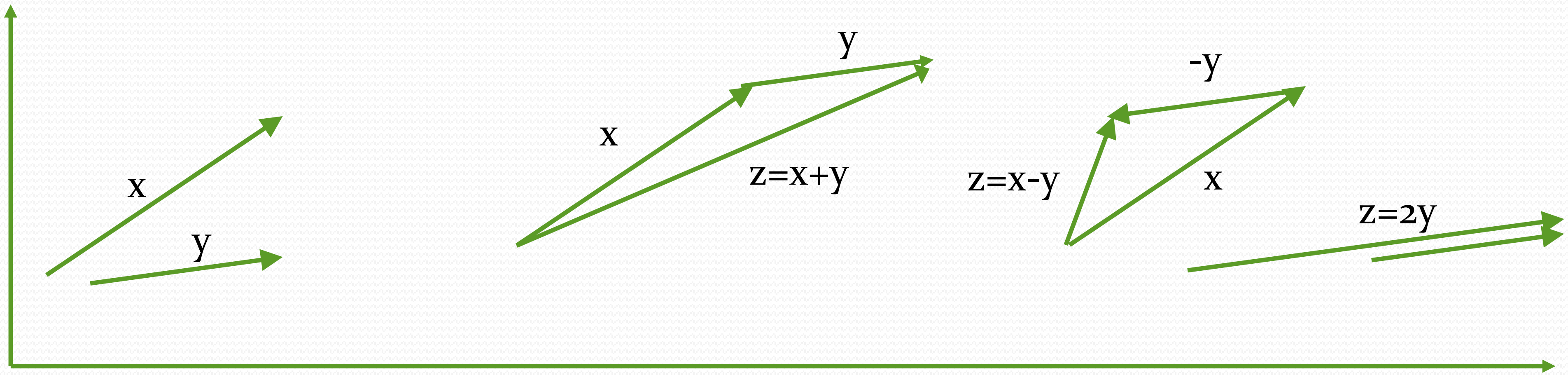
- $A \times (B \times C)=(A \times B) \times C$
- $A \subset B$ i $C \subset D$ to $A \times C \subset B \times D$
- $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$
- $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$
- $A \times (B \cup C)=(A \times B) \cup (A \times C)$ oraz przemiennie
- $A \times (B \cap C)=(A \times B) \cap (A \times C)$ oraz przemiennie

Przestrzeń n-wymiarowa

- Przestrzeń Euklidesowa n-wymiarowa (X):
  - Zbiór punktów o n-współrzędnych których odległości (d(x,y)) od siebie zdefiniowane są następująco:
    - $d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2},\ \mathrm{x,y} \in X$
- Punkt w przestrzeni n-wymiarowej zapisujemy najczęściej jako $x=(x_1 \ldots, x_n)$
- Wektor x w przestrzeni n-wymiarowej jest dla nas synonimem punktu, ale zapisujemy go jako $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Wektory – działania [1/2]

- Przestrzeń 1-wymiarowa to linia prosta, 2-wymiarowa to płaszczyzna, 3-wymiarowa to przestrzeń rzeczywista, 4-wymiarowa np.: czasoprzestrzeń



- Wektory w rachunku macierzowym mogą być interpretowane jako wektory zaczepione w początku układu współrzędnych.

Wektory – działania [2/2]

- Wektory $\vec{x}, \vec{y}$ są do siebie równoległe jeśli $\vec{x} = a \cdot \vec{y}, a \in R$
- Iloczyn skalarny wektorów $\vec{x}, \vec{y}$ to liczba zdefiniowana następująco:
  - $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 \cdot y_1 + \cdots + x_n \cdot y_n, \quad x_i, y_i$ są współrzędnymi wektorów
  - Długość wektora $|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}, \quad | \vec{x} | \geq 0$
- Nierówność Schwarz'a $|(\vec{x}, \vec{y})|^2 \leq (\vec{x}, \vec{x}) \cdot (\vec{y}, \vec{y})$
- Wektory $\vec{x}, \vec{y}$ są prostopadłe, wtedy i tylko wtedy gdy $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$
- Cosinus kąta pomiędzy wektorami jest równy:
  - $\cos(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}$

Zadania - wektory

- Znajdź kąt pomiędzy wektorami $\vec{u} = [1, -3], \vec{v} = [-2,0]$
- Dla jakiego k wektory są prostopadłe: $\vec{u} = [5, k], \vec{v} = [-1, k]$
- Znajdź wszystkie kąty wewnętrzne trójkąta o wierzchołkach
  - A(0,3), B(-1,2), C(-2,-3)
- Znajdź środek oraz wielką i małą oś elipsy o równaniu:
  - $3x^2 + 2y^2 - 4y - 5 = 0$
- Dla jakiego k poniższe równanie jest równaniem okręgu. Znajdź środek i promień tego okręgu:
  - $\mathrm{k} \cdot x^2 - 6x + 2y^2 - 4y - 4 = 0$

Macierz

- Macierzą o n-wierszach i k-kolumnach nazywamy następującą formę liczb rzeczywistych ułożonych w wierszach i kolumnach

$$M_{n,k} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,k} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,k} \end{bmatrix}$$

- Przykłady macierzy kwadratowych 2 i 3 wymiarowych
- $M = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}55 \\ 400{,}7 & 0 \end{bmatrix}$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 50.8 & 4 & 0 \\ 2 & -7.01 & 0.06 \end{bmatrix}$$

Wektory jako formy macierzowe

- Wektor jest macierzą o n wierszach i 1 kolumnie
- $x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \cdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$
- $a \cdot x = a \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x_1 \\ \cdots \\ a \cdot x_n \end{pmatrix}, a \in R$

Działania na macierzach

- Dodawać można macierzy o tych samych wymiarach
  - $M_{n,k} + L_{n,k} = P_{n,k},$
  - $m_{i,j} + l_{i,j} = p_{i,j}\ , i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k$ - elementy macierzy
- Mnożenie macierzy przez liczbę:
  - $a \cdot M_{n,k} = P_{n,k}, a \in R, p_{i,j} = a \cdot m_{i,j}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots k$
- Mnożenie macierzy:
  - $M_{n,k} \cdot P_{k,l} = R_{n,l}$
  - $r_{i,j} = \sum_{t=1}^{k} m_{i,t} \cdot p_{t,j}$
- Transpozycja macierzy:
  - $M_{n,k}^{T} = P_{k,n}$
  - $p_{j,i} = m_{i,j}, \mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{n}, \mathrm{j} = 1, \dots, \mathrm{k}$

Wyznacznik

- Wyznacznik macierzy to liczba obliczana na podstawie elementów macierzy, wyznacznik może być obliczany tylko dla macierzy kwadratowych
- $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, |M| = ad - bc$
- $M = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{bmatrix},$
  - $|M| = x_{1,1} \cdot x_{2,2} \cdot x_{3,3} + x_{2,1} \cdot x_{3,2} \cdot x_{1,3} + x_{1,2} \cdot x_{2,3} \cdot x_{3,1} - x_{3,1} \cdot x_{2,2} \cdot x_{1,3} - x_{1,1} \cdot x_{3,2} \cdot x_{2,3} - x_{1,2} \cdot x_{2,1} \cdot x_{3,3}$

Wyznaczniki macierzy wyższych rzędów

- Macierz M jest macierzą wymiaru n
- Dopełnieniem algebraicznym $A_{i,j}$ elementu $m_{i,j}$ macierzy M jest liczba równa:
  - $(-1)^{i+j} \cdot M_{i,j}$, gdzie $M_{i,j}$ (minor) jest wyznacznikiem macierzy powstałej z macierzy M poprzez wykreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny
- Definicja rekurencyjna wyznacznika:
  - $\det(M) = |M| = \sum_{j=1}^{k} m_{i,j} \cdot A_{i,j}$, dla dowolnego i=1,…n
  - $\det(M) = |M| = \sum_{i=1}^{k} m_{i,j} \cdot A_{i,j}$, dla dowolnego j=1,…n

Własności wyznacznika

- Własności wyznacznika
  - Wyznacznik macierzy w której jedna kolumna jest kombinacją liniową pozostałych kolumn jest równy 0
  - $|M^T| = |M|$
  - Wyznacznik macierzy M w której tylko jedna dowolna kolumna albo tylko jeden wybrany wiersz są przemnożone przez liczbę *a* jest równy a·|M|
  - Zamiana miejscami 2 wierszy lub 2 kolumn zmienia tylko znak wyznacznika
  - $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$, jeśli A i B są macierzami kwadratowymi
  - $|M^{-1}| = \frac{1}{|M|}$
  - Jeśli do dowolnej kolumny (wiersza) wyznacznika dodamy kombinację liniową innych kolumny (wierszy) macierzy to wyznacznik nie zmieni się

Macierz odwrotna

- Macierz identycznościowa I wymiaru n to macierz kwadratowa, gdzie na przekątnej są wartości 1 a pozostałe elementy równe są 0
- Własność macierzy identycznościowej:
  - $I \cdot M = M \cdot I = M$
  - $|I|$=1
- M^{-1} jest macierzą odwrotną macierzy M jeśli $M \cdot M^{-1} = M^{-1} \cdot M = I$, gdzie I jest macierzą identycznościową (jednostkową)

Wyznaczanie macierzy odwrotnej

- Algorytm wyznaczania macierzy odwrotnej do macierzy A:
  - Obliczamy wyznacznik macierzy det(A), wyznacznik musi być niezerowy aby istniała macierz odwrotna
  - Wyznaczenie macierzy dopełnień algebraicznych A^D
  - Transpozycja macierzy dopełnień algebraicznych $(A^D)^T$
  - $A^{-1} = \frac{(A^D)^T}{\det(A)}$

Zadania

- $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$
  - Znajdź $(M-P)^T$, M·P, P·M, |M|, |P|, |M+P|
- $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$, P= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$
  - Czy można obliczyć M·P, P·M, P^2, M^2, |M|, |P|, $M \cdot P^T$,
  - Jeśli tak to obliczyć powyższe wielkości

Rząd macierzy

- Wymiar macierzy kwadratowej to liczba wierszy lub liczba kolumn tej macierzy
- Minor macierzy M to wyznacznik macierzy powstałej przez wykreślenie pewnej liczby wierszy i kolumn z macierzy M
- Rząd macierzy M to największy wymiar niezerowego minora tej macierzy
- Przykład: $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 11 \end{bmatrix}$
- Macierz M ma wyznacznik równy 0, jej rząd < 3
- $M_{3,3} = \left|\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\right| = 4 > 0$, zatem rząd macierzy = 2

Układy równań [1/2]

- Układ równań liniowych można zapisać w formie macierzowej:
- $\begin{cases} a_{1,1} \cdot x_1 + \cdots + a_{1,k} \cdot x_k = y_1 \\ \dots \\ a_{n,1} \cdot x_1 + \cdots + a_{n,k} \cdot x_k = y_n \end{cases},$
- $A_{n,k} \cdot X = Y,$
  - $A_{n,k} = \left(a_{i,j}\right), i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, k$
  - $X = (x_1, \ldots, x_k)^\top$
  - $Y = (y_1, \ldots, y_n)^\top$
- Wtedy, jeśli n=k oraz |A|≠0, to $X = A^{-1} \cdot Y$

Układy równań [2/2]

- Układ równań liniowych przedstawiony równaniem macierzowym:

$$A_{n,k} \cdot X = Y$$

- Jest sprzeczny, gdy nie posiada rozwiązania
- Jest nieoznaczony, gdy posiada nieskończenie wiele rozwiązań
- Jest oznaczony, gdy posiada tylko jedno rozwiązanie

Wzory Cramera

- Układ równań liniowych $A \cdot X = Y$ jest oznaczony, gdy $\det(A) \neq 0$
- Jeśli $\det(A) = 0$, wówczas:
  - Układ jest sprzeczny, gdy chociaż jeden w wyznaczników powstałych z macierzy A przez zastąpienie dowolnej kolumny wektorem Y jest niezerowy
  - Układ jest nieoznaczony, gdy wszystkie wyznaczniki powstałe z macierzy A przez zastąpienie dowolnej kolumny wektorem Y są zerowe
- Jeśli układ jest oznaczony to rozwiązania układu są następujące

$$x_i = \frac{\det(A_1,\ldots A_{i-1},Y,A_{i+1},\ldots A_n)}{\det(A)},$$

gdzie: i=1,…,n,

A_i - j-ta kolumna macierzy A, i=1,…,n

$X = (x_1, \ldots x_n)^T$

Przykłady

- Zbadać następujące układy równań, w przypadku istnienia rozwiązania zastosować wzory Cramera lub rachunek macierzowy
- $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ y + 5z = 0 \\ -x - y + 2z = -1 \end{cases}$
- $\begin{cases} 2x + 2y = 5 \\ 3x - y + 5z = 0 \\ 4x - 4y + 10z = -5 \end{cases}$
- $\begin{cases} -x - y - z = 0 \\ y - 3z = 2 \\ -x - 4z = -3 \end{cases}$

Równania macierzowe

- Jeśli macierz A jest macierzą kwadratową o wyznaczniku niezerowym, wtedy z równania $A \cdot X = B$ wynika, że $X = A^{-1} \cdot B$, z równania $X \cdot A = B$ wynika, że $X = B \cdot A^{-1}$
- Jeśli macierz A jest macierzą nie kwadratową, wtedy z równania $A \cdot X = B$ wynika, że $X = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot B$, z równania $X \cdot A = B$ wynika, że $X = B \cdot A^T \cdot (A \cdot A^T)^{-1}$
- Rozwiązać równania:
- $A \cdot X = B, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $X \cdot A = B, A = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

Geometria przestrzenna - płaszczyzna

- Równanie płaszczyzny:
  - $Ax + By + Cz + D = 0$
- Równanie płaszczyzny przechodzącej przez 3 punkty
  - $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$
- Odległość punktu $P(x_0, y_0, z_0)$ od płaszczyzny
- $d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Geometria przestrzenna – równania prostej

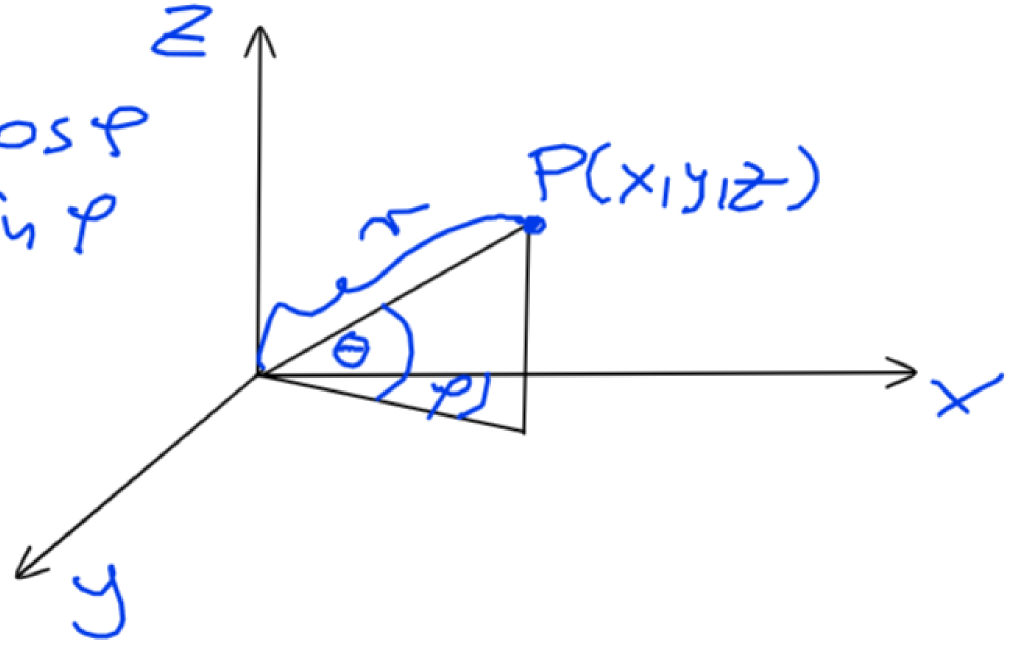
- Równanie zwyczajne prostej
  - $\frac{x-p_1}{v_1} = \frac{y-p_2}{v_2} = \frac{z-p_3}{v_3}$
- Równanie parametryczne prostej
  - $\begin{cases} x = p_1 + t \cdot v_1 \\ y = p_2 + t \cdot v_2 \\ z = p_3 + t \cdot v_3 \end{cases}$
- Równanie krawędziowe prostej
  - $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

Współrzędne sferyczne

$$\varphi \in \langle -\pi, \pi)$$

$$\Theta \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

$$x = r\cos\Theta\cos\varphi$$
$$y = r\cos\Theta\sin\varphi$$
$$z = r\sin\Theta$$

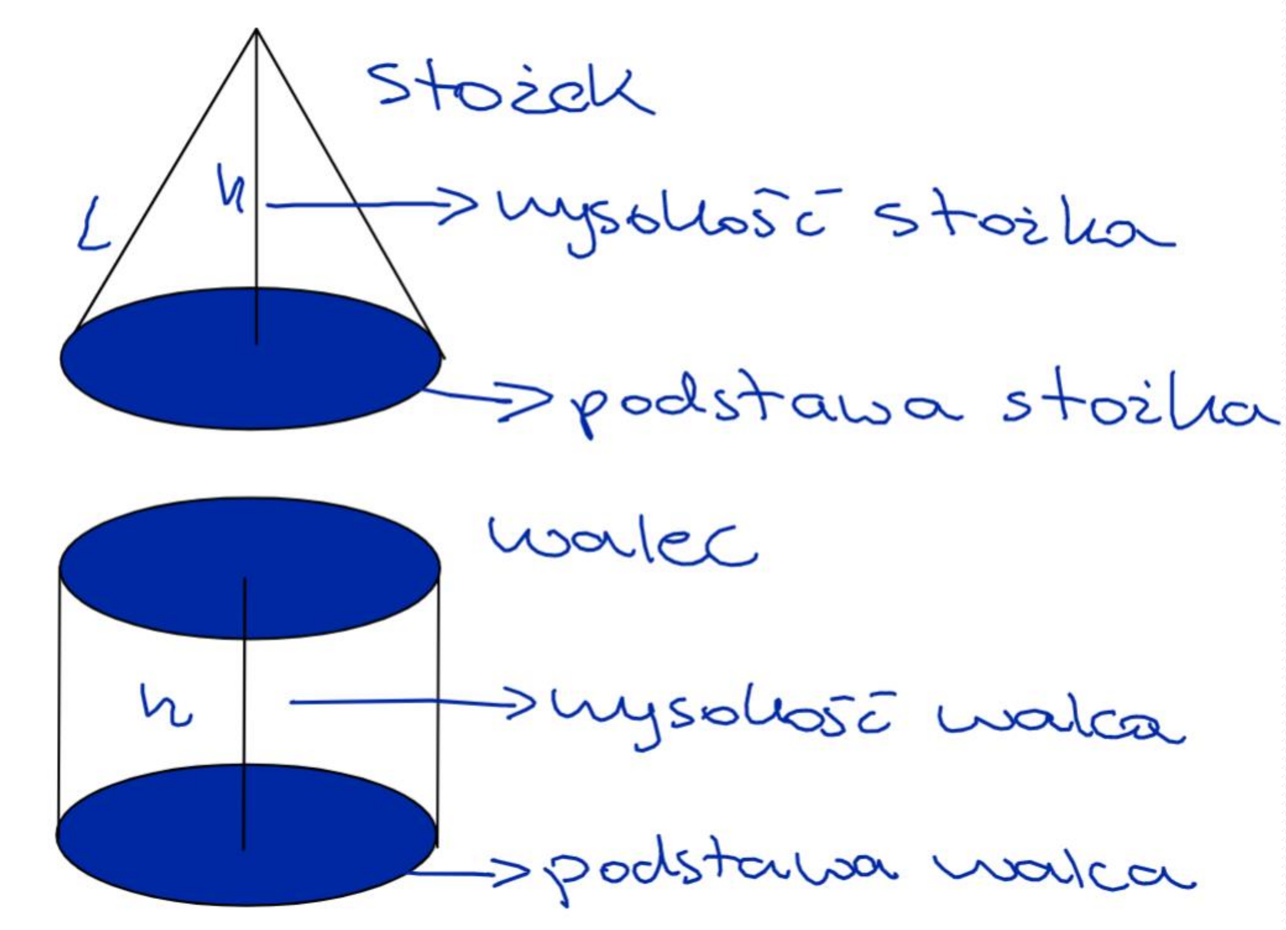


Kula i sfera

- Równanie sfery o środku w punkcie (x_0, y_0, z_0) i promieniu r
  - $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$
  - Sfera może być opisana równaniami współrzędnych sferycznych zakładając stałą wartość r.
- Nierówność kuli o środku w punkcie (x_0, y_0, z_0) i promieniu r
  - $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq r^2$

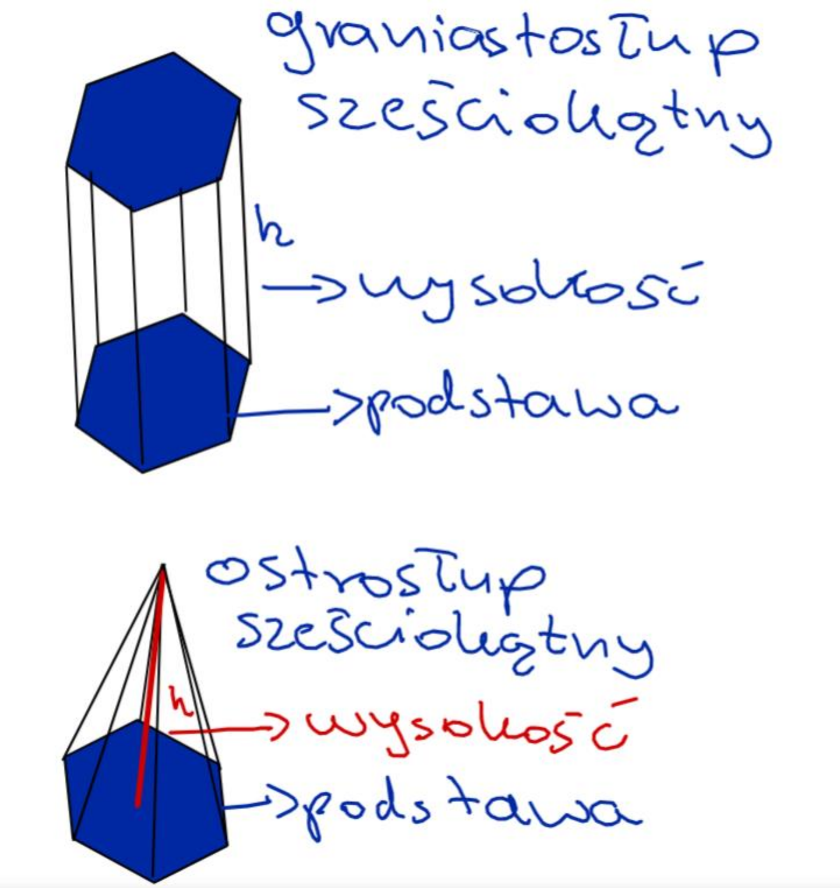
- Pole sfery: $4\pi r^2$
- Objętość kuli: $\frac{4}{3}\pi r^3$

Stożek i walec



- Pole stożka:
  - $P = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot l$
- Objętość stożka:
- $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$
- Pole walca:
  - $P = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h$
- Objętość walca:
- $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Ostrosłup i graniastosłup



- Pole graniastosłupa n-kątnego:
  - $P = 2 \cdot P_p + n \cdot h \cdot a,$
    $\text{a} - \text{krawędź podstawy}$
- Objętość graniastosłupa:
  - $V = P_p \cdot h$
- Pole ostrosłupa n-kątnego:
  - $P = P_p + \frac{n \cdot H \cdot a}{2},$
    - H – wysokość ściany
  - Objętość ostrosłupa :
- $V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot h$

Zadania

- Znajdź pole oraz objętość stożka o wierzchołku poza podstawą o współrzędnych O(0,0,2), którego okrąg w podstawie ma równanie: $x^2 + y^2 = 25$ i leży na płaszczyźnie z=0
- Ile punktów wspólnych mają sfery o równaniach:
  - $(x+2)^2+y^2+(z-3)^2=4$
  - $(x-4)^2+(y+2)^2+z^2=25$
- Znaleźć odległość punktu P(0,2,-1) od płaszczyzny przechodzącej przez punkty A(0,0,1), B(-1,2,0), C(3,0,-2)
- Znaleźć punkty wspólne prostej *l* i płaszczyzny *n*
- *l*: $\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - 2t, \\ z = 2 + 3t \end{cases}$ *n: -x+2z=5*

Iloczyn wektorowy i mieszany

- $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \mathrm{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$
- $UxV = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & e_1 \\ u_2 & v_2 & e_2 \\ u_3 & v_3 & e_3 \end{vmatrix},$
  - e_1, e_2, e_3 oznaczają wektory jednostkowe, równoległe do głównych osi układu
- *|UxV|=|U|·|V| ·sin(α)* – pole równoległoboku rozpiętego na wektorach U i V.
- $(U\mathrm{x}V)$ *· W = det(U,V,W)* - moduł z iloczynu mieszanego, jest równa objętości równoległościanu rozpiętego na wektorach U, V i W.
- Objętość czworościanu rozpiętego na tych 3 wektorach jest równa $\frac{1}{6} \cdot |\det(U, V, W)|$

Zadania

- Oblicz pole równoległoboku rozpiętego na wektorach U=[0,1,2] oraz V=[1,-4,3]
- Oblicz objętość równoległościanu oraz czworościanu, którego 4 wierzchołki mają współrzędne:
  - A(0,0,1), B(0,3,0), C(1,-2,3), D(5,0,0)
- Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach:
  - A(3,2,2), B(0,0,0), C(2,-1,0)