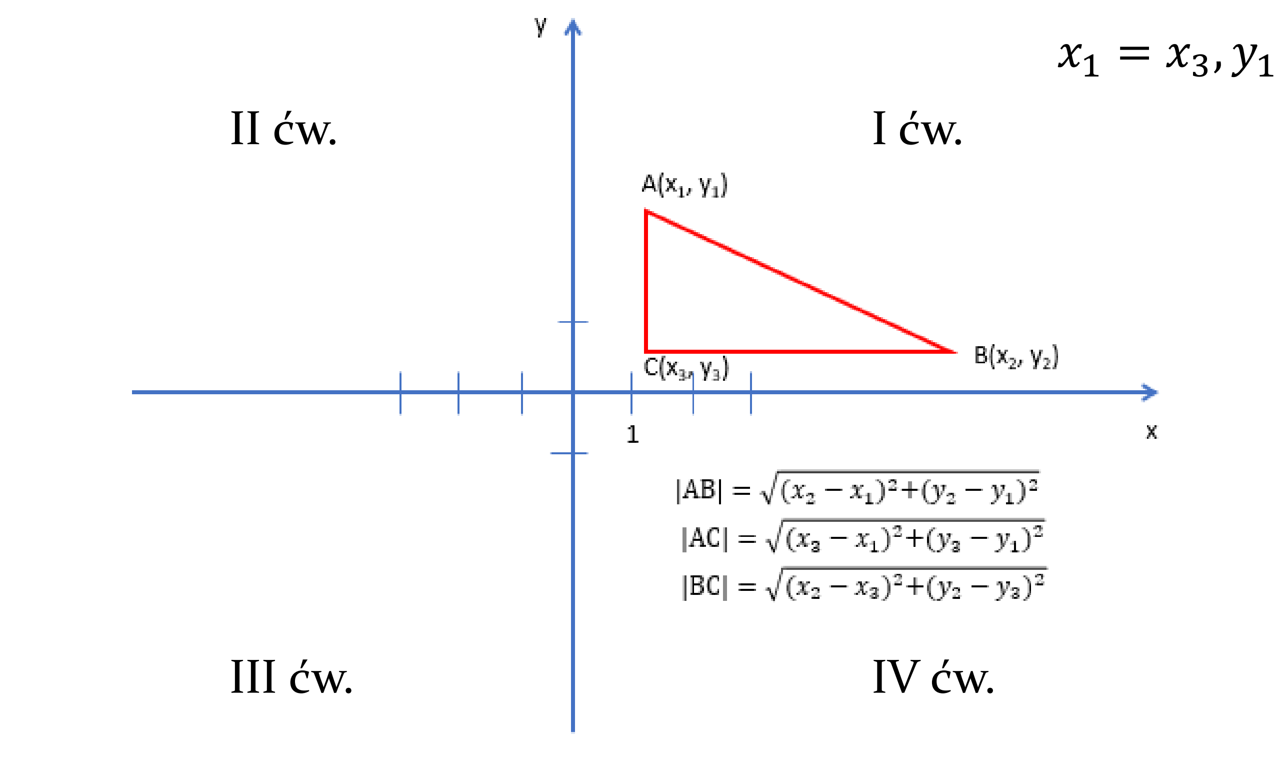
Geometria płaska

semestr zimowy 2021

Układ współrzędnych



$x_1 = x_3, y_1 = y_3$

- Odległość punktów A i B liczona jest według metryki Euklidesowej
- Istnieją inne metryki (miary odległości)

- Środek odcinka AB:
- $S(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$

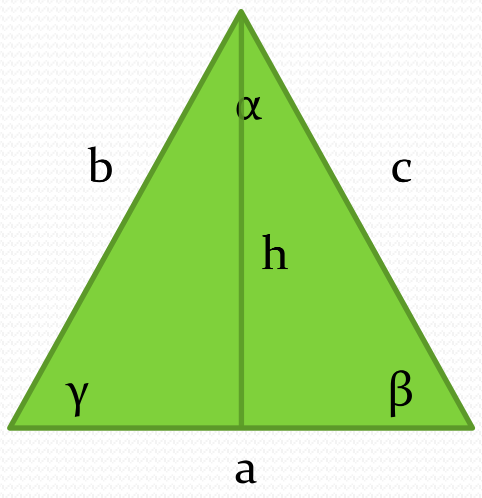
- Twierdzenie Pitagorasa:
- $|BC|^2 + |AC|^2 = |\mathrm{AB}|^2, |\mathrm{AB}| = \sqrt{|BC|^2 + |AC|^2}$

Pojęcia podstawowe

- Prosta, półprosta
- Odcinek, wektor
- Kąty:
  - Kąt to obszar zawarty pomiędzy dwoma półprostymi
  - Miary kąta – stopnie lub radiany, $180^o = \pi[rad]$
  - Kąt prosty = 90^o, kąt półpełny = 180^o, kąt pełny = 360^o
  - Kąt ostry i rozwarty, wypukły i wklęsły

Trójkąt

- Trójkąt ostrokątny, rozwartokątny, prostokątny – suma kątów w każdym trójkącie = 180^o
- Twierdzenie sinusów: $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}$
- Twierdzenie cosinusów: $c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos(\gamma)$



Pole trójkąta

- Pole trójkąta $P = \frac{a \cdot h}{2}$,
- Wzór Herona:

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

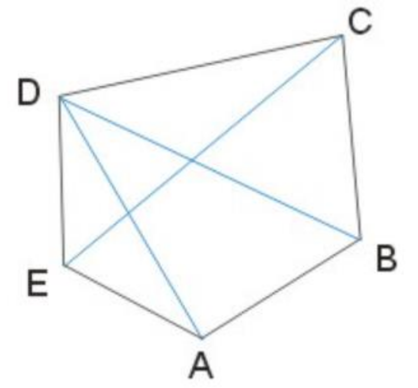
$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

- Pole trójkąta:

$$P = \frac{1}{2} bcsin(\alpha)$$

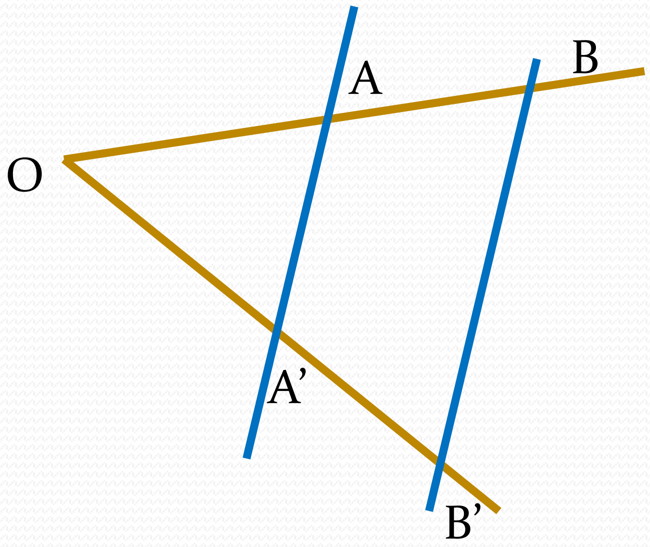
Wielokąty

- Wielokąt o n-kątach i n-bokach:
- Przekątna wielokąta to każdy odcinek, który nie jest bokiem wielokąta, łączący dwa wierzchołki
- Wielokąt wypukły to taki, że każdy odcinek łączący dowolne punkty wielokąta zawiera się w nim, lub inaczej każdy kąt wewnętrzny jest kątem wypukłym
- Suma miar kątów wewnętrznych n-kącie wypukłym jest r równa (n-2)· 180^o
- Wielokąt foremny to wielokąt o wszystkich równych kątach wewnętrznych i równych bokach
- Wzór Brahmagupty na pole czworokąta wpisanego w okrąg:



$$P = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$
$$p = \frac{a+b+c+d}{2}$$

Twierdzenie Talesa



$$\frac{|AA'|}{|BB'|} = \frac{|OA|}{|OB|}$$

$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|OA'|}{|A'B'|}$$

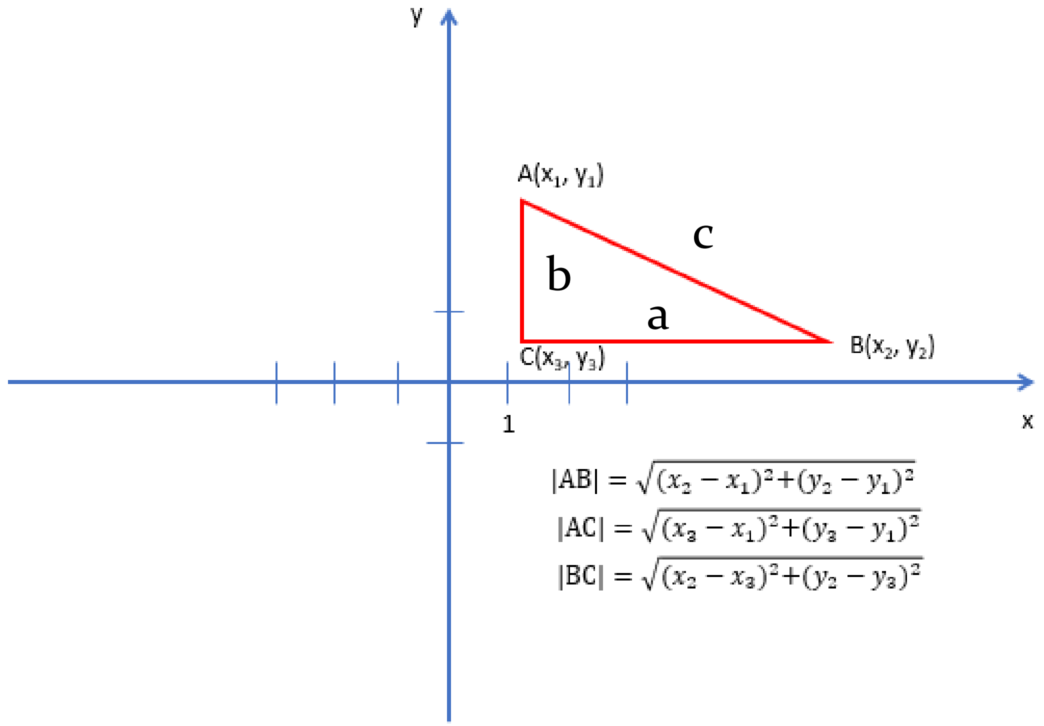
$$\frac{|OB|}{|AB|} = \frac{|OB'|}{|A'B'|}$$

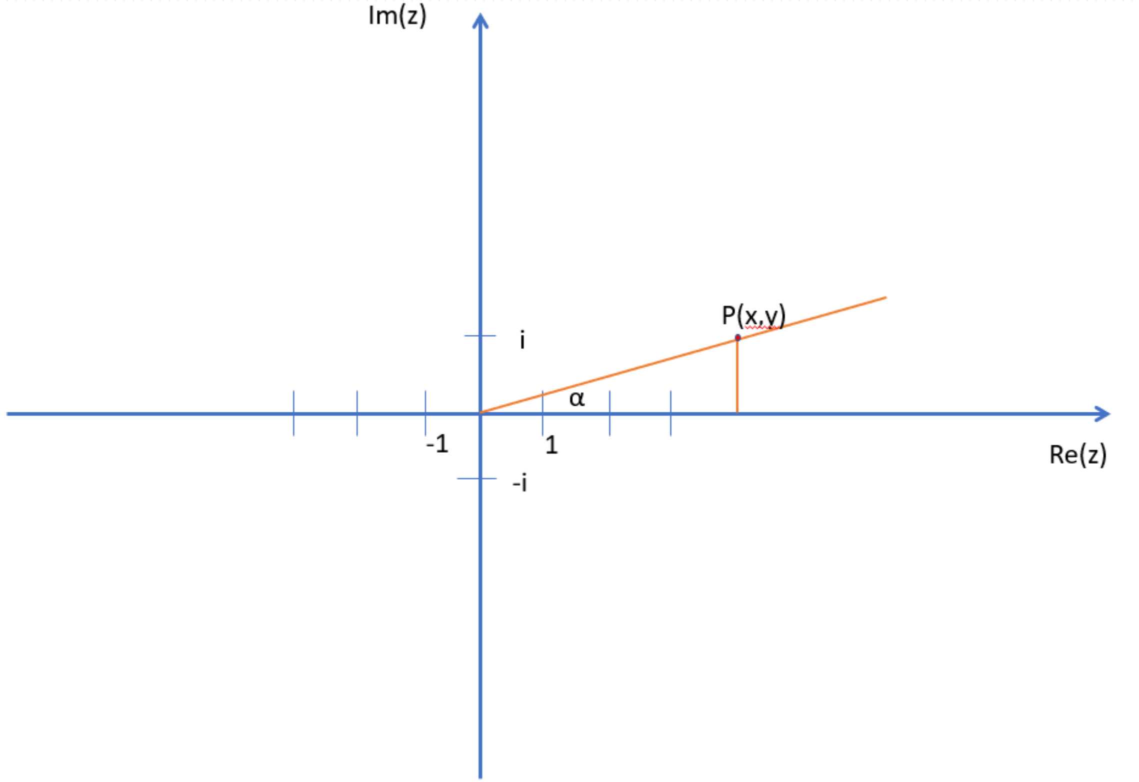
- Jeżeli ramiona kąta przetniemy dwiema prostymi równoległymi, to odpowiednie odcinki wyznaczone przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta

Zadania

- Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach A(0,0), B(1,3), C(-1,1)
- Przyprostokątne trójkąta prostokątnego są równe 3cm oraz 5cm. Oblicz miary wszystkich kątów trójkąta.
- Dla jakiego parametru k trójkąt ABC jest prostokątny A(0,k), B(0,2), C(1,1)
- 2 boki trójkąta mają długości 1cm oraz 3 cm, cosinus kąta zawartego między nimi jest równy 1/3 oblicz pole trójkąta.
- Oblicz pole pięciokąta o wierzchołkach:
  - A(0,0), B(0,1), C(1,2), D(3,2), E(4,0)
- Człowiek o wysokości 1.7m stoi w odległości 10 m od 5 metrowego muru. Zakładając że mur zasłania słońce, jak długi jest cień człowieka.

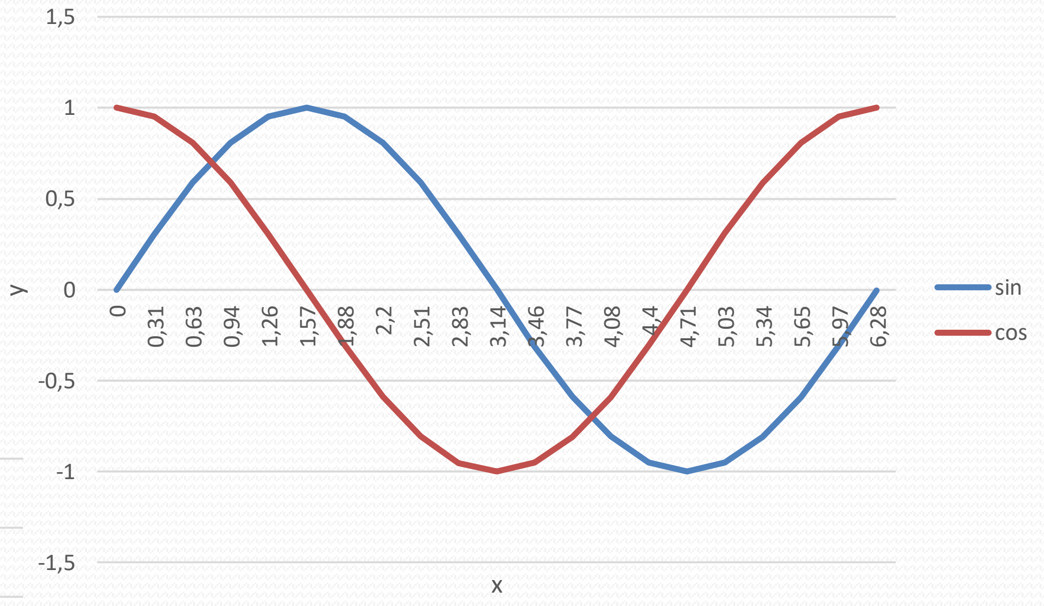
Funkcje trygonometryczne - przypomnienie

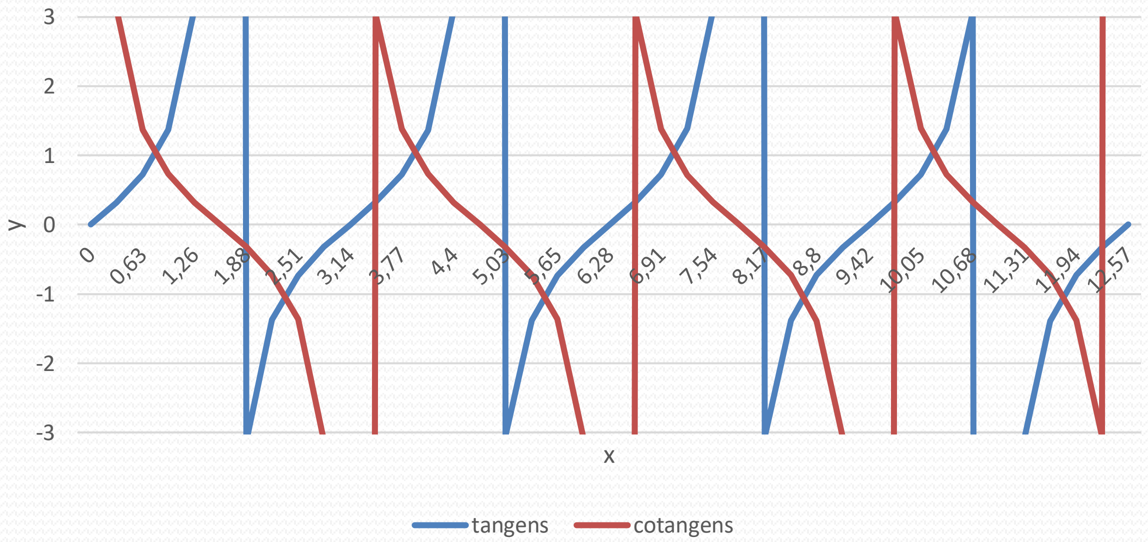




- $\alpha = kąt\ CBA$
- $\sin(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{y_1 - y_3}{|AB|}, \cos(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{x_2 - x_3}{|AB|}$
- $\sin(\alpha) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
- $cos(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

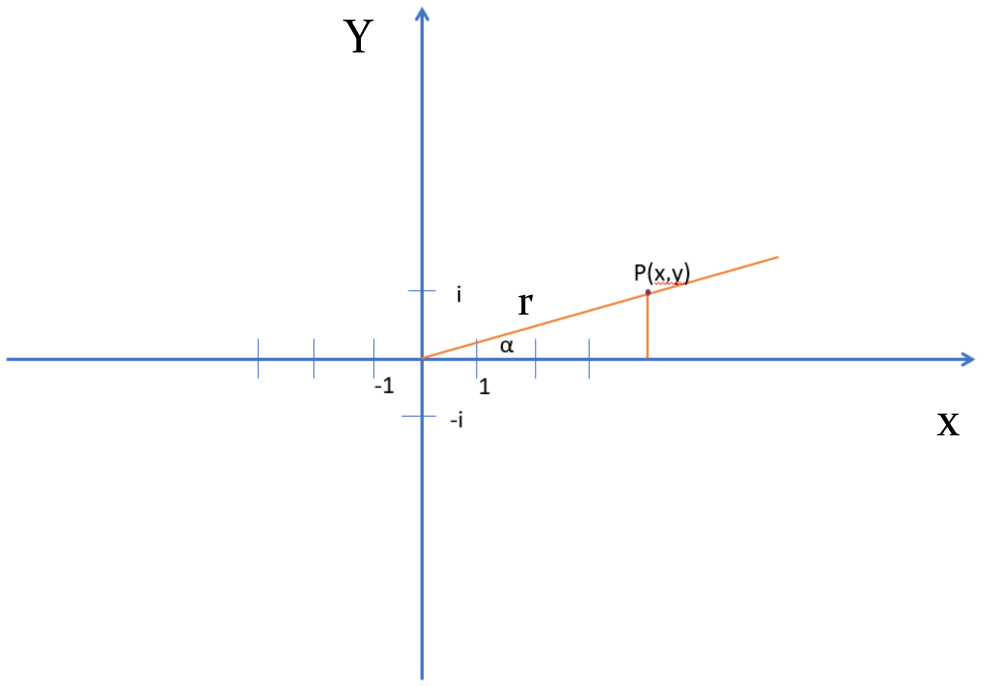
Wykresy funkcji trygonometrycznych



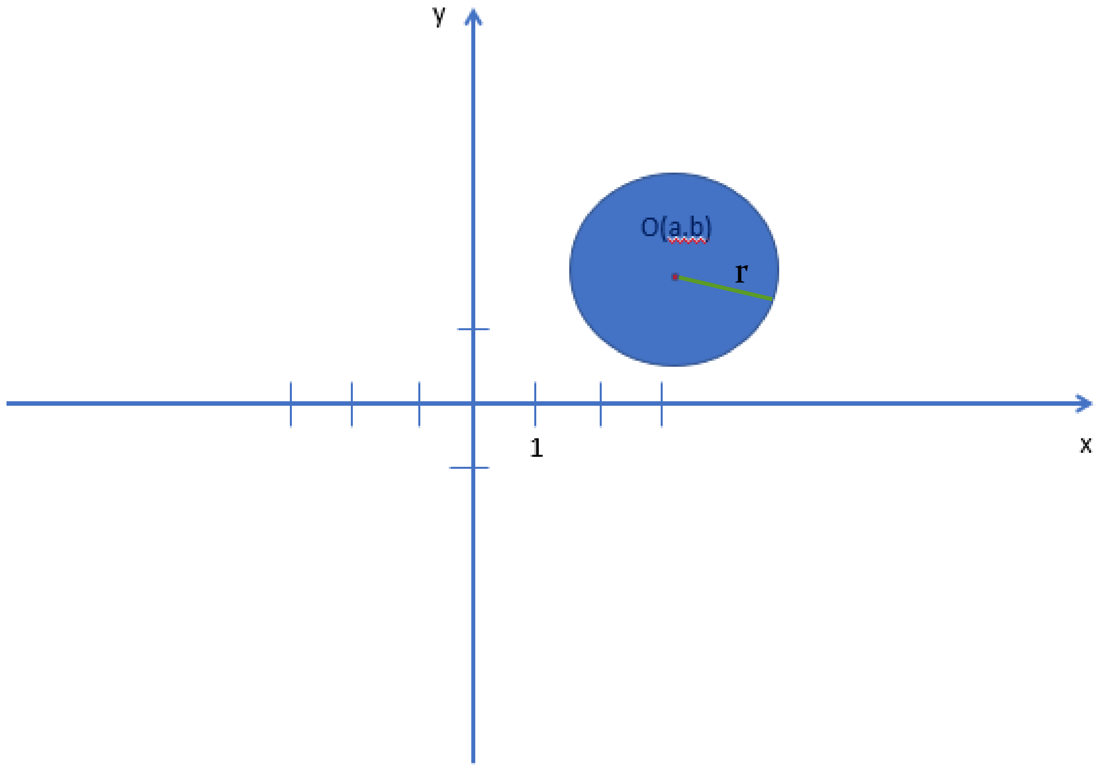


Współrzędne biegunowe

- Punkt P(x,y) wyrażony we współrzędnych kartezjańskich, może tez być wyrażony we współrzędnych biegunowych
  - $\sin(\alpha) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{r}, y = r \cdot \sin(\alpha)$
  - $cos(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r}, x = r \cdot \cos(\alpha)$
- Współrzędne biegunowe to r i α



Równanie okręgu



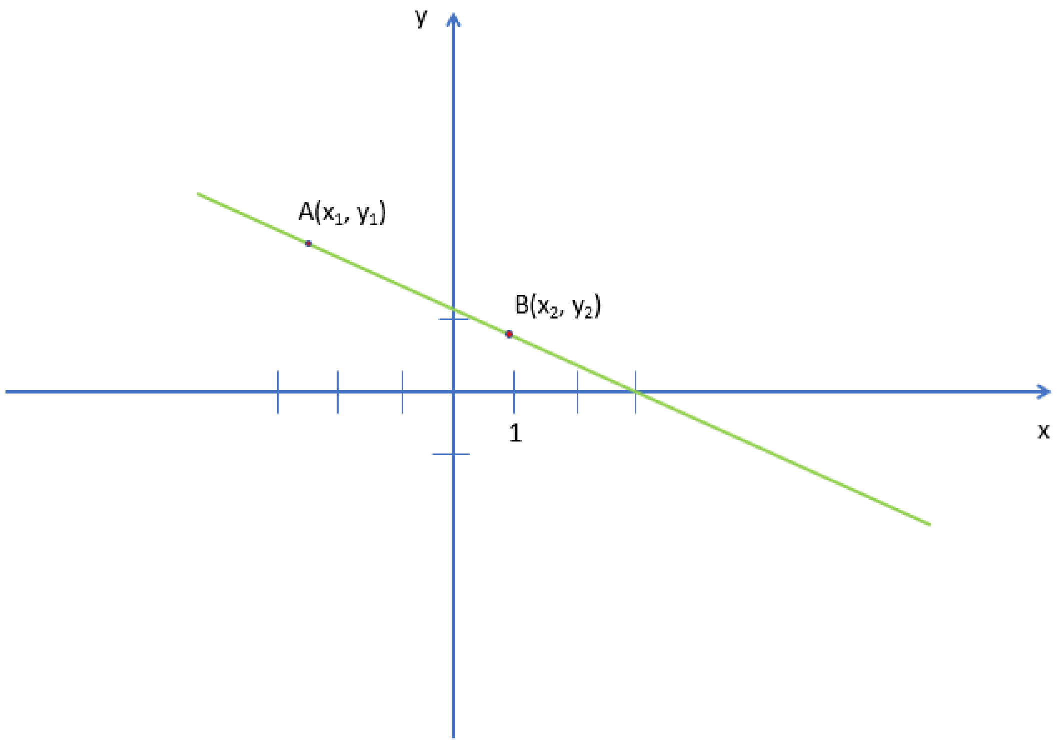
- Wzajemne położenie dwóch okręgów:
  - Styczne
  - Wewnętrzne
  - rozłączne

- Równanie okręgu:
- $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$,

Nierówność koła:

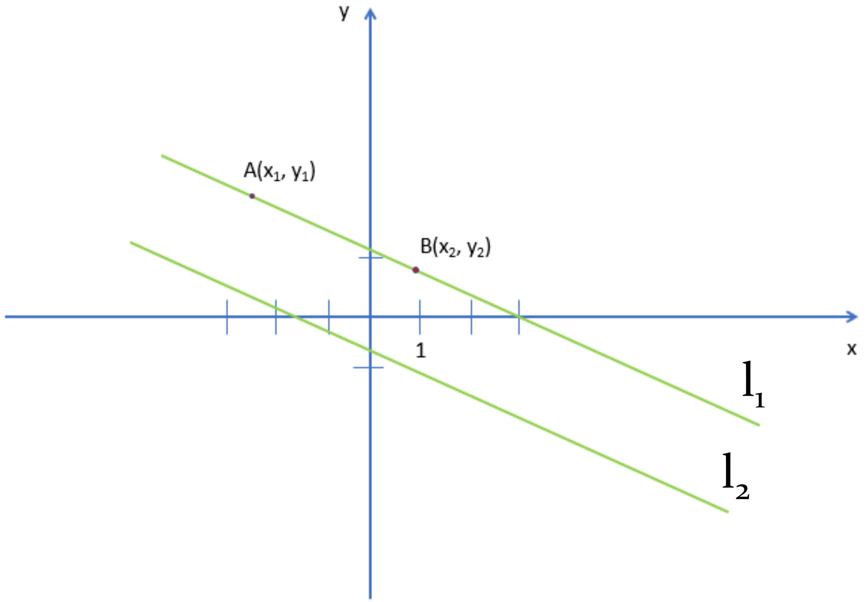
$(x-a)^2+(y-b)^2\leq r^2$

Równanie prostej



- Równanie prostej przechodzącej przez 2 punkty:
- $y = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} \cdot (x - x_1) + y_1$
- Dwie proste o równaniach
  $$y = a_1 x + b_1, y = a_2 x + b_2$$
  - są równoległe, gdy $a_1 = a_2$
  - są prostopadłe, gdy $a_1 \cdot a_2 = -1$
- Odległość punktu P(x_0, y_0) od prostej l: $Ax + By + C = 0$:
  $$d(P, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Położenie prostych w układzie współrzędnych



- Dwie proste w układzie współrzędnych:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

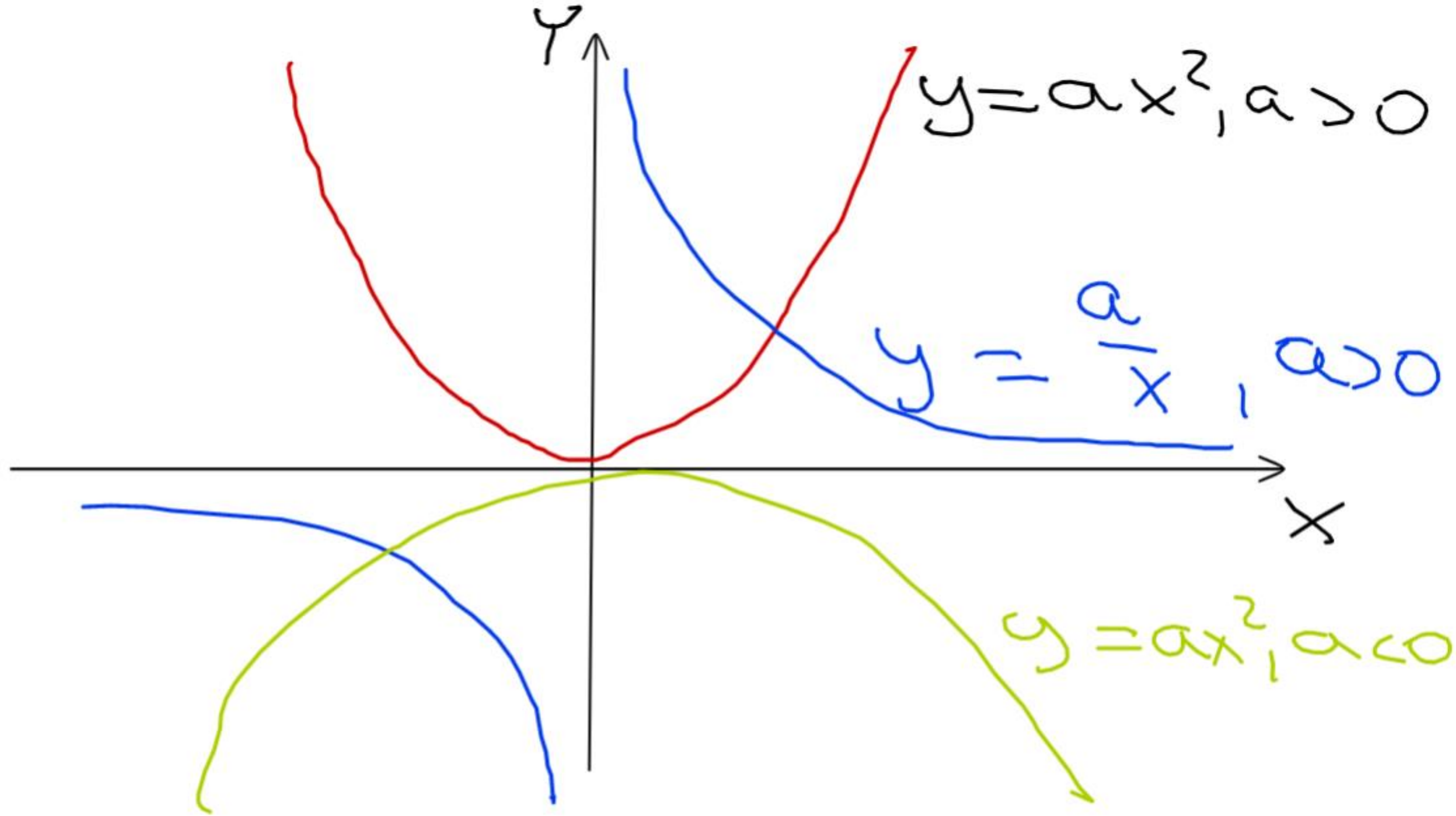
  - mogą się:
    - przecinać
    - nakładać na siebie,
    - być równoległe $A_1 = A_2, B_1 = B_2$, wtedy ich odległość jest równa:

$$d(l_1, l_2) = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}$$

Zadania

- Oblicz odległość punktów o współrzędnych A(-1,3) i B(2,3)
- Znajdź współrzędne trzeciego wierzchołka trójkąta równobocznego, którego dwa wierzchołki to punkty: A(0,4), B(-1,2)
- Znajdź współrzędne punktu leżącego na okręgu o promieniu 3 i środku w punkcie O(1,2), który:
  - Leży na osi X
  - Leży na przekątnej pierwszej ćwiartki układu współrzędnych
- Znajdź punkt najbardziej oddalony od punktu A(-2,2), który leży na okręgu o środku w punkcie O(-1,3) i promieniu 1
- Znajdź punkty wspólne prostej y=3x-1 oraz okręgu o środku O(0,4) i promieniu 5.
- Podaj równanie dowolnej prostej prostopadłej do prostej przechodzącej przez punkty A(0,2), B(1,5).

Inne krzywe płaskie – parabola, hiperbola



Inne krzywe płaskie - elipsa

- F_1 oraz F_2 są ogniskami elipsy
- Ogniskowa do odległość pomiędzy ogniskami elipsy
- a i b to wielka i mała pół oś elipsy
- Mimośród elipsy *e*, to iloraz ogniskowej i długości półosi wielkiej
- Równanie elipsy:
- $\frac{(x-x_0)^2}{a} + \frac{(y-y_0)^2}{b} = 1$
- (x_0, y_0) – środek elipsy