Geometria przestrzenna - płaszczyzna

- Równanie płaszczyzny:
  - $Ax + By + Cz + D = 0$
- Równanie płaszczyzny przechodzącej przez 3 punkty
  - $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$
- Odległość punktu $P(x_0, y_0, z_0)$ od płaszczyzny
- $d(P, \pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Geometria przestrzenna – równania prostej

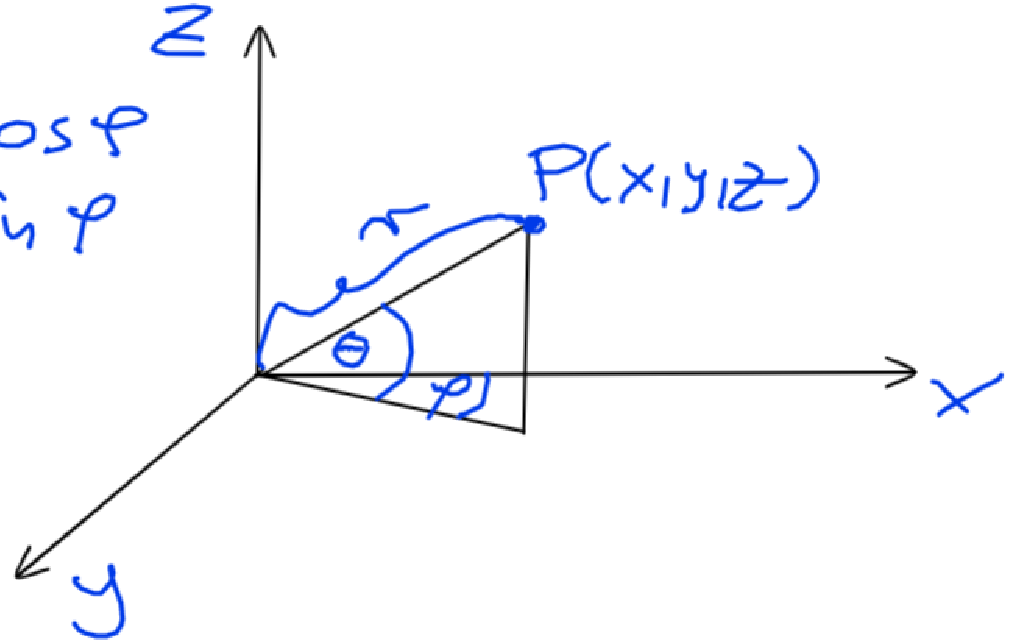
- Równanie zwyczajne prostej
  - $\frac{x-p_1}{v_1} = \frac{y-p_2}{v_2} = \frac{z-p_3}{v_3}$
- Równanie parametryczne prostej
  - $\begin{cases} x = p_1 + t \cdot v_1 \\ y = p_2 + t \cdot v_2 \\ z = p_3 + t \cdot v_3 \end{cases}$
- Równanie krawędziowe prostej
  - $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

Współrzędne sferyczne

$$\varphi \in \langle -\pi, \pi)$$

$$\Theta \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$$

$$x = r\cos\Theta\cos\varphi$$
$$y = r\cos\Theta\sin\varphi$$
$$z = r\sin\Theta$$

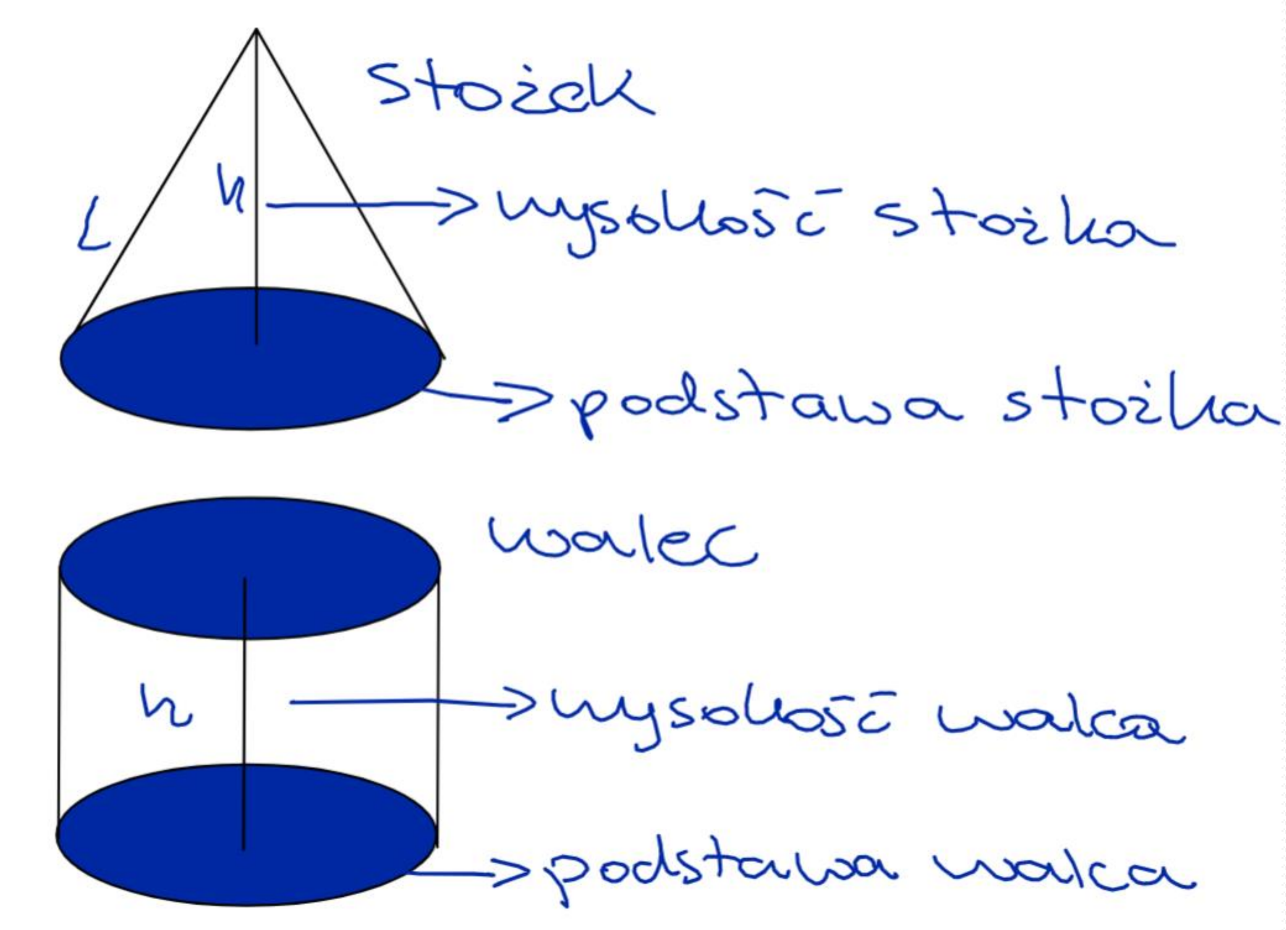


Kula i sfera

- Równanie sfery o środku w punkcie (x_0, y_0, z_0) i promieniu r
  - $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2= r^2$
  - Sfera może być opisana równaniami współrzędnych sferycznych zakładając stałą wartość r.
- Nierówność kuli o środku w punkcie (x_0, y_0, z_0) i promieniu r
  - $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\leq r^2$

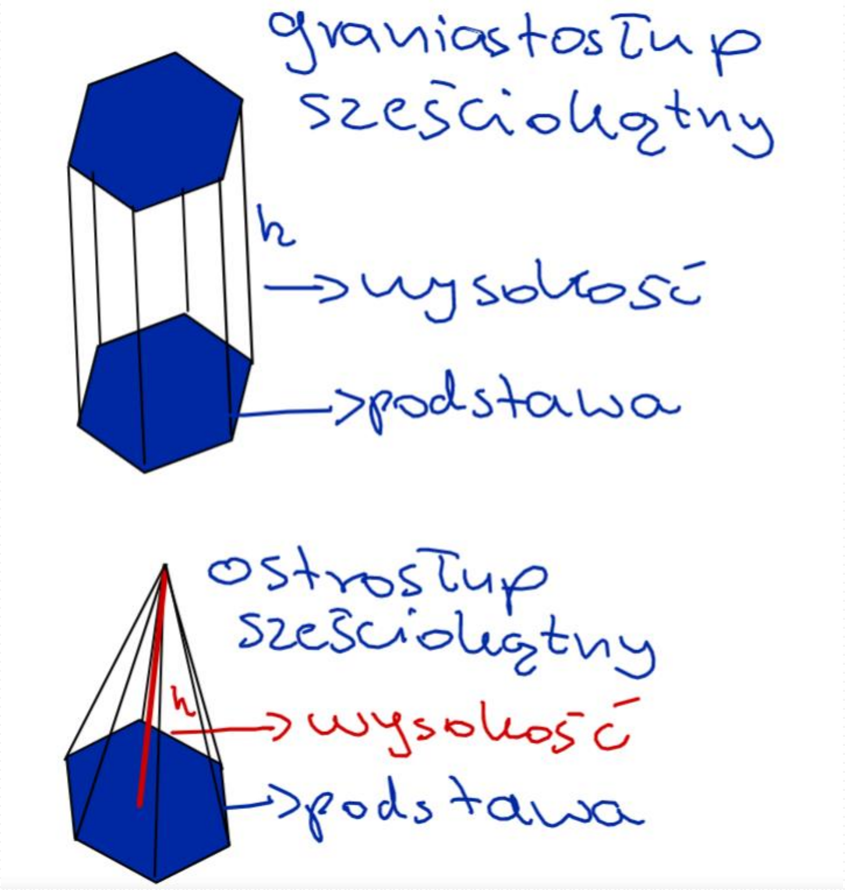
- Pole sfery: $4\pi r^2$
- Objętość kuli: $\frac{4}{3}\pi r^3$

Stożek i walec



- Pole stożka:
  - $P = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot l$
- Objętość stożka:
- $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$
- Pole walca:
  - $P = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h$
- Objętość walca:
- $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Ostrosłup i graniastosłup



- Pole graniastosłupa n-kątnego:
  - $P = 2 \cdot P_p + n \cdot h \cdot a,$

    $\text{a} - \text{krawędź podstawy}$
- Objętość graniastosłupa:
  - $V = P_p \cdot h$
- Pole ostrosłupa n-kątnego:
  - $P = P_p + \frac{n \cdot H \cdot a}{2},$
    - H – wysokość ściany
  - Objętość ostrosłupa :
- $V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot h$

Zadania

- Znajdź pole oraz objętość stożka o wierzchołku poza podstawą o współrzędnych O(0,0,2), którego okrąg w podstawie ma równanie: $x^2 + y^2 = 25$ i leży na płaszczyźnie z=0
- Ile punktów wspólnych mają sfery o równaniach:
  - $(x+2)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 4$
  - $(x-4)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 25$
- Znaleźć odległość punktu P(0,2,-1) od płaszczyzny przechodzącej przez punkty A(0,0,1), B(-1,2,0), C(3,0,-2)
- Znaleźć punkty wspólne prostej *l* i płaszczyzny *n*
- *l:* $\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - 2t, \\ z = 2 + 3t \end{cases}$ *n: -x+2z=5*

Iloczyn wektorowy i mieszany

- $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \mathrm{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$
- $UxV = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & e_1 \\ u_2 & v_2 & e_2 \\ u_3 & v_3 & e_3 \end{vmatrix},$
  - e_1, e_2, e_3 oznaczają wektory jednostkowe, równoległe do głównych osi układu
- *|UxV|=|U|·|V| ·sin(α)* – pole równoległoboku rozpiętego na wektorach U i V.
- $(U\mathrm{x}V)$ · *W= det(U,V,W)* - moduł z iloczynu mieszanego, jest równa objętości równoległościanu rozpiętego na wektorach U, V i W.
- Objętość czworościanu rozpiętego na tych 3 wektorach jest równa $\frac{1}{6} \cdot |\det(U, V, W)|$

Zadania

- Oblicz pole równoległoboku rozpiętego na wektorach U=[0,1,2] oraz V=[1,-4,3]
- Oblicz objętość równoległościanu oraz czworościanu, którego 4 wierzchołki mają współrzędne:
  - A(0,0,1), B(0,3,0), C(1,-2,3), D(5,0,0)
- Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach:
  - A(3,2,2), B(0,0,0), C(2,-1,0)