فصل شانزدهم

منطق ریاضی

استدلال درک شهودی:

در بسیاری حالتها ، استدلال درک شهودی باعث تلاش و پیگیری حل مسأله و ایجاد انگیزه یی می باشد که باعث طرح پرسشهای جدید تری می گردد.

مثال: با استدلال درک شهودی به سهولت می توان حکم کرد که دو خط موازی همدیگر را قطع نمی کنند. چون در پذیرش این مسأله استدلالی بکار نرفته و در واقع یک احساس است که بر اساس آن این حکم صورت می پذیرد. این گونه نتیجه گیری را به نام «درک شهودی» یاد می نمایم.

مثال: یک نقط در خارج دایره یی به قطر 4 واحد قرار دارد ، برای مطالعهٔ فاصلهٔ آن از مرکز دایره ، که بیش تر از 2 واحد است ، نمی توان گفت که استدلال مذکور یک درک شهودی است، زیرا برای وضاحت این مسأله لازم است تا استدلال نمایم چون فاصلهٔ مرکز دایره از محیط آن 2 واحد بوده و نقطه در خارج محیط قرار دارد ، بنابر این فاصلهٔ

نقطه از مرکز دایره از محیط آن 2 واحد می باشد ، یعنی با در نظر داشت یک دانش و یا احساس غریزه یی بدون استدلال نمی توانیم مسأله را درک و صحت آن را قبول نمایم..

استدلال تمثیلی یا قیاسی:

قیاس و یا تمثیل ، در حقیقت نوعی از یافتن تشابه بین مفاهیم گوناگون است ، بنابر این تمثیلها می تواند در ایجاد یک زمینۀ شهودی برای درک بسیاری از مفاهیم یا قضایای ریاضی بکار رود. استدلال تمثیلی به حیث یک ثبوت حساب نمی شود. اما زمینه ساز آن است.

مثال: ضرب المثل عامیانه «مار گزیده از ریسمان ابلق می ترسد» یک استدلال قیاسی است ، زیرا ریسمان ابلق با مار مقایسه شده است و بین آنها شباهتی دیده شده است.

مثال: از تمثیل و یا قیاس برای درک این حقیقت که حاصل ضرب یک عدد منفی در عدد منفی ، یک عدد مثبت و حاصل ضرب یک عدد منفی در عدد مثبت ، یک عدد منفی است ، استفاده می کنیم.

هرگاه لایق بودن یک شاگرد را (+) و برای نیست (−) را در نظر گرفته ، آنها را ترکیب نماییم ، در نتیجه داریم.

$$\underbrace{\text{منفی}}_{(-)} = \underbrace{\text{نیست}}_{(-)}\ \underbrace{\text{لایق}}_{(+)}$$

$$\underbrace{\text{مثبت}}_{(+)} = \underbrace{\text{است}}_{(+)}\ \underbrace{\text{لایق}}_{(+)}$$

$$\underbrace{\text{مثبت}}_{(+)} = \underbrace{\text{نیست}}_{(-)}\ \underbrace{\text{نالایق}}_{(-)}$$

$$\underbrace{\text{منفی}}_{(-)} = \underbrace{\text{است}}_{(+)}\ \underbrace{\text{نا لایق}}_{(-)}$$

استدلال استقرایی:

استدلال استقرایی عبارت از روش نتیجه گیری کلی بر مبنای مجموعۀ محدودی از مشاهدات است. در واقع تعمیم دادن خاصیتی در مورد یک نمونۀ کوچک به نمونۀ بزرگ است.

مثال: «مشت نمونۀ خروار است» به استدلال استقرایی اشاره می کند، زیرا در این مثال از یک نمونۀ کوچک ، نتیجه گیری مشخص در مورد کل مجموعه گرفته می شود ، در واقع بر پایۀ تعدادی محدودی از مشاهدات ، از مسأله نتیجه گیری شده است بنابر این استدلال استقرایی بکار گرفته شده است.

مثال: یک شاگرد به طور اتفاقی در چندین مرحله، سه عدد متوالی را با هم ضرب نموده که حاصل ضرب هر سه عدد متوالی مضرب 6 است، بناً شاگرد مذکور استدلال استقرایی را بکار برده و چنین حکم می کند که حاصل ضرب هر «سه عدد متوالی» مضرب 6 است.

استدلال ریاضی (بازی دو مینو):

هرگاه $P(n)$ حکمی در بارۀ اعداد طبیعی n داده شده باشد ، با مطالعۀ حکم در برابر $n = 1$ ، یعنی اگر $P(1)$ درست باشد ، در قدم دوم از درستی $P(k)$ ، درستی $P(k+1)$ را به حیث نتیجۀ درست به دست آوریم در این صورت ادعای $P(n)$ برای هر عدد طبیعی n نیز درست می باشد.

مثال: نشان دهید که $P(n) = 4^{2n} - 1$ برای هر عدد طبیعی ، قابل تقسیم بر 5 است.

حل: ادعا برای $n = 1$ درست است ، زیرا که:

$$n = 1\ ,\quad P(1) = 4^{2\cdot 1} - 1 = 16 - 1 = 15$$

دیده می شود که عدد $P(1) = 15$ بر 5 قابل تقسیم است.

برای هر عدد طبیعی k قبول می کنیم ، که ادعای فوق صدق می کند ، یعنی $P(k) = 4^{2k} - 1$ بر 5 قابل تقسیم است بنابر این چون بر 5 قابل تقسیم است ، می توان آن را به شکل زیر نوشت:

$$P(k) = 4^{2k} - 1 = 5r$$

برای $n = k + 1$ نیز ادعای مذکور درست است ، یعنی:

$$n = k + 1\ , P(k+1) = 2^{2(k+1)} - 1$$

اطراف رابطه را ضرب 4^2 نموده داریم که :

$$4^2\left(4^{2k} - 1\right) = 5r \cdot 4^2$$
$$4^{2k+2} - 4^2 = 5r \cdot 16$$
$$4^{2(k+1)} - 1 = 15 + 16 \cdot (5r)$$
$$4^{2(k+1)} - 1 = 5(3 + 16r)$$

طرف راست رابطۀ فوق $5(3+16r)$ نشان می دهد که طرف چپ مساوات بر 5 قابل تقسیم است.

رابطۀ اخیر نشان می دهد که $P(k+1) = 4^{2(k+1)} - 1$ نیز بر 5 قابل تقسیم است ، چون از صحت $P(k)$ صحت

$P(k+1)$ را نتیجه گرفتیم، بنا بر این نظر به اصل استقرایی ریاضی ، ادعای $P(n)$ در برابر هر عدد طبیعی n نیز درست می باشد.

مثال: با استفاده از استقرای ریاضی ثبوت کنید که رابطهٔ زیر برای هر عدد طبیعی n درست است:

$$1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

حل: برای صحت رابطهٔ فوق ، در برابر $n=1$ داریم :

$$P(1)=1\times 2=\frac{1(1+1)(1+2)}{3}=\frac{1\times 2\times 3}{3}=2$$
$$\Rightarrow 2=2$$

بنابر این ، رابطه در برابر $n=1$ صحیح بوده ، حال اگر برای $n=k$ صحت آن را قبول نماییم ، مسأله را برای $n=k+1$ به اثبات می رسانیم ، بنابر این داریم :

$$n=k$$
$$1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

فرضیه استقرا: با فرض رابطهٔ بالا برای $P(n)$ ، با در نظر داشت $n=k+1$ می خواهیم صحت رابطه را نشان دهیم بنابر این داریم :

$$n=k+1$$
$$P(k+1)=1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

حکم استقرا: با در نظر داشت فرضیهٔ استقرا داریم:

$$\begin{aligned}P(k+1)=1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)&=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)\\&=\frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3}\\&=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}\end{aligned}$$

بنابر این رابطه برای $n = k + 1$ نیز درست بوده ، و به این ترتیب رابطهٔ $P(n)$ در برابر هر n از اعداد طبیعی درست می باشد.

استدلال استنتاجی:

با استفاده از حقایقی که درستی آن را در قدم نخست پذیرفتیم نتیجهٔ عمومی تری را به دست آورده که به نام «استدلال استنتاجی» یا روش نتیجه گیری یاد می گردد به عبارت دیگر ، استدلال استنتاجی روش نتیجه گیری با استفاده از حقایقی است که درستی آنها را ثبوت و یا پذیرفته باشیم . وقتی از استدلال استنتاجی استفاده می کنیم . مطمئن هستیم که نتیجه همیشه درست است.

مثال :

یک عدد را به صورت اختیاری انتخاب کنید.	4	7	12
به عدد مذکور عدد 5 را اضافه کنید.	9	12	17
نتیجه را دو چند نماید.	18	24	34
از نتیجهٔ حاصله ، عدد 4 را کم نمایید.	7	20	30
عدد را به 2 تقسیم نمایید.	7	10	15
عددی را که در اول انتخاب کرده بودید ، از عدد کم نمایید.	3	3	3

نکتهٔ اساسی ، که به نظر می خورد این است که ما در حقیقت بر مبنای عباراتی که درستی آنها را قبول کرده ایم ، نتیجهٔ بعدی را به دست آوردیم، این مسأله ما را مطمئن می سازد که با انتخاب هر عدد اختیاری نتیجه همیشه یکسان و مساوی به 3 می باشد.

استدلال مثال نقض:

هرگاه با مثال نشان دهیم که نتیجهٔ کلی نادرست و یا غلط است ، نادرستی ادعا را نشان داده که به نام مثال نقض یاد می گردد.

مثال: برای اثبات مسأله کافی است نشان دهیم که اعداد x و y وجود دارد که غیر ناطق بوده ، اما مجموع آنها $(x + y)$ ناطق است . برای این منظور هرگاه دو عدد $x = 1 + \sqrt{2}\,, y = 1 - \sqrt{2}$ را انتخاب نماییم ، داریم:

$$x + y = (1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 1 + 1 = 2$$

دیده می شود که حاصل جمع انها مساوی به 2 ، که یک عدد ناطق است ، می باشد در حالی که x و y اعداد غیر ناطق است. بنابر این ، ادعا کرده نمی توانیم که مجموع دو عدد غیر ناطق همیشه یک عدد غیر ناطق می باشد.

برهان خلف یا ثبوت غیر مستقیم:

هر گاه با فرضیه یا قبولی عکس ادعای یک قضیه یا مسأله به نتیجۀ خلف برسیم ، در این صورت فرض ما نادرست بوده که خلاف آن درست است این گونه استدلال را به نام برهان خلف و یا ثبوت غیر مستقیم می نامند.

یادداشت:

به خاطر بسپارید که برای استفاده از برهان خلف یا ثبوت غیر مستقیم ، گامهای زیر را در نظر می گیریم.

قدم اول- فرض می کنیم ادعای مطلوب درست باشد.

قدم دوم- نشان می دهیم که این فرضیه نتیجه یی به دست می دهد که حقایق دانسته شده را نقض می کند.

قدم سوم- حالا که نتیجه به یک تناقص رسیده است معلوم می شود که فرضیۀ قدم اول نادرست بوده بنابر این مطلب باید درست باشد.

مثال : نشان دهید که اگر n^2 یک عدد جفت طبیعی باشد ، n نیز جفت است.

حل : به خاطر ثبوت مسأله فرض می کنیم که با وجود جفت n^2 ، n یک عدد طاق است ، پس می توان آن را به شکل

$n = 2k + 1$ نوشت ، در حالی که k یک عدد تام است ، در نتیجه برای مربع عدد مذکور داریم :

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k^2 + k) + 1$$
$$\Rightarrow n^2 = 4(k^2 + k) + 1$$

رابطه بالا نشان می دهد که n^2 یک عدد طاق است ، در حالی که خلاف فرضیه بوده و در نتیجه فرضیۀ گرفته شده در بالای این که n یک عدد طاق است ، نادرست بوده و به این نتیجه می رسیم که n نیز یک عدد جفت می باشد زیرا فرض طاق بودن آن ما را به نتیجه یی می رساند که n^2 نیز باید طاق باشد.

منطق ریاضی و استنتاج بیان:

هر جمله نمی تواند یک بیان باشد ، یک جمله می تواند پرسشی ، امری ، تعجبی ، و یا خبری باشد. هر جمله خبری درست یا نادرست است.

یادداشت:

اگر یک بیان را P بنامیم در این صورت طر نوشتن $P \equiv T$ برای بیان درست و $P \equiv F$ برای بیان نادرست استعمال می گردد. بر علاوه $\sim P$ نفی بیان P می باشد.

جدولی که در آن ارزیابی یک بیان صورت گرفته باشد به نام جدول صحت یاد می کنند بنابر این برای هر بیان P داریم:

$P \equiv T , \sim P \equiv T$

P	$\sim P$
T	F
F	T

ترکیب بیان ها :

اگر دو بیان p و q داده شده باشد ، در این صورت :

1. ترکیب p^q به نام ترکیب عطفی («و» منطقی) بیانات p و q یاد می گردد. علامهٔ (^) به معنای (و) بکار رفته است.
2. ترکیب $p \vee q$ به نام ترکیب فصلی («ی» منطقی) بیانات p و q یاد می گردد. علامهٔ $\vee$ به معنای (ی) بکار رفته است.
3. ترکیب $p \Rightarrow q$ به نام ترکیب مشروط و یا «اگر p پس q خوانده شده» یاد می گردد. و علامهٔ $(\Rightarrow)$ نشان می دهد که p اساس ترکیب شرطی می باشد که q از p آن نتیجه می شود.
4. ترکیب $p \Leftrightarrow q$ به نام ترکیب مشروط دو طرفه و یا « p اگر و تنها اگر و q خوانده شده» یاد می گردد. و علامهٔ $(\Leftrightarrow)$ نشان می دهد که p اساس ترکیب شرطی می باشد ، q از آن نتیجه گردیده و اگر q اساس ترکیب شرطی باشد ، p از آن نتیجه می گردد.

به این ترتیب ، ترکیب «اگر و تنها اگر» بیانهای p و q را در جدول صحت زیر ملاحظه می نماییم.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$

T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

مثال: با تشکیل جدول صحت نشان دهید که $p \vee (p \Rightarrow q)$ همیشه درست است.

حل:

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \vee (p \Rightarrow q)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	T

از جدول صحت در ستون آخر مشاهده می نماییم که بیان $p \vee (p \Rightarrow q)$ همیشه درست است.