فصل پانزدهم

احتمالات

- یک اتفاق را می توان به سه درجه حتمی – ممکن و ناممکن و یا کلمات معادل آن پیش بینی نماییم. برای پیش بینی یک اتفاق ، یک واقعهٔ ناممکن را با 0% و احتمال یک واقعه مطمئن یا امکان پذیر قطعی را با 100% یا 1 نشان می دهند. احتمال واقعه های ممکن بین اعداد 0 و 1 واقع می گردد.
- زمان که چانس یک حادثه را به عدد بیان نماییم به نام احتمال یاد می گردد.

چانس: حوادث که از نگاه عددی قابل نباشد ، در پیش بینی برای آنها از کلمه چانس استفاده می گردد.

احتمال: هرگاه چانس یک اتفاق با اعداد و ارقام پیش بینی گردد ، به نام احتمال حادثه اتفاقی یاد میگردد .
احتمال یک واقعه ناممکن صفر و احتمال یک حادثه مطمئن یک است.

حادثهٔ اتفاقی : تجربه که نتیجه ممکنه آن هنگام اجرا معلوم نباشد به نام حادثه اتفاقی یاد میگردد.

تجربه تصادفی: یک فعالیت که تا هنوز نتایج ان معلوم نباشد و یا حادثه به صورت تصادفی اتفاق افتد به نام تجربه تصادفی یاد می گردد.

احتمال تجربی: احتمال که توسط انجام تجربه به شکل عملی یا از روی تعداد نتایج یک تجربه به دست می آید ، احتمال تجربی یاد میگردد.

احتمال نظری: احتمال که از روی فضای نمونه از نسبت حالت مساعد بر تعداد کل حالات یک تجربه به دست می آید ، احتمال نظری یاد می گردد.

- حادثه که هنوز نتایج آن به صورت قطعی معلوم نباشد و حادثه به صورت تصادفی اتفاق افتد تجربه تصادفی یاد میگردد . برای حوادث که تصادفی و یا اتفاق می افتد ، پیش بینی معنی ندارد.
- تمام نتایج ممکن یک تجربه تصادفی را به یک مجموعه یا Set نشان داده می توانیم که به نام فضایی نمونه یاد می شود.
- هر عنصر فضایی نمونه ، یک نتیجه ممکن همان تجربه تصادفی بوده که به نام حوادث اولیه یاد میگردد.

کثرت نسبی و احتمال:

- احتمال ، قبل از وقوع حادثه برای پیش بینی یک حادثه ، مورد استعمال قرار گرفته ، اما کثرت نسبی بعد از انجام یک تجربه به اساس ارقام به دست آمده از انجام تجربه اتفاقی حساب می گردد.
- احتمال تجربی برای یک حادثه اتفاقی مساوی به کثرت نسبی حادثه می باشد.
- چون مجموع کثرت نسبی تمام حالات مساوی به یک است ، بنابر این مجموع احتمال همه حالات نیز مساوی به یک است.

❖ کثرت نسبی یک تجربه عبارت از نسبت کثرت مطلق نظر به تعداد کل دفعات انجام یک تجربه می باشد ، اما احتمال یک حادثه قبل از وقوع آن پیش بینی می گردد.

❖ کثرت نسبی حادثه A را به $h(A)$ نشان داده و $0 \le h(A) \le 1$ می باشد.

چانس برابر و نا برابر در یک فضایی نمونه:

تا به حل با حوادثی روبرو بودیم که احتمال عناصر اولیه فضایی نمونه با هم یکسان بودند ، که بر اساس آن تعریف احتمال صورت گرفته است.

احتمال را معمولاً به P نمایش داده و $P(A)$ احتمال حادثه اتفاقی A می باشد.

هرگاه یک فضایی نمونه ، n عنصر داشته باشد ، در این صورت احتمال هر حادثه اولیه E (غیر قابل تجزیه) مساوی به $P(E) = \frac{1}{n}$ می باشد.

- ❖ حوادث که در انجام یک تجربه تصادفی یکی بر دیگری هیچ گونه برتری و یا هم شرایطی برای وقوع چانس بیشتر آن در یک فضایی نمونه نداشته باشند ، بنام حوادث با چانس برابر یاد میگردد.

حادثه اتفاقی یک فضایی نمونه:

هر ست فرعی یک فضایی نمونه بحیث حادثه اتفاقی ، همان تجربه می باشد ، ست خالی یک حادثه اتفاقی ناممکن و S یک حادثه اتفاقی مطمئن می باشد.

هرگاه تعداد عناصری یک فضأ نمونه مساوی به n عنصر باشند ، تعداد مجموع حوادث اتفاقی آن 2^n است.

قواعد احتمال:

- احتمال حادثه اتفاقی E همیشه بین 0 و 1 است. $0 \le P(E) \le 1$
- هرگاه S یک فضایی نمونه باشد ، $P(S) = 1$ ، حادثه اتفاقی S به نام حادثه مطمئن نیز یاد میگردد.
- برای حادثه ناممکن داریم $P(\emptyset) = 0$

① $0 \le P(E) \le 1$

② $P(\{a_1 , a_2\}) = P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) \qquad a_1, a_2 \in E$

③ $P(\emptyset) = 0 \qquad P(S) = 1$

دیاگرام درختی:

هر تجربه تصادفی را میتوان توسط یک دیاگرام که از نقطه شروع یک تجربه آغاز میگردد ، به تعداد نتایج ممکن شاخچه ها را ترسیم ، برای انجام مرتبه دوم ، تجربه را بار دیگر مانند قدم اول ، به هر نتیجه ممکنه شاخچه ها ترسیم میگردد ، گراف مذکور را که مانند درخت شاخ و پنجه می کند ، به نام دیاگرام درختی یاد میکنند.

- ✓ حاصل جمع احتمالات در هر نقطه انتشار شاخچه ها حتماً مساوی به یک است.
- ✓ حاصل جمع احتمالات تمام حوادث اولیه نیز مساوی به یک است.
- ✓ هر تجربه تصادفی از نقطه شروع به شاخچه های حوادث ممکن اتفاقی جدا تقسیم می شوند ، با انجام مرتبه دوم آن ، مانند قدم اول به هر نتیجه ممکنه بحیث نقطه آغاز بار دیگر شاخچه های حوادث اتفاقی گراف رسم میگردد ، به همین ترتیب روش ادامه می یابد ، احتمال هر حادثه اولیه به دست آمده ، عبارت از حاصل ضرب احتمالات هر بند شاخچه های که از نقطه آغاز روی مسیر مطلوب ما را به انجام آن می رساند می باشد.

قاعده اول مسیر (حاصل ضرب):

احتمال هر حادثه اتفاقی اولیه در پایان هر مسیر معین در گراف درختی مساوی به حاصل ضرب احتمالات هر شاخچه از طریق مسیر مطلوب می باشد.

- هر مسیر ما را به یک نتیجه جداگانه می رساند.
- هر مسیر گراف درختی در انجام یک تجربه به یک حادثه اتفاقی اولیه می انجامد.
- رسیدن به هر حادثه اتفاقی اولیه ، از مسیر های مختلف و نقاط انتشار مختلف عبور می کند.
- احتمال یک حادثه اولیه عبارت از حاصل ضرب احتمال ها از آغاز مسیر تا حادثه می باشد.

اتحاد حوادث اتفاقی:

- هرگاه در یک فضایی نمونه S طوریکه حوادث اتفاقی $A \leq B$ باشد ، در این صورت $A \cup B = B$
- در یک فضای نمونه S، هرگاه A و B حوادث اتفاقی باشند ، حوادث $A \cup B$ و $B \cup A$ از هم فرق ندارند ، یعنی

$$A \cup B = B \cup A$$

- هرگاه در یک فضایی نمونه S ، یک حادثه A یا B اتفاق افتد ، پس حادثه اتفاقی $A \cup B$ نیز اتفاق افتاده و علاوتاً صورت می گیرد.

$$A \leq A \cup B \quad \text{و} \quad B \leq A \cup B$$

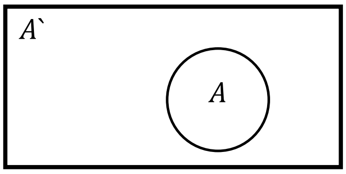
- حادثهٔ A در فضای نمونه اتفاق افتاده و یک حادثه دیگری که هیچ وقت اتفاق نمی افتد یعنی $\emptyset$ به معنی اینست که تنها حادثه A اتفاق افتاده است. $A \cup \emptyset = A$
- حادثهٔ اتفاقی $A \cup B$ به معنی این است که حد اقل حادثه A یا B اتفاق افتاده است.

نتیجه: در یک فضایی نمونه S ، برای حوادث اتفاقی A، B و C داریم.

- حوادث اتفاقی $A \cap B$ و $B \cap A$ حوادث یکسان اند.
- هر یک از حوادث اتفاقی A و B حادثهٔ اتفاقی $A \cap B$ را دربر دارد.
- اگر برای حوادث غیر خالی A و B ، $A \cap B = \emptyset$ ، $A \cap S = A$
- هرگاه حادثه B حادثه A را در بر داشته باشد ، پس $A \cap B = A$ می باشد.

ست کلی و مکمله :

هرگاه S یک فضایی نمونه و A یک حادثه اتفاقی آن باشد:



- $\bar{A}$ حادثه اتفاقی یی است که همزمان با آن حادثه A اتفاق نمی افتد.
- برای هر حادثه اتفاقی A صورت می گیرد:

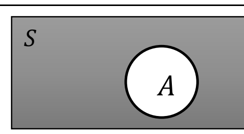
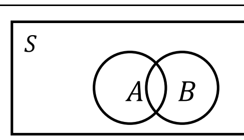
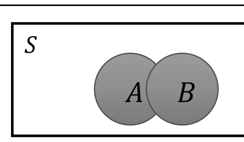
a) $A \cup A` = S$

b) $P(A \cup A`) = P(S) = 1$

c) $P(A`) = 1 - P(A)$

اصل شمارش:

- در ترکیب عناصر دو ست ، تعداد امکانات کلی مساوی به حاصل ضرب تعداد عناصر هر یک از مجموعه های ترکیبی می باشد.
- اگر تعداد امکانات و یا عناصر یک ست m عدد و تعداد عناصر ست دیگر مساوی به n عدد باشد ، در این صورت هر دو انتخاب با هم به تعداد $m \times n$ شکل امکان پذیر می باشند.

بیان حادثه اتفاقی	ارائه بیان توسط ست	دیاگرام $venn$ حادثه اتفاقی	احتمال حادثه
تمام حوادث اتفاقی S که شامل حادثه اتفاقی A نباشد ، مکمله A و یا حادثه عکس A	$\bar{A} = S - A$ $S = A \cup A`$		چون $P(S) = 1$ است $P(A) = 1 - P(A`)$
حادثه اتفاقی A و حادثه اتفاقی B واقع می شود	$A \cap B$		$P(A \cap B)$
حد اقل یکی از حوادث اتفاقی A یا B اتفاق می افتد	$A \cup B$		$P(A \cup B) =$ $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ترتیب یا $Permutation$:

تعداد ترتیب تکرار وجود دارد که با دقت با حالت بدون تکرار تعداد مجموعی آن برابر است با $P_n^k=\frac{n!}{k!},(k\le n)$ n عنصر را به P_n نشان داده (در صورتیکه تکرار مجاز و یا ممکن نباشد) مساویست به $P_n=n!$

و اما در صورتیکه تکرار مجاز باشد ، تعداد ترتیب های با تکرار مساوی به P_n^k بوده و چنین معنی می دهد که k مرتبه در n ترتیب $\binom{n}{k}$ n بالای k : طرز نوشته ای $\binom{n}{k}$ که n بالای k خوانده می شود ، در حقیقت ضریب بینوم که عدد k آن توان بینوم را مشخص میکند عبارت است از:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\ ,\ \ k,n\in N\ \ ,0\le k\le n$$

تعداد ترکیب r شی از یک ست n عنصری عبارت از $C_r^{(n)}$ بوده و مساوی است به:

$$C_r^n=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\qquad r\le n$$

ترکیب $Combination$:

تعداد ترکیب های r یک ست n عنصری عبارت از ترکیب یا $r\ Combination$ شی از n بوده که $C_{(r)}^n$ نشان داده شده است.

نتیجه: در انتخاب یک گروپ k عنصره از یک ست n عنصره بصورت کل بدو شکل صورت گرفته که در یکی آن ترتیب در نظر بوده اما در دیگر آن ترتیب مهم نبوده صرف ترکیب آنها مورد علاقه می باشد ، بدین ترتیب برای ترکیب k شی متمایز تعریف زیر را در نظر می گیریم.

تعریف: تعداد ترکیب k عنصر از n عنصر یک ست که معمولاً به $C_{(k)}^n$ نشان داده و عبارت از تعداد امکانات $\binom{n}{k}$ ترکیب از n عنصر مختلف که به تعداد k عنصر آن را بدون ترتیب انتخاب مینماییم عبارت است از:

$$C_{(k)}^n=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\qquad 0\le k\le n$$

تبدیل $Variation$:

تعداد ترکیب های که ترتیب مسلسل k عنصر انتخابی مورد نظر از n عنصر در آن مطلوب باشد مساوی به $V_n^k=k!\cdot C_n^k=k$ تبدیل یا وریشن یاد می شود.

$$V_k^n=k!\cdot C_{(k)}^n=k!\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{n!}{(n-k)!}$$

شکل انتخاب و یا هم آمیختن k عنصر از n عنصر	تعداد امکانات	
	بدون تکرار $k \geq n$	با تکرار $k \leq n$
ترتیب $Permutation$	$P_n = n!\ \ , n = k$	$P_k^n = \frac{n!}{k!}$
ترکیب $Combination$	$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$	$C_k^n = \binom{n+k-1}{k}$
تبدیل $Variation$	$V_k^n = k!\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$	$V_k^n = n^k$

یادداشت: $(a+b)^n = C_r^n \cdot a^{n-r} \cdot b^r = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^r$

احتمال خط آمدن k مرتبه عبارت است از : $P_{(\text{خط آمدن})} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$

قضیه بینوم:

انکشاف دو جمله یی $(a+b)^n$ عبارت است از: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$

در تکرار n بار تجربه تصادفی دو جمله یی که هر حالت دارای احتمال P و $q = 1 - P$ بوده احتمال k بار پیروزی یعنی P از n بار بقیه حالت ها که ناکامی یعنی $q = 1 - p$ بوده داریم:

احتمال k بار پیروزی و انجام n بار تجربه $= \binom{n}{k} P^{n-k} \cdot (1-P)^k \quad , 0 \leq k \leq n$

طرز نوشته $B(n, P, k)$ طرز ارائه بینوم یا احتمال پرابلم برنولی یاد گردیده عبارت است از:

$$B(n\,, P\,, k) = \binom{n}{k} P^k (1-P)^{n-k}$$

بنابرین انکشاف بینوم را میتوان به شکل زیر بنویسیم. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k (1-P)^{n-k}$

یادداشت:

I. $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots\cdots\cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$

II. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots\cdots\cdots + \binom{n}{n} = 2^n$

احتمال دو جمله یی:

هر تجربه تصادفی را میتوان به یک تجربه که دارای دو حالت باشد میتوانیم تقلیل دهیم.

هر فضای نمونه و یک تجربه دو حالت دارد اگر یکی از حالت ها بحیث پیروزی دارای احتمال P در نظر گرفته شود حالت دیگر آن عبارت از حالت ناکامی بوده که دارای احتمال $1 - P$ می باشد. با تکرار n بار تجربه ،

احتمال k بار پیروزی یعنی P از این n بار که بقیه حالت ها که باخت یا شکست یعنی $q = 1 - P$ بوده داریم:

$$\text{احتمال } k \text{ بار پیروزی در انجام } n \text{ بار تجربه} = \binom{n}{k} P^{P-k}(1-P)^{k} \qquad 0 \le k \le n$$

فضا نمونه گسسته و پیوسته:

فضا های نمونه ای یک تجربه اتفاقی عبارت از مجموع معیین یا محدود و یا نامعیین یا غیر محدودی اند که یک دسته آنها قابل شمارش $Countable$ و دستهٔ دیگر آنها غیر قابل شمارش $Uncountable$ می باشد . فضای نمونه که عناصر آن ها قابل شمارش و تشخیص اند به نام فضای نمونه گسسته یا غیر متصل و فضای نمونه که عناصر آنها قابل شمارش نیستند به نام فضای نمونه متمادی یا پیوسته یاد می گردند.

فضای نمونه پیوسته به صورت یک انتروال روی محور اعداد حقیقی و یا اشکال و احجام هندسی در مستوی و فضا می توانند ظهور نمایند.

حوادث هم چانس:

حوادث ساده اولیه که احتمال وقوع آنها در اثر انجام یک تجربه با هم برابر باشد ، به نام حوادث هم چانس یاد می گردد ، مجموع احتمالات حوادث اتفاقی هم چانس یک تجربه مساوی به یک است.

احتمال فضاهای پیوسته:

فضای نمونه پیوسته مجموع نامحدود یا نامعیین از نقاط می باشد ، که به شکل محور اعداد حقیقی ، سطح در مستوی و یا احجام در فضا می باشد ، چون نمایش این نقاط ممکن نیست بنابر این برای پیدا کردن نسبت احتمال از طول قطعه خط ها ، سطوح اشکال و یا حجم اجسام استفاده مینماییم. معمولاً برای استفاده از محور اعداد یک متحول x ، قسمت از یک مساحت از دو متحول x و y و بلآخره برای احجام از متحولین y, x و z استفاده به عمل می آوریم.

احتمال مشروط:

هرگاه A و B دو حادثه اتفاقی یک فضای نمونه S باشد ، طوریکه $P(B) \neq 0$ در این صورت احتمال $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ به نام احتمال مشروط حادثه اتفاقی A نظر به حادثه اتفاقی B یاد میگردد.

یادداشت:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$

$$P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

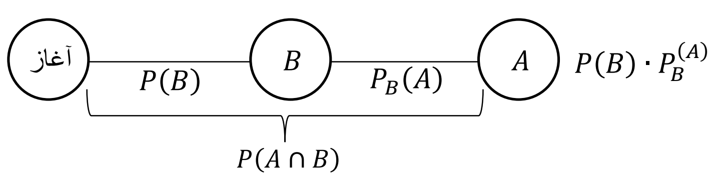
$$P_A(B) = \frac{P_B(A) \cdot P(B)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(B) \cdot P_B(A)}$$

فورمول عمومی

$$P_A(Bi) = \frac{P_{Bi}(A) \cdot P(Bi)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + \cdots\cdots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)} = \frac{P(A \cap Bi)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)}$$

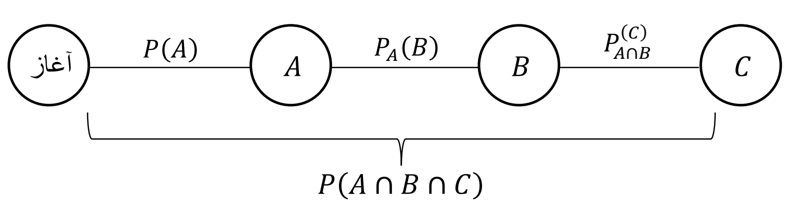
اصل حاصل ضرب:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$



این مطلب را برای سه حادثه اتفاقی B, A و C به شکل زیر توسعه می دهیم.

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P_A^{(B)} \cdot P_{A \cap B}^{(C)}$$



فورمول $Bays$:

$$P_A^{(B_i)} = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)\cdot P_{Bi}^{(A)}}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k)\cdot P_{B_k}^{(A)}}$$

استقلالیت حوادث اتفاقی:

دو حادثه اتفاقی A و B که بالای همدیگر تاثیر گذار نباشند به نام حوادث اتفاقی مستقل یاد می گردند.

$P(A \cap B) = P(A)\cdot P(B) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (اصل حاصل ضرب)

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (اصل حاصل جمع)

$P(A \cap B \cap C) = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$