فصل دهم

مشتقات

یکـــی از مباحـــث اساســـی علـــم ریاضـــیات مشـــتق بـــوده کـــه ســـهولت بیشـــتر را در علـــوم ســـاینس بوجـــود آورده اســـت ، مشـــتق توســـط «اســـحاك نیـــوتن» عـــالم انگلیســـی بوجـــود آمـــده کـــه بعـــداً عـــالم جرمنـــی «ویلم لبنز» آنرا بطور مفصل توضیح و تشریح نمود.

افـــزایش تـــابع: در تـــابع $y = f(x)$ اگـــر متحـــول x بـــه انـــدازه Δx افـــزایش نمایـــد، واضـــیح است که تابع مربوط نیز به اندازه Δy افزایش خواهد کرد. یعنی:

$$y = f(x)$$
$$y + \Delta y = f(x + \Delta x) - y$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

رابطـــه اخیـــر افـــزایش یـــک تـــابع را نشـــان میدهـــد در صـــورتیکه متحـــول مربـــوط افـــزایش نمـــوده باشـــد. حـــالا بـــه تحلیـــل افـــزایش تـــابع ، میتـــوان مشـــتق یـــک تـــابع را از نگـــاه هندســـی و تحلیـــل الجبـــری چنـــین تعریف نمود.

تعریف:

بـه تعبیـر هندسـی ، مشـتق عبـارت از میـل ممـاس در یـک نقطـه معـین از منحنـی اسـت. بـه تحلیـل الجبری هرگاه $y = f(x)$ یک تابع را ارائه نماید ، پس مشتق آن عبارت از:

$$y` = f`(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

قوانین مشتق:

در صـورتیکه n, c, a اعـداد ثابـت ، x متحـول و $u = f(x), v = g(x), w = h(x), \cdots$ توابع را ارائه نمایند ، پس داریم که:

1) $y = c \Rightarrow y' = 0$

2) $y = ax^n \Rightarrow y' = anx^{n-1}$

3) $y = u \pm v \pm w \pm \cdots \Rightarrow y' = u' \pm v' \pm w' \pm \cdots$

4) $y = u.v \Rightarrow y' = u'.v + u.v'$

5) $y = c \cdot u \Rightarrow y` = c \cdot u`$

6) $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

7) $y = \frac{c}{v} \Rightarrow y' = -\frac{cv'}{v^2}$

8) $y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

9) $y = au^n \Rightarrow y' = anu^{n-1}.u'$

که این نوع مشتق را بنام مشتق توابع مرکب یاد می کنند ، که میتوان چنین ارائه نمود.

$$u = g(x) \Rightarrow y = f(u) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y`_x = f`(u) \cdot u`(x)$$

10) $y = \sqrt[n]{u^m} \Rightarrow y' = \frac{m \cdot u'}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-m}}}$

مشتقات ضمنی: هرگاه در بعضی از روابط x با y یکجا باشند ، مشتق ضمنی آن چنین دریافت میگردد.

$$y`_{(x)} = -\frac{-f`(x)}{f`(y)}$$

مثلاً: مشتق ضمنی رابطه $5x^2y + 3x^3 - y^2 + 3 = 0$ را دریابید؟

$$y`_{(x)} = -\frac{f`(x)}{f`(y)} = -\frac{(10xy + 9x^2 - 0 + 0)}{5x^2 + 0 - 2y + 0}$$

$$y`_{(x)} = \frac{-10xy - 9x^2}{5x^2 - 2y}$$

مشتقات توابع مثلثاتی: در حالیکه x متحول و $u = f(x)$ یک تابع را ارائه نماید . مشتقات توابع مثلثاتی عبارت از:

11) $y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$

$y = \sin u \Rightarrow y' = u'.\cos u$

12) $y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$

$y = \cos u \Rightarrow y' = -u'.\sin u$

13) $y = \tan x \Rightarrow y' = \sec^2 x$

$y = \tan u \Rightarrow y' = u' \sec^2 u$

14) $y = \cot x \Rightarrow y' = -\csc^2 x$

$y = \cot u \Rightarrow y' = -u' \csc^2 u$

15) $y = \sec x \Rightarrow y' = \sec x.\tan x$

$y = \sec u \Rightarrow y' = u' \sec u.\tan u$

16) $y = \csc x \Rightarrow y' = -\csc x.\cot x$

$y = \csc u \Rightarrow y' = -u' \csc u.\cot u$

مشـــتقات توابـــع لوگـــارتمی و نمـــائی (اکسپوننشـــیل): در حالیکـه x متحـول و $u=f(x)$ یک تابع را ارائه نماید ، توابع لوگارتمی و نمائی قرار ذیل اند.

$$17)\quad y=\ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

$$y=\ln u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}$$

$$18)\quad y=\log_a^x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}.\log_a^e$$

$$y=\log_a^u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}.\log_a^e$$

$$19)\quad y=e^x \Rightarrow y' = e^x$$

$$y=e^u \Rightarrow y' = u'.e^u$$

$$20)\quad y=a^x \Rightarrow y' = a^x.\ln a \qquad ,a\neq 1, a>0$$

$$y=a^u \Rightarrow y' = u'\cdot a^u.\ln a \qquad ,a\neq 1, a>0$$

$$21)\quad y=u^v \Rightarrow y' = u^v\left(v'.\ln u + \frac{v.u'}{u}\right)$$

مشتقات توابع معکوس مثلثاتی:

22.هرگـــاه $x=\sin y$ باشـــد ، پـــس تـــابع معکـــوس ان $y=\arcsin x$ بـــوده کـــه مشـــتق آن عبارت از:

$$22)\quad y=\arcsin x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y=\arcsin u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

23.هرگاه $x=\cos y$ باشد ، پس تابع معکوس ان $y=\arccos x$ بوده که مشتق آن عبارت از:

$$23)\quad y=\arccos x \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y=\arccos u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

24.هرگاه $x=\tan y$ باشد ، پس تابع معکوس ان $y=\arctan x$ بوده که مشتق آن عبارت از:

$$24)\quad y=\arctan x \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y=\arctan u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$$

25.هرگاه $x=\cot y$ باشد ، پس تابع معکوس ان $y=arc\cot x$ بوده که مشتق آن عبارت از:

$$25)\quad y=arc\cot x \Rightarrow y' = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$y=arc\cot u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{1+u^2}$$

26.هرگـــاه $x=\sec y$ باشـــد ، پـــس تـــابع معکـــوس ان $y=arc\sec x$ بـــوده کـــه مشـــتق آن عبارت از:

$$26)\quad y=arc\sec x \Rightarrow y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$y=arc\sec u \Rightarrow y' = \frac{u`}{u\sqrt{u^2-1}}$$

27.هرگـــاه $x=\csc y$ باشـــد ، پـــس تـــابع معکـــوس ان $y=arc\csc x$ بـــوده کـــه مشـــتق آن عبارت از:

$$27)\quad y=arc\csc x \Rightarrow y' = \frac{-x'}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$y=arc\csc u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{u\sqrt{u^2-1}}$$

مشـــتقات مرتبـــه بلنـــد: هرگـــاه تـــابع $y=f(x)$ مشـــتق پـــذیر باشـــد ، مشـــتق مرتبـــه اول آن $y`=f`(x)$ ، مشـــــتق مرتبـــــه دوم آن $y``=f``(x)$ ، مشـــــتق مرتبـــــه ســـــوم آن $y```=f```(x)$ و ... $y^{(n)}=f^{(n)}(x)$ میباشد.

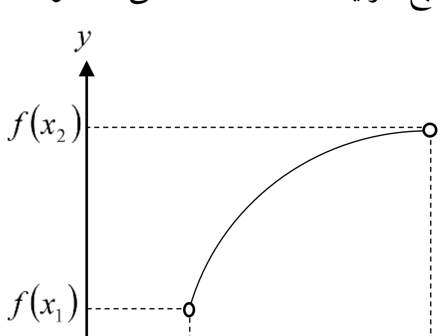
قابـــل یـــاد آوری اســـت کـــه در تـــابع پولینومیـــل $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ مشـــتق $(n)-$ ام تـــابع مـــذکور عبـــارت از $f^{(n)}(x)=a_n\cdot n!$ و مشـــتق $(n+1)$ ام آن صـــفر میباشـــد. یعنی $f^{(n+1)}(x)=0$

تحولات توابع (موارد استعمال مشتق)

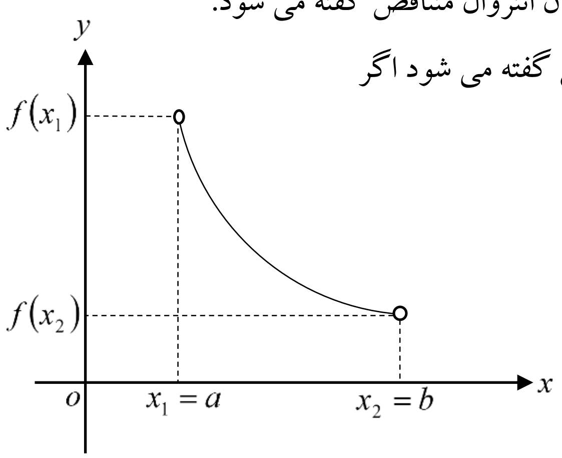
مشــتق مــوارد اســتعمال زیــاد دارد ، مــثلاً در فزیــک تمــام معــادلات مربــوط بــه حرکــت ، ســرعت و تعجیــل بــا اســتفاده از مشــتق حــل مــی گــردد. تحــولات تــابع ، نقطــه اعظمــی ، نقطــه اصــغری ، ســاحه متزایــد ، ســاحه متنــاقص توابــع ، در محاســبات علــم کیمیــا ، کیمیــا صــنعتی ، انجنیــری و غیــره میتــوان از آن استفاده به عمل آورد ، که ذیلاً به تحلیل آن می پردازیم.

1. **تــــابع ثابـــت:** هرگــاه مشــتق اول یــک تــابع بــرای همیشــه صــفر باشــد ، یعنــی $f'(x)=0$ باشد ، در این صورت $f(x)=c$ تابع ثابت گفته میشود.
2. **تــــابع متزایـــد:** هرگــاه اشــاره مشــتق اول تــابع $y=f(x)$ در یــک انتــروال (a,b) مثبت باشد ، یعنی $f'(x)>0$ باشد ، تابع در همان انتروال متزاید گفته می شود.

یــا بــه عبــاره دیگــر اگــر $x_1<x_2$ باشــد ، تــابع متزایــد گفتــه مــی شــود اگــر $f(x_1)<f(x_2)$ باشد.



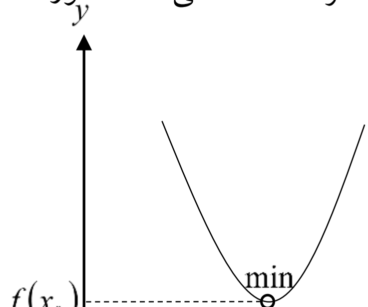
3. **تـــابع متنـــاقص:** هرگـــاه اشـــاره مشـــتق اول تـــابع $y = f(x)$ در یـــک انتـــروال (a,b) منفی باشد ، یعنی $f`(x) < 0$ باشد ، تابع در همان انتروال متناقص گفته می شود.
یا به عباره دیگر اگر $x_1 < x_2$ باشد ، تابع متناقص گفته می شود اگر $f(x_1) > f(x_2)$ باشد.



نقـــاط بحرانـــی $(Extreme)$ **توابـــع:** نقـــاط بحرانـــی توابـــع عبـــارت از نقـــاط اصـــغری و اعظمی توابع میباشد که عبارت اند از:

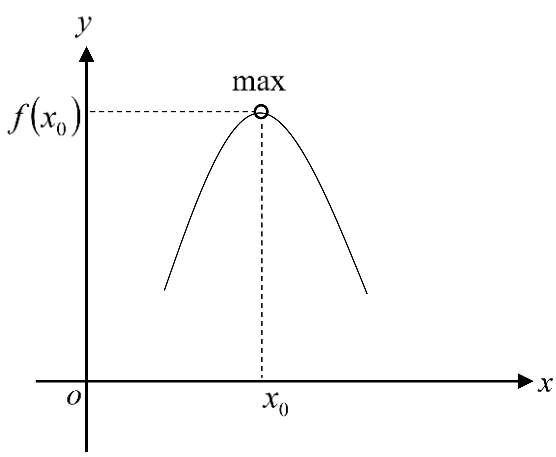
1. **نقطـــه اصـــغری** *Minimum***:** هرگـــاه اشـــاره مشـــتق یـــک تـــابع در یـــک نقطـــه معـــین x_0 از منفـــی بـــه مثبـــت تبـــدیل گـــردد ، یعنـــی در همـــان نقطـــه معـــین x_0 منحنـــی تـــابع از حالـــت تناقص به حالت تزاید تبدیل گردد همان نقطه تابع را نقطه اصغری $(\min)$ می نامند.

بـــه عبـــاره دیگـــر هرگـــاه در تـــابع $y = f(x)$، $f`(x) = 0$، $f``(x) > 0$ باشـــد ، نقطـــه $[x_0, f(x_0)]$ را اصـــغری $(\min)$ نامیـــده و خصوصـــیت گـــراف منحنـــی مـــذکور مقعـــر است.



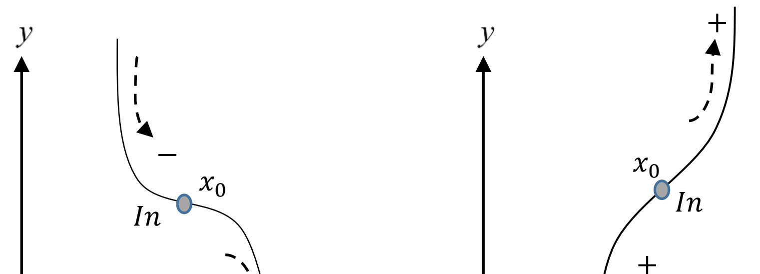
2. **نقطـــه اعظمــــی** *Maximum*: هرگـاه اشـاره مشـتق یـک تـابع در یـک نقطـه معـین x_0 از مثبـت بـه منفـی تبـدیل گـردد ، یعنـی در همـان نقطـه معـین x_0 منحنـی تـابع از حالـت تزاید به حالت تناقص تبدیل گردد همان نقطه تابع را نقطه اعظمی $(\max)$ می نامند.

بـه عبـاره دیگـر هرگـاه در تـابع $y = f(x)$ ، $f'(x)=0$, $f''(x)<0$ باشـد ، نقطـه $[x_0, f(x_0)]$ را اعظمـی $(\max)$ نامیـده و خصوصـیت گـراف منحنـی مـذکور محـدب است.



نقطـــه انعطـــاف *Inflection*: نقطـه کـه انتـروال هـای محـدب بـودن و مقعـر بـودن گـراف تـابع را از همـدیگر جـدا مـی سـازد بنـام نقطـه انعطـاف یـاد میگـردد، و یـا بـه عبـارهٔ دیگـر هرگـاه اشـاره مشـتق یـک تـابع در یـک نقطـه معـین x_0 از منفـی بـه صـفر و دوبـاره بـه منفـی و یـا از مثبـت بـه صـفر و دوباره به مثبت تبدیل گردد نقطه مذکور را نقطه انعطاف (In) می نامند.

زمـانی یـک تـابع دارای نقطـه انعطـاف میباشـد کـه $f''(x) \neq 0$ بـوده کـه جهـت دریافـت آن $f''(x)=0$ قرار داده میشود.



تحولات توابع مثلثاتی:

1. **تحـــــول تـــــابع** $y=\sin x$: ایـــن تـــابع پریودیـــک بـــوده کـــه ســـاحه تحـــول آن بـــین $[-1,+1]$ و پریـــود آن بـــه انـــدازه (2π) مـــی باشـــد ، و در انتـــروال $[0,2\pi]$ دارای نقـــاط ذیل می باشد.

$$f(x)=\sin x \quad , \qquad [0,2\pi]$$

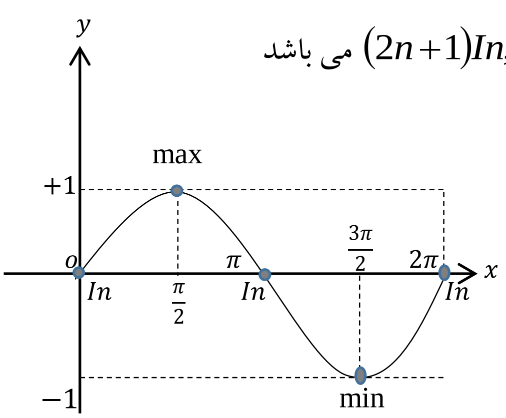
دارای یک نقطه اعظمی در $\max\left(\frac{\pi}{2},+1\right)$

دارای یک نقطه اصغری در $\min\left(\frac{3\pi}{2},-1\right)$

و دارای سه نقطه انعطاف در $(2\pi,0),(\pi,0),(0,0)$ می باشد.

که به طور عموم برای n پریود دارای $(2n+1)In,(n)\min,(n)\max$ می باشد

که گراف فوق در انتروال $[0,2\pi]$ عبارت از:



در نتیجـــه تـــابع $y=\sin x$ در انتـــروال هـــای $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ و $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ متزایـــد و در انترول های $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ و $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ متناقص می باشد.

2. **تحـــول تـــابع** $y=\cos x$ **:** ایــن تــابع پریودیــک بــوده کــه ســاحه تحــول آن بــین $[-1,+1]$ و پریـــود آن بـــه انـــدازه (2π) مـــی باشـــد ، و در انتـــروال $[0,2\pi]$ دارای نقـــاط ذیل می باشد.

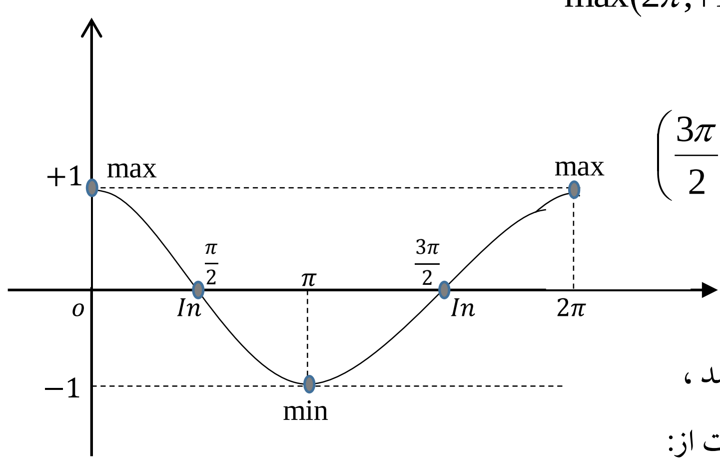
$$f(x)=\cos x\ ,\qquad [0,2\pi]$$

دارای دو نقطه اعظمی در $\max(2\pi,+1),\max(0,+1)$

دارای یک نقطه اصغری در $\min(\pi,-1)$

و دارای دو نقطه انعطاف در $\left(\frac{3\pi}{2},0\right),\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ می باشد.

که به طور عموم برای n پریود دارای $(2n)In,(n)\min,(n+1)\max$ می باشد ، که گراف فوق در انتروال $[0,2\pi]$ عبارت از:



در نتیجـــه تـــابع $y=\cos x$ در انتـــروال هـــای $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ و $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ متنـــاقص و در انتروال های $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ و $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ متزاید می باشد.

طوریکــه قــبلاً ذکــر نمــودیم تــابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ توابــع پریودیــک مــی باشــد ، یعنـــی $\sin(x\pm 2\pi)=\sin x$ و $\cos(x\pm 2\pi)=\cos x$ اســـت. بنـــاً پریـــود را کـــه در انتـــروال $[0,2\pi]$ دارنـــد عـــین پریـــود را در انتـــروال هـــای $[2\pi,4\pi],[4\pi,6\pi],\cdots$ نیـــز طی خواهند کرد.

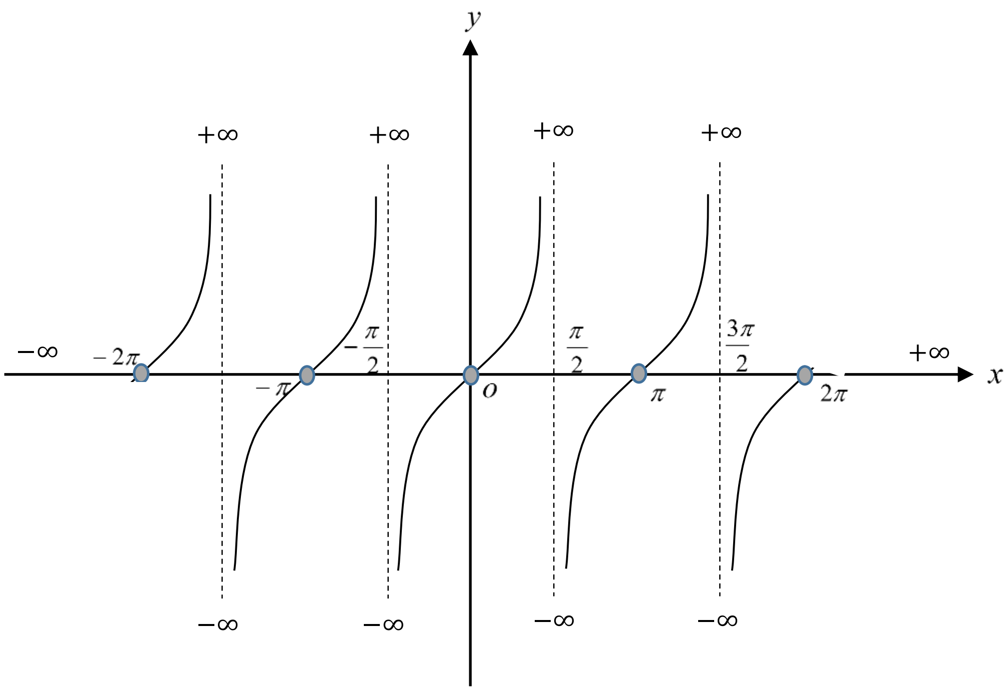
3. **تحـــول تـــابع** $y=\tan x$ **:** ایــن تــابع نیــز پریودیــک بــوده کــه پریــود آن بــه انــدازه π اســـت ، یعنـــی $\tan(x\pm\pi)=\tan x$ بـــوده و ســـاحه تحـــول آن بـــین $(-\infty,+\infty)$ و یـــک تــابع همیشــه متزایــد اســت ، نقــاط اکســتریم (اعظمــی و اصــغری) نــدارد ، امــا بــی نهایــت نقــاط انعطـــاف دارد ، چـــون تـــابع مـــذکور در شـــکل $y=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ تبـــدیل مـــی گـــردد ، پـــــس ناحیـــــه تعریـــــف تـــــابع مـــــذکور $\cos x\neq 0$ بـــــوده ، یعنـــــی :

زیـــــرا بــــــه همــــــین قیمــــــت ، $set\ domain = IR - \left\{ x / x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in z \right\}$ زوایـا تـــابع دارای مجانــب هــای عمــودی مــی باشــد کــه ایــن مجانــب هــا عبــارت انــد از :

$$\ldots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$$

گراف تابع فوق در انتروال $(-\infty, \infty)$ عبارت از:

x	$-\infty \ldots$	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
y	……	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$



طوریکــه در شــکل ملاحظــه مــی گــردد تــابع مــذکور دارای بــی نهایــت نقــاط انعطــاف ماننــد : $\cdots, (-2\pi,0), (-\pi,0), (0,0), (\pi,0)$ می باشد.

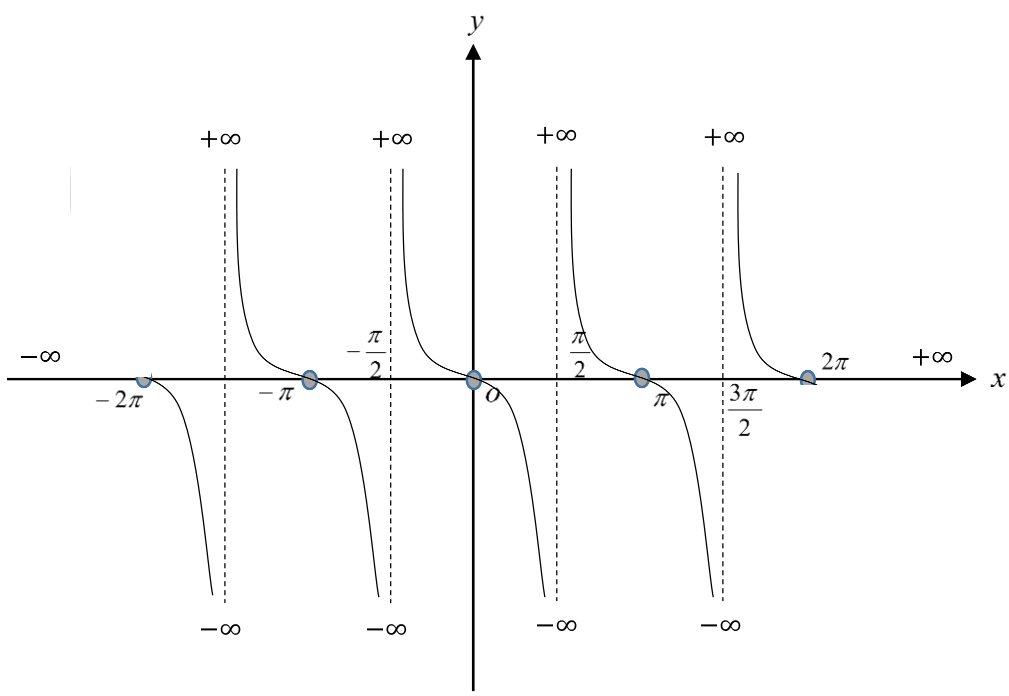
4. **تحـــول تـــابع** $y = \cot x$**:** ایــن تــابع نیــز پریودیــک بــوده کــه پریــود آن بــه انــدازه π اســـت ، یعنـــی $\cot(x \pm \pi) = \cot x$ بـــوده و ســـاحه تحـــول آن بـــین $(-\infty, +\infty)$ و یـــک تــابع همیشــه متنــاقص اســت ، نقــاط اکســتریم (اعظمــی و اصــغری) نــدارد ، امــا بــی نهایــت نقـــاط انعطـــاف دارد ، چـــون تـــابع مـــذکور در شـــکل $y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ تبـــدیل مـــی گـــــردد ، پـــــس ناحیـــــه تعریـــــف تـــــابع مـــــذکور $\cos x \neq 0$ بـــــوده ، یعنـــــی :

$set\ domain = IR - \left\{ x/x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in z \right\}$ ، زیـــــرا بـــــه همـــــین قیمـــــت زوایـا تـابع دارای مجانـب هـای عمـودی مـی باشـد کـه ایـن مجانـب هـا عبـارت انـد از :

$$\cdots,-2\pi,-\pi,0,+\pi,+2\pi,\cdots$$

گراف تابع فوق در انتروال $(-\infty,\infty)$ عبارت از:

x	$-\infty$ ...	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
y	... ...	$+1$	$\pm\infty$	-1	$\pm\infty$	$+1$	$\pm\infty$	-1	$\pm\infty$



طوریکـه در شـکل ملاحظـه مـی گـردد تـابع مـذکور دارای بـی نهایـت نقـاط انعطـافماننـد :

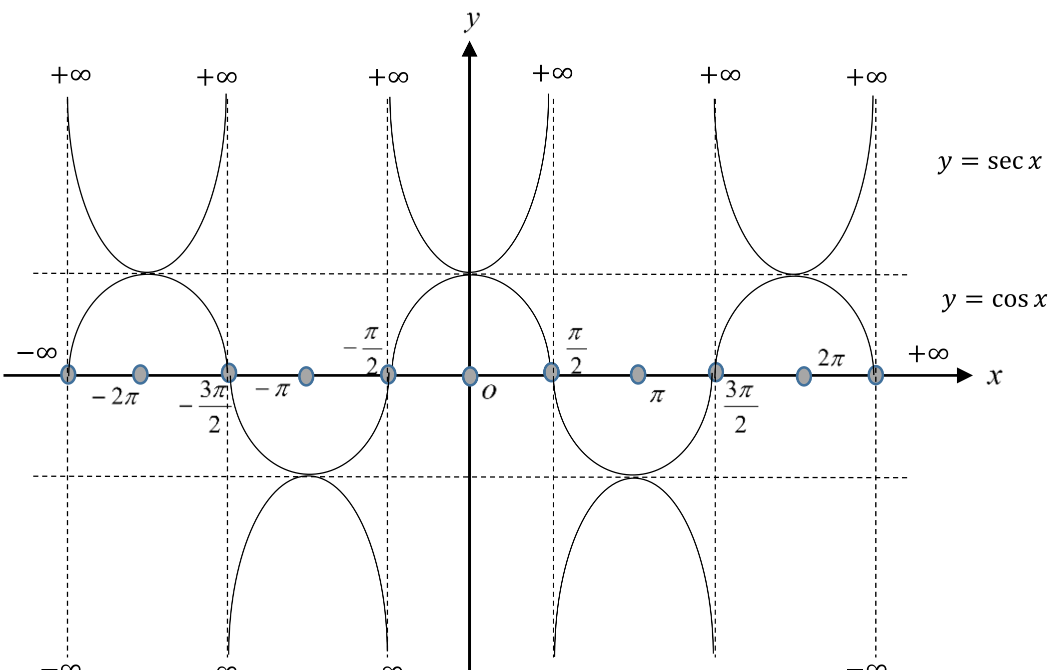
$\left(-\frac{3\pi}{2},0\right),\left(-\frac{\pi}{2},0\right),\left(\frac{\pi}{2},0\right),\left(\frac{3\pi}{2},0\right),\cdots$ می باشد.

5. **تحـــول تـــابع** $y=\sec x$**:** ایـن تـابع نیـز پریودیـک بـوده کـه پریـود آن بـه انـدازه 2π اســـت ، و ســـاحه تحـــول آن بـــین $(-\infty,-1]\cup[+1,+\infty)$ بـــوده ،دارای نقـــاط اکســـتریم (اعظمـــی و اصـــغری) مـــی باشـــد ، نقطـــه انعطـــاف نـــدارد ، زیـــرا تـــابع مـــذکور در شـــکل $y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$ تبـــدیل مـــی گـــردد ، پـــس ناحیـــه تعریـــف تـــابع مـــذکور $\cos x \neq 0$ بـــوده ، یعنـــی :

زاویا تابع دارای مجانب های عمودی می باشد که این مجانب ها عبارت اند از : $set\ domain = IR - \left\{ x / x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in z \right\}$ ، زیرا به همین قیمت

$$\cdots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}, +\frac{3\pi}{2}, +\frac{5\pi}{2}, \cdots$$

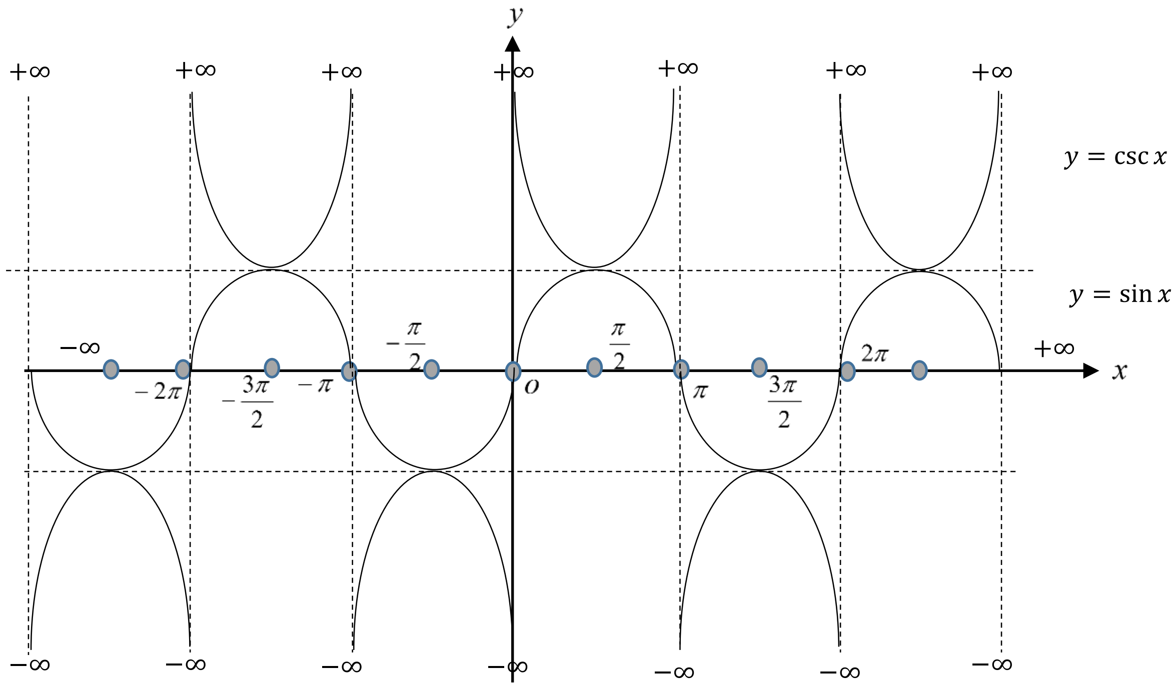
گراف تابع فوق در انتروال $(-\infty, -1] \cup [+1, +\infty)$ عبارت از:



6. **تحول تابع** $y = \csc x$: این تابع نیز پریودیک بوده که پریود آن به اندازه 2π است ، و ساحه تحول آن بین $(-\infty, -1] \cup [+1, +\infty)$ بوده ،دارای نقاط اکستریم (اعظمی و اصغری) می باشد ، نقطه انعطاف ندارد ، زیرا تابع مذکور در شکل $y = \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$ تبدیل می گردد ، پس ناحیه تعریف تابع مذکور $\sin x \neq 0$ بوده ، یعنی : $set\ domain = IR - \{x / x = n\pi, n \in z\}$ ، زیرا به همین قیمت زوایا تابع دارای مجانب های عمودی می باشد که این مجانب ها عبارت اند از :

$$\cdots, -4\pi, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi \cdots$$

گراف تابع فوق در انتروال $(-\infty,-1]\cup[+1,+\infty)$ عبارت از:



سوالات

1. اگر $f(3x-4)=(x^2-2)^3$ باشد آن وقت قیمت $f'(3x-4)$ عبارت از:

1) $2x(x^2-2)^2$ 2) $2x(x^2-4)$
3) $6x(x^2-2)^2$ 4) $2x(x^2+5x)$

2. اگر $g(x)=f(-25x)$, $g'(0)=125$ باشد آنگاه قیمت $f'(0)$ عبارت است از:

1) 5 2) -5 3) 25 4) -25

3. اگر $f(x)=x^5$ و $g(x)=x$ باشد، پس $\frac{d[f(x)\cdot g(x)]}{dx}$ مساوی است به:

1) $6f(x)$ 2) $3f(x)$ 3) $[f(x)]^5$ 4) $6g(x)$

4. اگر $x^2+y^2=100$ باشد، پس $y''(x)$ مساوی است به:

1) $y''(x)=\frac{100}{y^2}$ 2) $y''(x)=-\frac{100}{x^2}$
3) $y''(x)=\frac{100}{y^{-4}}$ 4) $y''(x)=-\frac{100}{y^3}$

5. تغییرات متوسط تابع $f(x)=10x^2+10$ در انتروال $[2,5]$ مساوی است به:

1) 72 2) 70 3) 80 4) 90

6. تابع $f(x)=3x^{50}+x^{40}+1$ داده شده است، پس $\frac{d^{49}f(x)}{dx^{49}}$ مساوی است به:

1) $150!\,x$ 2) $50!\cdot 3x$ 3) $150!$ 4) $3\cdot 50!$

.7 $f(x)=\frac{\ln^3 x^3+27}{\ln^3 x^3+8}$ باشد، پس $f'(1)$ مساوی است به:

1) $\frac{27}{8}$ 2) $\frac{54}{16}$ 3) $\ln^2 1$ 4) $\frac{8}{27}$

.8 هرگاه تابع $f(x)=|x^2-2x|+|3x-4|+x^3$ داده شده باشد در این صورت $f'(-2)$ عبارت از:

1) -5 2) 5 3) 3 4) -1

.9 هرگاه $f(x)=3x^2+2x$ و $g(x)=3x-4$ داده شده باشد، در این صورت $(fog)'(-1)$ عبارت از:

1) -40 2) -60 3) -80 4) -120

.10 هرگاه $f(x)=2x^2-x$ و $g(x)=1-x^2$ داده شده باشد در این صورت $(gof)'(2)$ عبارت از:

1) -102 2) -84 3) -64 4) -48

.11 تابع $f(x)=\left|\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right|$ در کدام یکی از نقاط ذیل مشتق ندارد:

1) $x=-1$ 2) $x=\frac{1}{2}$ 3) $x=-\frac{1}{2}$ 4) $x=1$

.12 اگر $f(x)=\frac{1}{x^2-2}$ باشد، پس $f'(x)$ مساوی است به:

1) $\frac{-2x}{(x^2-2)^2}$ 2) $\frac{-x}{(x^2-2)^2}$ 3) $\frac{2}{(x^2-2)^2}$ 4) $\frac{x}{(x^2-2)^2}$

.13 تابع $f(x)=3x^{50}+x^{40}+1$ داده شده است، پس $\frac{d^{49}f(x)}{dx^{49}}$ مساوی است به:

1) $150!\,x$ 2) $50!\,3x$ 3) $150!$ 4) $3\cdot 50!$

.14 میل منحنی $f(x)=x^2-1$ در نقطه $P(1,0)$ مساوی است به:

1) 4 2) 4 3) -2 4) 2

15. اگر $3x^2 + y^2 = 2$ باشد، پس $y''(x)$ مساوی است به:

1) $y'' = -\frac{1}{y^3}$ 2) $y'' = -\frac{2}{y^3}$ 3) $y'' = -\frac{3}{y^3}$ 4) $y'' = \frac{6}{y^3}$

16. اگر $f(x) = e^{\ln(x+1)}$ باشد، پس $f'(2)$ مساوی است به:

1) 1 2) ∞ 3) -1 4) صفر

17. مشتق مرتبه اول تابع $y = \ln \sqrt[3]{x^4 + 1}$ مساوی است به:

1) $\frac{4x^3}{3(x^4+1)}$ 2) $\frac{2x^3}{x^4+1}$ 3) $\frac{x^4}{x^4+1}$ 4) $\frac{x^3}{x^4+1}$

18. اگر $f(x) = tan\theta$ و $g(x) = x^{15}$ باشند پس $\frac{d[f(x))g(x)]}{dx}$ مساوی است به:

1) $15x^{14}\tan\theta + x^{15}$ 2) 0

3) $15x^{14}f(x)$ 4) $15x^{14}sec^2\theta$

19. مشتق مرتبه پنجم تابع $f(x) = x^5 sin^5\alpha$ مساویست به:

1) 120 2) $120sin^5\alpha + sin\alpha - 1$

3) $12\ ^5\alpha - sin\alpha$ 4) $120\ sin^5\alpha$

20. تابع $f(x) = \frac{2x^{9!}}{(9!)!}$ داده شده است، $\frac{d^{9!}f(x)}{dx^9}$ مساوی است یه:

1) $0!$ 2) $(9!)!$ 3) $2!$ 4) $\frac{1}{9!}$

.21 تابع $f(x) = (x^2 - y)^2$ داده شده است $\frac{df(x)}{dx}$ مساوی است به:

1) $6x(x^2 - y)^3$ 2) $3x(x^2 - y)^2 + sec^2 y$

3) $3(x^2 - y)^2 + sec^2 y$ 4) $6x(x^2 - y)^2$

.22 در تابع $f(x) = (6x^{50} + 1)^3 + (3x^{40} + 1)^4$, $\frac{d^{159} f(x)}{dx^{159}}$ عبارت از:

1) 2 2) $\ln 4$

3) $\ln 2 + \ln 2 \cos x$ 4) $cos^2 \ln \frac{1}{\sqrt{2}}$

.23 قیمت مشتق تابع $f(x) = \ln(\cos e^x)$ در $x = \ln \frac{\pi}{4}$ عبارت است از:

1) $-\frac{\pi}{4}$ 2) $e^{\frac{\pi}{4}}$ 3) $\frac{\pi}{2}$ 4) $-\frac{\pi}{2}$

.24 $f(2x - 1) = x^3 - x^2 + 4x + 1$ باشد آنگاه قیمت $f(3) + f'(3) = ?$ عبارت از:

1) 15 2) 17 3) 19 4) 21

.25 اگر $y = \tan\left(ln \frac{1}{2} x\right)$ باشد، پس $f'(x)$ مساوی است به:

1) $\frac{1}{x} \sec^2(\ln x)$ 2) $\frac{1}{x} \sec^2(\ln x - \ln 2)$

3) $\frac{1}{2x} \sec^2(\ln x)$ 4) $\frac{1}{x} \sec^2\left(\ln \frac{1}{2} x\right)$

.26 اگر $f(x) = \sin^5(2a + 1), a \in IR$ باشد، پس $f'(x)$ مساوی است به:

1) 0 2) $5 \sin^4 a$ 3) 1 4) $5 \sin a$

.27 حاصل $(\sin^2 x)\ \frac{1}{2cos2x}\cdot\frac{d}{dx}$ عبارت از:

1) $\frac{\tan 2x}{2}$
2) $\frac{\cot x}{2}$
3) $\frac{\tan x}{2}$
4) $\frac{\cot 2x}{2}$

.28 مشتق تابع $y=\operatorname{arccot} x$ عبارت است از:

1) $-\frac{1}{1+x^2}$
2) $-\frac{2}{1+x^2}$
3) $\frac{1}{1+x^2}$
4) $\frac{2}{1+x^2}$

.29 مشتق مرتبه اول تابع $y=\cos^3 x$ عبارت است از:

1) $y'=-3\sin^3 x$
2) $y'=-3\sin x\cdot\cos^2 x$
3) $y'=3\sin x\cdot\cos^2 x$
4) $y'=3\sin^3 x$

.30 اگر $f(x)=\frac{2\tan 2x}{1-\tan^2 2x}$ باشد، پس $f'(x)$ مساوی است به:

1) $-4\sec^2 4x$
2) $-\sec^2 x$
3) $\sec^2 4x$
4) $4\sec^2 4x$

.31 مشتق تابع $y=arc\sin e^x$ مساوی است به:

1) $-\frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}$
2) $\frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}$
3) $\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$
4) $-\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

.32 مشتق مرتبه اول تابع $y=e^{x^2+1}$ مساوی است به:

1) xe^{x^2+1}
2) $-2xe^{x^2+1}$
3) $2xe^{x^2+1}$
4) $-xe^{x^2+1}$

.33 اگر $f(x)=3^{3xcos\,\alpha}$ باشد،پس $\frac{d^5f(x)}{dt^5}$ مساوی است به:

1) $\ln 9$
2) 0
3) $\cos\alpha\ln 9$
4) $\cos\alpha\ln 3$

.34 $f(x)=\tan\left(\ln\frac{1}{2}x\right)$ باشد، پس $f'(x)$ مساوی است به:

1) $\frac{1}{x}\sec^2(\ln x)$ 2) $\frac{1}{x}\sec^2(\ln x-\ln 2)$

3) $\frac{1}{2x}\sec^2(\ln x)$ 4) $\frac{1}{x}\sec^2(\ln\frac{1}{2}x)$

.35 مشتق مرتبه اول تابع $y=\ln\sqrt{x^2+4x+4}$ مساوی است به:

1) $\frac{x-1}{x^2+4x+4}$ 2) $\frac{x+1}{x^2+4x+4}$ 3) $\frac{x+2}{x^2+4x+4}$ 4) $\frac{x-2}{x^2+4x+4}$

.36 مشتق ضمنی $x^2+xy+y^2-3=0$ را دریابید:

1) $y' = \frac{2x+2y}{2x+2y}$ 2) $y' = \frac{2x+y}{x+2y}$

3) $y' = -\frac{2x+2y}{2x+2y}$ 4) $y' = -\frac{2x+y}{x+2y}$

.37 اگر $x^2+y^2=100$ باشد، پس $y''(x)$ مساوی است به:

1) $y'(x)=\frac{100}{y^2}$ 2) $y'(x)=-\frac{100}{y^{-5}}$

3) $y'(x)=-\frac{100}{y^{-4}}$ 4) $y'(x)=-\frac{100}{y^2}$

.38 تابع $f(x)=5+x^2-x$ دارای نقطه اصغری است به خاطریکه :

1) $\lim_{x\to\infty}(5+x^2-x)=-\infty$ 2) $\lim_{x\to\infty}(5+x^2-x)=+\infty$

3) $\lim_{x\to\infty}(5+x^2-x)=\pm\infty$ 4) $\lim_{x\to\infty}(5+x^2+x)=-\infty$

.39 نقطه انعطاف تابع $f(x)=x^8+1$ عبارت از:

1) $(0,1)$ 2) نقطه انعطاف ندارد 3) $(1,0)$ 4) $(1,2)$

40. تابع $f(x) = (x-1)^2$ در یکی از انتروال های ذیل متزاید است:

1) $(\infty, 1)$ 2) $(-\infty, -2)$ 3) $(-\infty, -3)$ 4) $-\infty, 1)$

41. انتروال محدبیت تابع $y = -4x^2 + x^4$ عبارت از:

1) $(\sqrt{\frac{2}{3}}, \infty)$ 2) $\left(-\infty, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ 3) $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ 4) $\left\{\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$

42. انتروال تناقص تابع $f(x) = 22x^{15} + 22$ عبارت از:

1) $(-\infty, +\infty)$ 2) انتروال تناقص ندارد 3) $(0, +\infty)$ 4) $(-\infty, 0)$

43. نقطه اکسترمم تابع $f(x) = x^{100}$ عبارت است از:

1) $(1,1)$ 2) $(-1,1)$

3) $(0,0)$ 4) نقطه اکستریمم ندارد

44. نقطه اکستریمم تابع $f(x) = 50x^5$ عبارت است از:

1) $(1,50)$ 2) $(0,0)$

3) $(-1,-50)$ 4) نقطه اکسترمم ندارد

45. معادله محور تناظر تابع $f(x) = 5x^2 - 6x^3 + x - 1$ عبارت است از:

1) $y = \frac{5}{18}$ 2) $y = -\frac{5}{18}$ 3) $x = -\frac{5}{18}$ 4) $x = \frac{5}{18}$

46. گراف تابع $f(x) = 2^x$ در کدام یکی از نقاط ذیل انعطاف دارد:

1) 2 2) نقطه انعطاف ندارد 3) -2 4) $\ln 2$

.47 مختصات مرکز تناظر تابع $f(x)=\frac{8}{3}x^3-8x^2+1$ عبارت است از:

1) $A\left(-1,-\frac{29}{3}\right)$
2) $A\left(-1,\frac{13}{3}\right)$
3) $A(0,1)$
4) $A\left(1,-\frac{13}{3}\right)$

.48 راس گراف تابع $f(x)=-(x-21)^2+11$ عبارت ا

1) $(-21,11)$
2) $(-21,-11)$
3) $(21,-11)$
4) $(21,11)$

.49 انتروال تناقص تابع $f(x)=22x^{15}+22$ عبارت از:

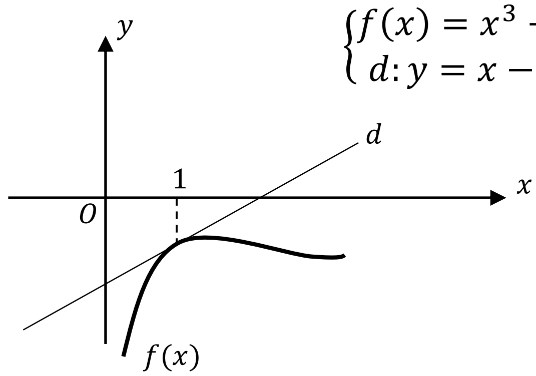
1) $(-\infty,+\infty)$
2) انتروال تناقص ندارد
3) $(0,+\infty)$
4) $(-\infty,0)$

.50 پریود تابع $f(x)=100\tan\frac{12x}{5}$ مساوی است به:

1) $\frac{12\pi}{10}$
2) $\frac{12\pi}{5}$
3) $\frac{5\pi}{6}$
4) $\frac{5\pi}{12}$

.51 با در نظر داشت شکل ذیل هرگاه $\begin{cases} f(x)=x^3+ax^2+x \\ d: y=x-3 \end{cases}$

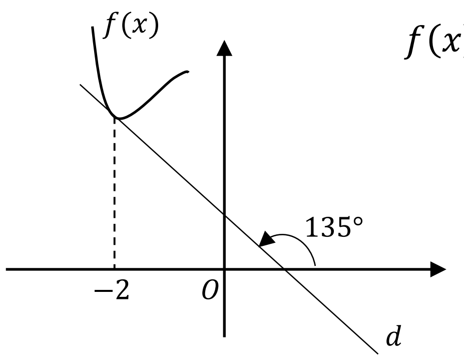
داده شده باشد، قیمت a عبارت از:



1) $-\frac{5}{2}$
2) $-\frac{3}{2}$
3) $\frac{1}{2}$
4) $\frac{5}{2}$

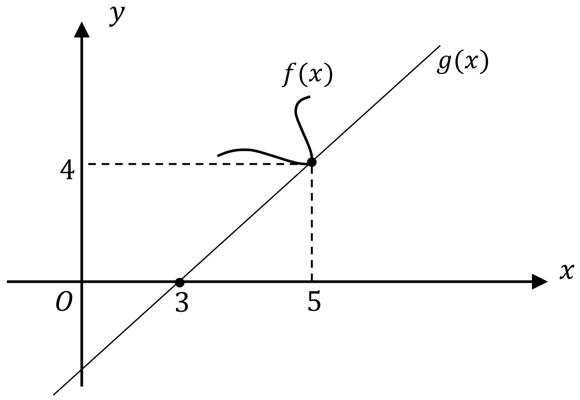
.52 با در نظر داشت شکل ذیل هرگاه $f(x)=2x^3+x^2-ax$

داده شده باشد، قیمت a عبارت از:



1) -27
2) 17
3) -23
4) 21

.53 بادر نظر داشت شکل ذیل هرگاه $h(x) = g(x) \cdot f(x) - 3x^2$ باشد، قیمت $h'(5)$ عبارت از:



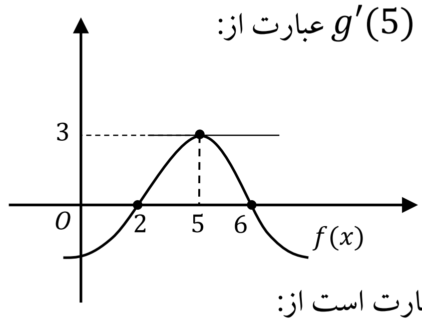
-16 (1

-14 (2

-12 (3

-10 (4

.54 با درنظرداشت شکل ذیل هرگاه $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ باشد قیمت $g'(5)$ عبارت از:



$-\frac{3}{5}$ (1 $-\frac{3}{25}$ (2

$\frac{3}{5}$ (3 $\frac{3}{25}$ (4

.55 نزدیکترین فاصله نقطه $(0,0)$ از منحنی $\mathrm{y}^2 = 2\mathrm{x} + 3$ عبارت است از:

2 (1 $\sqrt{2}$ (2 $\sqrt{3}$ (3 $2\sqrt{3}$ (4

.56 نزدیکترین فاصله نقطه $(0,0)$ از منحنی $\mathrm{y}^2 = 2\mathrm{x} + 5$ عبارت است از:

-2 (1 2 (2 $\sqrt{7}$ (3 $\sqrt{5}$ (4

.57 مجانب عمودی تابع $y = \csc x$ در انتروال $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ عبارت است از:

$x = \frac{3\pi}{2}, x = -\frac{3\pi}{2}$ (1 $x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}$ (2

$x = -\frac{3\pi}{2}, x = \frac{\pi}{3}$ (3 $x = -\pi, x = \pi, x = 0$ (4

.58 نقطه اکستریمم تابع $f(x) = 200x^{15}$ عبارت است از:

1) نقطه اکستریمم ندارد (2 $(-1,200)$

$(1,200)$ (3 $(0,0)$ (4