فصل چهارم

ترادف ها (تصاعد ها)

تصاعد: ردیف اعدادی که به طور منظم بر اساس یک اصل معین (جمع ، تفریق ، ضرب ، تقسیم) استوار باشد ، تصاعد (ترادف) گفته می شود.

تصاعد حسابی: هرگاه حاصل تفریق هر جوره از حدود متعاقب در یک ردیف اعداد یک عدد مساوی باشد تصاعد حسابی گفته می شود.

در صورتی که a_1 حد اول ، d فرق مشترک ، n تعداد جملات ، a_n حد اخیر و S_n حاصل جمع را نشان دهند، ترادف $(a_1, a_1+d, a_1+2d, a_1+3d, \ldots)$ یک تصاعد حسابی را ارائه می نماید.

فورمول حد اخیر (حد a_n): در صورتی که a_1 حد اول ، d فرق مشترک ، n تعداد جملات یک تصاعد حسابی باشد پس حد اخیر آن از رابطه ذیل بدست می آید:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

حد وسطی تصاعد حسابی: در صورتیکه سه جمله متعاقب یک تصاعد حسابی a_{n-1}, a_n, a_{n+1} باشد حد وسطی آن $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ در حالیکه $n = 2,3,4,...$ باشد.

شامل سازی m جمله در تصاعد حسابی : در صورتیکه a_1 حد اول و a_n حد اخیر باشد و بخواهیم m جمله را شامل تصاعد نماید فرق مشترک از رابطه ذیل به دست می آید:

$$m = \frac{a_n - a}{m+1}$$

همچنان هرگاه در یک تصاعد حسابی حدود n ام و m ام معلوم باشد قیمت d از رابطه ذیل به دست می آید:

$$d = \frac{a_n - a_m}{n-m}$$

حاصل جمع سلسله های حسابی: مجموعه تصاعد حسابی را سلسله حسابی می گویند.

یعنی $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ که از روابط ذیل دریافت می گردد.

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right] \qquad ....(1)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \qquad ....(2)$$

حاصل جمع اعداد یکسان (ثابت):

$$c + c + c + ... + c = \sum_{i=1}^{n} c = c.n$$

حاصل جمع اعداد مسلسل طبیعی:

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \sum_{i=1}^{n} i$$

$$S_n = \frac{1}{2} n(n+1)$$

حاصل جمع مربعات اعداد مسلسل طبیعی:

$$1^2+2^2+3^2+\dots\dots\dots+n^2=\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$S_n=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

حاصل جمع مکعبات اعداد مسلسل طبیعی:

$$1^3+2^3+3^3+\dots\dots\dots+n^3=\sum_{i=1}^{n} i^3$$

$$S_n=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

حاصل جمع اعداد مسلسل طبیعی جفت:

$$2+4+6+\dots\dots\dots+2n=\sum_{i=1}^{n} 2i$$

$$S_n=n(n+1)$$

حاصل جمع مربعات اعداد مسلسل طبیعی جفت:

$$2^2+4^2+6^2+\dots\dots\dots+(2n)^2=\sum_{i=1}^{n}(2i)^2$$

$$S_n=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$$

حاصل جمع مکعبات اعداد مسلسل طبیعی جفت:

$$2^3+4^3+6^3+\dots\dots\dots+(2n)^3=\sum_{i=1}^{n}(2i)^3$$

$$S_n=2n^2(n+1)^2$$

حاصل جمع اعداد مسلسل طبیعی تاق:

$$1+3+5+\dots\dots\dots+(2n-1)=\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$$

$$S_n=n^2$$

حاصل جمع مربعات اعداد مسلسل طبیعی تاق:

$$1^2+3^2+5^2+\dots\dots\dots+(2n-1)^2=\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2$$

$$S_n=\frac{1}{3}n\left(4n^2-1\right)^2$$

حاصل جمع مکعبات اعداد مسلسل طبیعی تاق:

$$1^3+3^3+5^3+\dots\dots\dots+(2n-1)^3=\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3$$

$$S_n=n^2\left(2n^2-1\right)$$

مجموعه ضرب دو عدد پی در پی:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\dots\dots\dots+(n-1)\cdot n=\sum_{i=1}^{n}(i-1)i$$

$$S_n=\frac{1}{3}n\left(n^2-1\right)$$

تصاعد هارمونیک:

یک ترادف اعداد a_n را زمانی تصاعد هارمونیک می گویند که معکوس آن یعنی $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ یک تصاعد حسابی را تشکیل می دهد. مثلاً: $\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{7},\dfrac{3}{8},\dfrac{1}{3},\dfrac{3}{10},\dots$ یک تصاعد هارمونیک است ، زیرا معکوس آن یک تصاعد حسابی است یعنی: $2,\dfrac{7}{3},\dfrac{8}{3},3,\dfrac{10}{3},\dots$

اوسط حسابی هارمونیک:

در حالیکه a_{n-1},a_n,a_{n+1} سه جمله مسلسل تصاعد حسابی و $n=2,3,4,\dots$ باشد چنانچه $\dfrac{1}{a_{n-1}},\dfrac{1}{a_n},\dfrac{1}{a_{n+1}}$ حدود تصاعد هارمونیک ان باشد پس اوسط حسابی هارمونیکی عبارت است از:

$$a_n=\frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$$

تصاعد هندسی:

در صورتیکه a_1 حد اول r,q نسبت مشترک ، n تعداد جملات ، a_n حد اخیر و S_n حاصل جمع را نشان دهد ، ترادف $(a_1, a_1r, a_1r^2, a_1r^3, ...)$ یک تصاعد هندسی را ارائه می نماید.

فورمول حد اخیر: در صورتیکه a_1 حد اول r,q نسبت مشترک ، n تعداد جملات یک تصاعد هندسی باشد حد اخیر آن a_n از رابطهٔ ذیل بدست می آید.

$$a_n = a_1 r^{n-1} \quad , \quad a_n = a_1 q^{n-1}$$

شامل سازی m جمله در تصاعد هندسی: جهت شامل سازی m جمله در بین تصاعد هندسی که a_1 حد اول ، a_n حد اخیر باشد ، از رابطه ذیل استفاده گردیده و نسبت مشترک دریافت می گردد.

$$r = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}} \quad , \quad q = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

حد وسطی تصاعد هندسی: هرگاه b, M, a سه حد مسلسل یک تصاعد هندسی معلوم باشد پس حد وسطی تصاعد مذکور عبارت است از:

$$M = \sqrt{(a_{n-1})(a_{n+1})} \quad , \quad M = \sqrt{a \cdot b}$$

یادداشت: در صورتیکه a_1 حد اول و a_n حد اخیر یک تصاعد هندسی باشد حاصل ضرب n جمله آن عبارت است از: $P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$

حاصل جمع سلسله های هندسی : با در نظر داشت a_1 حد اول ، $r(q)$ نسبت مشترک و n جملات می توان حاصل جمع سلسله های هندسی را از روابط ذیل بدست آورد.

$$S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad , \quad S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad (1)$$

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} \quad , \quad S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{r - 1} \qquad (2)$$

حاصل جمع سلسله های نامحدود هندسی: یک سلسله هندسی زمانی نا محدود است که $n \to \infty$ نماید ، مانند : $a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + ...$ سلسله های مذکور به دو حالت ذیل ملاحظه می گردد:

- هرگاه $q > 1$ باشد ، پس : $a_n \to \infty$ و سلسله متباعد بوده که $S_n = \infty$ می گردد.
- هرگاه $q < 1$ باشد ، پس: $a_n \to 0$ و سلسله متقارب بوده که $S_n = \frac{a_1}{1-q}$ می گردد.

سوالات

1. اگر $a_1, a_2, a_3, ...$ حدود یک ردیف $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = d$ باشد، پس ردیف مذکور چه نوع ردیف است:

1) حسابی
2) هارمونیک
3) هندسی
4) هندسی و متزاید

2. هرگاه $2p+3$ ، $p+1$ ، $2p$ ترادف حسابی را تشکیل دهند، پس قیمت p مساوی است به:

1) 2
2) -2
3) $-\frac{1}{2}$
4) $\frac{1}{2}$

3. اگر حد n - ام یک ردیف $a_n = (-1)^n \frac{5}{2}$ باشد، پس حد $200-$ام آن مساوی است به:

1) $\frac{5}{2}$
2) 1000
3) 500
4) $\frac{-5}{2}$

4. اگر $a_1 = 1 , a_n = a_{n-1} + 5$ باشد جمله پنجم این ترادف عبارت از:

1) 11
2) 16
3) 21
4) 26

5. اگر حاصل جمع حدود یک تصاعد حسابی به صورت $S_n = 4n^2 - 3n$ ارائه شده باشد حد اول آن عبارت است از:

1) 1
2) 0
3) 2
4) 4

6. مجموعه سه حد اول یک تصاعد 31 است مجموع حد اول و حد سوم آن 26 است حد دوم عبارت است از:

1) 5
2) 6
3) 4
4) 3

7. $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ مساوی است به:

1) $\sum_{i=1}^{n} a_i$ 2) $\sum_{i=0}^{n} a_i$ 3) $\sum_{i=1}^{m+n} a_i$ 4) $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$

8. ارایه سلسله اعداد $(1^2-1)+(2^2-1)+(3^2-1)+\cdots+(n^2-1)$ بصورت سگما عبارت است از:

1) $\sum_{k=1}^{n} (k^2-1)$ 2) $\sum_{k=1}^{n} (1-k^2)$

3) $\sum_{k=1}^{n-1} k^2$ 4) همه درست است

9. اگر حد اول یک ردیف هندسی 2 و نسبت مشترک آن 3 باشد، پس حد 50-ام مساوی است به:

1) $a_{50} = 2 \cdot 3^{49}$ 2) $a_{50} = 2 \cdot 3^{50}$

3) $a_{50} = 3 \cdot 2^{49}$ 4) $a_{50} = 3 \cdot 2^{50}$

10. در ترادف هندسی $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ طوریکه نسبت مشترک r باشد، پس a_{500} به شکل ذیل است:

1) $a^{500} = a_3 \cdot r^{595}$ 2) $a^{500} = a_4 \cdot r^{595}$

3) $a^{500} = a_4 \cdot r^{496}$ 4) $a^{500} = a_2 \cdot r^{599}$

11. اگر $\{a_{ij}\}_{n\in IN} = (-1)^{600n} \times 2$ یک ردیف باشد، پس تفاضل حدود 500-ام و 5000-ام آن مساوی است به:

1) 2 2) 0

3) 6 4) 4

12. در ردیف ... ,1,5,9 مجموع چند حد مساوی به 190 می شود؟

1) $n = 7$ 2) $n = 25$

3) $n = 10$ 4) $n = 15$

13. اگر در یک ردیف حسابی حد پنجم 20 و حد پانزدهم 80 باشد، پس حد اول آن عبارت است از :

1) $a_1 = -4$
2) $a_1 = 3$
3) $a_1 = 4$
4) $a_1 = 5$

14. $\sum_{i=1}^{60} i$ مساوی است به:

1) 1835
2) 1834
3) 1838
4) 1830

15. در ترادف $a_1, a_2, a_3, \dots . a_n$ طوریکه نسبت مشترک r باشد، پس حد a_{800} به شکل ذیل است:

1) $a_{800} = a_4 r^{799}$
2) $a_{800} = a_4 r^{794}$
3) $a_{800} = a_6 r^{794}$
4) $a_{800} = a_3 r^{794}$

16. اگر حد اول یک ردیف حسابی 2000باشد، پس حد 3000–ام عبارت است از:

1) $a_{3000} = 2000 + 3001d$
2) $a_{3000} = 3000$
3) $a_{3000} = 2000$
4) $a_{3000} = 2000 + 2999d$

17. در ترادف $a_n = \frac{n+5}{2n-4}$ قیمت $a_1 + a_3$ عبارت از:

1) 1
2) 2
3) 4
4) 6

18. هرگاه ترادف $a_n = \begin{cases} n-1, n = 0(mod3) \\ 2n+4, n = 1(mod3) \\ n^2 - n, n = 2(mod3) \end{cases}$ داده شده باشد قیمت $\frac{a_5}{a_6} \cdot a_{13}$ عبارت از:

1) 60
2) 80
3) 120
4) 150

19. در ردیف $a_n = \begin{cases} 2n, n = 0(mod3) \\ n-1, n = 1(mod3) \\ \frac{(n+1)}{3}, n = 2(mod3) \end{cases}$ قیمت $a_{14} + a_9 + a_{22}$ عبارت است از:

1) 22
2) 26
3) 42
4) 44

20. در ردیف $-5,0,5, \dots ,40$ مجموع حدود آن مساوی است به:

1) 170　2) 175　3) 180　4) 165

21. اگر در یک ردیف حسابی حد 35ـ ام آن 750 و حد 10ـام آن 50 باشد ،فرق مشترک ردیف عبارت از:

1) 28　2) 25　3) 26　4) 23

22. در سلسله $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots$ مجموعه $(n+1)$ حد مساوی است به:

1) $S_{n+1} = n^2 + 1$　2) $S_{n+1} = (n+1)^2$

3) $S_{n+1} = n^2$　4) $S_{n+1} = n^2 - 1$

23. در یک ترادف حسابی $a_{31} = 5$ و $a_{30} = \frac{34}{5}$ است، پس حد a_3 آن مساوی است به:

1) $a_3 = 1$　2) $a_3 = \frac{7}{5}$　3) $a_3 = \frac{5}{2}$　4) $a_3 = \frac{2}{5}$

24. در یک ترادف حسابی $a_{11} = 7$ و $a_{12} = 3$ است، پس حد a_4 مساوی است به:

1) $a_4 = 1$　2) $a_4 = \frac{7}{5}$　3) $a_4 = \frac{9}{5}$　4) $a_4 = \frac{8}{5}$

25. در ترادف حسابی $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ طوریکه فرق مشترک d باشد، پس حد a_{202} به شکل ذیل است :

1) $a_{202} = a_1 + 2000d$　2) $a_{202} = a_2 + 2000d$

3) $a_{202} = a_1 + 2001d$　4) $a_{202} = a_1 + 201d$

.26 در ردیف .... ,8,10,12 حد چندم $a_n = 46$ میشود:

1) $n = 20$ 2) $n = 30$ 3) $n = 40$ 4) $n = 10$

.27 در ترادف $a_n = \frac{2^n}{n!}$ و حد a_5 عبارت است از:

1) $a_5 = \frac{32}{24}$ 2) $\frac{32}{220}$ 3) $\frac{120}{32}$ 4) $\frac{4}{15}$

.28 .... $,x, x^2, x^3$, $x > 1$ چه نوع یک ردیف است:

1) هارمونیک 2) متناقص 3) حسابی 4) هندسی

.29 اگر $a_n = (-1)^n \frac{3}{5}$ یک ردیف حسابی باشد، پس فرق مشترک آن عبارت است از:

1) $d = \frac{9}{25}$ 2) $d = 0$ 3) $d = 1$ 4) $d = \frac{7}{5}$

.30 اگر حد n –ام یک ردیف $a_n = \frac{(-1)^n}{n-1}$ باشد، پس حد دهم این ردیف مساوی است به:

1) 2 2) 11 3) 9 4) $\frac{1}{9}$

.31 اگر a_nام و a_mام یک ردیف حسابی باشد، پس فرق مشترک آن عبارت است از:

1) $d = \frac{a_n - a_m}{n+m}$ 2) $d = \frac{a_n + a_m}{n+m}$

3) $d = \frac{n-m}{a_n - a_m}$ 4) $d = \frac{a_n - a_m}{n-m}$

.32 اگر حد اول یک ردیف حسابی 2000باشد، پس حد 3000–ام عبارت است از:

1) $a_{3000} = 2000 + 3001d$ 2) $a_{3000} = 3000$

3) $a_{3000} = 20000$ 4) $a_{3000} = 2000 + 2999$

33. اگر در یک ردیف هندسی $a_{30} = 64$ و نسبت مشترک آن $r = \frac{1}{4}$ باشد،پس حد اول آن عبارت از:

1) $a_1 = 4^{26}$ 2) $a_1 = 4^{30}$

3) $a_1 = 4^{31}$ 4) $a_1 = 4^{32}$

34. ردیف... $x, x^2, x^3,$ ، $x \in IR^+$ متناقص است اگر:

1) $x < 0$ 2) $0 < x < 1$ 3) $x > 1$ 4) $x > 0$

35. مجموع ده حد ردیف... $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9},$ مساوی است به:

1) $S_{10} = 3^{10} - 1$ 2) $S_{10} = \frac{3^9}{3^{10}-1}$

3) $S_{10} = \frac{3^{10}+1}{3^9}$ 4) $S_{10} = \frac{3^{10}-1}{3^9}$

36. حاصل $0.12 + 0.0012 + 0.000012 + \cdots$ مساوی است به:

1) $\frac{11}{99}$ 2) $\frac{12}{99}$ 3) $\frac{99}{12}$ 4) $\frac{12}{10}$

37. در ترادف $a_1, a_2, a_3, \dots . a_n$ طوریکه نسبت مشترک r باشد، پس حد a_{800} به شکل ذیل است:

1) $a_{800} = a_4 r^{799}$ 2) $a_{800} = a_4 r^{794}$

3) $a_{800} = a_6 r^{794}$ 4) $a_{800} = a_3 r^{794}$

38. $\sum_{i=1}^{10} 2$ مساوی است به:

1) 20 2) 40 3) 30 4) 10

.39 در ردیف $\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{9},\ldots$ حد n–ام عبارت است از:

1) $a_n=\frac{1}{n-3}$ 2) $a_n=\frac{1}{n}$ 3) $a_n=\frac{1}{3n}$ 4) $a_n=3n$

.40 $\sum_{i=1}^{p} x$ مساوی است به:

1) px 2) $(p-1)x$ 3) $p+1$ 4) $(p+1)x$

.41 در ردیف $4,12,36,\ldots$ حد n–ام مساوی است به:

1) $a_n=\frac{4}{3}3^n$ 2) $a_n=\frac{4}{3}3^{n-1}$

3) $a_n=4\cdot 3^{n+2}$ 4) $a_n=4\cdot 3^{n+1}$

.42 مجموعه $\sum_{i=1}^{8}(i+2)$ مساوی است به:

1) $5i+20$ 2) $6i+12$ 3) $5i+10$ 4) 52

.43 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ مساوی است به:

1) $\sum_{i=1}^{n} a_{i+1}$ 2) $\sum_{i=1}^{n} a_i$ 3) $\sum_{i=1}^{n+1} a_i$ 4) $\sum_{i=0}^{n} a_i$

.44 اگر $\{a_{ij}\}_{n\in IN}=(-1)^{600n}\times 2$ یک ردیف باشد، پس تفاضل حدود 500–ام و 5000–ام آن مساوی است به:

1) 2 2) 0 3) 6 4) 4

.45 هرگاه a, b, c جملات متوالی یک ترادف هندسی باشند در این صورت:

1) $b^2 = \frac{a}{c}$ 2) $b^2 = ac$ 3) $b^2 = 2ac$ 4) $b^2 = \frac{2a}{c}$

.46 اگر $q + q^2 + q^3 + \cdots$ یک سلسله هندسی و $|q| < 1$ باشد، پس مجموع مذکور مساوی است به:

1) $\frac{q}{1-q}$ 2) $\frac{1}{1+q}$ 3) $1 - q$ 4) $\frac{q}{1+q}$

.47 در ترادف هندسی $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ طوریکه نسبت مشترک r باشد، پس a_{500} به شکل ذیل است:

1) $a^{500} = a_3 \cdot r^{595}$ 2) $a^{500} = a_4 \cdot r^{595}$

3) $a^{500} = a_4 \cdot r^{496}$ 4) $a^{500} = a_2 \cdot r^{599}$

.48 معکوس مضربهای عدد 5 کدام نوع ردیف می باشند:

1) ردیف هارمونیکی 2) ردیف متناوب

3) ردیف هندسی 4) ردیف حسابی

.49 $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{7}$ مساوی است به:

1) $\sum_{i=2} \sqrt{i}$ 2) $\sum_{i=1} \sqrt{i}$ 3) $\sum_{i=2} \sqrt{2i}$ 4) $\sum_{i=-2} \sqrt{i}$

.50 مجموعه $\frac{1}{5^{n-1}} \sum_{k=1}^{n} 5^{k-1}$ مساوی است به:

1) $\frac{1}{4}$ 2) 0.4 3) 4 4) $\frac{1}{2}$

51. مجموع نامتناهی $S_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k+2^k}{5^k}$ عبارت است از:

1) 2 2) $\frac{13}{6}$ 3) 3 4) $\frac{17}{6}$