فصل هفتم

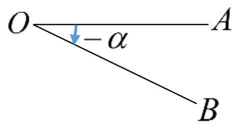
مثلثات

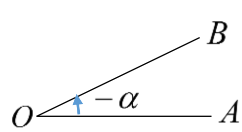
تعریف:

مثلثات از دو کلمه *Trigono* به معنی مثلث و *Metry* به معنی پیمایش و اندازه گیری ترکیب گردیده پس مثلثات یک بخش از علم ریاضیات بوده که با مثلث و تمام روابط که بین اضلاع و زوایای یک مثلث برقرار است بحث می نماید. که اولین مرتبه به وسیله اویلز بحیث علم مستقل بوجود آمد.

زاویه:

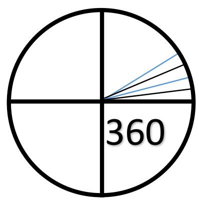
شکلی که ازتقاطع های دو شعاع بوجود می آید زاویه نامیده می شود. زاویه که هم جهت عقربه ساعت حرکت نماید زاویه منفی و هرگاه خلاف عقربه ساعت حرکت نماید مثبت نامیده می شود.





سیستم های اندازه گیری زاویه:

- **سیستم شصتی (درجه):** هرگاه یک دایره به 360 حصه مساوی تقسیم گردد هر حصه آنرا یک درجه می نامند طوریکه:



یک دایره $= 360^\circ$

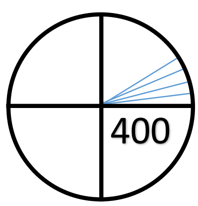
یک دایره $= 4d$

$1d = 90^\circ$

$1^\circ = 60'$

$1' = 60''$

- **سیستم صدی (گراد):** هرگاه یک دایره به 400 حصه مساوی تقسیم گردد هر حصه آنرا یک گراد می نامند، طوریکه:



یک دایره $= 400G$

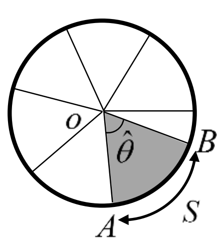
یک دایره $= 4d$

$1d = 100G$

$1G = 100^{\backslash}$

$1' = 100^{\backslash\backslash}$

- **سیستم دایروی (رادیان):** هرگاه یک دایره به 2π حصه مساوی یا 6,28 حصه مساوی تقسیم گردد هر حصه آنرا یک رادیان می نامند، طوریکه نظر به تعریف هندسی $\hat{s} = \bar{r} \cdot \hat{\theta}$ پس یک رادیان عبارت از زاویه مرکزی است که طول قوس مقابل آن مساوی به شعاع دایره باشد. اگر $\bar{r} = \hat{S}$ باشد، پس $\hat{\theta} = 1rad$

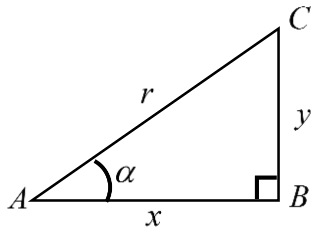


رابطه بین گراد، درجه و رادیان:

هرگاه درجه به D، گراد G و رادیان R نشان داده شود، پس رابطه آنها عبارت از:

$$\frac{D}{360} = \frac{G}{400} = \frac{R}{2\pi} \Rightarrow \frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi}$$

نسبت های مثلثاتی: در صورتیکه $\alpha > 0$ یک زاویه، y ضلع مقابل و x ضلع مجاور این زاویه و r وتر مثلث قایم زاویه را نشان دهد، نسبت های مثلثاتی زاویه α قرار ذیل تعریف گردیده است:



رابطه بین نسبت های مثلثاتی:

1) $$\left.\begin{aligned} Sin\alpha &= \frac{1}{\csc\alpha} \\ \csc\alpha &= \frac{1}{\sin\alpha} \end{aligned}\right\} => \sin\alpha \cdot \csc\alpha = 1$$

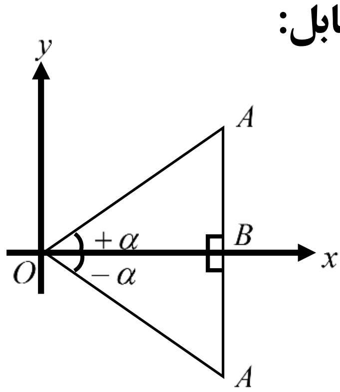
2) $$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{1}{\sec\alpha} \\ \sec\alpha &= \frac{1}{\cos\alpha} \end{aligned}\right\} => \cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$$

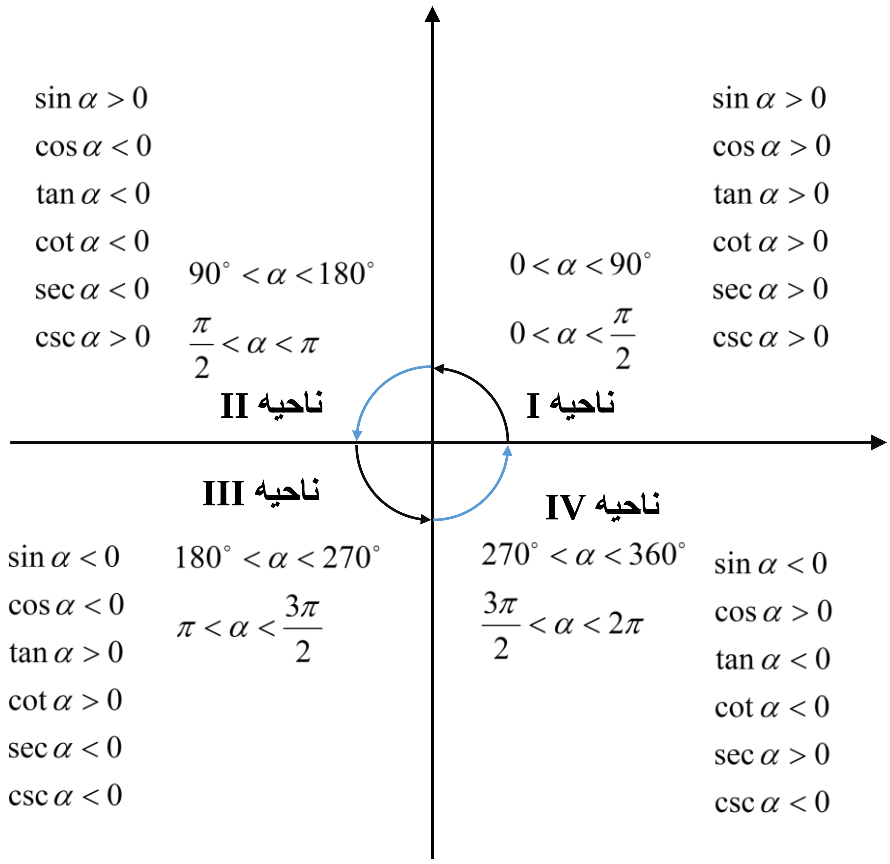
3) $$\left.\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{1}{\cot\alpha} \\ \cot\alpha &= \frac{1}{\tan\alpha} \end{aligned}\right\} => \tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad ، \quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

نسبت های مثلثاتی زاویه های متقابل:

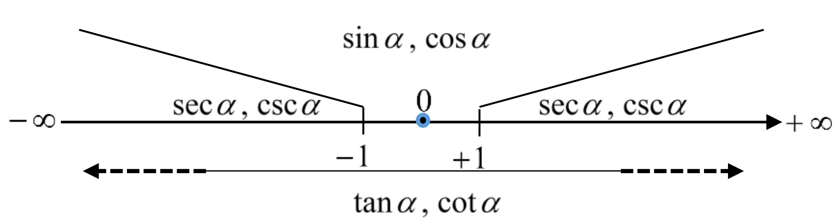
1) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
2) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
3) $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$
4) $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$
5) $\sec(-\alpha) = \sec\alpha$
6) $\csc(-\alpha) = -\csc\alpha$





نسبت های مثلثاتی	ناحیه I	ناحیه II	ناحیه III	ناحیه IV
$\sin\alpha$	+	+	–	–
$\cos\alpha$	+	–	–	+
$\tan\alpha$	+	–	+	–
$\cot\alpha$	+	–	+	–
$\sec\alpha$	+	–	–	+
$\csc\alpha$	+	+	–	–

ساحه تحول نسبت های مثلثاتی: طوریکه از مطالعه علم الجبر در تحول توابع مثلثاتی می دانیم نسبت های مثلثاتی روی خط اعداد دارای ساحه تحول ذیل می باشند.

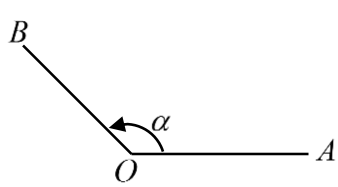


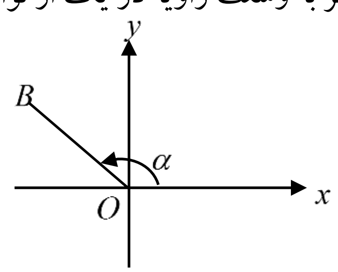
$$1)\quad -1\le \sin\alpha,\cos\alpha\le +1 \Rightarrow \sin\alpha,\cos\alpha \Rightarrow [-1,+1]$$
$$2)\quad -\infty\le \tan\alpha,\cot\alpha < +\infty \Rightarrow \tan\alpha,\cot\alpha \Rightarrow (-\infty,+\infty)$$
$$3)\quad +1\le \sec\alpha,\csc\alpha\le -1 \Rightarrow \sec\alpha,\csc\alpha \Rightarrow (-\infty,-1]\cup[+1,+\infty)$$

دریافت نسبت های مثلثاتی بعضی از زوایا: جهت دریافت نسبت مثلثاتی زوایای $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ و 90° به یک روش ساده می توان از جدول ذیل استفاده نمود:

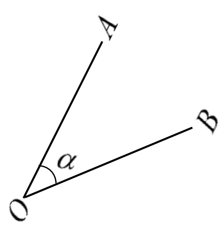
$\sin\alpha \rightarrow$	0°	$30^\circ=\frac{\pi}{6}$	$45^\circ=\frac{\pi}{4}$	$60^\circ=\frac{\pi}{3}$	$90^\circ=\frac{\pi}{2}$	
	$\sqrt{\frac{0}{4}}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	
	$90^\circ=\frac{\pi}{2}$	$60^\circ=\frac{\pi}{3}$	$45^\circ=\frac{\pi}{4}$	$30^\circ=\frac{\pi}{6}$	0°	$\leftarrow \cos\alpha$

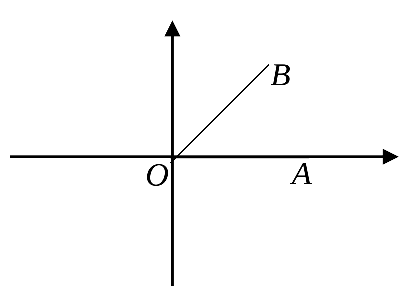
حالت استندرد (معیاری) یک زاویه: هرگاه ضلع ابتدائی یک زاویه بالای محور x رأس زاویه و مبدأ کمیات وضعیه و ضلع نهائی آن نظر به وسعت زاویه در یک از نواحی کمیات قرار گیرد زاویه استندرد گفته می شود. مثلاً:





زوایای کوتر مینل (Conterminal Angles): زوایای معیاری که ضلع نهائی آن بعد n دور یک دایره بالای هم منطبق گردد زوایای کوترمینل نامیده میشود.مثلاً:





دریافت نسبت های مثلثاتی بعضی از زوایا به کمک زوایای نواحی کمیات وضعیه:

درحالیکه α یک زاویه حاده مثبت است می توان به کمک زوایای نواحی کمیات وضعیه نسبت های مثلثاتی زوایای $120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 225^\circ, 240^\circ, 300^\circ, 315^\circ, 300^\circ, 315^\circ, 330^\circ, 420^\circ, \ldots$ را در دو حالت ذیل دریافت نمود:

حالت اول: در حالیکه $n = 1,2,3,\ldots$ است، داریم که:

$$1)\ \sin\left[\frac{(2n-1)\pi}{2} \pm \alpha\right] = \cos\alpha$$

$$2)\ \cos\left[\frac{(2n-1)\pi}{2} \pm \alpha\right] = \sin\alpha$$

$$3)\ \tan\left[\frac{(2n-1)\pi}{2} \pm \alpha\right] = \cot\alpha$$

$$4)\ \cot\left[\frac{(2n-1)\pi}{2} \pm \alpha\right] = \tan\alpha$$

$$5)\ \sec\left[\frac{(2n-1)\pi}{2} \pm \alpha\right] = \csc\alpha$$

$$6)\ \csc\left[\frac{(2n-1)\pi}{2} \pm \alpha\right] = \sec\alpha$$

اشاره نتایج نسبت های مذکور مربوط به ناحیه آن می گردد.

حالت دوم: در حالیکه $n = 1,2,3,\ldots$ است داریم که:

$$1)\ \sin(n\pi \pm \alpha) = \sin\alpha$$

$$2)\ \cos(n\pi \pm \alpha) = \cos\alpha$$

$$3)\ \tan(n\pi \pm \alpha) = \tan\alpha$$

$$4)\ \cot(n\pi \pm \alpha) = \cot\alpha$$

$$5)\ \sec(n\pi \pm \alpha) = \sec\alpha$$

$$6)\ \csc(n\pi \pm \alpha) = \csc\alpha$$

اشاره نتایج نسبت های مذکور مربوط به ناحیه آن می گردد.

یادداشت: جهت دریافت نسبت های مثلثاتی 180° با استفاده از متضاد نسبت های مثلثاتی و 0° و برای دریافت نسبت های مثلثاتی 360° با استفاده از مساوی بودن نسبت مثلثاتی 0° می توان چنین نوشت:

$$\begin{aligned}
&\sin 0^\circ = \sin 360^\circ = 0 \Rightarrow \sin 180^\circ = 0\\
&\cos 0^\circ = \cos 360^\circ = +1 \Rightarrow \cos 180^\circ = -1\\
&\tan 0^\circ = \tan 360^\circ = 0 \Rightarrow \tan 180^\circ = 0\\
&\cot 0^\circ = \cot 360^\circ = \infty \Rightarrow \cot 180^\circ = -\infty\\
&\sec 0^\circ = \sec 360^\circ = +1 \Rightarrow \sec 180^\circ = -1\\
&\csc 0^\circ = \csc 360^\circ = \infty \Rightarrow \csc 180^\circ = -\infty
\end{aligned}$$

به همین ترتیب جهت دریافت نسبت های مثلثاتی 270° با استفاده از متضاد نسبت های مثلثاتی 90° می توان چنین نوشت:

$$\begin{aligned}
&\sin 90^\circ = +1 \Rightarrow \sin 270^\circ = -1\\
&\cos 90^\circ = 0 \Rightarrow \cos 270^\circ = 0\\
&\tan 90^\circ = \infty \Rightarrow \tan 270^\circ = -\infty\\
&\cot 90^\circ = 0 \Rightarrow \cot 270^\circ = 0\\
&\sec 90^\circ = \infty \Rightarrow \sec 270^\circ = -\infty\\
&\csc 90^\circ = +1 \Rightarrow \csc 270^\circ = -1
\end{aligned}$$

رابطه اساسی و روابط فرعی مثلثاتی:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \}\quad \text{رابطه اساسی مثلثاتی}$$

$$\left.\begin{aligned}
&1)\ \sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha\\
&2)\ \cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha\\
&3)\ \tan^2\alpha = \sec^2\alpha - 1\\
&4)\ \cot^2\alpha = \csc^2\alpha - 1\\
&5)\ \sec^2\alpha = \tan^2\alpha + 1\\
&6)\ \csc^2\alpha = \cot^2\alpha + 1
\end{aligned}\right\}\quad \text{روابط فرعی مثلثاتی}$$

نسبت های حاصل جمع و حاصل تفریق زوایا: در حالیکه α و β دو زاویه حاده مثبت اند. نسبت های حاصل جمع و حاصل تفریق زوایا قرار ذیل اند.

$$\begin{aligned}
&1)\ \sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta \pm \cos\alpha\cdot\sin\beta\\
&2)\ \cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta \mp \sin\alpha\cdot\sin\beta\\
&3)\ \sin(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1\mp\tan\alpha\cdot\tan\beta}
\end{aligned}$$

نسبت های مثلثاتی دو چند یک زاویه:

1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

2) $\begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \\ \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \end{cases}$

3) $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

نسبت های مثلثاتی سه چند یک زاویه:

1) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

2) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 4\cos\alpha$

3) $\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$

نسبت های مثلثاتی $(\alpha+\beta+\gamma)$:

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma - \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$$
$$+\sin\beta\cdot\cos\alpha\cdot\cos\gamma + \sin\gamma\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma - \cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$$
$$+\cos\gamma + \sin\alpha\cdot\sin\beta - \cos\beta\cdot\sin\alpha\cdot\sin\gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta-\tan\beta\cdot\tan\alpha-\tan\alpha\cdot\tan\gamma} \quad \ldots\ldots(3)$$

فورمول های تحویل یا ضرب:

1) $\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

2) $\sin x - \sin y = 2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}$

3) $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

4) $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

$$5)\quad \tan x - \tan y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}$$

$$6)\quad \tan x - \tan y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y}$$

به همین ترتیب برای حاصل ضرب نسبت های مثلثاتی زوایا به حاصل جمع یا تفریق با استفاده از فورمول تحویل می توان چنین نوشت:

$$1)\quad \sin A \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}\left[\sin(A+B) + \sin(A-B)\right]$$

$$2)\quad \cos A \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}\left[\sin(A+B) - \sin(A-B)\right]$$

$$3)\quad \cos A \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right]$$

$$4)\quad \sin A \cdot \sin \beta = -\frac{1}{2}\left[\cos(A+B) - \cos(A-B)\right]$$

نسبت های مثلثاتی یک زاویه از جنس tan نصف زاویه:

$$1)\quad \sin = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$ همچنان

$$2)\quad \cos = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$$3)\quad \tan = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

نسبت های مثلثاتی نصف زاویه از جنس $\sin$ همان زاویه:

$$1)\ \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin 2\alpha}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha=\frac{\sqrt{1+\sin 2\alpha}+\sqrt{1-\sin 2\alpha}}{2}\quad \text{همچنان}$$

$$2)\ \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{1+\sin 2\alpha}-\sqrt{1-\sin 2\alpha}}{2}\quad \text{همچنان}$$

$$3)\ \tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}}{\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha=\frac{\sqrt{1+\sin 2\alpha}+\sqrt{1-\sin 2\alpha}}{\sqrt{1+\sin 2\alpha}-\sqrt{1-\sin 2\alpha}}\quad \text{همچنان}$$

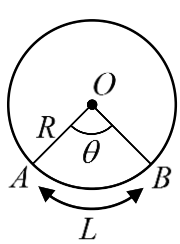
نسبت های مثلثاتی نصف زاویه از جنس $\cos$ همان زاویه:

$$1)\ \sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\Rightarrow \sin\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}\quad \text{و همچنان}$$

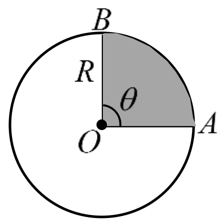
$$2)\ \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\Rightarrow \cos\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

$$3)\ \tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\Rightarrow \tan\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$$

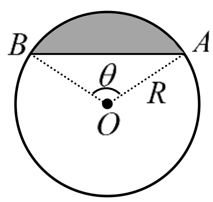
محاسبه طول قوس یک دایره: هرگاه R شعاع یک دایره و θ زاویه مرکزی مقابل قوس L دایره از جنس درجه داده شده باشد، طول قوس آن عبارت از: $L=\pi R\cdot\frac{\theta^\circ}{180^\circ}$ و در صورتیکه θ زاویه مرکزی از جنس رادیان باشد، پس: $L=R\cdot\theta$



مساحت قطاع دایره: قسمتی از سطح دایره که میان دو شعاعات دایره قرار داشته باشد قطاع دایره نامیده می شود که مساحت آن عبارت از: $A_{\sec tor} = \frac{1}{2}R^2\theta$

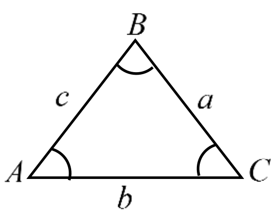


مساحت قطعه دایره: قسمتی از سطح دایره که بین قوس و وتر دایره قرار داشته باشد قطعه دایره نامیده می شود که مساحت آن عبارت از: $A_{segmnt} = \frac{1}{2}R^2\left(\theta - \sin\theta\right)$



مساحت مثلث که دو ضلع و زاویه بین آن معلوم باشد: هرگاه b, a و c اضلاع مثلث و B, A و C زوایای آن نشان دهد، مساحت آن عبارت از:

$$S = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin C \qquad S = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin B \qquad S = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin A$$



نسبت های مثلثاتی نصف زاویه از جنس طول اضلاع مثلث: در صورتیکه b, a و c و طول اضلاع یک مثلث و $p = \frac{a+b+c}{2}$ نصف محیط مثلث $A\overset{\Delta}{B}C$ را نشان دهد، پس داریم که:

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$$

$$\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

همچنان:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$
$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$$
$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

به همین ترتیب:

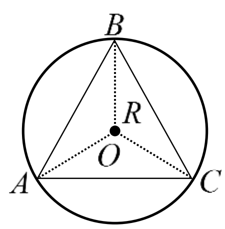
$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$
$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$
$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

به همین ترتیب مساحت یک مثلث از جنس اضلاع از رابطه ذیل بدست می آید:

(فورمول هیرون) ...... $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

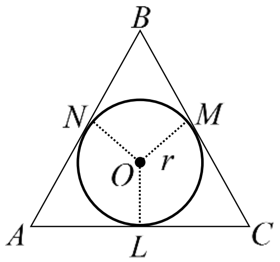
دریافت شعاع دایره محیطی یک مثلث: دایره که از رأس های یک مثلث عبور نماید طوریکه مثلث در داخل دایره قرار داشته باشد، و مرکز دایره محیطی مثلث نقطه تقاطع ناصف های عمودی مثلث می باشد، که طول شعاع این دایره در صورتیکه b,a و c طول اضلاع مثلث و s مساحت باشد عبارت از:

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}\ \text{یا}\ R=\frac{abc}{4S}$$



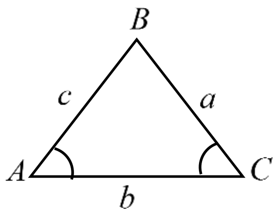
دریافت شعاع دایره محاطی یک مثلث: دایره که در داخل یک مثلث قرار داشته و به هر سه ضلع مثلث مماس باشد دایره محاطی مثلث نامیده می شود که مرکز این دایره در نقطه تقاطع ناصف الزاویه مثلث مذکور قرار دارد. در حالیکه b,a و cطول اضلاع و p نصف محیط مثلث باشد شعاع دایره محاطی مثلث مذکور از رابطه ذیل بدست می آید:

$$r=\frac{S}{p} \text{ یا } r=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$$



قضیه ساین: در هر مثلث (حاده الزاویه، قایم الزاویه و منفرجه الزاویه) رابطه بین اضلاع و زوایای یک مثلث از جنس نسبت مثلثاتی ساین عبارت از:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$



قضیه (فورمول های مُلوید Mollwied): با استفاده از قضیه ساین می توان دو رابطه ذیل را دریافت نمود که بنام فورمول مُلوید یاد می گردند عبارت اند از:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cdots\cdots\cdots(2)$$

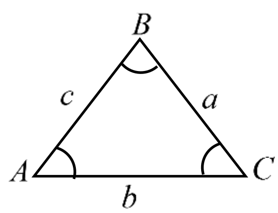
قضیه کوساین:

در هر مثلث (حاده الزاویه، قایم الزاویه و منفرجه الزاویه) رابطه بین اضلاع و زوایای یک مثلث از جنس نسبت مثلثاتی کوساین قرار ذیل اند:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2bc}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2bc}$$

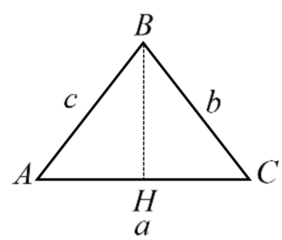


به همین ترتیب در رابطه بین اضلاع و زویای یک مثلث قضایای ذیل نیز وجود دارد، با در نظر داشت خط ارتفاع در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ می توان روابط ذیل را نوشت:

$$a = c\cos B + b\cos C$$

$$b = c\cos A + a\cos C$$

$$c = a\cos B + b\cos A$$

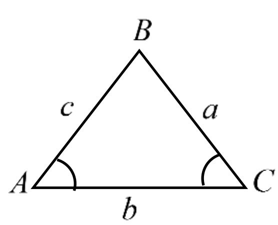


قضیه تانجانت: در هر مثلث(حاده الزاویه، قایمه زاویه و منفرجه الزاویه) رابطه بین اضلاع و زوایای مثلث از جنس نسبت مثلثاتی تانجنت عبارت از:

$$\frac{a+b}{a-c} = \frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\tan\frac{A+C}{2}}{\tan\frac{A-C}{2}}$$

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}}$$



مطابقت های مثلثاتی: آن مساوات مثلثاتی که برای تمام قیمت های زوایا هر دو طرف مساوات با هم مساوی باشد مطابقت مثلثاتی نامیده می شود، مثلاً در مطابقت $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$ هر قیمت را که زاویه α بگیرید هر دو طرف مساوات با هم مساوی است، که با استفاده ار روابط و فورمول های که قبلاً در مثلثات آنها را مطالعه نمودیم می توان مطابقت های مثلثاتی را ساده نمود و قیمت عینیتی آنها را دریافت کرد.

معادلات مثلثاتی: آن مساوات مثلثاتی که برای بعضی از قیمت های زوایا صدق نماید، معادلات مثلثاتی نامیده می شود که می توان معادلات مثلثاتی را در شکل یک مجهوله درجه اول، یک مجهوله درجه دوم و سیستم معادلات دو مجهوله درجه اول ملاحظه نمود که هر کدام آنها مانند معادلات الجبری به شیوه ها و طریقه های خاصی قابل حل می باشد.

به خاطر داشته باشید که در معادلات مثلثاتی $a\sin x+b\cos x=c$ شرط حل آن $a^2+b^2\geq c^2$ می باشد.

شرایط حل سیستم معادلات دو مجهوله درجه اول مثلثاتی: سیستم معادلات دو مجهوله مثلثاتی به شش گروپ تقسیم گردیده که هر کدام آنها شرایط حل به خصوص خویش را دارا می باشند که عبارت اند از:

گروپ اول :

$$\begin{cases}\sin x\pm\sin y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases} \text{ و } \begin{cases}\cos x\pm\cos y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}$$

که شرط حل آنها عبارت از: $a^2-4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\leq 0$

گروپ دوم:

$$\begin{cases}\sin x\cdot\cos y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases},\begin{cases}\cos\cdot\cos y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases},\begin{cases}\sin\cdot\sin y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}$$

که شرط حل آنها عبارت از: $-\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\leq a\leq\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$

گروپ سوم:

$$\begin{cases}\dfrac{\sin x}{\sin y}=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases},\begin{cases}\dfrac{\cos x}{\cos y}=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}$$

که شرایط حل آنها عبارت از: $\tan\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{a-1}{a+1}\tan\dfrac{\alpha}{2}$ یا $\tan\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{a-1}{a+1}\cot\dfrac{\alpha}{2}$

گروپ چهارم:
$$\begin{cases}\tan x\pm\tan y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases},\begin{cases}\cot x\pm\cot y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}$$

که شرط حل آن عبارت از: $a^2-4+4a\cdot\cot\alpha\ge 0$

گروپ پنجم:
$$\begin{cases}\tan x\cdot\tan y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}$$

که شرط حل آن $-1\le\dfrac{1+a}{1-a}\cdot\cos\alpha\le 1$ می باشد.

گروپ ششم:
$$\begin{cases}\dfrac{\tan x}{\tan y}=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}$$

که شرط حل آن عبارت از $-1\le\dfrac{a-1}{a+1}\sin\alpha\le 1$ می باشد.

تبصره: جهت دریافت زوایای کوترمینل در حل معادلات مثلثاتی سه حالت ذیل را در نظر داشته باشید.

حالت اول: برای زوایای که دارای نسبت های مثلثاتی $\sin x$ و $\csc x$ می باشند، فورمول عمومی ذیل وجود دارد:

$$x=n\pi+(-1)^n\cdot\alpha \quad ، \quad n=0,1,2,3,\dots$$

و یا به عباره دیگر می توان برای $\sin x$ و $\csc x$ طور ذیل نیز نوشت:

$$x=2n\pi+\alpha \qquad , \qquad x=\pi+2n\pi-\alpha \quad n=0,1,2,3,\dots$$

حالت دوم: برای زوایای که دارای نسبت های مثلثاتی $\cos x$ و $\sec x$ می باشند، فورمول عمومی ذیل وجود دارد:

$$x=2n\pi\pm\alpha \quad ، \quad n=0,1,2,3,\dots$$

حالت سوم: برای زوایای که دارای که نسبت های مثلثاتی $\tan x$ و $\cot x$ می باشند، فورمول ذیل وجود دارد:

$$x=n\pi+\alpha \qquad , \qquad n=0,1,2,3,\dots$$

توابع معکوس مثلثاتی

با در نظر داشت تعریف معکوس برای توابع معکوس مثلثاتی می توان چنین ارائه نمود.

$$y=f(x)\Rightarrow \qquad x=f^{-1}(y)$$

$$y=\sin(x) \quad \Rightarrow \quad x=\sin^{-1}(y) \quad \Rightarrow \quad x=\arcsin y$$
$$y=\cos(x) \quad \Rightarrow \quad x=\cos^{-1}(y) \quad \Rightarrow \quad x=\arccos y$$
$$y=tg(x) \quad \Rightarrow \quad x=tg^{-1}(y) \quad \Rightarrow \quad x=\arcsin y$$

مثلاَ:

$$\sin 30^{\circ}=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)=30$$
$$\cos 45^{\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=45$$
$$tg\,\frac{3\pi}{4}=-1 \quad \Rightarrow \quad \arcsin(-1)=\frac{3\pi}{4}$$

همچنان جهت ساده سازی توابع معکوس مثلثاتی حالات ذیل را در نظر داشته باشد:

1)
$$\arcsin(\cos x)=x$$
$$\arccos(\cos x)=x$$
$$arctg(tgx)=x$$

2)
$$\sin(\arcsin x)=x$$
$$\cos(\arccos x)=x$$
$$tg(arctgx)=x$$

3) $\arcsin x=\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$

4) $\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}=arctg\,\dfrac{x}{\sqrt{x-x^2}}$

5) $arctgx=arc\cot g\,\dfrac{1}{x}=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

6) $arctgx+arc\cot x=\dfrac{\pi}{2}$

7) $\arccos x=\arcsin\sqrt{1-x^2}=arctg\,\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

8) $arc\cot x=-arc\cot(-x)$

9) $arctgx-arctgy=arctg\,\dfrac{x-y}{1+xy}$

سوالات

1. اگر $\sin\theta > 0$ و $\cos\theta < 0$ باشد،پس زاویه θدر ناحیه ذیل واقع است:

1) 4　　2) 3　　3) 2　　4) 1

2. هر گاه زاویه مرکزی $\frac{3\pi}{2}$ و طول قوس مقابل $\frac{8\pi}{2}cm$ باشد،پس شعاع دایره مساوی است به:

1) $\frac{8}{3}cm$　　2) $\frac{5}{3}cm$　　3) $\frac{3}{8}cm$　　4) $\frac{3}{5}cm$

3. در حالت معیاری با زاویه $200°$ کدام زاویه زیر کوترمینل میباشد:

1) $2620°$　　2) $2820°$　　3) $2720°$　　4) $2800°$

4. هرگاه $\sin x = \frac{1}{2}$ و ضلع دوم زاویه x در ناحیه دوم باشد، پس قیمت $2\cos x$ مساوی است به:

1) $-\sqrt{2}$　　2) $\sqrt{2}$　　3) $-\sqrt{3}$　　4) $\sqrt{3}$

5. هرگاه $\sec(-\theta) = a$ باشد در این صورت $\cos(\pi+\theta)$ مساوی است به:

1) $\frac{1}{a}$　　2) $-\frac{1}{a}$　　3) $-a$　　4) a

6. افاده $\frac{\sin 300°}{1-\cos 240°}$ عبارت است از:

1) $-\sqrt{3}$　　2) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$　　3) -1　　4) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

7. افاده مثلثاتی $\frac{sec(-\theta)+sec\theta}{\sec(-\theta)}$ مساوی است به:

1) 0　　2) 2　　3) 1　　4) -2

8. افاده مثلثاتی $\cot(4\pi - \sigma)$ مساوی است به:

1) $\cot \sigma$ 2) $-\cot \sigma$ 3) $-\tan \sigma$ 4) $\tan \sigma$

9. اگر $\frac{\pi}{2} < a < \beta < \pi$ باشد، پس کدام یکی از روابط زیر درست است:

1) $\tan a \cdot \tan \beta = 0$ 2) $\tan a \cdot \tan \beta \geq 0$

3) $\tan a \cdot \tan \beta < 0$ 4) $\tan a \cdot \tan \beta > 0$

10. قیمت $\cot(450° + \theta)$ مساوی است به:

1) $\tan \theta$ 2) $-\tan \theta$

3) $\cot \theta$ 4) $-\cot \theta$

11. به کدام یکی از قیمت های ذیل $\cot(4x)$ تعریف نشده است:

1) $x = \frac{\pi}{8}$ 2) $x = \frac{\pi}{4}$ 3) $x = -\frac{\pi}{8}$ 4) $x = \frac{\pi}{3}$

12. هرگاه $\sin a \cdot \cos a > 0$ و $\cos a \cdot \tan a < 0$ باشد پس ضلع دوم زاویه a در کدام ناحیه واقع است:

1) ناحیه اول 2) ناحیه سوم

3) ناحیه دوم 4) ناحیه چهارم

13. زاویه کوترمینل با زاویه $\frac{\pi}{8}$ عبارت است از:

1) $33\frac{\pi}{8}$ 2) $32\frac{\pi}{8}$ 3) $20\frac{\pi}{8}$ 4) $31\frac{\pi}{8}$

14. حاصل افاده مثلثاتی $\sin 27 + \cos 63$ مساوی است به:

$\cos 50$ (4 $2\cos 50$ (3 $2\sin 27$ (2   0 (1

15. $\sqrt{96}\frac{\sin x}{\csc x}+4\sqrt{6}\frac{\cos x}{\sec x}$ مساوی است به:

$\sqrt{97}$ (1 $\sqrt{98}$ (2 $\sqrt{99}$ (3 $\sqrt{96}$ (4

16. $-3\cot^2 x-3$ مساوی است به:

$-\csc^2 3x$ (1 $-\sec^2 x$ (2

$-\sec^2 3x$ (3 $-3\csc^2 x$ (4

17. حاصل فاده $\frac{4}{2\cot^2\frac{\pi}{8}}+2$ مساوی است به:

$2\csc^2\frac{\pi}{8}$ (1 $2\tan^2\frac{\pi}{8}+1$ (2

$\sec^2\frac{\pi}{8}$ (3 $2\sec^2\frac{\pi}{8}$ (4

18. حاصل افاده $\frac{\tan(\sqrt{24})-\sin(\sqrt{24})}{2\tan(\sqrt{24})}$ مساوی است به:

$\cos^2\sqrt{6}$ (1 $\sin^2\sqrt{6}$ (2

$\sin(\sqrt{24})$ (3 $\cos(\sqrt{24})$ (4

19. حاصل افاده $(3\sin\sqrt{27}+3cos\sqrt{27})(3cot\sqrt{27}+3tan\sqrt{27})$ مساوی است به:

$\frac{9}{\csc(3\sqrt{3})}-\frac{9}{\cos(3\sqrt{3})}$ (1 $\frac{9}{\sin(3\sqrt{3})}+\frac{9}{\cos(3\sqrt{3})}$ (2

$\frac{9}{\csc(3\sqrt{3})}-\frac{9}{\cos(3\sqrt{3})}$ (3 $\frac{9}{\csc(3\sqrt{3})}+\frac{9}{\cos(3\sqrt{3})}$ (4

20. حاصل افاده مثلثاتی $(\tan\sqrt{7}+1)(\tan\sqrt{7}-1)(1-\sin^2\sqrt{7})$ مساوی است به:

$\sin^2\sqrt{7}$ (1 $\cos^2\sqrt{7}$ (2

3) $sin\sqrt{7}-\cos\sqrt{7}$ 4) $\sin^2\sqrt{7}-\cos^2\sqrt{7}$

21. حاصل افاده $\sec\frac{5}{13}\left(1+\sin\frac{5}{13}\right)+\cos\frac{5}{13}\left(1+\sin\frac{5}{13}\right)^{-1}$ مساوی است به:

1) $-\frac{2}{\cos\frac{5}{13}}$ 2) $-\frac{2}{\sin\frac{5}{13}}$ 3) $\frac{2}{\cos\frac{5}{13}}$ 4) $\frac{2}{\sin\frac{5}{13}}$

22. افاده مثلثاتی $\sin^6 x+\cos^6 x$ مساوی است به:

1) $1-2\sin^2 x\cos^2 x$ 2) $1+2\sin^2 x\cos^2 x$

3) $1-3\sin^2 x\cos^2 x$ 4) $1+3\sin^2 x\cos^2 x$

23. $\cos^2(\cos 99\pi)$ مساوی است به:

1) $\cos^2(-1)$ 2) $\cos(-1)$

3) $\cos^2(1)$ 4) هیچکدام

24. حاصل افاده $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}cos40°}}$ عبارت از:

1) $cos10$ 2) $\frac{1}{2}cos10$

3) $2\,cos10$ 4) $1+cos10$

25. هرگاه x زاویه حاده باشد، درینصورت افاده $\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$ مساوی است به:

1) $\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin x}}$ 2) $\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}$

3) $\frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}}$ 4) $\frac{\cos x}{\sqrt{1+\cos x}}$

26. افاده مثلثاتی $\tan 39^\circ$ مساوی است به:

1) $\dfrac{\sin 6^\circ - \cos 6^\circ}{\sin 6^\circ + \cos 6^\circ}$ 2) $\dfrac{\cos 6^\circ - \sin 6^\circ}{\sin 6^\circ - \cos 6^\circ}$

3) $\dfrac{\cos 6^\circ - \cos 84^\circ}{\sin 6^\circ + \cos 84^\circ}$ 4) $\dfrac{\sin 84^\circ - \sin 6^\circ}{\sin 84^\circ + \sin 6^\circ}$

27. در صورتیکه A، B و C زوایای داخلی یک مثلث باشد انگاه $tgA + tgB + tgC$ مساوی میشود به:

1) $tgA \cdot tgB \cdot tgC$ 2) $tgA \cdot tgC$

3) $tgA \cdot tgB$ 4) $tgB \cdot tgC$

28. $sin(A+B)sin(A-B)$ عبارت از:

1) $sin^3A - sin^3B$ 2) $sin^2A - sin^2B$

3) $sin^2A + sin^2B$ 4) $sin^3A + sin^3B$

29. در صورتیکه $\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \neq \propto$ باشد افاده مثلثاتی $\frac{cos3\propto + sin\propto sin2\propto}{sin3\propto - sin2\propto cos\propto}$ عبارت است از:

1) $tan \propto$ 2) $cot \propto$

3) $tan3 \propto$ 4) $cot3 \propto$

30. $\dfrac{1}{\sec 22^\circ \cdot \sin 31^\circ \cdot \cos 53^\circ}$ مساوی است به:

1) $\dfrac{1}{2}\sec 22^\circ \cdot \sin 84^\circ$ 2) $\tan 22^\circ + \cos 53^\circ$

3) $2\sec 22^\circ \cdot \cos^2 53^\circ$ 4) $\tan 53^\circ + \cot 31^\circ$

31. افاده مثلثاتی $\csc 10^\circ - \sqrt{3}\sec 10^\circ$ مساوی است به:

1) 4 2) $\frac{1}{2}$ 3) 2 4) 1

32. قیمت افاده $\tan 15° + \cot 15°$ عبارت از:

1) $2-\sqrt{3}$ 2) $4+2\sqrt{3}$ 3) $4-2\sqrt{3}$ 4) 4

.33 افاده مثلثاتی $\frac{\sqrt{3}}{sin80}-\frac{1}{cos80}$ عبارت از:

1) 4   2) 3   3) 2   4) 1

.34 عدد $tan15-cot15$ عبارت از:

1) $-2\sqrt{3}$ 2) $-2\sqrt{2}$ 3) $-\sqrt{3}$ 4) $2\sqrt{3}$

.35 حاصل ضرب افاده $(sin312)\ \ldots\ (sin47)(sin46)(sin45)$ عبارت از:

1) $\frac{3\sqrt{2}}{8}$ 2) 0 3) $-\frac{3\sqrt{2}}{8}$ 4) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

.36 قیمت $cotg\left(2arctan\frac{3}{4}\right)$ عبارت از:

1) $\frac{9}{16}$ 2) $\frac{7}{24}$ 3) $\frac{25}{24}$ 4) $\frac{24}{25}$

.37 افاده $\frac{sin^2a}{1+cotg^2a}+\frac{cos^2a}{1+tan^2a}$ عبارت از:

1) $2sin^2a\ cos^2a-1$ 2) $1-2sin^2a\ cos^2a$

3) $1-3sin^2a\ cos^2a$ 4) $3sin^2a\ \ cos^2a-1$

.38 $4\cos 18°-3\sec 18°-2\tan 18°$ مساوی است به:

1) صفر   2) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ 3) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ 4) 1

.39 $\csc 10°-\sqrt{3}\sec 10°$ مساوی است به:

1) 1   2) $\frac{1}{2}$ 3) 2   4) 4

40. اگر $\cos \propto + \cos \theta = m$ و $\sin \propto + \sin \beta = n$ باشد پس $\sin (\propto + \beta)$ مساوی است به:

1) $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$　　2) $\frac{n^2-m^2}{m^2+n^2}$

3) $\frac{2mn}{m^2+n^2}$　　4) $\frac{2mn}{m^2-n^2}$

41. نقطه تقاطع $y = \sin x + 2$ با محور y عبارت است از:

1) $(2,0)$　　2) $(0,2)$

3) $(1,1)$　　4) $(-1,-1)$

42. اگر $\begin{cases} tan\, x + cot\, x = a \\ tan^3 x + cot^3 x = b \end{cases}$ باشد پس :

1) $b = 3a - a^3$　　2) $b = a^3 + 3a$

3) $b = a^3 - 3a$　　4) $b = a - 3a^3$

43. اگر B, A و C زوایای یک مثلث b, a و c طول اضلاع مقابل آن باشد، پس $\dfrac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C}$ مساوی است به:

1) $2\frac{b}{\sin B}$　　2) $\frac{\sin B}{b}$　　3) $\frac{b}{\sin 2B}$　　4) $\frac{b}{\sin B}$

44. اگر در مثلث ABC، $\frac{b-c}{b+c} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ طوریکه b و c طول اضلاع مقابل زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ و $\hat{A} = 90°$ باشد ، پس وسعت زاویه $\hat{B}$ مساوی است به:

1) $70°$　　2) $45°$　　3) $30°$　　4) $75°$

45. اگر B, A و C زوایای داخلی یک مثلث و a, b و c بالترتیب طول اضلاع مقابل آن باشد پس $\frac{a+\sin A}{\sin A}$ مساوی است به:

1) $\frac{\sin B}{b+\sin B}$　　2) $\frac{\sin B}{b-\sin B}$　　3) $\frac{b+\sin B}{\sin B}$　　4) $\frac{b}{\sin B}$

اگر $\frac{\sin x}{a}=\frac{\cos x}{b}=k$ باشد، پس $k(a+b)$ مساوی است به:

1) $(1-\sin 2x)^{\frac{1}{2}}$ 2) $1+\sin 2x$ 3) $(1+\sin 2x)^{\frac{1}{2}}$ 4) هیچکدام

.46 $\frac{1}{\sec 18\cdot\sin 3\cdot\cos 21}$ مساوی است به:

1) $\tan 21-\tan 3$ 2) $\tan 3-\tan 21$

3) $\cot 21+\tan 21$ 4) $\cot 3+\tan 21$

.47 در حالت معیاری با زاویه $23°$ کدام زاویه زیر کوترمینل میباشد:

1) $7423°$ 2) $7223°$ 3) $7323°$ 4) $7123°$

.48 حاصل افاده $\frac{\tan(\sqrt{2}+\sqrt{8})-\sin(\sqrt{2}+\sqrt{8})}{2\tan(\sqrt{2}+\sqrt{8})}$ مساوی است به:

1) $1+\sin^2\frac{\sqrt{18}}{2}$ 2) $1+\cos^2\frac{\sqrt{18}}{2}$

3) $1-\sin^2\frac{\sqrt{18}}{2}$ 4) $1-\cos^2\frac{\sqrt{18}}{2}$

.49 حاصل افاده $\left(3cot\sqrt{27}+3tan\sqrt{27}\right)\left(3\sin\sqrt{27}+3cos\sqrt{27}\right)$ مساوی است به:

1) $\frac{9}{\csc(3\sqrt{3})}-\frac{9}{\cos(3\sqrt{3})}$ 2) $\frac{9}{\sin(3\sqrt{3})}+\frac{9}{\cos(3\sqrt{3})}$

3) $\frac{9}{\sin(3\sqrt{3})}-\frac{9}{\cos(3\sqrt{3})}$ 4) $\frac{9}{\csc(3\sqrt{3})}+\frac{9}{\cos(3\sqrt{3})}$

.50 افاده مثلثاتی $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{4}$ مساوی است به:

1) 0 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4) $\frac{1}{2}$

.51 افاده مثلثاتی $\cos^2\frac{x}{10}-\sin^2\frac{x}{10}$ مساوی است به:

1) $\sin\frac{x}{5}$ 2) $\sin\frac{x}{10}$ 3) $cos\frac{x}{10}$ 4) $cos\frac{x}{5}$

52. حاصل افاده $\frac{\sin 12\theta}{\cos 8\theta} - \frac{\cos 12\theta}{\sin 8\theta}$ مساوی است به:

1) $\frac{\cos 20\theta}{\sin 16\theta}$ 2) $\frac{2\cos 20\theta}{\sin 16\theta}$ 3) $\frac{\cos 20\theta}{\sin 8\theta}$ 4) $\frac{\cos 20\theta}{\cos 8\theta}$

53. اگر $a = 60°$ باشد $2\sin^2\frac{a}{2}\cdot\cos^2\frac{a}{2}$ مساوی است به:

1) $\frac{5}{8}$ 2) $\frac{7}{8}$ 3) $\frac{1}{8}$ 4) $\frac{3}{8}$

54. $\frac{1}{\sec 18\cdot\sin 30\cdot\cos 21}$ مساوی است به:

1) $\tan 21 - \tan 3$ 2) $\tan 3 - \tan 21$

3) $\cot 21 + \tan 21$ 4) $\cot 3 + \tan 21$

55. اگر $a \neq 0$ و $\cot 18° = n$ باشد در این صورت $\tan 36°$ مساوی است به:

1) $\frac{2n}{n^2+1}$ 2) $\frac{2n}{n^2-1}$ 3) $\frac{1}{n}$ 4) $-\frac{1}{n}$

56. افاده مثلثاتی $\sin^2 x\cos^2 x\,(2 + \tan^2 x + \cot^2 x)$ مساوی است به:

1) 2 2) 0 3) 1 4) -1

57. افاده $2 - 2cos^2 4$ عبارت از ؟

1) $cosec^2 4$ 2) $2sec4$ 3) $\frac{2}{sec4}$ 4) $\frac{2}{cosec4}$

58. $cos^2 25$ مساوی است به :

1) $0{,}5 + 0{,}5cos50$ 2) $cosec^2 25$

3) $1+cos^2 25$ 4) $0,5-0,5cosec\ 50$

59. اگر $\cos\theta=\frac{4}{5}$ باشد و ضلع دوم زاویه در ربع اول قرار داشته باشد. قیمت $2\tan\frac{\theta}{2}$ عبارت است از:

1) 7 2) $\frac{3}{2}$ 3) $\frac{1}{3}$ 4) $\frac{2}{3}$

60. افاده مثلثاتی $\cos 20°+\cos 70°$ مساوی است به:

1) $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 25°$ 2) $-\sqrt{2}\cos 25°$

3) $\sqrt{2}\cos 25°$ 4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 25°$

61. افاده مثلثاتی $\frac{2\tan 25°}{1+\tan^2 25°}$ مساوی است به:

1) $\tan 50°$ 2) $\cot 50°$

3) $\cot 25°$ 4) $\tan 25°$

62. حاصل افاده $\frac{\cos(80\alpha)}{\cos(40\alpha)+\sin(40\alpha)}$ مساوی است به:

1) 1 2) $\sin(40\alpha)-\cos(40\alpha)$

3) $\cos(40\alpha)+\sin(40\alpha)$ 4) $\cos(40\alpha)-\sin(40\alpha)$

63. حاصل افاده $\frac{8}{\sec(10-\sqrt{8})\cos 10.\sin\sqrt{8}}$ مساوی است به:

1) $8\tan 10+8\cot\sqrt{8}$ 2) $-8\tan 10-\cot\sqrt{8}$

3) $-8\tan 10 + 8\cot\sqrt{8}$ 4) $-8\tan 3 - \cot\sqrt{8}$

.64 اگر $z = \sin\frac{\pi}{2} i + \cos\frac{\pi}{2}$ باشد، پس z^{10} مساوی است به:

1) $-i$ 2) -1 3) 1 4) i

.65 افاده مثلثاتی $\frac{\sin x}{\cot x - \csc x} - \frac{\sin x}{\cot x + \csc x}$ مساوی است به:

1) -2 2) 1 3) -1 4) 2

.66 اگر $\sin\theta + \cos\theta = a$ باشد، پس $\sin^3\theta + \cos^3\theta$ مساوی است به:

1) $\frac{a}{2}(a^2 - 3)$ 2) $a(a^2 - 2)$

3) $\frac{a}{2}(3 - a^2)$ 4) $\frac{a}{2}(a^2 + 2)$

.67 قیمت افاده $\frac{\cos 25°}{\sin 15° \cdot \cos 40°}$ مساوی است به:

1) $\tan 40° + \cot 15°$ 2) $\tan 40° - \cot 15°$

3) $\tan 15° + \cot 40°$ 4) هیچکدام

.68 حاصل افاده $\frac{\sin(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{12})}{\cos\frac{\pi}{8} \cdot \cos\frac{\pi}{12}}$ مساوی است به:

1) $\tan\frac{\pi}{8} - \tan\frac{\pi}{12}$ 2) $\tan\frac{\pi}{8} + \tan\frac{\pi}{12}$

3) $\cot\frac{\pi}{8} + \cot\frac{\pi}{12}$ 4) $\cot\frac{\pi}{8} - \cot\frac{\pi}{12}$

.69 حاصل افاده $\left(\sqrt{6}+\sqrt{6}\cos\sqrt{6}\right)+\cos\sqrt{6}\,\frac{\sqrt{6}\sin\sqrt{6}}{(1+\cos\sqrt{6})}$ مساوی است به:

1) $\frac{24}{\sin\sqrt{6}}$ 2) $\frac{2\sqrt{2}}{\cos\sqrt{6}}$

3) $2\sqrt{6}\cos\sqrt{6}$ 4) $\sqrt{6}\csc\sqrt{6}$

.70 برای کدام قیمت α سیستم $\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{3} \\ \sin x.\cos x=\alpha \end{cases}$ دارای حل میباشد:

1) $-\sqrt{3}\le 4\alpha\le 1$ 2) $0\le\alpha\le 1$.

3) $-\sqrt{3}\le\alpha\le 1$ 4) $-3\le 4\alpha\le 1$

.71 برای کدام قیمت های ذیل a سیستم $\begin{cases} \sin x+\sin y=a \\ x+y=\frac{\pi}{2} \end{cases}$ دارای حل میباشد:

1) $a<-\sqrt{2}$ 2) $-\sqrt{2}\le a\le\sqrt{2}$

3) $-2\le a\le 2$ 4) $a>-\sqrt{2}$

.72 کدام یکی از سیستم های ذیل حل ندارد:

1) $\begin{cases} \sin x\sin y=3 \\ x+y=\pi \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x\sin y=0 \\ x+y=\frac{\pi}{2} \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sin x\sin y=0 \\ x+y=\pi \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sin x\sin y=1 \\ x+y=\pi \end{cases}$

.73 اگر $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$ باشد آنگاه قیمت $\tan\frac{x}{2}$ عبارت از:

1) $\sqrt{3}$ 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 4) $2\sqrt{3}$

.74 اگر $\arccos(\sin x)=\sin a$ باشد آنگاه قیمت x از جنس a عبارت از:

1) $x=\frac{\pi}{2}+\cos a$ 2) $x=\frac{\pi}{2}-\sin a$

3) $x=\frac{\pi}{2}-\cos a$ 4) $x=\frac{\pi}{2}+\sin a$

.75 حل معادله $1+\log\sin x-\log\cos x=0$ عبارت است از:

1) $x=\arctan\frac{1}{10}+k\pi$ 2) $x=\arctan\frac{1}{10}+2k\pi$

3) $x=\arctan 10+k\pi$ 4) $x=\arctan 10+2k\pi$

.76 برای کدام قیمت های a معادله $\sin x\cos x\cos 2x=a$ دارای جواب است؟

1) $a<-\frac{1}{4}$ 2) $\frac{1}{4}<a\leq 1$

3) $-\frac{1}{4}\leq a\leq\frac{1}{4}$ 4) $a>\frac{1}{4}$

.77 حل عمومی معادله مثلثاتی $2\cos x-\sqrt{3}=0$ عبارت است از:

1) $\left\{x/x=k\pi\pm\frac{\pi}{4},x\in Z\right\}$ 2) $\left\{x/x=2k\pi\pm\frac{\pi}{6},x\in Z\right\}$

3) $\left\{x/x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3},x\in Z\right\}$ 4) $\left\{x/x=(2k+1)\pi\pm\frac{\pi}{6},x\in Z\right\}$

.78 برای کدام قیمت x معادله $4\sin x-2=0$ صدق میکند:

1) $x=\frac{\pi}{2}$ 2) $x=2\pi$ 3) $x=-\frac{\pi}{2}$ 4) $x=\frac{\pi}{6}$

.79 کدام قیمت x در معادله $4\sin x=\frac{2}{\cos x}$ صدق میکند:

1) 45   2) 90   3) 60   4) 30

.80 اگر $0<x<\pi$ و $\sin x+\cos x=\frac{1}{2}$ باشد، پس $\tan x$ مساوی است به:

1) $\frac{1-\sqrt{7}}{4}$ 2) $\frac{4-\sqrt{7}}{3}$ 3) $-\frac{(4+\sqrt{7})}{3}$ 4) $\frac{1+\sqrt{7}}{4}$

81. ست حل معادله $\cot x - 1 = 0$ عبارت از:

1) $(x = k\pi + \frac{\pi}{3}, x \in Z)$ 2) $(x = k\pi + \frac{\pi}{5}, x \in Z)$

3) $(x = k\pi + \frac{\pi}{4}, x \in Z)$ 4) $(x = 2k\pi + \frac{\pi}{5}, x \in Z)$

82. قیمت x در معادله $\sqrt{8}sin^2x - 2\sin x = 0$ مساوی است به:

1) 30 2) 45 3) 60 4) 90

83. یک حل معادله $\tan^2 x - 4\tan x + 3 = 0$ عبارت است از:

1) $x = \frac{\pi}{4}$ 2) $x = -\frac{\pi}{4}$ 3) $x = \frac{\pi}{6}$ 4) $x = \frac{\pi}{3}$

84. ست حل های مثلثاتی $(\sin x - \tan x)\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{4\pi}{3}$ عبارت است از:

1) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ 2) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ 3) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ 4) $k\pi - \frac{\pi}{6}$

85. اگر C, B, A زوایای یک مثلث و c, b, a اضلاع مقابل این زوایا باشد، پس $\cos C$ مساوی است به:

1) $\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$ 2) $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

3) $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab}$ 4) $\frac{a^2+b^2+c^2}{2bc}$

86. در مثلث $A\dot{B}C$ $c = 6\sqrt{3}, b = 9, a = 3\sqrt{3},$ باشد، پس $\cos B$ مساوی است به:

1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) 1

.87 اگر C, B, A زوایای داخلی یک مثلث و c, b, a بالترتیب طول اضلاع مقابل آن باشد، پس $\frac{a+\sin A}{\sin A}$ مساوی است به:

1) $\frac{\sin B}{b-\sin B}$ 2) $\frac{b}{\sin B}$ 3) $\frac{b+\sin B}{\sin B}$ 4) $\frac{\sin B}{b+\sin B}$

.88 در مثلث ABC, $a = 50cm$ و $R = 25\sqrt{2}cm$ است، پس اندازه زاویه A مساوی است به:

1) $30°$ 2) $45°$ 3) $60°$ 4) $15°$

.89 محیط یک مثلث متساوی الاضلاع 84 سانتی متر است، شعاع دایره محاطی آن عبارت است از:

1) $\frac{84}{18}\sqrt{3}cm$ 2) $\frac{28}{18}\sqrt{3}cm$

3) $\frac{84}{6}\sqrt{3}cm$ 4) $\frac{84}{3}\sqrt{3}cm$

.90 $\frac{1}{\sec 22°\cdot\sin 31°\cdot\cos 53°}$ مساوی است به:

1) $\tan 22° + \cot 53°$ 2) $\tan 53° + \cot 31°$

3) $2\sec 22° \cdot \cos^2 53°$ 4) $\frac{1}{2}\sec 22° \cdot \sin 84°$

.91 اگر $A + B = \frac{\pi}{4}$ باشد پس $(1 + \tan A)(1 + \tan B)$ مساوی است به:

1) 1 2) $\sqrt{3}$ 3) -1 4) 2

.92 $\cos^2\sqrt{3} + \frac{\tan^2\sqrt{3}}{\sec^2\sqrt{3}}$ مساوی است به:

1) $\tan^2\sqrt{3}$ 2) 1 3) $\tan^2\sqrt{3} - 1$ 4) 2