فصل هشتم

هندسه

هندسه مسطحه

مفاهیم اساسی هندسه: اساس گذار این هندسه اقلیدس بوده که می توان این هندسه را دو بعدی تعریف نموده که دارای مفاهیم اساسی ذیل می باشد.

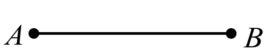
نقطه: کوچک ترین اثر روی یک سطح یا شکل که از ابعاد آن صرف نظر گردیده باشد، نقطه نامیده می شود.

خط: اتصال نقاط روی یک سطح یا شکل هندسی که فقط طول آن مورد توجه باشد، خط نامیده می شود.

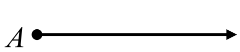
اقسام خط: بطور عموم خط به سه نوع می باشد.

1. **خط مستقیم:** کوتاه ترین فاصله بین دو نقطه را خط مستقیم می نامند، که به سه شکل ملاحظه می گرد.

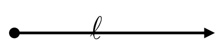
- **قطعه خط (خط محدود):** خط مستقیم که مبدأ و انجام آن معلوم باشد.



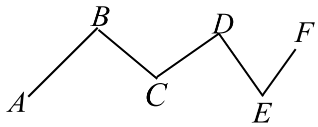
- **نیم خط (خط نیمه محدود):** خط مستقیم که دارای مبدأ و فاقد انجام باشد.



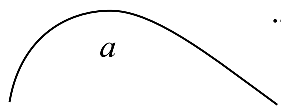
- **خط نامحدود:** خط مستقیم که مبدأ و انجام آن محدود نگردیده.



2. **خط منکسر:** چندین قطعه خط مستقیم که در امتداد همدیگر قرار نداشته باشند خط منکسر نامیده می شود.

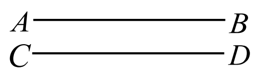


3. **خط منحنی:** خط که در هر حالت با خط مستقیم فقط یک نقطه مشترک داشته باشد و یا به عباره دیگر خط که نه در شکل مستقیم و نه در شکل منکسر باشد خط منحنی نامیده می شود.

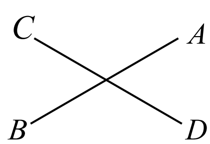


حالات خطوط نظر به همدیگر

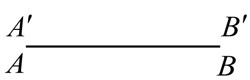
1) **خطوط موازی:** خطوط مستقیم که در یک سطح قرار داشته و هیچ نقطه مشترک نداشته باشند خطوط موازی نامیده می شوند.



2) **خطوط متقاطع:** به خطوط گفته می شوند که یکدیگر را در یک نقطه قطع نمایند.

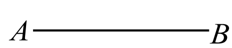


3) **خطوط منطبق:** خطوط که تمام آنها با همدیگر مشترک باشند، خطوط منطبق می گویند.

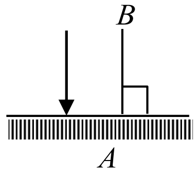


وضعیت خط مستقیم:

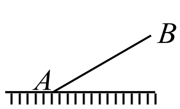
1) **خط افقی:** به خط مستقیمی گفته می شود، که موازی با سطح زمین باشد.



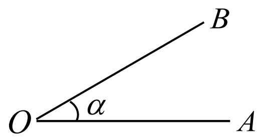
2) **خط عمودی:** به خط مستقیمی گفته می شود که در امتداد شاقول باشد.



3) **خط مایل:** خط مستقیمی که بالای یک سطح نه موازی و نه عمود باشد.



زاویه: شکلی را که دو خط مستقیم متقاطع در نزدیکی نقطه تقاطع خود تشکیل می دهند، که دارای مبدأ مشترک باشند و زاویه نامیده می شود.



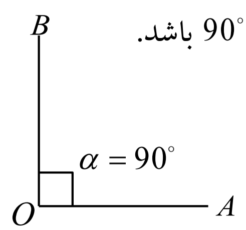
$\overline{OA}$ و $\overline{OB}$ اضلاع زاویه و O رأس زاویه و α وسعت زاویه گفته می شود.

اندازه گیری زاویه: واحدات اندازه گیری زاویه درجه، گراد و رادیان می باشد طوریکه یک دایره به 360 حصه مساوی تقسیم گردیده هر حصه آن یک درجه نامیده می شود.

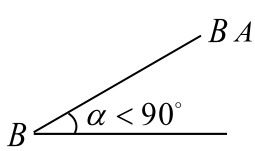
آله اندازه گیری زاویه: نقاله می باشد که از یک نیم دایره تشکیل گردیده که از چپ به راست و راست به چپ به 180 حصه مساوی تقسیم گردیده است.

انواع زاویه:

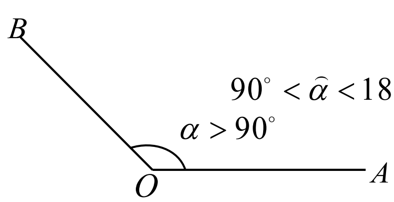
زاویه قایمه: زاویه است که اضلاع آن با همدیگر عمود باشند، یا وسعت آن 90° باشد.



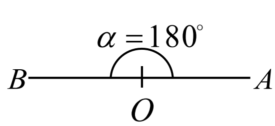
زاویه حاده: زاویه است که وسعت آن کمتر از 90° باشد. $0^\circ < \widehat{\alpha} < 90^\circ$



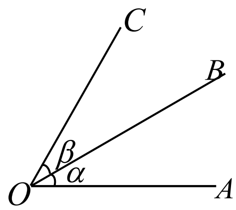
زاویه منفرجه: زاویه است که وسعت آن بیشتر از 90° باشد. $90^\circ < \widehat{\alpha} < 180^\circ$



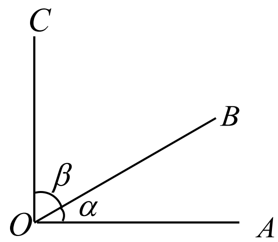
زاویه مستقیمه: زاویه است که وسعت آن دو قایمه (مساوی به 180°) باشد $\alpha = 180^\circ$



زوایای مجاوره: دو زاویه که رأس مشترک، ضلع مشترک داشته باشند، زوایای مجاوره نامیده میشود.

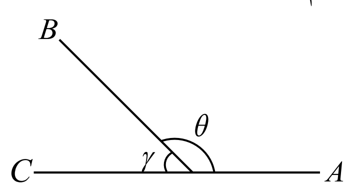


زوایای مکمله: دو زاویه که مجموعه آنها یک قایمه $\left(90^{\circ}\right)$ باشند مکلمه یکدیگر نامیده می شوند.



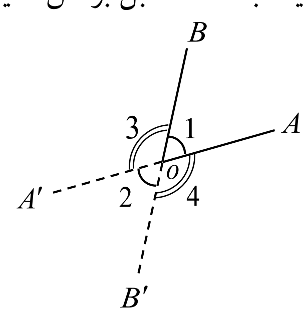
$$\hat{\theta}+\hat{\beta}=90^{\circ}$$

زوایای متممه: دو زاویه که مجموعه آنها دو قایمه 180° باشند متمم یکدیگر نامیده میشوند.



$$\hat{\theta}+\gamma=180^{\circ}$$

زوایای متقابل براس: زوایای که از امتداد اضلاع یکدیگر تشکیل گردیده باشند، متقابل بردس نامیده می شوند، زوایای متقابل براس بدو با همدیگر مساوی اند.



زوایای متبادله و متوافقه: هرگاه دو خط موازی توسط یک خط مستقیم قطع گردد،هشت زاویه را تشکیل میدهد. مانند شکل ذیل.

طوریکه: زاویای $\hat{8},\hat{7},\hat{2},\hat{1}$ زاوایا خارجی

زاویای $\hat{6},\hat{5},\hat{4},\hat{3}$ زوایای داخلی گفته می شوند.

زوایای متبادله: دو زاویه که هر دو آن داخلی و یا هر دو آن خارجی بود بدو طرف خط قاطع قرار داشته و رأس مشترک نداشته باشند متبادله نامیده می شوند که با هم مساوی نیز می باشند.

زوایای $\left(\hat{3},\hat{5}\right)$ و $\left(\hat{4},\hat{6}\right)$ متبادله داخلی بوده که $\hat{5}=\hat{3}$ و $\hat{4},\hat{6}$ می باشد.

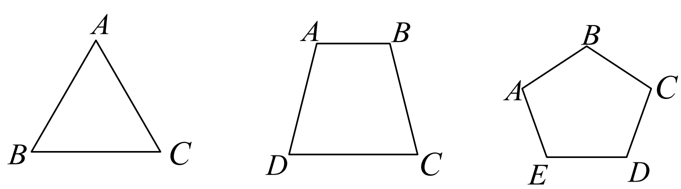
زوای $(\hat{1},\hat{7})$ و $(\hat{2},\hat{8})$ متبادله خارجی بوده که $\hat{7} = \hat{1}$ و $\hat{2},\hat{8}$ است.

زوایای متوافقه: دو زاویه که یکی آن داخلی و یکی آن خارجی بوده به یک طرف خط قاطع قرار داشته و رأس مشترک نداشته باشند، متوافقه نامیده می شوند که با هم مساوی نیز می باشند. یعنی:

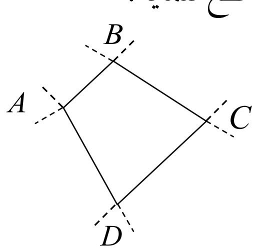
$\hat{1} = \hat{5} \Rightarrow (\hat{1},\hat{5})$، $\hat{2} = \hat{6} \Rightarrow (\hat{2},\hat{6})$، $\hat{3} = \hat{7} \Rightarrow (\hat{3},\hat{7})$ و $\hat{4} = \hat{8} \Rightarrow (\hat{4},\hat{8})$ می باشند.

مضلعات (چند ضلعی ها)

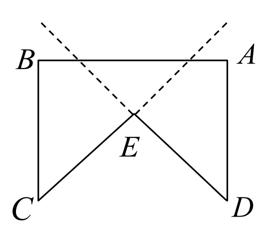
مضلع عبارت از خط منکسر بسته یی است که فقط یک ناحیه بسته را تشکیل می دهد که هیچ دو خط آن به امتداد یک خط مستقیم قرار نداشته و هر رأس آن نقطه تقاطع دو قطعه خط باشد، مانن: سه ضلعی (مثلث)، چهار ضلعی (مربع، مستطیل، ذوذنقه،...) پنج ضلعی، شش ضلعی و غیره.



مضلع محدب: مضلعی است که امتداد اضلاع آن هیچ ضلع از مضلع را قطع ننماید:



مضلع مقعر: عبارت از مضلعی است که حداقل امتداد یکی از اضلاع آن مضلع مذکور را قطع نماید.



مضلع منظم: به مضلعی گفته می شود که طول تمام اضلاع آن با هم مساوی و وسعت تمام زوایای آن با هم یکسان باشند.

مضلع غیر منظم: مضلعی را می گویند که طول اضلاع با هم مساوی نبوده و همچنان وسعت زوایا نیز با هم مساوی نباشند.

قطر مضلع: عبارت از خطی مستقیمی است که دو رأس غیر مجاور مضلع را با هم وصل می نماید.

یادداشت: برای یک مضلع n ضلعی روابط ذیل را بخاطر داشته باشید:

1) مجموعه تمام اقطار یک مضلع n ضلعی عبارت از:

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

2) تعداد قطرهای که از یک رأس ضلع n ضلعی می گذرد، عبارت از:

$$N = n-3$$

3) تعداد مثلث های که از اثر ترسیم یک مضلع n ضلعی به دست می آید، عبارت از:

$$\Delta = n-2$$

4) مجموعه زوایای داخلی یک مضلع n ضلعی عبارت از:

$$S = (n-2)\cdot 180^\circ$$

5) وسعت یک زاویه داخلی مضلع منظم n ضلعی عبارت از:

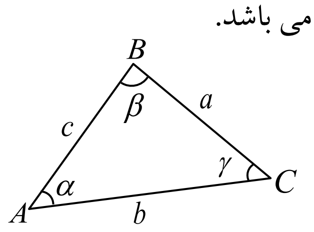
$$\hat{\alpha} = \frac{(n-2)\cdot 180}{n}$$ و یا $$n = \frac{360}{180-\alpha}$$

6) وسعت یک زاویه خارجی مضلع منظم n ضلعی عبارت از:

$$\hat{\beta} = \frac{360}{n}$$

مثلث

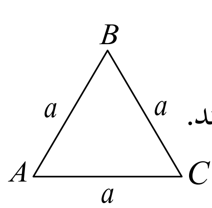
مضلع که تنها دارای سه ضلع باشد یا سطح که توسط سه قطعه خط محدود شده باشد مثلث نامیده می شود، هر مثلث دارای سه ضلع (b, a و c) سه رأس (C, B, A) و سه زاویه (θ, β, α) می باشد.



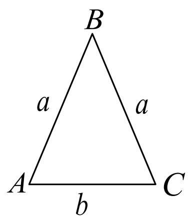
انواع مثلث:

الف: مثلث ها از نظر طول اضلاع به سه دسته تقسیم گردیده است.

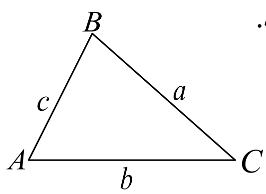
1) **مثلث متساوی الاضلاع:** مثلث که طول تمام اضلاع آن با هم مساوی باشند.



2) **مثلث متساوی الساقین:** مثلث که دو ضلع آن با هم مساوی باشند.

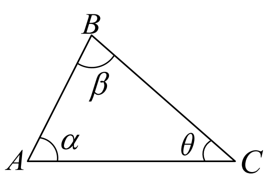


3) **مثلث مختلف الاضلاع:** مثلث که طول تمام اضلاع آن مختلف باشند.

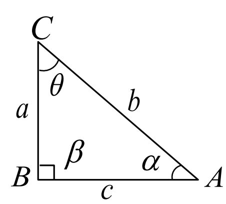


ب: مثلث ها از نظر زاویه به سه دسته تقسیم گردیده است.

1) **مثلث حاده الزاویه:** مثلث که تمام زوایای داخلی آن حاده باشد $\hat{\theta}<90^\circ$ ، $\hat{\beta}<90^\circ$ ، $\hat{\alpha}<90^\circ$

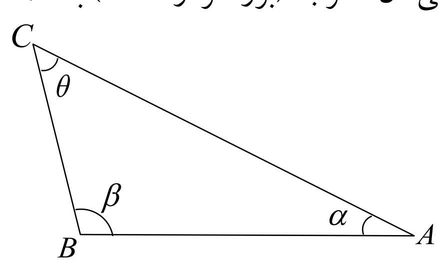


2) **مثلث قایم الزاویه:** مثلث که اندازه یک زاویه داخلی آن (90°) باشد. $\hat{\theta}<90^\circ$ ، $\hat{\beta}<90^\circ$ ، $\hat{\alpha}<90^\circ$



همچنان ضلع مقابل زاویه 90° را وتر مثلث نیز می نامند.

3) **مثلث منفرجه الزاویه:** مثلث که اندازه یک زاویه داخلی آن منفرجه (بزرگتر از 90°) باشد.

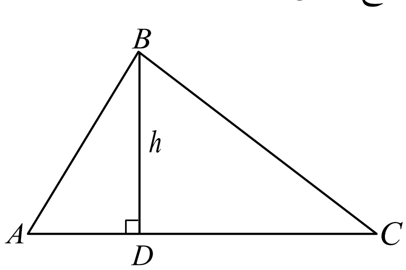


$\hat{\alpha}<90^\circ$

$\hat{\beta}<90^\circ$

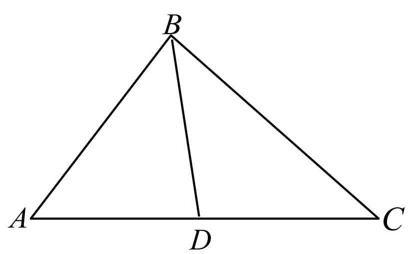
$\hat{\theta}<90^\circ$

ارتفاع مثلث: عبارت از خط مستقمی است که رأس مثلث بالای ضلع مقابل آن عمود باشد. مانند خط $\overline{BH}$

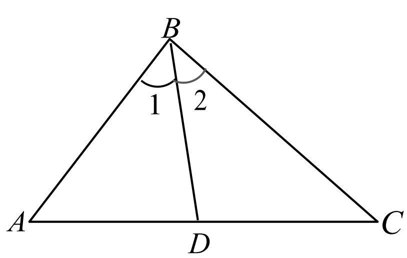


بخاطر داشته باشید که:

1. ارتفاعات مثلث یکدیگر را در یک نقطه قطع می کند.
2. ارتفاعات مثلث حاده الزاویه یکدیگر را در داخل مثلث قطع می کنند.
3. ارتفاعات مثلث قایم الزاویه یکدیگر را در روی رأس قایم قطع می کنند.
4. ارتفاعات مثلث منفرجه یکدیگر را در خارج مثلث قطع می کنند.
5. در هر مثلث قایم الزاویه ارتفاع که از رأس قایم بالای وتر آن رسم شود مساوی به نصف طول وتر است.



میانه مثلث: عبارت از خط مستقیمی است که رأس مثلث ضلع مقابل آنرا تنصیف نماید. مانند $\overline{BD}$ بخاطر داشته باشید که در تمام انواع مثلث ها میانه ها یکدیگر را در یک نقطه در داخل مثلث قطع میکنند. (نقطه تقاطع مرکز ثقل مثلث می باشد) و نقطه تقاطع میانه ها، هر میانه را به نسبت 2 بر 1 تقسیم می کند.

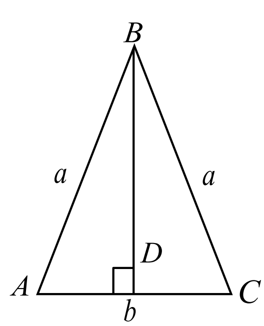


ناصف زاویه مثلث: عبارت از خط مستقیمی است که زوایای مثلث را به دو حصه مساوی تقسیم می نماید، مانند $\overline{BM}$، طوریکه $\hat{2} = \hat{1}$ است. ناصف زوایای داخلی هر مثلث یکدیگر را در یک نقطه در داخل مثلث قطع می نماید.

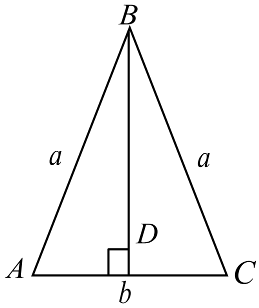
ناصف عمودی: هرگاه در یک مثلث ارتفاع و میانه با هم منطبق باشند ناصف عمودی نامیده می شود.

بخاطر داشته باشید که:

-1 در مثلث متساوی الاضلاع میانه ها، ارتفاعات و ناصف الزاویا با هم منطبق اند. خط $\overline{BD}$ ارتفاعف میانه و ناصف الزاویه می باشد.



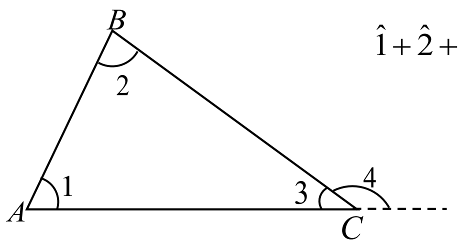
2- در مثلث متساوی الساقین رأس که از ارتفاع و میانه از این رأس با هم منطبق اند، یعنی ناصف عمودی می باشد.



خواص زاویا و اضلاع یک مثلث:

1) مجموع زوایای داخلی هر مثلث مساوی به دو قایمه (180°) می باشد.

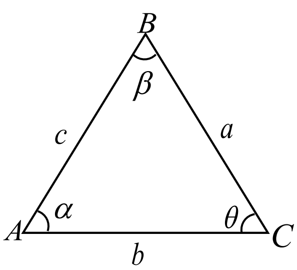
2) اگر اضلاع یک مثلث را به ترتیب امتداد بدهیم مجموعه زوایای خارجی آن 360° می باشد.



$$\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}=360^\circ$$

3) مجموعه تمام زوایای خارجی هر مثلث 900° می باشد.

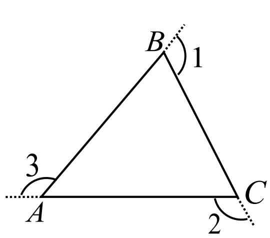
4) مجموعه تمام زوایای خارجی در هر مثلث مساوی به مجموعه دو زاویه داخلی غیر مجاور آن می باشد.



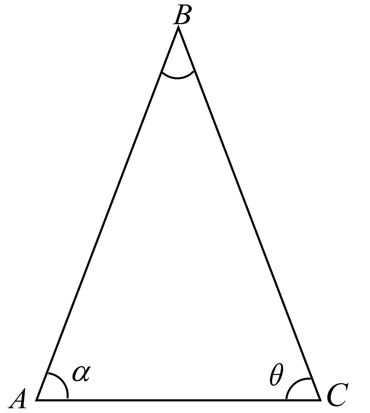
$$\hat{4}=\hat{1}+\hat{2}$$

5) مثلث متساوی الاضلاع عبارت از یک مضلع منظم بوده که طول اضلاع و همچنان اندازه زوایای داخلی آن با هم مساوی اند.

$$a=b=c \text{ ،} \hat{\alpha}=\hat{\beta}=\hat{\theta}$$



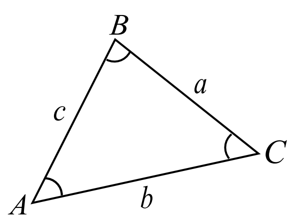
6) در مثلث متساوی الساقین اندازه دو زاویه داخلی مقابل اضلاع مساوی مثلث با هم مساوی اند.



$$\hat{\alpha} = \hat{\theta}$$
$$\overline{AB} = \overline{BC}$$

7) ناصف الزاویای داخلی و خارجی مثلث در یک رأس بالای همدیگر عمود اند.

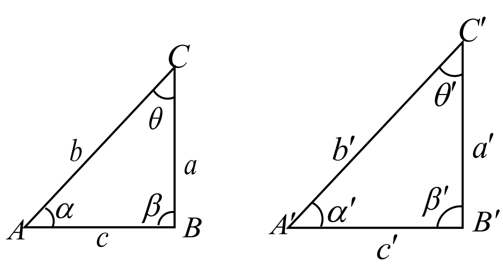
8) در هر مثلث مجموعه دو ضلع همیشه بزرگ تر از ضلع سوم می باشد. یعنی:



$b+c>a$ ، $a+c>b$ ، $a+b>c$

تشابه دو مثلث:

دو مثلث زمانی با هم متشابه گفته می شوند که:



1) تمام زوایای آنها دو به دو با هم مساوی باشند.

2) تمام اضلاع آن دو به دو با هم متناسب باشند.

$$\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \quad \text{و} \quad \begin{matrix} \alpha = \alpha' \\ \beta = \beta' \\ \theta = \theta' \end{matrix}$$

انطباق پذیری دو مثلث: دو مثلث در سه حالت ذیل انطباق پذیر گفته می شوند.

1) طول هر سه ضلع دو مثلث دوبدو با هم مساوی باشند.

2) طول دو ضلع و یک زاویه داخلی بین این دو ضلع در هر دو مثلث دوبدو با هم مساوی باشند.

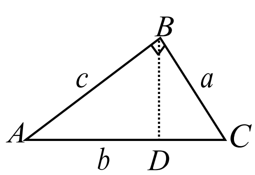
3) طول یک ضلع اندازه دو زاویه داخلی در هر دو مثلث دوبدو با هم مساوی باشند.

بخاطر داشته باشید که دو مثلث انطباق پذیر با هم متشابه اندف زیرا در مقابل اضلاع مساوی زوایای مساوی قرار دارد. اما دو مثلث متشابه همیشه با هم انطابق نیست، زیرا امکان دارد در مقابل زوایای مساوی اضلاع مساوی قرار نداشته باشند.

قضایا:

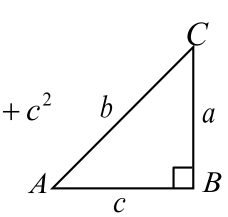
1) در هر مثلث قایم الزاویه مربع هر یک از اضلاع قایم مساوی به حاصل ضرب وتر در مرتسم همان ضلع قایم بالای وتر می باشد. یعنی:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AD} \Rightarrow c^2 = b \cdot \overline{AD}$$
$$\overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{CD} \Rightarrow a^2 = b \cdot \overline{DC}$$



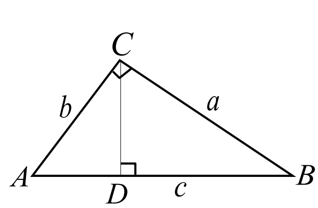
2) در هر مثلث قایم الزاویه مجموعه مربعات دو ضلع قایم مساوی به مربع وتر می باشد(قضیه فیثاغورث) یا (پیتاگور)

$$b^2 = a^2 + c^2$$

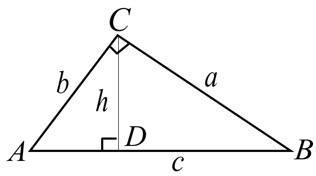


3) در هر مثلث قایم الزاویه ارتفاع مربوط رأس قایم عبارت از وسط هندسی مرتسمات دو ضلع قایم بالای وتر همان مثلث می باشد.

یعنی $\overline{CD}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{BD}$ و یا $\overline{CD} = \sqrt{\overline{AD} \cdot \overline{BD}}$



4) در هر مثلث قایم الزاویه حاصل ضرب اضلاع قایم مساوی به حاصل ضرب وتر و ارتفاع رأس قایم آن مثلث می باشد، یعنی $a \cdot b = h \cdot c$

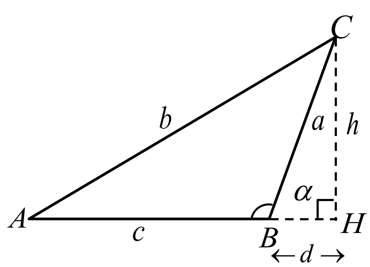


همچنان با در نظر قضیه فیساغورث و رابطه فوق می توان نوشت:

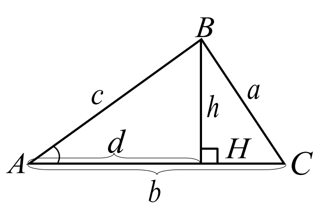
$$\left.\begin{array}{l} c^2 = a^2 + b^2 \ldots (1) \\ h^2 c^2 = a^2 \cdot b^2 \ldots (2) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{c^2}{h^2 \cdot c^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

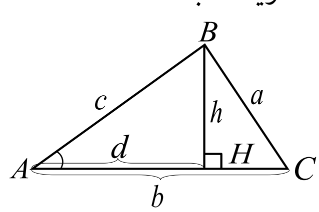
5) در هر مثلث منفرج الزاویه مربع ضلع مقابل زاویه منفرجه مساویست به:

$\hat{\alpha} > 90^\circ$



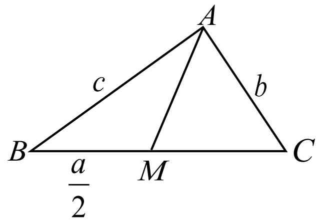
6) در هر مثلث مربع ضلع مقابل زاویه حاده مساویست به:





7) در هر مثلث مجموع مربعات هر دو مضلع آن مثلث مساوی به دو چند مجموع مربعات نصف ضلع سوم و میانه ضلع سوم می باشد.

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = 2\left(B\overline{M}^2 + A\overline{M}^2\right)$$

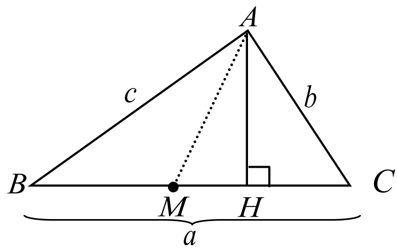


یعنی مربع میانه مساوی است به:

$$\overline{AM}^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

8) تفاضل مربعات دو ضلع یک مثلث مساوی به دو چند حاصل ضرب ضلع سوم و مرتسم میانه ضلع سوم است.

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = 2\overline{BC}\cdot\overline{MH}$$
$$\Rightarrow c^2 - b^2 = 2a\cdot\overline{MH}$$

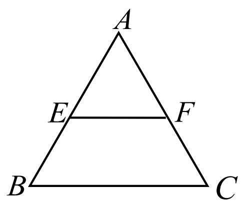


دعوی تالس

اگر یک خط موازی به یک ضلع مثلث ABC رسم گردد اضلاع مقابل را متناسباً تقسیم می نماید:

یعنی: $\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EB}$

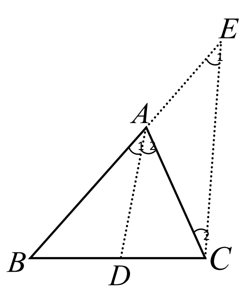
همچنان $\frac{AB}{AE} = \frac{AE}{AF} = \frac{EF}{BC}$



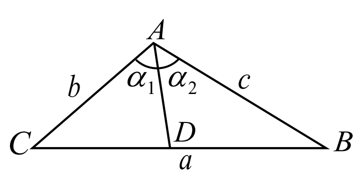
خواص ناصف زوایای یک مثلث

1 . ناصف الزوایای داخلی یک مثلث ضلع مقابل را داخلاً متناسب به نسبت اضلاع مجاور تقسیم می نماید، در حالیکه خط $\overline{AD}$ ناصف زاویه داخلی زاویه $\hat{A}$ مثلث $A\overset{\Delta}{B}C$ می باشد.

پس $\frac{BA}{AE} = \frac{BD}{DC}$

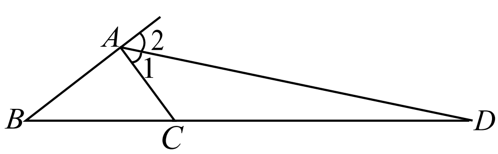


2 . طول ناصف الزاویه داخلی یک مثلث در حالیکه $\overline{AD}$ ناصف الزاویه $\hat{A}$ باشد، از رابطهٔ ذیل به دست می آید:

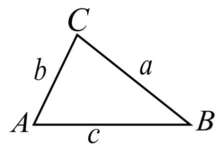


$$\alpha_1 = \alpha_2$$
$$P = \frac{a+b+c}{2}$$
$$\overline{AD} = \frac{2}{b+c}\sqrt{bc\cdot p(p-a)}$$

3 . ناصف الزاوایای خارجی یک مثلث $A\overset{\Delta}{B}C$ اضلاع مقابل را خارجاً به نسبت اضلاع مجاور تقسیم می کند، در حالیکه خط $\overline{AD}$ ناصف زاویه خارجی زاویه $\hat{A}$ مثلث $A\overset{\Delta}{B}C$ می باشد. پس $\frac{DC}{BD} = \frac{AC}{AB}$



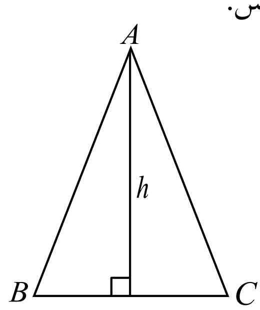
محیط مثلث: عبارت از مجموع طول اضلاع مثلث است، یعنی:



$$P = a + b + c$$

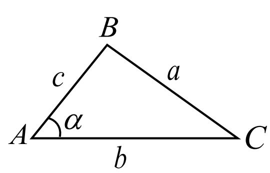
مساحت مثلث: عبارت از سطح است که توسط اضلاع مثلث محاط شده باشد، که در چهار حالت میتوان مساحت مثلث را دریافت نمود.

حالت اول: در صورتیکه طول قاعده و ارتفاع مثلث معلوم باشد، پس:



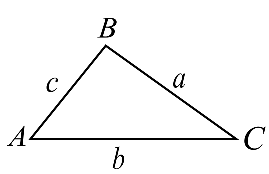
$$A = \frac{1}{2} a \cdot h$$

حالت دوم: در صورتیکه دو ضلع و زاویه بین این دو ضلع معلوم باشد، پس:



$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$$

حالت سوم:در صورتیکه طول سه ضلع مثلث معلوم باشد، در حالیکه $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ است، پس:



$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

با در نظر داشت حالت سوم مساحت مثلث متساوی الاضلاع $A = \dfrac{\sqrt{3}}{4} a^2$ و طول ارتفاع آن $h = \dfrac{\sqrt{3}}{2} a$ می باشد.

حالت چهارم: در صورتیکه مختصات رأس های یک مثلث $A(x_1 . y_1)$ ، $B(x_2 . y_2)$ و $C(x_3 . y_3)$ داده شده باشد، مساحت مثلث مذکور از رابطه ذیل حاصل می گردد:

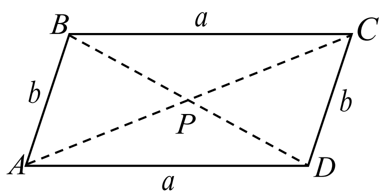
$$A = \frac{1}{2}\{(x_1 y_3 - x_3 y_1) + (x_2 y_1 - x_1 y_2) + (x_3 y_2 - x_2 y_3)\}$$

و یا با استفاده از دیترمینانت ذیل می توان چنین نوشت:

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left[\left(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1\right)-\left(y_1x_2+y_2x_3+y_3x_1\right)\right]$$

چهار ضلعی ها

مضلع که توسط چهار قطعه خط محدود شده باشد چهار ضلعی گفته می شود، هر چهار ضلعی دارای چهار ضلع، چهار رأس، چهار زاویه و دو قطر می باشد.



انواع چهار ضلعی ها:

I. **متوازی الاضلاع :** چهار ضلع است که اضلاع مقابل آن دو به دو با هم موازی باشند.

خواص متوازی الاضلاع:

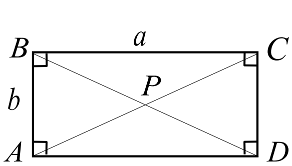
- اضلاع مقابل آن با هم مساوی اند. $\overline{AB}=\overline{CD}$ و $\overline{AD}=\overline{BC}$
- وسعت زوایای مقابل آن با هم مساوی اند. $\hat{B}=\hat{D}$ و $\hat{A}=\hat{C}$
- مجموعه زوایای داخلی آن مساوی به 360° می باشد. $\hat{A}=\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360^\circ$
- مجموعه زوایای مجاور آن مساوی به $\hat{A}+\hat{D}=180^\circ$, $\hat{C}+\hat{D}=180^\circ$, $\hat{A}+\hat{B}=180^\circ$
- قطرهای متوازی الاضلاع همدیگر را تنصیف می نمایند. یعنی:

$\overline{AP}=\overline{PC}$, $\overline{BP}=\overline{PD}$

- محیط متوازی الاضلاع عبارت از:

$P=2(a+b)$

II. **مستطیل:** عبارت از متوازی الاضلاع است که زوایای داخلی آن قایمه باشد.



خواص مستطیل:

1. طول اضلاع دو به دو با هم مساوی اند. یعنی

$\overline{AB}=\overline{CD}\quad,\quad \overline{AD}=\overline{BC}$

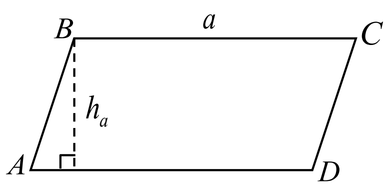
2. قطرهای مستطیل همدیگر را تنصیف می نماید. یعنی:

$\overline{AP}=\overline{PC}\quad,\quad \overline{BP}=\overline{PD}$

3. طول قطرهای مستطیل با همدیگر مساوی اند. یعنی:

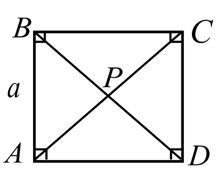
$\overline{AP}=\overline{BD}$

4. محیط مستطیل عبارت از: $P=2(a+b)$
5. مساحت مستطیل عبارت از: $A=a\cdot b$
6. طول قطر مستطیل عبارت از: $d=\sqrt{a^2+b^2}$
7. مساحت مستطیل عبارت از:



$A=b\cdot h_b$

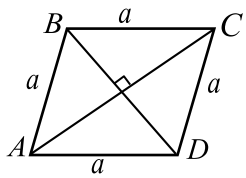
III. **مربع:** متوازی الاضلاع که طول آن با هم مساوی و زوایای داخلی آن قایمه باشد، مربع نامیده می شود.



خواص مربع:

- طول قطر های آن با هم مساوی اند. یعنی: $\overline{AC}=\overline{BD}$
- قطر ها بالای همدیگر عمود اند. یعنی: $\overline{AC}\perp\overline{BD}$
- قطرها یکدیگر را تنصیف می نماید. یعنی: $\overline{AP}=\overline{PC},\overline{BP}=\overline{PD}$
- محیط مربع عبارت از: $P=4a$
- مساحت مربع عبارت از: $A=a^2$
- طول قطر مربع عبارت از: $d=\sqrt{2}a$

IV. **معین (لوزی):** متوازی الاضلاع که طول تمام اضلاع آن با هم مساوی باشد، معین (لوزی) گفته می شود.

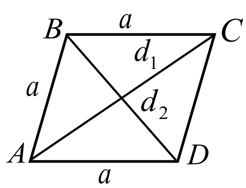


خواص معین:

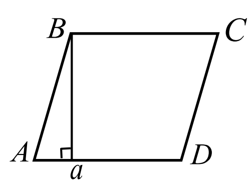
- اندازه زوایای مقابل آن با هم مساوی اند یعنی: $\hat{B}=\hat{D}$ و $\hat{A}=\hat{C}$
- مجموعه زوایای مجاور آن مساوی به 180° می گردد،یعنی:

$$\hat{A}=\hat{B}=180^\circ\ ,\hat{B}+\hat{C}=180^\circ\ ,\hat{C}+\hat{D}\ ,\hat{A}+\hat{D}=180^\circ$$

- قطر های همدیگر را تنصیف می نماید، یعنی: $\overline{BP}=\overline{PD}$ و $\overline{AP}=\overline{PC}$
- قطرهای بالای همدیگر عمود اند، یعنی: $\overline{AC}\perp\overline{BD}$
- محیط معین عبارت از: $P=4a$
- مساحت معین:



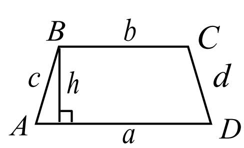
$A=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2$



$A=a\cdot h$

V. **ذوذنقه (منحرف):** عبارت از چهار ضلعی است که دو ضلع آن موازی و دو ضلع آن غیر موازی باشد.

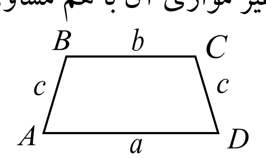
(بخاطر داشته باشید که اضلاع موازی را قاعدتین ذوذنقه هم می نامند)



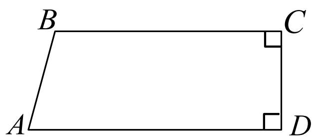
انواع ذوذنقه:

1. **ذوذنقه متساوی الساقین:** به ذوذنقه گفته می شود که طول دو ضلع غیر موازی آن با هم مساوی باشد.

مانند: $\overline{AB}=\overline{CD}$



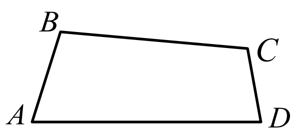
2. **ذوذنقه قایم:** ذوذنقه را گویند که دو زاویه داخلی آن قایمه باشد.



محیط ذوذنقه: در صورتیکه a,b,c و d طول اضلاع آن باشد، پس محیط آن $P=a+b+c+d$

مساحت ذوذنقه: در صورتیکه a,b قاعدتین ذوذنقه و h ارتفاع آن باشد، مساحت $A=\frac{1}{2}(a+b)\cdot h$

VI. **شبه منحرف:** عبارت از چهار ضلعی است که اضلاع آن با هم موازی نباشند.

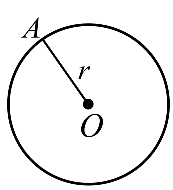


دایره

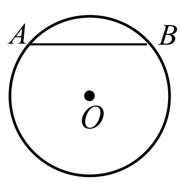
عبارت از خط منحنی بسته است که تمام نقاط آن از یک نقطه ثابت (مستقر) دارای فاصله مساوی باشد، نقطه ثابت (O) را مرکز دایره و فاصله ثابت (r) را شعاع می نامند.

شعاع دایره: فاصله بین مرکز الی محیط دایره شعاع دایره نامیده میشود.

$r=\overline{OA}$

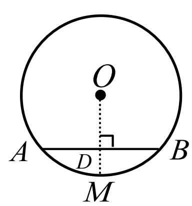


وتر دایره: خط مستقیمی که دو نقطه محیط دایره را با هم وصل نماید وتر دایره نامیده می شود.



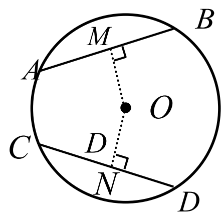
بخاطر داشته باشید که:

1. خط مستقیمی که از مرکز دایره بالای وتر عمود باشد، وتر و قوس آنرا بدو حصه مساوی تقسیم می نماید.

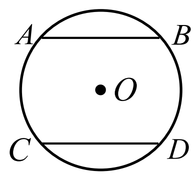


$\overline{AD}=\overline{DB}$ و $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MB}$

2. وتر های مساوی، از مرکز دایره دارای فاصله عمودی مساوی می باشند. اگر $\overline{AB}=\overline{CD}$ باشد، پس $\overline{OM}=\overline{ON}$ می باشد.

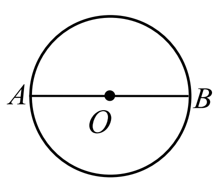


3. قوس های بین دو وتر موازی با همدیگر مساوی می باشند. اگر $\overline{AB}//\overline{CD}$ پس $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$ است.



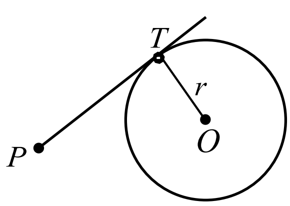
قطر دایره: خط مستقیم که دایره را تنصیف نماید قطر دایره نامید می شود و یا وتری که از مرکز دایره عبور نماید (

بزرگترین وتر) قطر دایره نامیده می شود، طوریکه قطر دایره دو چند شعاع دایره می باشد.



$$\overline{AB}=d$$
$$d=2r$$
$$r=\frac{d}{2}$$

مماس دایره: قطعه خط مستقیم که با دایره در یک نقطه تماس داشته باشد بنام مماس دایره یاد می گردد.



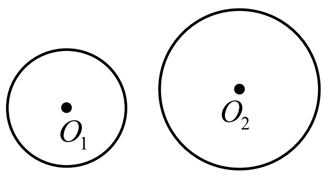
قابل یادآوری است اینکه:

1. شعاع دایره در نقطه تماس بالای مماس عمود می باشد.
2. هرگاه نقطه P خارج دایره قرار داشته باشد بر دایره مذکور دو مماس رسم می گردد (که طول مماس ها با هم مساوی اند)
3. هرگاه نقطه P روی محیط دایره قرار داشته باشد بر دایره مذکور یک مماس رسم می گردد.

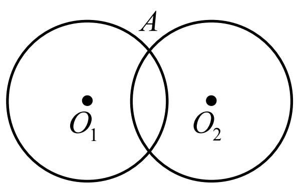
4. هرگاه نقطه P داخل دایره قرار داشته باشد بر دایره مذکور هیچ مماس رسم نمی گردد (خط مذکور دایره را در دو نقطه قطع می کند)

وضعیت دو دایره با همدیگر

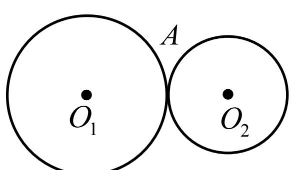
- **دو دایره غیر متقاطع:** به دوایر گفته می شود که هیچ نقطه مشترک نداشته باشند.



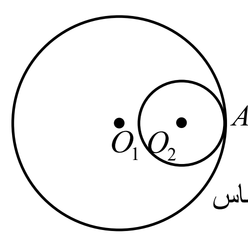
- **دوایر متقاطع:** به دایره های گفته می شود که دارای دو نقطه مشترک باشند.



- **دوایر با هم مماس:** به دوایر گفته می شود که تنها یک نقطه مشترک داشته باشند.

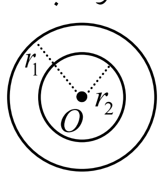


خارجاً مماس



داخلاً مماس

- **دوایر متحد المرکز:** به دوایر گفته می شود که مراکز آنها منطبق و طول شعاعات آنها متفاوت باشد.



یاداشت:

در صورتیکه: $C(O,R)$ و $C'(O',R')$

دو دوایر را ارائه نمایید، طوریکه: $R > R'$ و $d = OO'$

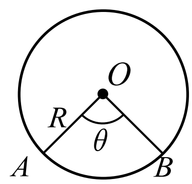
فاصلهٔ خط واصل مراکز دوایر را نشان می دهد، در اینصورت داریم که:

- دوایر غیر متقاطع اند اگر: $d > R + R'$
- دوایر متقاطع اند اگر: $\begin{cases} d < R + R' \\ d > R - R' \end{cases}$
- دوایر مماس خارجی اند اگر: $d = R + R'$

- دوایر مماس اند اگر: $d = R - R'$
- دوایر تداخل اند اگر: $d < R - R'$

زوایای مربوط به دایره

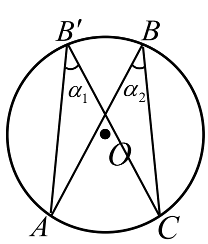
1) **زاویه مرکزی:** زاویه را گویند که رأس آن در مرکز دایره و دو ضلع آن در امتداد شعاع دایره باشد.



الف- اندازه وسعت هر زاویه مرکزی مساوی به قوس مقابل آن است.

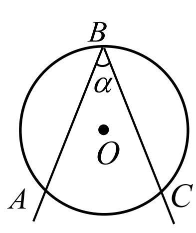
ب- طول قوس زاویه مرکزی از رابطه $\frac{\overset{\frown}{AB}}{P} = \frac{\hat{\theta}}{360^\circ}$ بدست می آید. (طوریکه P محیط دایره را نشان می دهد.)

2) **زاویه محیطی:** به زاویه گفته می شود که رأس آن در محیط دایره قرار داشته و اضلاع آن در امتداد وترهای دایره باشد.



بخاطر داشته باشید که:

الف- وسعت هر زاویه محیطی مساوی به نصف قوس مقابل که توسط آن قطع شده می باشد.

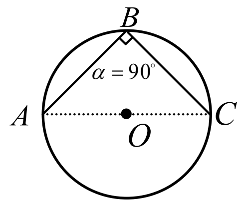


$$\hat{\alpha} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$$

ب- زوایای محیطی که در مقابل عین قوس دایره قرار داشته باشند. با هم مساوی اند.

$\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2$

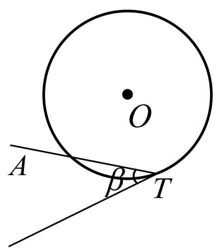
ج – زاویه محیطی که اضلاع آن از انجام های قطر دایره عبور نماید، یا به عباره دیگر در مقابل نصف محیط دایره قرار داشته باشد، مساوی به یک قایمه $\left(90^\circ\right)$ است.



3) **زاویه مماسی:** زاویه که یک ضلع آن مماس دایره و ضلع دیگر آن وتر دایره بوده و رأس آن در نقطه تماس قرار داشته باشد، زاویه مماسی گفته می شود.

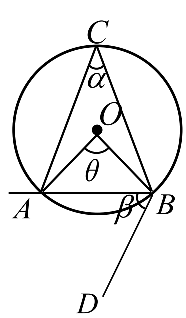
بخاطر داشته باشید که:

وسعت هر زاویه مماسی نصف قوس مقابل آن است. $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BT}$



رابطه بین زوایای محیطی، مرکزی و مماسی:

هرگاه زوایای محیطی، مرکزی و مماسی که در مقابل عین قوس دایره قرار داشته باشند بین آنها روابط ذیل وجود دار: طوریکه $\hat{\theta}$ زاویه مرکزی، $\hat{\alpha}$ زاویه محیطی و $\hat{\beta}$زاویه محیطی و $\hat{\beta}$ زاویه مماسی می باشد.



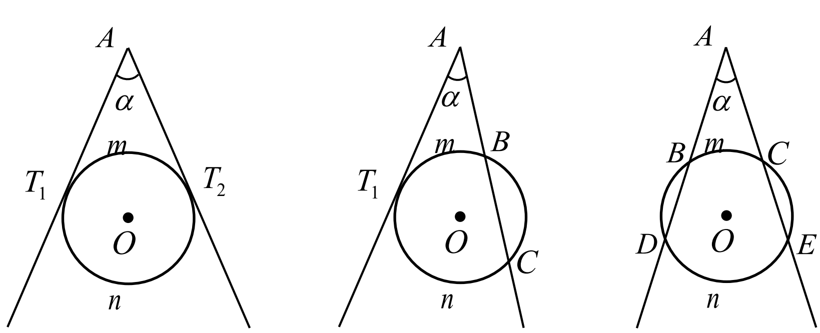
$$\theta = 2\alpha \Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{\theta}{2} \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

$$\theta = 2\beta \Rightarrow \hat{\beta} = \frac{\theta}{2} \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

$$\hat{\alpha} = \hat{\beta} \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (3)$$

زاویه خارجی یک دایره

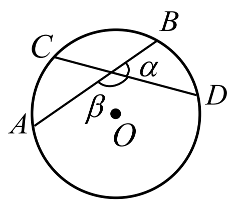
زاویه که از تقاطع دو مماس، با یک مماس و یک قاطع و یا دو قاطع بر دایره تشکیل می شود زاویه خارجی نامیده می شود:



به خاطر داشته باشید که در هر یک از حالت فوق اندازه زاویه خارجی مساوی است به نصف تفاضل قوس های که در مقابل آن زوایا قرار دارند. یعنی: $\hat{\alpha} = \frac{1}{2}(n-m)$

زاویه داخلی دایره

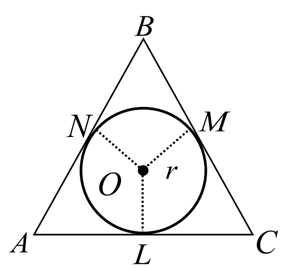
زاویه که از تقاطع دو تر در داخل یک دایره تشکیل می شوند زاویه داخلی آن دایره یاد می شوند. $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ زوایای داخلی دایره نامیده می شوند.



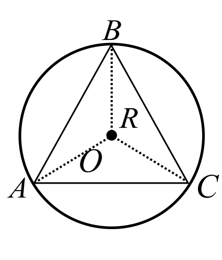
وسعت یک زاویه داخلی مساوی به نصف مجموع قوس های قطع شده توسط اضلاع و امتداد اضلاع همان زاویه است. یعنی:

$\hat{\alpha} = B\hat{E}D = \frac{1}{2}\left(B\overset{\frown}{D} + C\overset{\frown}{A}\right)$ و یا $\hat{\beta} = A\hat{E}D = \frac{1}{2}\left(A\overset{\frown}{D} + C\overset{\frown}{B}\right)$

دایره محاطی مثلث: عبارت از دایره است که توسط مثلث محاط گردیده باشد.



دایره محیطی مثلث: عبارت از دایره است که مثلث را احاطه نموده و رأس های مثلث بالای محیط دایره مذکور قرار داشته باشد.

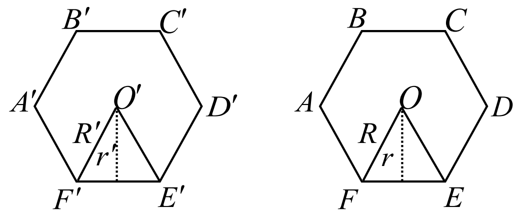


در صورتیکه s نصف محیط مثلث، A مساحت مثلث، r شعاع دایره محاطی و R شعاع دایره محیطی یک مثلث و a, b, c اضلاع مثلث را نشان دهد، در اینصورت:

- شعاع دایره محاطی $r = \frac{A}{s}$
- شعاع دایره محیطی $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4A}$

به همین ترتیب نسبت بین محیط های دو مضلع منظم که دارای عین تعداد اضلاع اند نسبت بین شعاعات دوایر محیطی و محاطی آن دو مضلع عبارت است از:

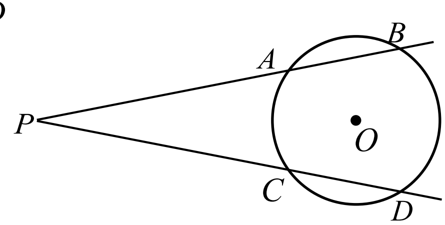
$$\frac{p}{p'}=\frac{R}{R'}=\frac{r}{r'}$$



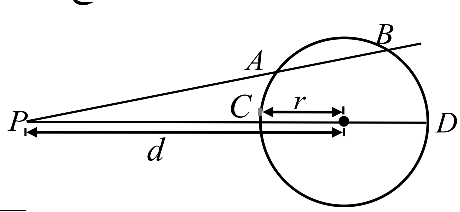
روابط طولی در دایره:

- هرگاه از یک نقطه خارجی P بالای دایره (o,r) دو قاطع رسم گردد، حاصل ضرب هر قاطع در قطعه خارجی آن با همدیگر مساوی است. یعنی

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$$



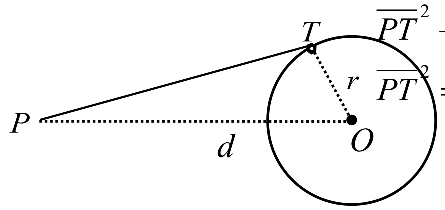
- **طاقت یک نقطه نظر به دایره:** اگر از یک نقطه ثابت در یک مستوی بالای یک دایره دو قاطع طوری رسم گردد که قاطع دومی از مرکز دایره بگذرد، در اینصورت حاصل ضرب قطعات قاطع اولی مساوی به یک مقدار ثابت d^2-r^2 بوده که d فاصله نقطه ثابت الی مرکز دایره و r شعاع دایره را نشان میدهد.یعنی:



$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$$
$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=(PO-CO)(PO+OD)$$
$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=(d-r)(d+r)$$
$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=d^2-r^2$$

رابطه اخیر را به نام طاقت یک نقطه P نظر به دایره (o,r) یاد می کنند. به همین ترتیب میتوان بر دایره یک مماس $\overline{PT}$ را رسم نموده، طوریکه فاصل نقطه P الی مرکز دایره d و شعاع دایره r باشد.

پس با در نظر داشت مثلث قایم الزاویه $P\overset{\Delta}{T}O$ میتوان چنین نوشت:



$$\overline{PT}^2 + r^2 = d^2$$
$$\overline{PT}^2 = d^2 - r^2$$

پس بطور عموم می توان طاقت نقطه P را نظر به دایره (o,r) چنین نوشت:

$$\overline{PT}^2 = \overline{PA}\cdot\overline{PB} = \overline{PC}\cdot\overline{PD} = d^2 - r^2$$

پس نظر به موقعیت نقطه P با دایره (o,r) سه حالت ذیل وجود دارد.

الف- هرگاه نقطه P خارج دایره قرار داشته باشد، در این صورت:

$$d > r \Rightarrow d^2 - r^2 > 0 \Rightarrow P(0) > 0$$

یعنی طاقت نقطه نظر به دایره مثبت گفته می شود.

ب- هرگاه نقطه P روی محیط دایره قرار داشته باشد در اینصورت:

$$d = r \Rightarrow d^2 - r^2 = 0 \Rightarrow P(0) = 0$$

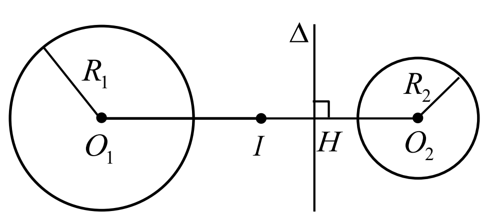
یعنی طاقت نقطه نظر به دایره صفر می باشد.

ج- هرگاه نقطه P داخل دایره قرار داشته باشد، در اینصورت:

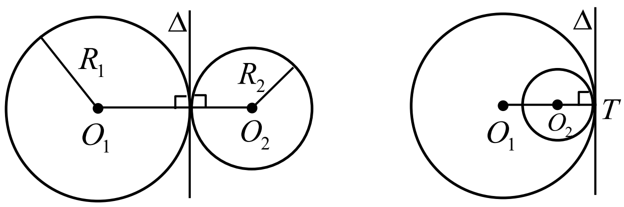
$$d > r \Rightarrow d^2 - r^2 < 0 \Rightarrow P(0) < 0$$

محور جذری: عبارت از محل هندسی نقاطی است که طاقت های آنها نظر به دو دایره با هم مساوی باشند محور جذری نامیده می شود. بخاطر داشته باشید که محور جذری دو دایره همیشه بالای خط و اصل مراکز دوایر عمود می باشد.

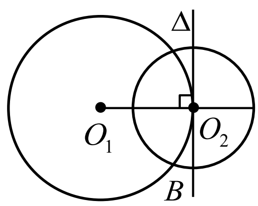
- هرگاه دوایر غیر متقاطع باشند، محور جذری بالای خط مرکزین دوایر عمود بوده طوریکه دوایر داده شده را قطع نمی کنند و همچنان فاصله بین محور جذری از نقه تنصیف خط مرکزین دوایر از رابطه ذیل بدست می آید.



- محور جذری دو دایره با هم مماس عبارت از مماس مشترک آنها می باشد.



- محور جذری دو دایره متقاطع عبارت از وتر مشترک دوایر مذکور می باشد.

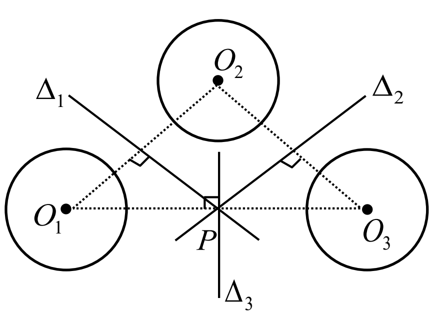


- محور جذری دو دایره متحدالمرکز در بی نهایت قرار دارد، زیرا فاصله $O_1O_2 = 0$ گردیده در نتیجه فاصله بین محور جذری و نقطه تنصیف مرکزین دوایر نظر به رابطه بدست می آید.

$$IH = \frac{R_1^2 - R_2^2}{2O_1O_2}$$

$$IH = \frac{R_1^2 - R_2^2}{2(0)} = \frac{R_1^2 - R_2^2}{O} = \infty$$

مرکز جذری: هرگاه بیشتر از دو دوایر که نه متقاطع و نه مماس اند، موجود بوده نقطه مانند P که طاقت آن نظر به دوایر داده شده با هم مساوی باشند، یعنی نقطه تقاطع محورهای جذری دوبدو دوایر عبارت از مرکز جذری دوایر یاد می گردد.



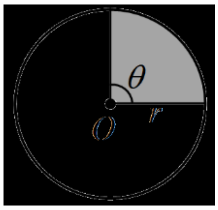
محیط دایره: در صورتیکه r طول شعاع دایره باشد محیط دایره از رابطه ذیل بدست می آید.

$$P = 2\pi r$$

مساحت دایره: در صورتیکه r طول شعاع دایره را نشان میدهد، مساحت دایره از رابطه ذیل بدست می آید.

$A = \pi r^2$

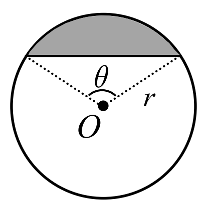
مساحت قطاع دایره: قسمت از سطح دایره که توسط دو شعاع از دایره جدا شده باشد قطاع دایره گفته می شود که مساحت آن از رابطه ذیل بدست می آید.



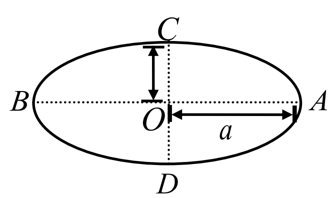
$$A = \frac{\pi \cdot \theta \cdot r^2}{360} \quad \text{و یا} \quad A = \frac{1}{2}\theta \cdot r^2$$

مساحت قطعه دایره: قسمت از سطح دایره که توسط وتر از دایره جدا شده باشد قطعه دایره نامیده می شود که مساحت آن از رابطه ذیل حاصل می گردد.

$$S = \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin\theta)$$



یاداشت: بخاطر داشته باشید در صورتیکه a و b نصف اقطار یک بیضوی (الیپس) را ارائه نماید، محیط الیپس از روابط ذیل بدست می آید.

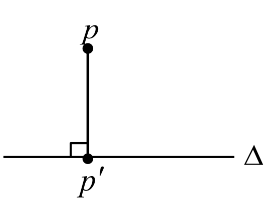


ارتسام قایم:

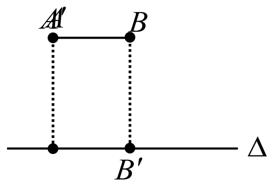
مستقیم Δ را با یک نقطه P خارج این مستقیم در نظر گرفته هرگاه از نقطه عمود pp' را بالای مستقیم Δ (یک مستوی) رسم نماییم، درینصورت p' عبارت از مرتسم قایم p میباشد.

به خاطر داشته باشید که:

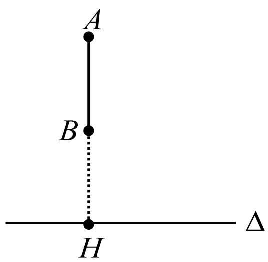
- مرتسم یک نقطه بالای یک مستقیم (مستوی) یک نقطه است.



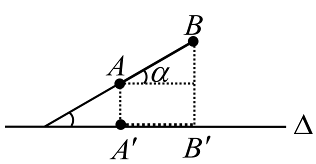
- مرتسم یک قطعه خط که موازی به Δ باشد عبارت از یک مستقیم است طوریکه: $\overline{A'B'} = \overline{AB}$



- مرتسم یک قطعه خط که عمود به Δ باشد عبارت از یک نقطه است طوریکه: $\overline{AB}$



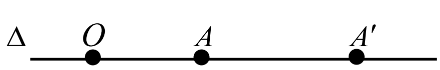
- مرتسم یک قطعه خط که یک انجام آن بروی مستقیم Δ باشد. $A'B' = \overline{AB} \cdot \cos\alpha$



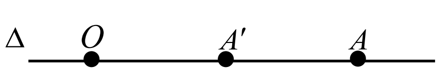
تماثل

بالای خط مستقیم موجه Δ نقاط مستقر O و A را تعیین نموده و یک عدد ثابت $h \neq 0$ را نیز در نظر می گیریم. هرگاه h را به طول OA ضرب نمایم یک طول OA' قرار رابطه $OA' = h \cdot OA$ حاصل می شود. در این صورت عملیه نقطه O را مرکز تماثل و h را نسبت تماثل می نامند.

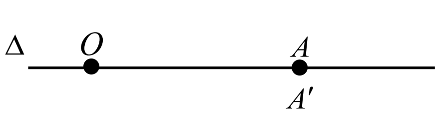
نظر به قیمت های مختلف h موقعیت نقطه OA واقع است.



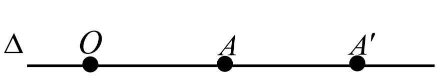
- اگر $h = \frac{1}{2}$ باشد نقطه A' در وسط OA واقع است.



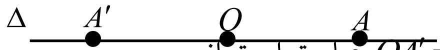
- اگر $h = 1$ باشد نقطه A'بروی A واقع می شود.



- اگر $h = 2$ باشد نقطه A در وسط OA واقع می شود.



- اگر $h=-1$ باشد نقطه A' مساوی و مختلف الجهت A می گردد.



به خاطر داشته باشید که ممثله هر شکل هندسی نظر به رابطه $OA'=h\cdot OA$ عبارت است از.

- ممثله یک نقطه A نظر به تماثل (O,h) عبارت از یک نقطه است.
- ممثله هر خط مستقیم عبارت از یک خط مستقیم است موازی به مستقیم اولی.
- ممثله یک مثلث عبارت از یک مثلث است متشابه به مثلث اولی.
- ممثله یک دایره، یک دایره است. طوری که هر دوی آنها در یک مستوی واقع باشند.

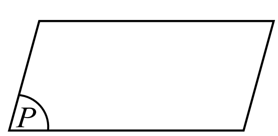
هندسه فضائی

به قسمت از علم هندسه گفته می شود که با مستوی ها، خصوصیات آنها، قضایای مربوط و روابطی که بین اشکال و اجسام هندسی از فضا وجود دارد، بحث می نماید. این هندسه را میتوان سه بعدی نیز تعریف نمود که اساس گذار آن اقلیدوس می باشد.

فضاء از جمله مفاهیم اولیه هندسی بوده که می توان فضا را به حیث مجموعه نقاط قبول نمود.

فضا سه بعدی: به آن فضائی گفته می شود که در آن زندگی می نمایم و اجسام جامد که دارای سه بعد (طول، عرض و ضخامت) اند، در آن مورد مطالعه قرار می گیرد.

مستوی: مستوی نیز از جمله مفاهیم اولیه هندسی بوده که می توان به یک سطح هموار که فقط دو بعد آن یعنی طول و عرض مورد مطالعه باشد، اطلاق نمود. مانند: سطح آب، تخته صنف و غیره مستوی نامید. مانند مستوی P



بخاطر داشته باشید که هر مستوی فضا را بدو حصه تقسیم می نماید.

حالات تعین یک مستوی:

- یک مستوی توسط سه نقطه که به امتداد یک خط مستقیم واقع نباشند تعیین می گردد.
- یک مستوی توسط یک خط مستقیم و یک نقطه بشرط آنکه نقطه در امتداد خط مستقیم واقع نباشد تعیین می گردد.
- یک مستوی توسط دو قطعه خط مستقیم متقاطع تعیین گردیده می تواند.
- یک مستوی توسط دو قطعه خط موازی تعیین گردیده می تواند.

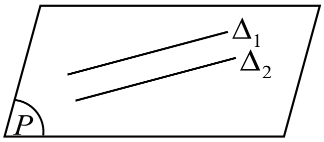
نظر به عکس حالات فوق می توان گفت که:

- یک نقطه بی نهایت مستوی ها را تعیین می نماید.
- دو نقطه بی نهایت مستوی ها را تعیین می نماید.
- چندین نقاط که به امتداد یک خط مستقیم واقع باشند بی نهایت مستوی ها را تعیین می نماید.
- یک قطعه خط مستقیم بی نهایت مستوی ها را تعیین نموده می تواند.

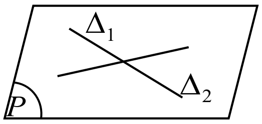
حالات نسبی دو خط مستقیم در یک مستوی نظر به یکدیگر در فضا:

هرگاه دو خط مستقیم Δ_1 و Δ_2 در یک مستوی در فضا موجود باشند حالات ذیل امکان پذیر است.

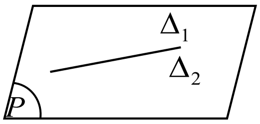
- خطوط موازی اند در صورت که هیچ نقطه مشترک نداشته باشند.



- خطوط متقاطع اند در صورتیکه یک نقطه مشترک داشته باشند.



- خطوط منطبق اند در صورتیکه اقلاً دو نقطه مشترک داشته باشند.

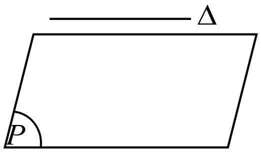


خطوط متنافر (سیاری): دو خط مستقیم که در فضا شامل دو مستوی زمانی متنافر (سیاری) گفته می شوند که با هم هیچ ارتباط نداشته باشند یعنی نه موازی، نه متقاطع و نه منطبق باشند.

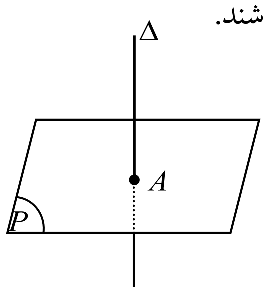
حالات یک مستقیم و یک مستوی در فضا:

هر یک مستقیم Δ و یک مستوی P را در فضا در نظر بگیریم بین آنها سه حالت ذیل وجود دارد:

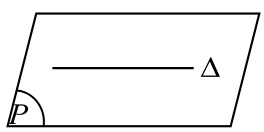
- خط مستقیم با مستوی موازی گفته می شود زمانیکه هیچ نقطه مشترک نداشته باشند.



- خط مستقیم را مستوی متقاطع گفته می شود زمانیکه آنها یک نقطه مشترک داشته باشند.

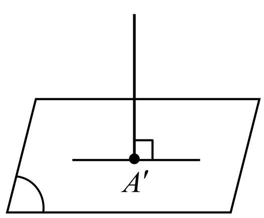


- خط مستقیم با مستوی منطبق گفته می شود وقتی تمام نقاط مستقیم شامل مستوی باشد.



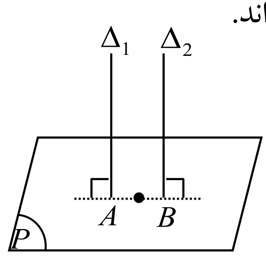
حالات خصوصی مستقیم با مستوی:

الف – از یک نقطه فضا بالای مستوی فقط یک عمود رسم شده می تواند.

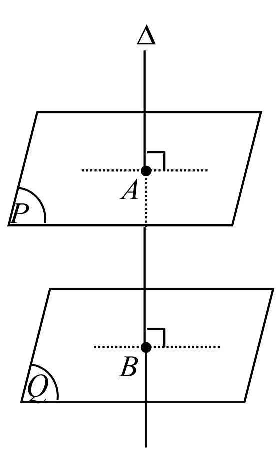


ب – هرگاه دو خط مستقیم در یک مستوی عمود باشد، مستقیم ها با هم موزی اند.

$$\left.\begin{array}{l}\Delta_1 \perp P\\ \Delta_2 \perp P\end{array}\right. \Rightarrow \Delta_1 // \Delta_2$$



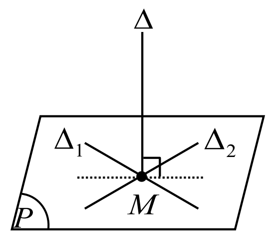
ج – هرگاه یک خط مستقیم به طور همزمان بالای دو مستوی غیر منطبق عمود باشد، مستوی های مذکور با همدیگر موازی می باشند.



$$\left.\begin{array}{l}\Delta_1 \perp P\\ \Delta_2 \perp Q\end{array}\right. \Rightarrow P // Q$$

د – هرگاه یک مستقیم با دو مستقیم متقاطع شامل یک مستوی عمود باشد، مستقیم مذکور بالای خود مستوی نیز عمود می باشد.

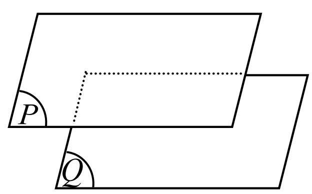
$$\left.\begin{array}{l}\Delta \perp \Delta_1\\ \Delta \perp \Delta_2\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta // P$$



حالات دو مستوی در فضا:

دو مستوی P، Q را در فضا در نظر گرفته حالات ذیل وجود دارد:

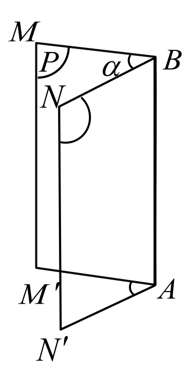
- دو مستوی با هم موازی اند وقتی هیچ نقطه مشترک نداشته باشند.



- دو مستوی با هم متقاطع اند زمانیکه اقلاً یک نقطه مشترک داشته باشند، که همیشه تقاطع دو مستوی یک خط مستقیم می باشد مانند AB که بنام فصل مشترک مستوی ها یاد می گردد. به همین ترتیب زاویه که در این حالت بین مستوی های مذکور تشکیل می گردد بنام زوایای دو وجهی یاد می گردد که با هم مساوی اند. یعنی:

فصل مشترک مستوی ها $\overline{AB}$

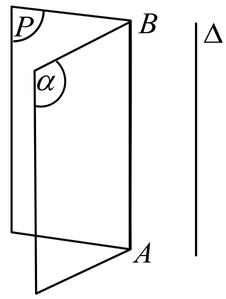
$M\hat{B}N = M\hat{A}N = \alpha$ زوایای دو وجهی مستوی ها می باشد.



بخاطر داشته باشید که

هرگاه یک مستقیم به هر یک از دو مستوی متقاطع موازی باشد، مستقیم مذکور به فصل مشترک مستوی ها نیز موازی می باشد.

$$\left.\begin{array}{l}\Delta \perp P \\ \Delta \perp Q\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta // \overline{AB}$$



- دو مستوی با هم منطبق گفته می شوند وقتی که تمام نقاط آنها با هم مشترک باشند، با نقاط آنها شامل یکدیگر باشند.

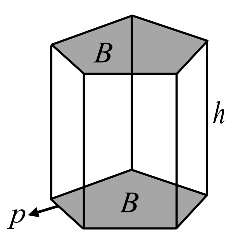
منشور: عبارت از جسم جامد هندسی است که توسط سطح منشوری و و مستوی متوازی که با خط الرأس های سطح منشوری موازی نباشد، محدود گردیده باشد.

در صورتیکه P محیط قاعده h ارتفاع خط الرأس، B مساحت سطح قاعده منشور را ارائه نمائید، پس داریم که:

مساحت جانبی $S = p \cdot h$

مساحت کلی $A = S + 2B$

حجم $V = B \cdot h$



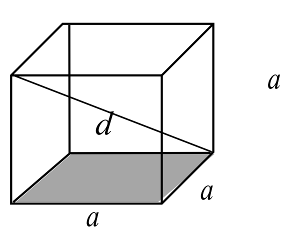
مکعب: عبارت از منشوری قائیم است که وجود آن مربعات باشد، یا به عباره دیگر منشوری منظم چهار ضلعی القاعده که تمام وجود آن انطباق پذیر باشد، مکعب نامیده می شود.

مساحت جانبی $S = 4a^2$

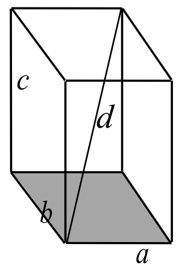
مساحت کلی $A = 6a^2$

حجم $V = a^3$

قطر $d = \sqrt{3} \cdot a$



معکب مستطیل: عبارت از منشور قایم که وجوه آن مستطیل ها باشد، مکعب مستطیل نامیده می شود یا به عباره دیگر هرگاه وجود یک منشور دوبدو با هم انطباق پذیر باشد، مکعب مستطیل نامیده می شود.



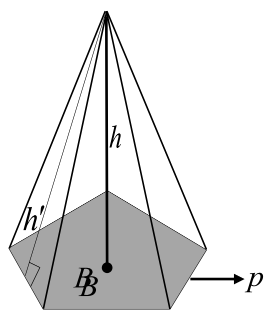
مساحت جانبی $S = 2(bc+ac)$

مساحت کلی $S = 2(ab+bc+ac)$

حجم $V = a\cdot b\cdot c$

قطر $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

هرم: هرگاه یک ساحه چند ضلعی B در یک مستوی P و یک نقطه S فضا که خارج مستوی P موجود باشد، هرم با قاعده B و رأس S عبارت از اتحاد تمام خطوط مربوط ساحهٔ B می باشد. هر وجه یک هرم مثلث بوده طوریکه ارتفاع مثلث (h') ارتفاع جانبی هرم و خط که از رأس هرم بالای قاعده آن عمود باشد. (h) عبارت از ارتفاع هرم نامیده می شود.



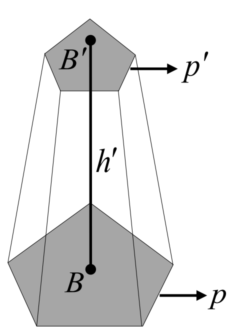
مساحت جانبی $S=\frac{1}{2}p\cdot h'$

مساحت کلی $A=S+B$

حجم $S=\frac{1}{3}B\cdot h$

هرم ناقص:

هرگاه یک هرم توسط مستوی موازی با قاعده قطع گردد، حجم حاصله عبارت از هرم ناقص می باشد. در صورتیکه h ارتفاع هرم و k ارتفاع مقطع هرم از رأس و B مساحت قاعدهٔ هرم و B' مقطع هرم. به همین ترتیب P محیط قاعده و P' محیط قاعدهٔ مقطع هرم، l' ارتفاع جانبی هرم ناقص و h' ارتفاع قایم هرم ناقص را نشان دهد.



پس روابط ذیل وجود دارد: $h'=h-k$ و $\frac{B'}{B}=\frac{k^2}{h^2}$ است:

مساحت جانبی $S=\frac{1}{2}(P+P')\cdot l'$

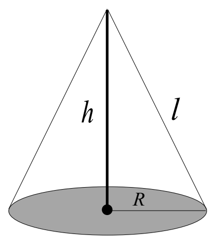
مساحت کلی $A=S+B+B'$

حجم هرم ناقص $V=\frac{h'}{3}\left(B+B'+\sqrt{B\cdot B'}\right)$

مخروط: هرگاه یک دایره (O) شامل مستوی P و یک نقطه S فضا خارج مستوی p موجود باشد، تمام خطوط مستقیم که از نقطه S به شامل سطح دایره در مستوی P بوجود می آید، مخروط نامیده می شود.

یا به عباره دیگر، هرگاه اضلاع مضلع قاعده یک هرم به بی نهایت تقرب نماید، مخروط حاصل می گردد.

در صورتیکه l ارتفاع جانبی (مولد) مخروط و h ارتفاع قایم و R شعاع قاعده مخروط را نشان دهد، پس داریم که:

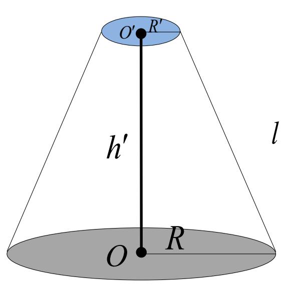


$$S = \pi R \cdot l$$
$$A = \pi R(l + R)$$
$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h$$

مخروط ناقص:

هرگاه یک مخروط توسط مستوی موازی به قاعده قطع گردد، مخروط ناقص بوجود می آید.

در حالیکه R شعاع دایره مخروط، R' شعاع دایره مقطع، l' ارتفاع جانبی، h' ارتفاع قایم مخروط ناقص، k ارتفاع قایم مقطع مخروط از رأس و h ارتفاع قایم مخروط را نشان دهد، پس روابط ذیل وجود دارد:



$$\frac{B'}{B} = \frac{k^2}{h^2} \Rightarrow \frac{\pi R'^2}{\pi R^2} = \frac{k^2}{h^2} \Rightarrow \frac{R'}{R} = \frac{k}{h} \quad \text{و} \quad h' = h - k$$

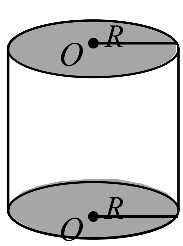
مساحت جانبی $\quad S = \pi(R + R') \cdot l'$

مساحت کلی $\quad A = S + B + B'$

$$A = [\pi(R + R') \cdot l' + R^2 + R'^2]$$

حجم مخروط ناقص $\quad V = \frac{1}{3}\pi h'(R^2 + R'^2 + RR')$

استوانه: هرگاه اضلاع مضلعات یک منشور به بی نهایت تقرب نماید، حجم شکل بدست آمده استوانه نامیده می شود. (درحالیکه R شعاع قاعده و h ارتفاع استوانه را نشان دهد، داریم که:

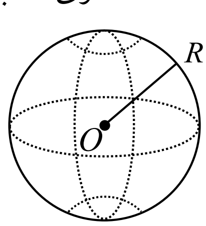


مساحت جانبی $\quad S = 2\pi R \cdot h$

مساحت کلی $\quad A = 2\pi R(h + R)$

حجم $\quad A = \pi R^2 \cdot h$

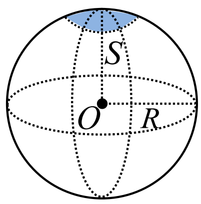
کره: کره عبارت از ست تمام نقاط فضا است که فاصله آنها از نقطه O دارای فاصله مساوی R باشد.



مساحت سطح کره $\quad A = 4\pi R^2$

حجم کره $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

و مساحت مقطع یک کره $A'=\pi R^2-\pi S^2$



هندسه تحلیلی

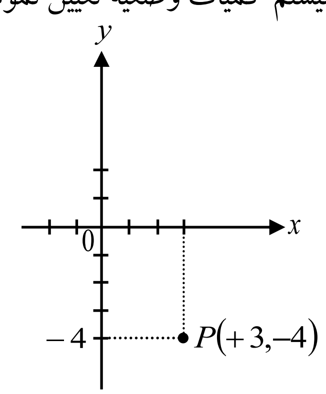
بخش از علم هندسه بوده که عبارت از علم ارتباط بین الجبر و هندسه است، طوریکه برای معادله الجبری شکل هندسی را بیان کند و برای هر شکل هندسی یک معادله الجبری را معین می سازد، که اساس گذار این هندسه عالم فرانسوی بنام دیکارت می باشد.

سیستم کمیات وضعیه قایم:

دو خط مستقیم به همدیگر عمود، که در هر کدام شان جهت های مثبت و منفی را تعیین می نماید و این مستقیم ها مستوی سطح را به چهار ناحیه تقسیم می نمایند به نام سیستم کمیات ناحیه قایم یاد می گردد.

می توان موقعیت هر نقطه مستوی را به وسیله جوره های مرتب $P(x,y)$ روی سیستم کمیات وضعیه تعیین نمود.

مثلاً موقعیت نقطه $P(+3,-4)$ عبارت از:



فاصله بین دو نقطه: در صورتیکه $P(x_1,y_1)$ و $P_2(x_2,y_2)$ معین باشد، فاصله بین آنها عبارت از:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

تقسیم یک قطعه خط به نسبت $\frac{m}{n}$: در حالیکه قطعه خط مستقیم که مختصات انجام های آن $P_1(x_1,y_1)$ و $P(x,y_2)$ باشد و آنرا داخلاً به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم نمایم مختصات نقطه P عبارت از:

$$p\left(x=\frac{nx_1+mx_2}{n+m},\,y=\frac{ny_1+my_2}{n+m}\right)$$

به خاطر داشته باشید اگر خط مذکور جارجاً تقسیم گردد نسبت مذکور $-\dfrac{m}{n}$ می گردد.

مختصات نقطه تنصیف قطعه خط: در صورتیکه $m=n$ باشد قطعه خط مستقیم که انجام های آن $P_1(x_1,y_1)$ و $P_2(x_2,y_2)$ باشد، پس مختصات آن عبارت از:

$$p\left(x=\frac{x_1+x_2}{2}, y=\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

میل خط مستقیم که انجام های آن داده شده باشد: قطعه خط مستقیمی که انجام های آن $P_1(x_1,y_1)$ و $P_2(x_2,y_2)$ باشد، میل خط مذکور از رابطه ذیل بدست می آید.

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

همچنان قابل یاد آوریست که:

$$m=\tan\theta$$

معادلات خط مستقیم و شرایط مربوط آن: شکل عمودی معادله خط مستقیم عبارت از: $y=mx+b$ و $Ax+by+C=0$ بوده، در صورتیکه $\begin{cases} y=m_1x+b_1 \\ y=m_2x+b_2 \end{cases}$ یا $\begin{cases} A_1x=B_1y+C_1=0 \\ A_2x=B_2y+C_2=0 \end{cases}$ سیستم معادلات خط مستقیم را ارائه نماید، داریم که:

- **شرط موازات:**

$$b_1\neq b_2 \text{ و } m_1=m_2 \text{ یا } \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_1}$$

- **شرط متقاطع (عمودیت)**

متقاطع $\quad b_1=b_2$ و یا $b_1\neq b_2 \ , \ m_1\neq m_2$

شرط عمودیت $\quad m_1=-\dfrac{1}{m_2}$ و یا $m_1\cdot m_2=-1$

متقاطع $\quad \dfrac{A_1}{A_2}\neq\dfrac{B_1}{B_2}$

شرط عمودیت $\quad A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2=0$

- **شرط منطبق بودن**

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \text{ یا } b_1=b_2 \text{، } m_1=m_2$$

دریافت معادلات خط مستقیم: بطور عموم در سه حالت ذیل معادله خط مستقیم را دریافت نمود.

- یک نقطه $P(x_1, y_1)$ و میل (m) معلوم باشد، معادله آن عبارت از:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

- دو نقطه آن $P(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ معلوم باشد، معادله آن عبارت از:

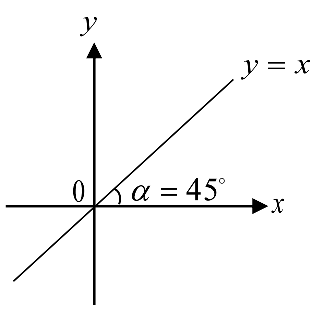
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- تقاطع به محورات x به اندازه a و y به اندازه b معلوم باشد، معادله آن عبارت از:

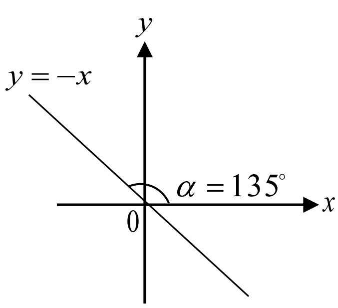
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

حالات خصوصی معادله خط مستقیم:

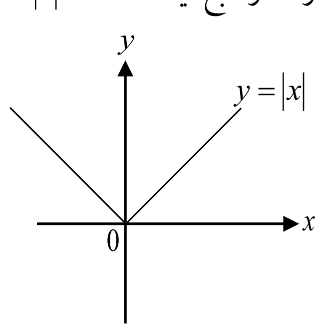
- معادله خط مستقیم که ناصف ناحیه اول و سوم کمیات وضعیه قرار داشته باشد عبارت از: $y = x$



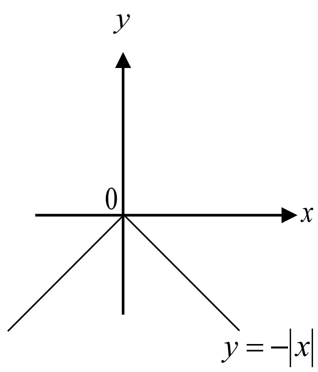
- معادله خط مستقیم که ناصف ناحیه دوم و چهارم کمیات وضعیه قرار داشته باشد عبارت از: $y = -x$



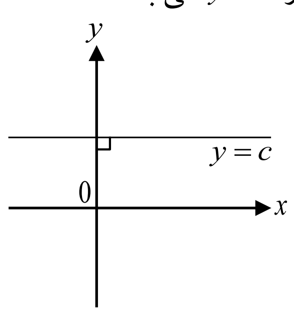
- معادله خط مستقیم که ناصف ناحیه اول و دوم کمیات وضعیه قرار داشته باشد عبارت از تابع قیمت مطلقه $y = |x|$ می باشد.



- معادله خط مستقیم که ناصف ناحیه سوم و چهارم کمیات وضعیه قرار داشته باشد عبارت از تابع قیمت مطلقه $y=-|x|$ می باشد.

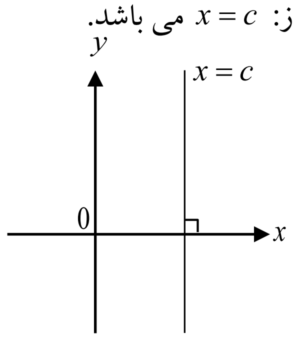


- معادله خط مستقیم که موازی با محور x (عمود با محور y) باشد عبارت از $y=c$ می باشد.



با در نظر داشت معادله فوق معادله محور x عبارت از $y=0$ می باشد.

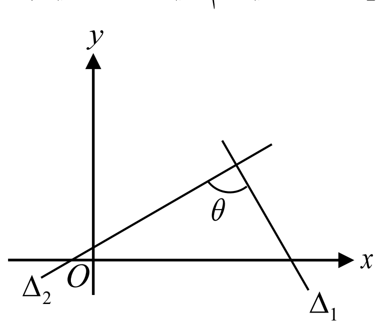
- معادله خط مستقیم که موازی با محور y (عمود با محور x) باشد عبارت از: $x=c$ می باشد.



با در نظر داشت معادله فوق معادله محور y عبارت از $x=0$ می باشد.

زاویه بین دو خط مستقیم: در صورتیکه مستقیم Δ_1 و Δ_2 روی سیستم کیمات وضعیه با هم تحت زاویه θ متقاطع باشند، زاویه بین آنها از رابطه ذیل بدست می آید.

$$\tan\theta=\frac{m_2-m_1}{1+m_1+m_2}$$

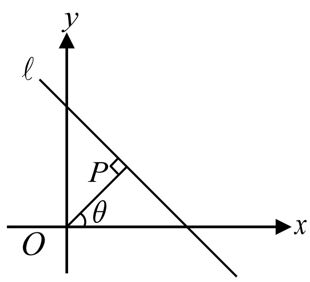


فاصله عمودی یک نقطه از یک خط مستقیم: فاصله عمودی بین نقطه $P(x_1, y_1)$ از خط مستقیم $Ax+By+C=0$ از رابطه ذیل به دست می آید:

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

معادله نارمل خط مستقیم: در صورتیکه معادله یک خط مستقیم l بوده و این خط از مبدأ کمیات وضعیه عمودی P و زاویه میل این فاصله θ باشد. پس معادله نارمل خط مستقیم عبارت از:

$$x\cdot\cos\theta+y\sin\theta-P=0$$



تبدیل معادله خط مستقیم به شکل نارمل:

هرگاه شکل عمومی معادله خط $Ax+By+C=0$ را به شکل نارمل تبدیل نمایم از رابطه ذیل استفاده می نمایم.

$$\frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{By}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\pm\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

مثلاً معادله $-x+y-3=0$ را به شکل نارمل تبدیل نمایید.

$$\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{(-1)^2+(1)^2}=\sqrt{2}$$

$$\frac{-1x}{+\sqrt{2}}+\frac{1y}{+\sqrt{2}}-\frac{3}{+\sqrt{2}}=0$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}x+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}y-\frac{3}{+\sqrt{2}}=0$$

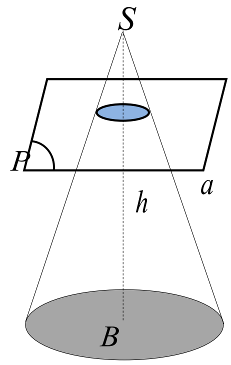
$$\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2},\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2},\theta=135^\circ$$

$$\cos135\cdot x+\sin135\cdot y-\frac{3}{\sqrt{2}}=0$$

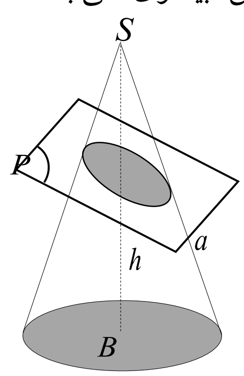
متقاطع مخروطی

هرگاه یک مستوی P را با یک مخروط با قاعده B ارتفاع قایم (محور اصلی) h مولد a و رأس S در نظر بگیریم مستوی مذکور می تواند مخروط را در حالات ذیل قطع نماید.

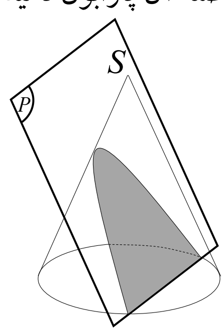
- هرگاه مستوی مخروط را موازی با قاعده آن قطع نماید یا به عبارهٔ دیگر عمود به محور اصلی قطع حاصله آن دایره می باشد.



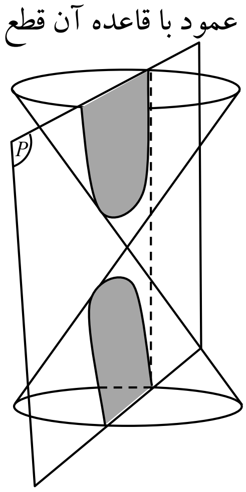
- هرگاه مستوی مخروط را مایل به محور اصلی قطع نماید قطع حاصله آن الیپس (بیضوی) می باشد.



- هرگاه مستوی مخروط از موازی به مولد (ارتفاع جانبی) آن قطع نماید قطع حاصله آن پارابول نامیده می شود.



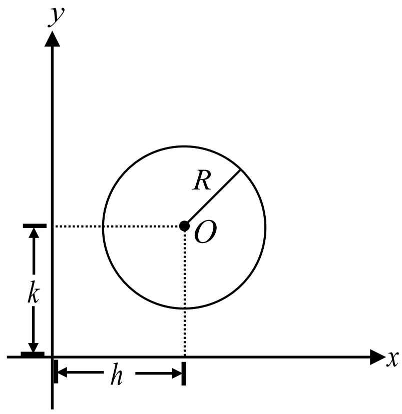
- هرگاه دو مخروط دارای رأس های منطبق و قاعدتین موازی باشد و توسط مستوی عمود با قاعده آن قطع گردد، های پارابول نامیده می شود.



دایره: محل هندسی نقاط که از یک نقطه معین دارای فاصله مساوی باشد دایره نامیده می شود.

معادلات دایره: در حالیکه $o(h,k)$ مرکز و R شعاع دایره باشد. معادله معیاری از دایره عبارت از:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=R^2$$



حالات خصوصی معادله دایره:

- اگر دایره با محور x مماس باشد: در این صورت $|k|=R$ گردیده و معادله دایره عبارت از:
$$(x-h)^2+(y-R)^2=R^2$$
- اگر دایره با محور y مماس باشد: در این صورت $|h|=R$ گردیده و معادله دایره عبارت از:
$$(x-R)^2+(y-k)^2=R^2$$
- اگر دایره با هر دو محور مماس باشد: در این صورت $|k|=|h|=R$ گردیده و معادله دایره عبارت از:
$$(x-R)^2+(y-R)^2=R^2$$
- اگر مرکز دایره بالای محور x باشد: در این صورت $k=0$، گردیده و معادله دایره عبارت از:
$$(x-h)^2+y^2=R^2$$
- اگر مرکز دایره بالای محور y باشد: در این صورت $h=0$، گردیده و معادله دایره عبارت از:
$$x^2+(y-k)^2=R^2$$
- اگر مرکز دایره بالای مبدأ کمیات وضعیه باشد: در این صورت $h=k=0$ گردیده و معادله دایره عبارت از:
$$x^2+y^2=R^2$$

یادداشت: شرط عبور دایره از مبدأ کمیات وضعیه عبارت است از: $h^2+k^2=R^2$

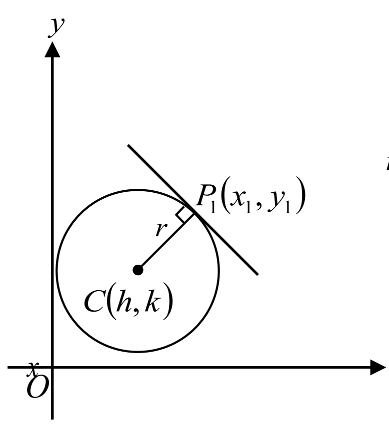
معادله انکشاف یافته دایره: هرگاه معادله معیاری دایره انکشاف داده شود معادله انکشاف یافته ذیل بدست می آید: $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$ معادله فوق زمان معادله دایره گفته می شود که $A=B$ و هم اشاره باشد.

$c\left(-\frac{D}{2},\frac{F}{2}\right)$ مرکز و $R=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ شعاع دایره می باشد.

در معادله انکشاف یافته بخاطر داشته باشید که هرگاه:

- $R>0$ باشد، دایره را حقیقی می گویند.
- $R=0$ باشد، دایره را صفری می گویند.
- $R<0$ باشد، دایره را موهومی می گویند.

معادله مماس بر دایره: هرگاه یک مستقیم در نقطه $P_1(x_1,y_1)$ با دایره یی با مرکز $c(h,k)$ مماس باشد، با در نظر داشت شکل ذیل میل شعاع دایره عبارت از:



$$m_1=\frac{k-y_1}{h-x_1}\text{ ،}\quad m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

چون شعاع دایره در نقطه تماس بالای مماس دایره عمود است، بناً:

$$m_1=-\frac{1}{m_1}\Rightarrow m_2=-\frac{h-x_1}{k-y_1}$$

و معادله خط مستقیم که یک نقطه و میل آن معلوم باشد عبارت از:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-y_1=-\frac{h-x_1}{k-y_1}(x-x_1)$$

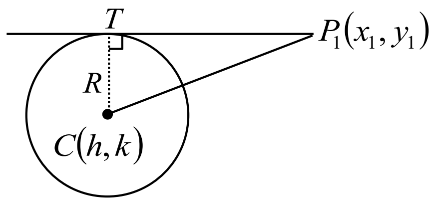
معادله اخیر عبارت از معادله مماس بر دایره است.

هرگاه مرکز دایره در مبدأ کمیات وضعیه قرار گیرد $h=k=0$ گردد، پس معادله مماس به دایره عبارت از:

$$y-y_1=-\frac{h-x_1}{k-y_1}(x-x_1)$$

طول مماس دایره: هرگاه یک نقطه $P_1(x_1,y_1)$ خارج دایره با معادله $(x-h)^2+(y-k)^2=R^2$ رسم گردد، طول مماس مذکور با در نظر داشت قضیه فیثاغورث از رابطه ذیل به دست می آید:

$$\overline{P_1T}^2 = \overline{P_1C}^2 - \overline{TC}^2$$
$$P_1T = \sqrt{(x_1-h)^2 + (y_1-k)^2 - R^2}$$

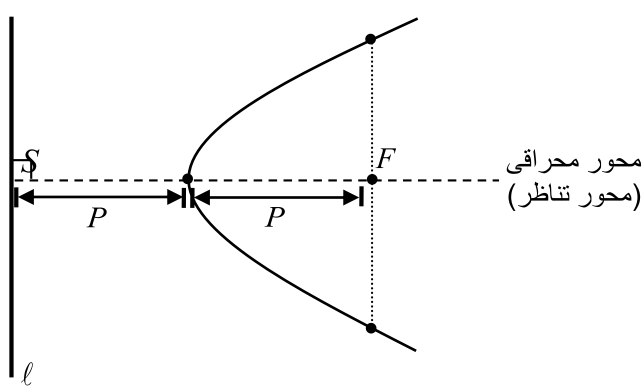


دوایر قایم: هرگاه دو دایره با معادله $x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$ و $x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + y + F_2 = 0$ در نظر باشد، شرط لازم برای اینکه دوایر مذکور با هم قایم باشند، عبارت از:

$$D_1P_2 + E_1E_2 = 2(F_1 + F_2)$$

پارابول: محل هندسی نقاط که از یک نقطه ثابت و یک مستقیم متساوی الفاصله باشد پارابول نامیده میشود. نقطه ثابت F محراق پارابول، مستقر (l) خط مؤجه (هادی) پارابول و خط مستقیم که از محراق پارابول گذشته و بالای خط مؤجه عمود باشد محور محراقی (محور تناظر) پارابول یاد می گردد، همچنان نقطه تقاطع منحنی پارابول با محور محراقی را (S) رأس پارابول و فاصله P عبارت از پارامتر پارابول نامیده می شود.

همچنان خطی که ار محراق گذشته و دو نقطه منحنی پارابول را وصل می کند وتر پارابول و اگر محراق بگذرد وتر محراقی یا وتر عمودی گفته می شود که طول آن $L = 4P$ می باشد.



معادلات پارابول

حالت اول: هرگاه محور محراقی موازی به محور x باشد،

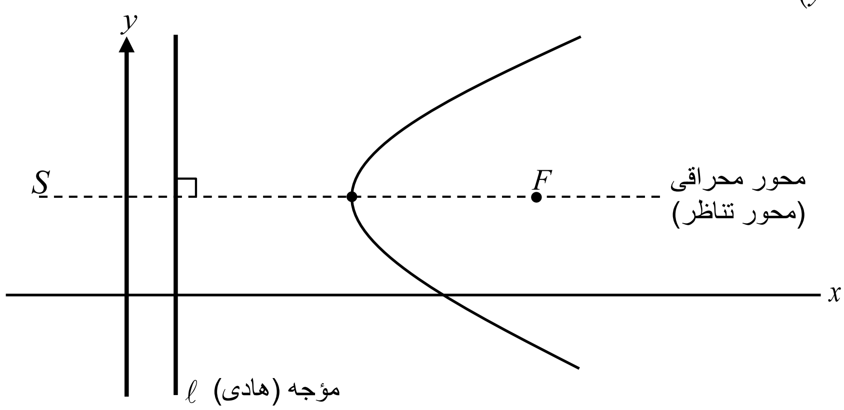
معادله پارابول $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

مختصات رأس $S(h,k)$

مختصات محراق $F(h+p,k)$

خط مؤجه (هادی) $x = h - p$

محور تناظر (محراقی) $y = k$



هرگاه رأس پارابول در مبدأ کمیات قرار داشته باشد در این صورت: $h = k = 0$ گردیده و معادله پارابول عبارت از: $y^2 = 4px$

بخاطر داشته باشید که هرگاه $P < 0$ باشد دهنه پارابول بطرف چپ باز می باشد.

حالت دوم: هرگاه محور محراقی موازی به محور y باشد.

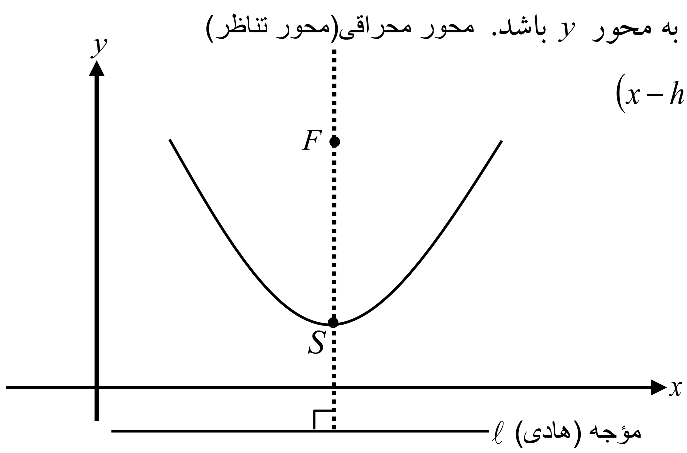
معادله پارابول عبارت از: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

مختصات رأس $s(h,k)$

مختصات محراق $F(h,k+p)$

خط مؤجه (هادی) $y = k - p$

محور تناظر (محراقی) $x = h$



هرگاه رأس پارابول در مبدأ کمیات قرار گیرد در این صورت: $h = k = 0$ گردیده و معادله پارابول عبارت از:

$x^2 = 4py$

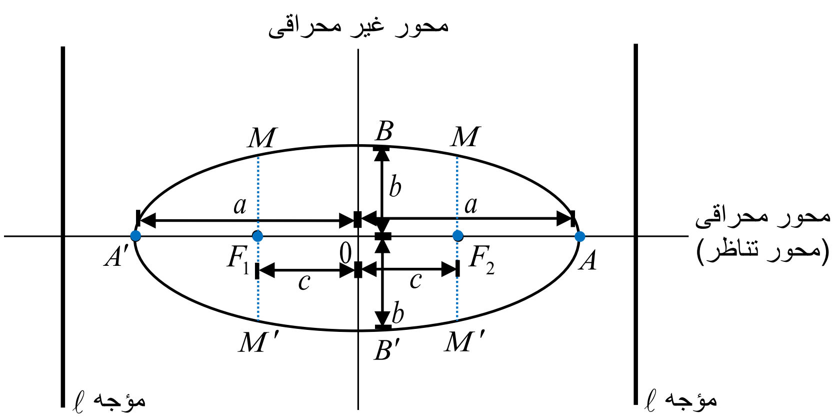
بخاطر داشته باشید که هرگاه $P > 0$ باشد دهنه پارابول بطرف بالا و اگر $P < 0$ باشد دهنه پارابول بطرف پایین باز می باشد.

الیپس (بیضوی): محل هندسی نقاط که مجموعه فواصل آنها از دو نقطه مستقر در مستوی مساوی به یک عدد ثابت $(2a)$ گردد، الیپس نامیده می شود. نقاط ثابت (F_1) و $(F\ )$ محراق های الیپس یاد می گردد. طوریکه نقطه تنصیف محراق ها را $o(h,k)$ مرکز الیپس و فاصله F_1F_2 را فاصله محراقین الیپس یاد می نمایند. همچنان

خط مستقیمی که از محراق های الیپس گذشته و محیط الیپس را در دو نقطه A و A' قطع نماید محور محراقی (محور تناظر) الیپس و نقاط A و A' بنام رأس های الیپس یاد می گردد. طوریکه فاصله $\overline{AA'}$ قطر اطول الیپس یاد می گردد، به همین ترتیب خط مستقیم که از مرکز الیپس یاد می گردد، این خط منحنی الیپس را در دو نقطه B و B' قطع می نماید که این نقاط نیز بنام رأس های الیپس یاد می گردد، طوریکه فاصله $\overline{BB'}$ قطر اصغر الیپس یاد می گردد.

عن المرکزیت الیپس: عبارت از نسبت فاصله بین هر نقطه منحنی الیپس از محراق و مستقیم مؤجه (هادی) الیپس می باشد، که در بیضوی این نسبت همیشه کوچک تر از یک می باشد، یعنی $e<1$ است.

وتر عمودی (لتس ریکتم): عبارت از خط مستقیم است که از محراق الیپس گذشته و بالای محور محراقی عمود باشد و منحنی الیپس را در دو نقطه قطع نماید.

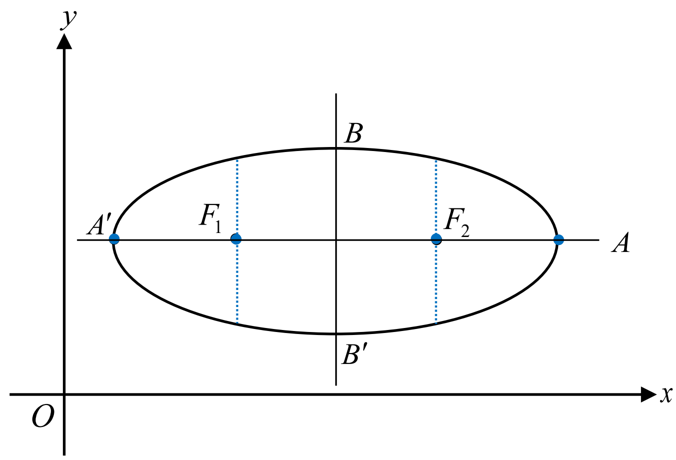


بخاطر داشته باشید که در الیپس همیشه $a>b$ و $a>c$ بوده و جزئیات الیپس عبارت از:

قطر اطول الیپس	$AA'=2a$
قطر اصغر الیپس	$BB'=2b$
فاصله محراقین الیپس	$F_1F_2=2c$
عن المرکزیت الیپس	$e=\dfrac{c}{a}$
وتر عمودی (لتس ریکتم) الیپس	$MM'=L=\dfrac{2b^2}{a}$
رابطه الیپس	$c^2=a^2-b^2$

معادلات الیپس

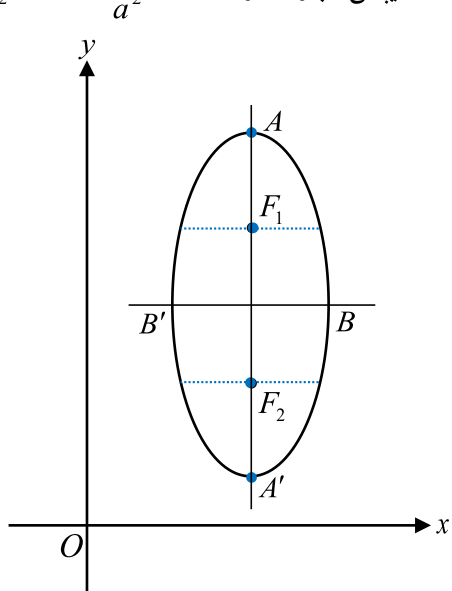
حالت اول: هرگاه محور محراقی موازی به محور x باشد، معادله الیپس عبارت از: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$



مختصات مرکز الیپس	$O(h,k)$
مختصات رأس ها	$AA'(h\pm a,k)$
مختصات رأس ها	$BB'(h,k\pm b)$
مختصات محراق ها	$F_1F_2(h\pm c,k)$
معادلات خطوط مؤجه (هادی)	$x=h\pm\frac{a}{e}$
معادله محور محراقی (محور تناظر)	$y=k$
معادله محور غیر محراقی	$x=h$

در صورتیکه مرکز الیپس در مبدأ کمیات وضعیه قرار گیرد در این صورت $h=k=0$ گردیده و معادله الیپس شکل ذیل را بخود اختیار می نماید:

حالت دوم: هرگاه محور محراقی موازی به محور y باشد، معادله الیپس عبارت از: $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$



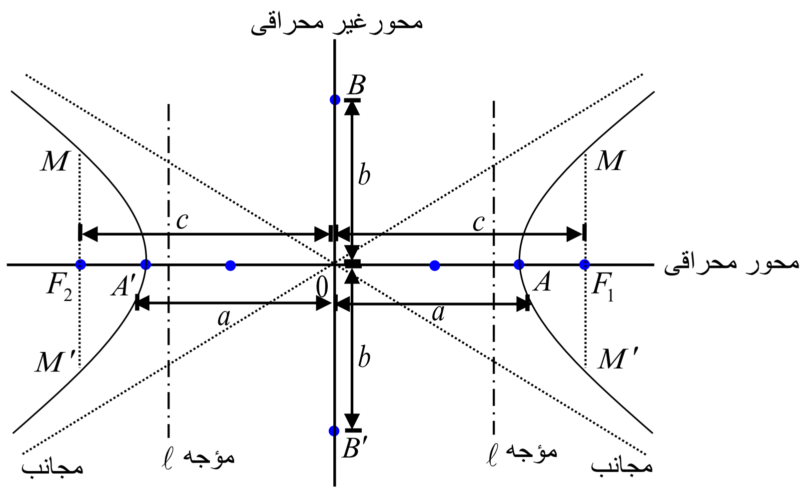
مختصات مرکز	$O(h,k)$
مختصات رأس ها	$A(h\pm a,k)$
مختصات رأس ها	$B(h\pm b,k)$
مختصات محراق ها	$F(h,k\pm c)$
معادلات خطوط مؤجه (هادی)	$x=k\pm\frac{a}{e}$
معادله محور محراقی (محور تناظر)	$x=h$

معادله محور غیر محراقی $y = k$

هایپرابول: محل هندسی نقاطی که حاصل تفریق فواصل شان از دو نقطه مستقر در مستوی مساوی به یکی عدد ثابت $2a$ باشد، هایپرابول نامیده می شود. این دو نقطه ثابت F_1 و F_2 محراقین هایپرابول می گویند، نقطه تنصیف محراق ها O مرکز و هایپربول یاد می گردد.

خط مستقیم که از محراق های هایپرابول گذشته بنام محور محراقی (محور تناظر) یاد می گردد، این مستقیم منحنی هایپرابول را در نقاط A و A' قطع می کند که بنام رأس های حقیقی یاد می گردد، به همین ترتیب خط مستقیم که از مرکز هایپرابول گذشته و بالای محور محراقی عمود باشد، بنام محور غیر محراقی یاد می گردد روی این محور نقاط متناظر B و B' قرار دارد که بنام رأس های غیر واقعی یاد می گردد.

به همین ترتیب خطوط مستقیم که از مرکز هایپرابول گذشته و یا منحنی هایپرابول در بی نهایت مماس باشد، مجانب های هایپرابول نامیده می شود.



بخاطر داشته باشید که در هایپرابول عن المرکزیت $e>1$ بوده و $a>b$ یا $a>b$ و $a=b$ بوده و همیشه $c>a$ است که جزئیات هایپرابول عبارت از:

فاصله رأس های حقیقی هایپرابول $AA' = 2a$

فاصله رأس های غیر حقیقی هایپرابول $BB' = 2b$

فاصله محراقین هایپرابول $F_1F_2 = 2c$

عن المرکزیت هایپرابول $e = \dfrac{c}{a}$

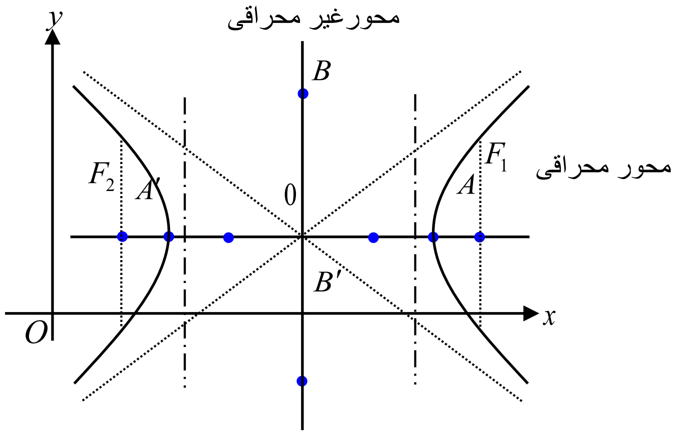
وتر عمودی (لتس ریکتم) هایپرابول $MM' = L = \dfrac{2b^2}{c}$

رابطه هایپرابول $c^2 = a^2 + b^2$

معادلات هایپرابول

حالت اول: هرگاه محور محراقی موازی به محور x باشد، معادله هایپرابول عبارت از:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



مختصات مرکز $O(h,k)$

مختصات رأس های حقیقی هایپرابول $AA'(h \pm a, k)$

مختصات رأس های غیر حقیقی هایپرابول $BB'(h, k \pm b)$

مختصات محراق های هایپرابول $F_1F_2(h \pm c, k)$

معادلات مجانب های هایپرابول $y - k = k \pm \frac{a}{e}(x-h)$

معادله خطوط مؤجه (هادی) $x = h \pm \frac{a}{e}$

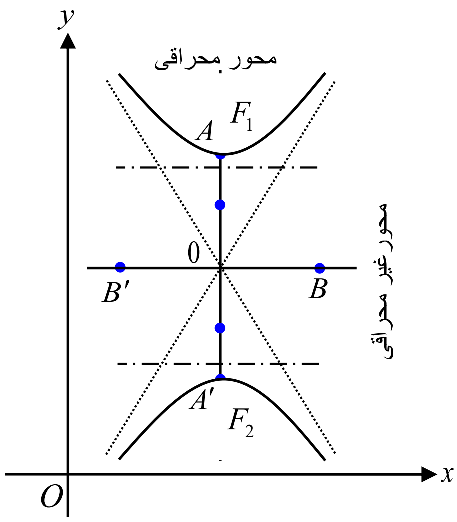
معادله محور محراقی (محور تناظر) $y = k$

معادله محور غیر محراقی $x = h$

هرگاه مرکز هایپرابول بالای مبدأ کمیات وضعیه قرار گیرد در اینصورت $h = k = 0$ گردیده و معادله هایپرابول شکل ذیل را بخود اختیار می نماید: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

حالت دوم: هرگاه محور محراقی موازی به محور y باشد، معادله هایپرابول عبارت از:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$



مختصات مرکز $O(h,k)$

مختصات رأس های حقیقی $A(h,k\pm a)$

مختصات رأس های غیر حقیقی $B(h\pm b,k)$

مختصات محراق ها $F(h,k\pm c)$

معادله مجانب ها $y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$

معادله محور محراقی (محور تناظر) $x=h$

$y=k\pm\frac{a}{e}$

معادله محور غیر محراقی $y=k$

هرگاه مرکز هایپرابول بالای مبدأ کمیات وضعیه قرار گیرد، در اینصورت $h=k=0$ گردیده و معادله هایپرابول شکل ذیل را بخود اختیار می نماید: $\frac{y^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$