النمذجة والمحاكاة

المحاضرة الرابعة: التوزيعات الاحتمالية المتقطعة ونمذجة الدخل

محتويات المحاضرة 4

- المتحولات العشوائية المتقطعة
  - التغاير covariance والترابط correlation
- التوزيعات الاحتمالية المتقطعة
  1. التوزع المنتظم
  2. التوزع الثنائي (توزع برنولي)
  3. توزع ثنائي الحد
  4. التوزع الهندسي
  5. توزع البواسوني

مصادر العشوائية لتطبيقات المحاكاة الشائعة

Type of system	Sources of randomness
Manufacturing	Processing times, machine times to failure, machine repair times
Defense-related	Arrival times and payloads of missiles or airplanes, outcome of an engagement, miss distances for munitions
Communications	Interarrival times of messages, message types, message lengths
Transportation	Ship-loading times, interarrival times of customers to a subway

التغاير covariance و الترابط correlation

- التغاير Covariance مقدار يقيس الاعتمادية (عدم الاستقلالية) dependence بين متغيرين عشوائيين Y و X

$$Cov(X,Y) = \sigma_{X,Y}^2 = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$
$$= E[XY] - E[X]E[Y]$$

- إذا كان X و Y مستقلين يكون $E[XY] = E[X]E[Y]$ وبالتالي يكون التغاير صفرا
- الترابط correlation بين متغيرين عشوائيين Y و X هو قيمة التغاير مقيسة normalized أي منسوبة إلى أكبر قيمة و هي جداء الانحرافات المعيارية

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

ترابط خطي سالب
Negative linear correlation

لا يوجد ترابط
No correlation

ترابط خطي موجب
Positive linear correlation

-1 0 +1

مثال على حساب التغاير و الترابط

x_i	$P(x_i)$
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

- لدينا كلمة من 3 بتات (نتيجة رمي 3 قطع نقدية)
- X متغير عشوائي يمثل عدد الوحدات في هذه الكلمة
- Y متغير عشوائي يمثل عدد الأصفار في هذه الكلمة
- تابع الكتلة الاحتمالي pmf للمتغيرX يعطى بالجدول
- تابع الكتلة الاحتمالي pmf للمتغيرY هو نفس الجدول
- القيمة المتوقعة (المتوسط) للمتغيرين متساوية وتساوي

$$E(X) = E(Y) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

- القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي الذي يمثل جداء المتغيرين XY

$$E[XY] = 0 \times \frac{2}{8} + 2 \times \frac{6}{8} = \frac{12}{8} = 3/2$$

- التغاير بين X و Y

$$cov(X,Y) = E[XY] - E(X)E(Y) = \frac{3}{2} - \frac{9}{4} = -\frac{3}{4}$$

- الترابط بين X و Y

$$\rho = cov(X,Y)/\sigma_X\sigma_Y = \frac{\left(-\frac{3}{4}\right)}{\frac{3}{4}} = -1$$

x_i	y_j	x_iy_j	$p(x_i)$
0	3	0	1/8
1	2	2	3/8
2	1	2	3/8
3	0	0	1/8

1. مثال على التوزع المنتظم المتقطع

- النرد die: X متغير عشوائي يمثل رقم الوجه للنرد في تجربة رمي النرد
- قيم المتغير العشوائي X هي المجموعة {1,2,3,4,5,6}
- تابع الكتلة الاحتمالي

$$p(X = xi) = 1/6$$

- تابع التوزيع التراكمي

$$F(x_i) = p(X \leq xi) = i \times 1/6$$

- القيمة المتوقعة

$$E(X) = \mu = \frac{a+b}{2} = 7/2 = 3.5$$

- التباين

$$var(X) = E(X^2) - \mu^2 = \left(\frac{1+4+9+16+25+36}{6}\right) - (3.5)^2 = 2.9166$$

- طريقة ثانية لحساب التباين في هذه الحالة:

$$V[X] = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12} = \frac{6^2 - 1}{12} = 2.9166$$

2. مثال على التوزع الثنائي (برنولي)

- لدينا قناة اتصال channel نقوم بإرسال بتات عبر هذه القناة
- X متغير عشوائي يأخذ
  - القيمة 1 في حال تم إرسال البت ووصل سليماً
  - القيمة 0 في حال تم إرسال البت ووصل البت مقلوباً
- احتمال الخطأ (احتمال انقلاب البت) في القناة هي 0.1
- احتمال وصول البت سليماً $p = 1 - 0.1 = 0.9$
- X متغير عشوائي له توزع برنولي بقيمة $p = 0.9$
- تابع الكتلة الاحتمالي $P(X = 0) = 0.1$

  $P(X = 1) = 0.9$
- القيمة المتوقعة $E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p = 0.9$
- التباين

$$var(X) = E(X^2) - \mu^2 = \mathrm{p}(1 - \mathrm{p}) = 0.1 \times 0.9 = 0.09$$

3. مثال على التوزع ثنائي الحد

- لدينا قناة اتصال channel نقوم بإرسال رسالة من N=10 بتات عبر هذه القناة
- X متغير عشوائي يأخذ قيمة عدد البتات السليمة في الرسالة الواصلة
- قيم المتغير العشوائي X هي المجموعة {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}
- احتمال الخطأ (احتمال انقلاب البت) في القناة هي 0.1
- X ذو توزع احتمالي ثنائي الحد بمعاملين $N = 10$ $P = 0.9$
- تابع الكتلة الاحتمالي لـ X :

$$p(X = k) = C(10,k) \times (0.9)^{k} \times (0.1)^{10-k}$$

- احسب احتمال أن تحوي الرسالة الواصلة 3 بتات سليمات فقط
- احسب احتمال أن تحوي الرسالة الواصلة 3 بتات سليمات أو أقل

- القيمة المتوقعة $E(X) = N \times p = 10 \times 0.9 = 9\ bit$
- التباين $var(X) = N \times p \times (1 - p) = 10 \times 0.9 \times 0.1 = 0.9$

4. التوزع الهندسي Geometric Distribution

- X: عندد تجارب برنولي Bernoulli trials إلى أن نحصل على **أول نتيجة ناجحة first success**.
- X متغير عشوائي ذو **توزع هندسي** geometric random variable **باحتمال نجاح يساوي p**.
- **تابع الكتلة الاحتمالي PMF:** احتمال أن نحتاج إلى k تجربة (حيث k $= 1,2,3, \ldots$) حتى نحصل على أول نتيجة ناجحة

$$p(k) = p(1-p)^{k-1}$$

- **تابع التوزع التراكمي CDF:**

$$F(k) = 1 - (1-p)^k$$

- المعاملات:

$$E[X] = \frac{1}{p}$$

$$V[X] = \frac{1-p}{p^2}$$

4. مثال على التوزع الهندسي

- لدينا خطوط إنتاج للموبايلات في نهايتها مرحلة فحص (تجربة برنولي إما الجهاز سليم أو الجهاز عاطل)
- احتمال أن يكون جهاز الموبايل عاطل 0.1
- X متغير عشوائي يمثل عدد أجهزة الموبايل التي يتم فحصها وتكون عاطلة حتى نصل إلى أول جهاز موبايل سليم
- قيم المتغير العشوائي X هي المجموعة $\{0,1,2,3,4 \ldots .. +\infty\}$
- تابع الكتلة الاحتمالي لـ X :

$$p(X=k) = 0.9 \times \ (0.1)^{k-1}$$

- **تابع التوزع التراكمي CDF:**

$$F(k) = p(X \leq k) = 1 - p(X > k) = 1 - (1-p)^k = 1 - 0.1^k$$

- احسب احتمال $p(X = 3)$
- احسب احتمال $p(X \leq 3)$

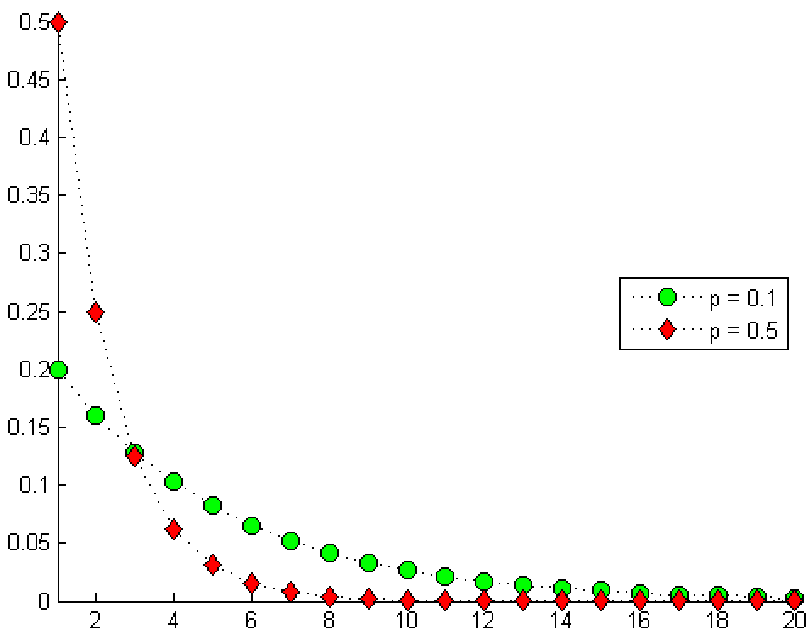
- القيمة المتوقعة

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.9} = \frac{10}{9} = 1.111 \quad device$$

- التباين

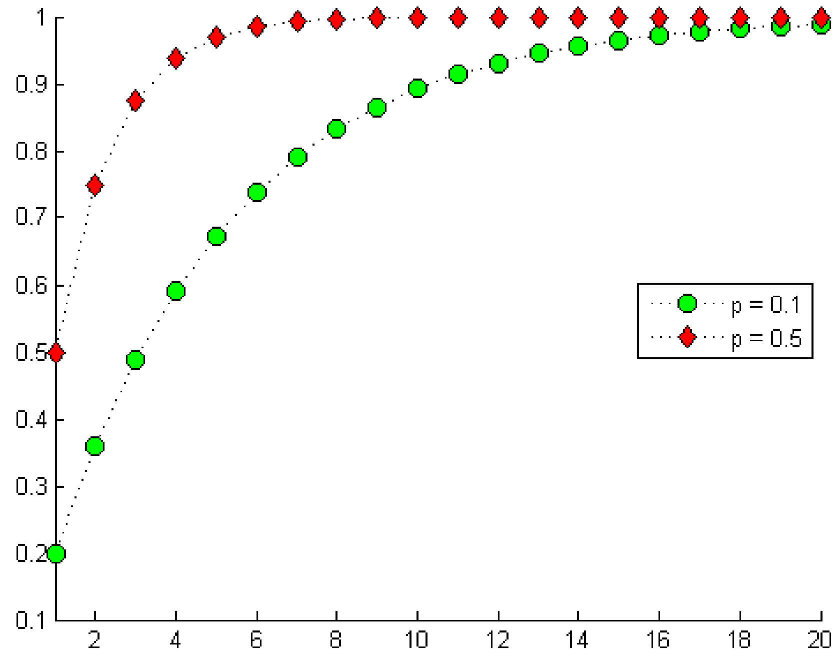
$$V[X] = \frac{1-p}{p^2} = \frac{0.1}{(0.9)^2} = 0.123$$

4. مثال على التوزع الهندسي



Geometric distribution PMF

تابع الكتلة الاحتمالي للتوزع الهندسي



Geometric distribution CDF

تابع التوزع التراكمي الهندسي

5. توزع بواسون Poisson Distribution

- X متغير عشوائي يمثل حدد الأحداث Events التي تحصل ضمن فترة زمنية ثابتة
  - الأحداث تحصل **بمعدل (متوسط زمني) ثابت** **ومستقلة عن موقع المدة الزمنية (مثلاً المعدل واحدته "حدث في الساعة": الساعة صباحا أم ظهرا أم مساءاً لا فرق)**
- X

- Poisson distribution is characterized by the rate λ
  - Rate: the average number of event occurrences in a fixed time interval

- أمثلة
  - The number of calls received by a switchboard per minute
  - The number of packets coming to a router per second
  - The number of travelers arriving to the airport for flight registration per hour

Poisson Distribution توزع بواسون .5

Random variable X is Poisson distributed with **rate parameter λ**

- PMF: the probability that there are exactly k events in a time interval

$$\boxed{p(k) = \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},\ k = 0,1,2, \ldots}$$

- CDF: the probability of at least k events in a time interval

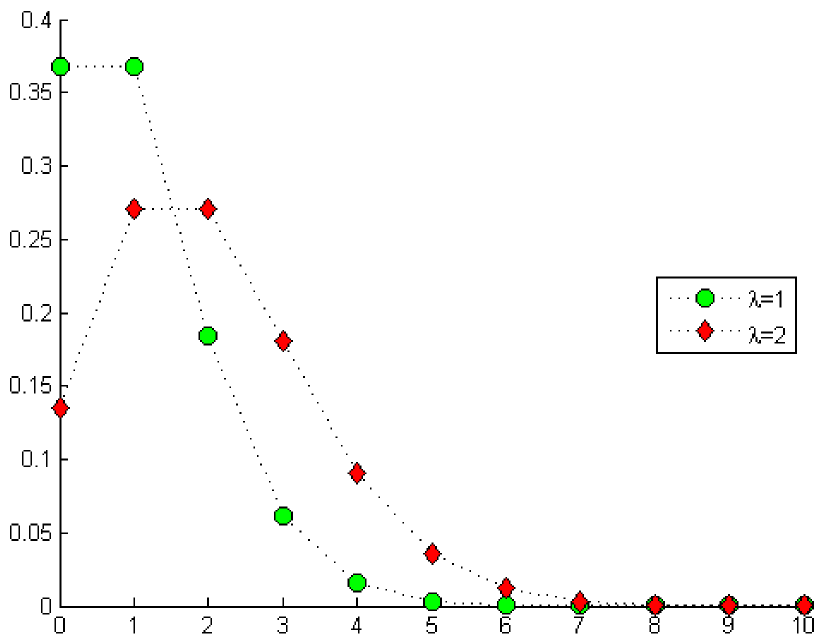
$$\boxed{F(k) = \mathbb{P}(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}}$$

- Properties:

$E[X] = \lambda$

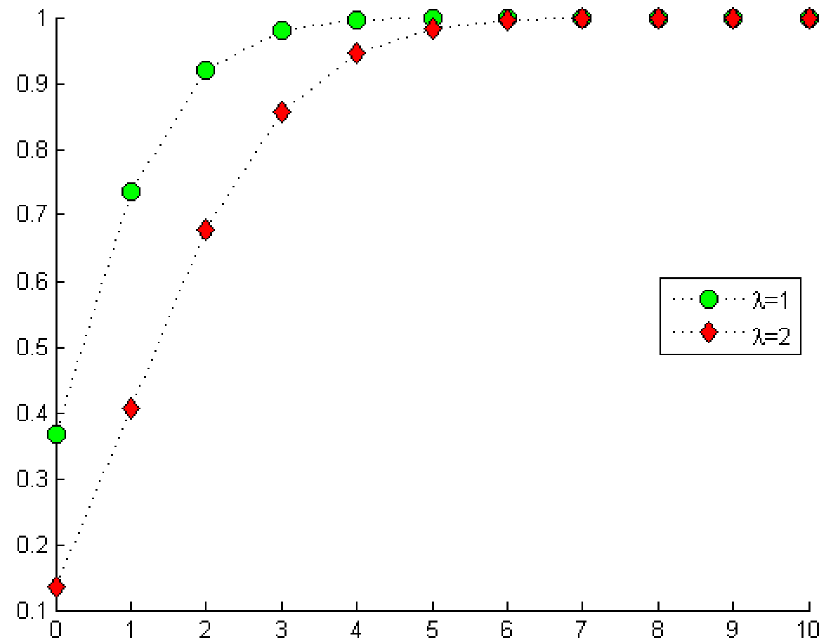
$V[X] = \lambda$

5. توزع بواسون Poisson Distribution



Poisson distribution PMF

تابع الكتلة الاحتمالي للتوزع البواسوني



Poisson distribution CDF

تابع التوزع التراكمي البواسوني

5. مثال على توزع بواسون Poisson Distribution

- عدد السيارات التي تدخل مصف سيارات parking lot تتبع توزع بواسوني بمعدل $\lambda = 20$ cars/hour
- قيم المتغير العشوائي X هي المجموعة $\{0,1,2,3,4 \ldots .. + \infty\}$
- احتمال أن يكون لدينا 15 سيارة في المصف خلال ساعة

$$\mathrm{p}(15) = \frac{20^{15}}{15!} e^{-20} = 0.051649$$

- احتمال أن يكون لدينا أكثر من 3 سيارات دخلت مصف السيارات خلال ساعة

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > 3) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 3) \\ &= 1 - [P(0) + P(1) + P(2) + P(3)] \\ &= 0.9999967\end{aligned}$$

- القيمة المتوقعة (متوسط عدد السيارات الموجودة في المصف)

$$E[X] = \lambda = 20\ car$$

- التباين $V[X] = \lambda = 20$