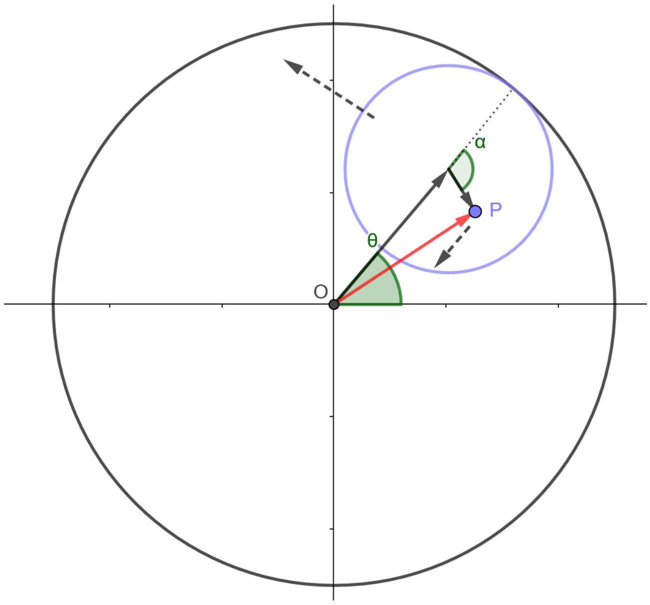
Compte rendu projet tech spirographe

Antoine Dumont, Julien Chantail et Papis Diop

11/12/2024

Contents

1. Définir le problème



définition des notations

- Soit O l'origine du spirographe
- Soit R le rayon du grand cercle
- Soit r le rayon du petit cercle
- Soit C le centre du petit cercle
- Soit θ l'angle entre l'axe Ox et (OC)
- Soit P le point où le crayon est en contact avec la feuille
- Soit p la distante CP
- Soit α le complémentaire de l'angle entre (OC) et (CP)

formulation du problème

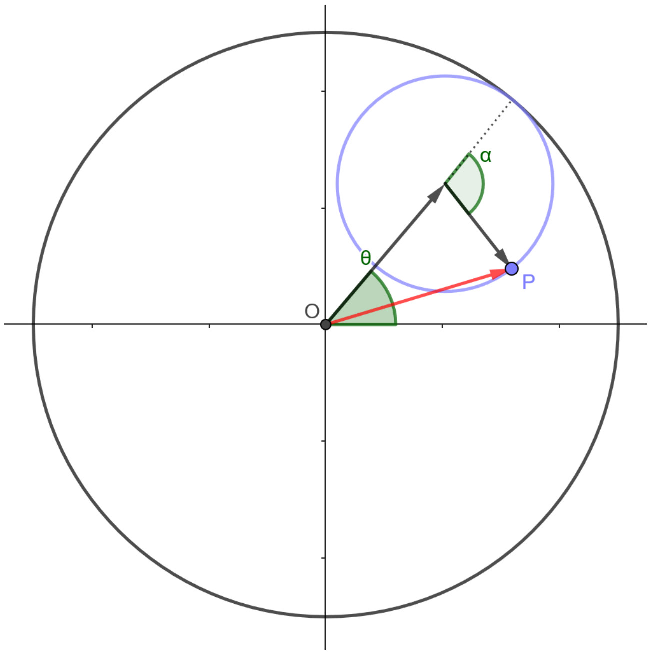
Le but du problème est donc de trouver les coordonnées de P en fonction de R, r et θ.

R, et r sont des données du problème tandis que θ représente l'état d'avancement du dessin.

2. résolution d'un problème plus simple

cas particulier

On va d'abord s'intéresser au cas particulier où P se situe à l'extrémité du disque de centre C et de rayon r :



démonstration

trouver les coordonnées de $P = (x, y)$ revient à trouver les coordonées du vecteur $\vec{OP}$.

Or :

$$\vec{OP} = \vec{OC} + \vec{CP}$$

Plaçons nous en coordonnées cylindrique :

$$OC = (R - r)$$

Donc :

$$\vec{OC} = \begin{pmatrix} (R-r)\cos(\theta) \\ (R-r)\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

et :

$$\vec{CP} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta + \alpha) \\ r\sin(\theta + \alpha) \end{pmatrix}$$

Or :

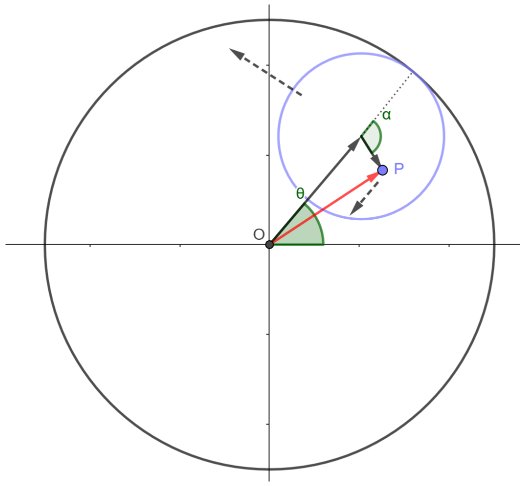
$$\alpha = -\frac{R}{r}\theta$$

D'où :

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} (R-r)\cos(\theta) + r\cos(\theta + \alpha) \\ \\ (R-r)\sin(\theta) + r\sin(\theta + \alpha) \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} (R-r)\cos(\theta) + r\cos(\theta - \frac{R}{r}\theta) \\ \\ (R-r)\sin(\theta) + r\sin(\theta - \frac{R}{r}\theta) \end{pmatrix}$$

3. trouver la solution au problème

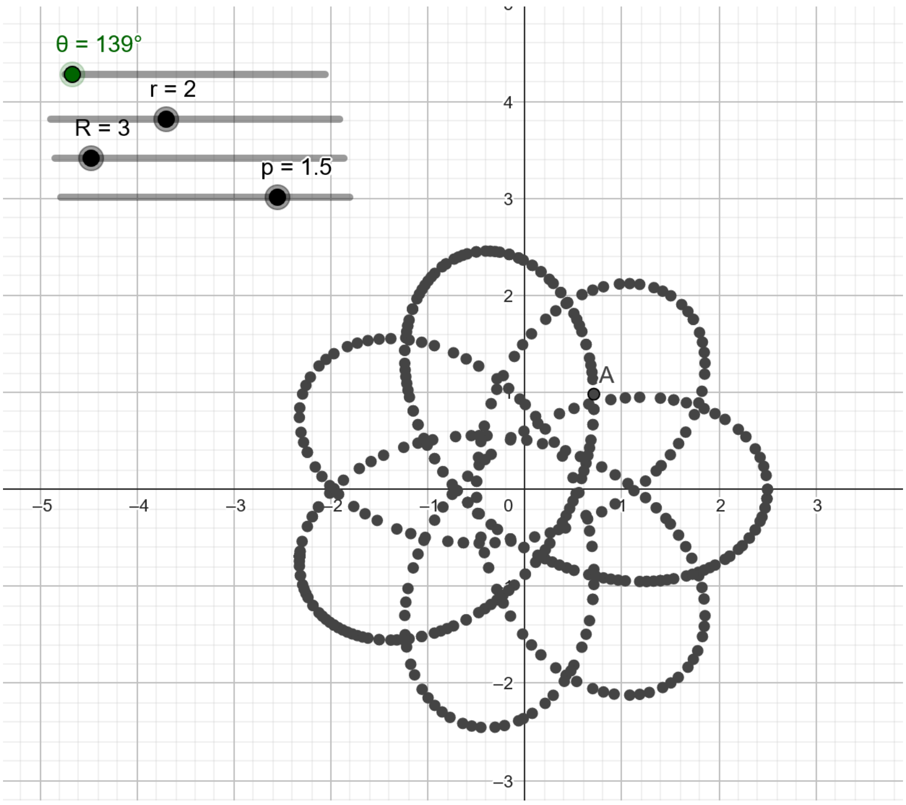


du cas particulier au cas général

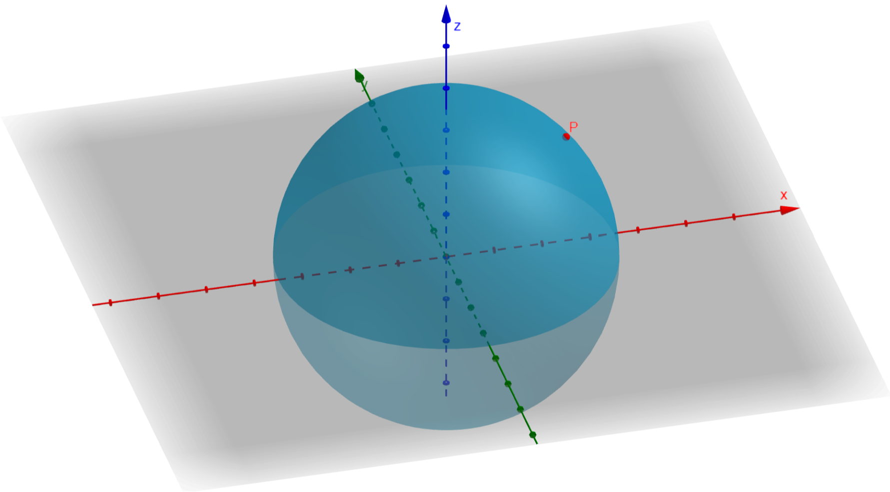
Il suffit ici d'adapter :
la distance CP n'est plus r mais p.
L'équation devient donc :

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} (R-r)\cos(\theta) + p\cos(\theta - \frac{R}{r}\theta) \\ \\ (R-r)\sin(\theta) + p\sin(\theta - \frac{R}{r}\theta) \end{pmatrix}$$

4. test de l'équation sur Géogébra



5. passage à la demi-sphère



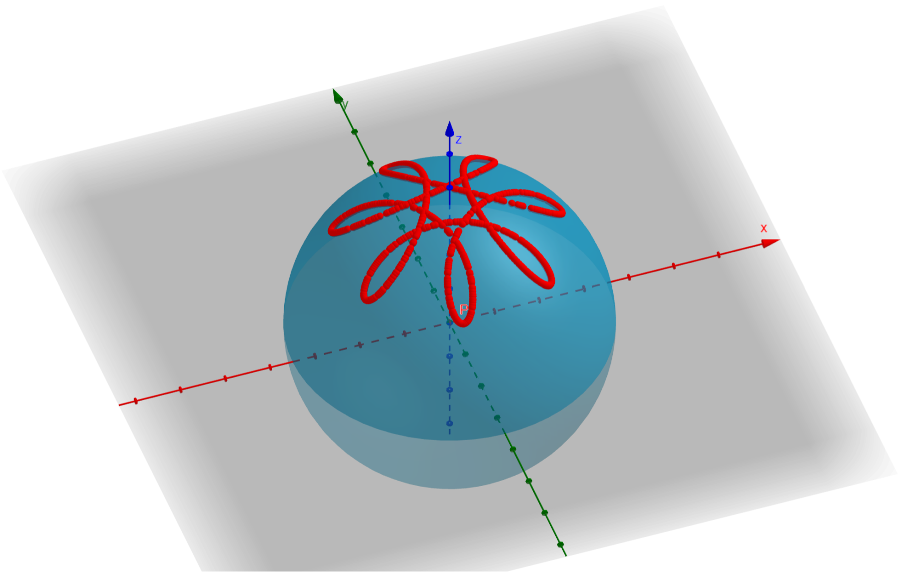
On ajoute une inconnue : z
Et on ajoute une équation : $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

Donc

$$
\begin{aligned}
& x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\
\iff \quad & z^2 = R^2 - (x^2 + y^2) \\
\iff \quad & z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} \\
\iff \quad & z = \sqrt{R^2 - \left(\left((R-r)\cos(\theta) + p\cos(\theta - \frac{R}{r}\theta)\right)^2 + \left((R-r)\sin(\theta) + p\sin(\theta - \frac{R}{r}\theta)\right)^2\right)}
\end{aligned}
$$

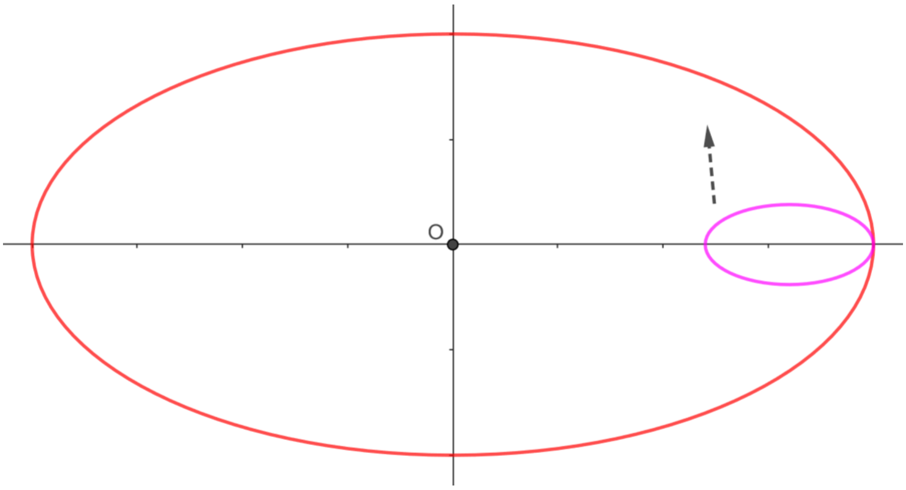
D'où :

$$
\vec{OP} = \begin{pmatrix} (R-r)\cos(\theta) + p\cos(\theta - \frac{R}{r}\theta) \\ (R-r)\sin(\theta) + p\sin(\theta - \frac{R}{r}\theta) \\ \sqrt{R^2 - \left(\left((R-r)\cos(\theta) + p\cos(\theta - \frac{R}{r}\theta)\right)^2 + \left((R-r)\sin(\theta) + p\sin(\theta - \frac{R}{r}\theta)\right)^2\right)} \end{pmatrix}
$$

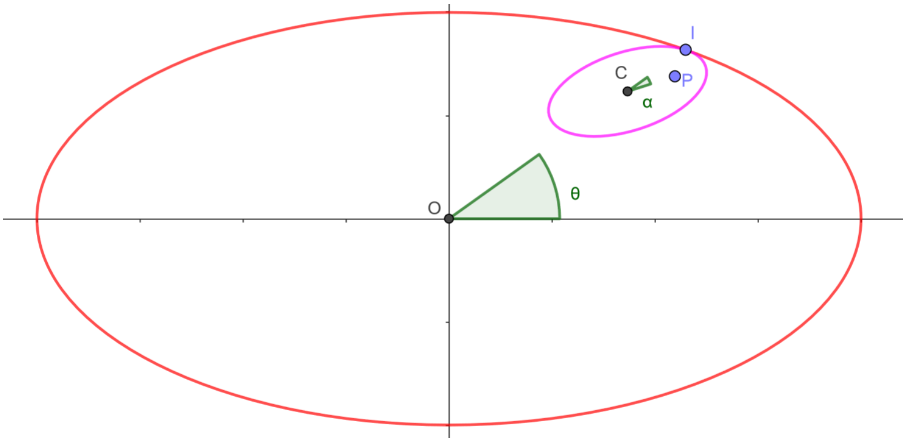


6. passage à l'ellipse, introduction

schéma initial

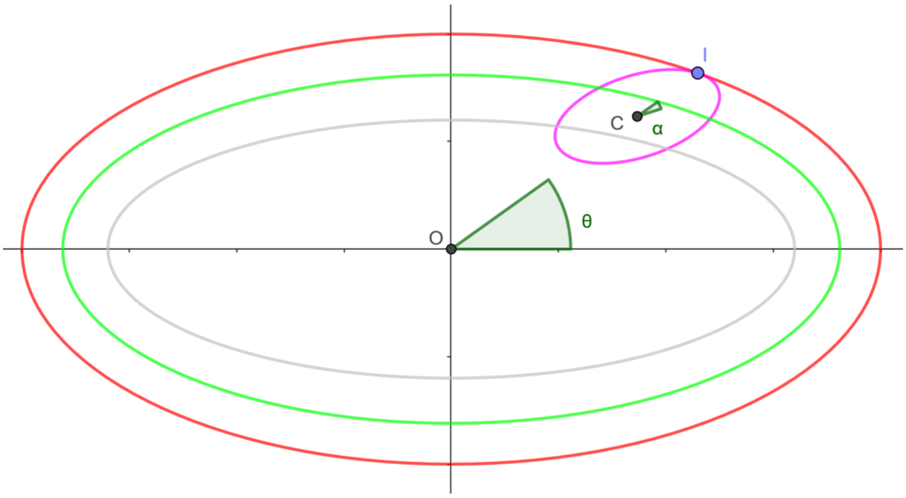


définition des notations



- Soit A le demi grand axe de l'ellipse rouge
- Soit B le demi petit axe de l'ellipse rouge
- Soit L le périmètre de l'ellipse rouge
- Soit a le demi grand axe de l'ellipse violette
- Soit b le demi petit axe de l'ellipse violette
- Soit l le périmètre de l'ellipse violette
- Soit C le centre de l'ellipse violette
- Soit I le point d'intersection des deux ellipse
- Soit P le point du tracé
- Soit θ l'angle entre l'axe Ox et (OC)
- Soit α l'angle entre la droite (CI) et la droite (CP).
- Soit p la distance CP
  Attention : ici α a fait plus d'un tour et donc vaut plus que 360

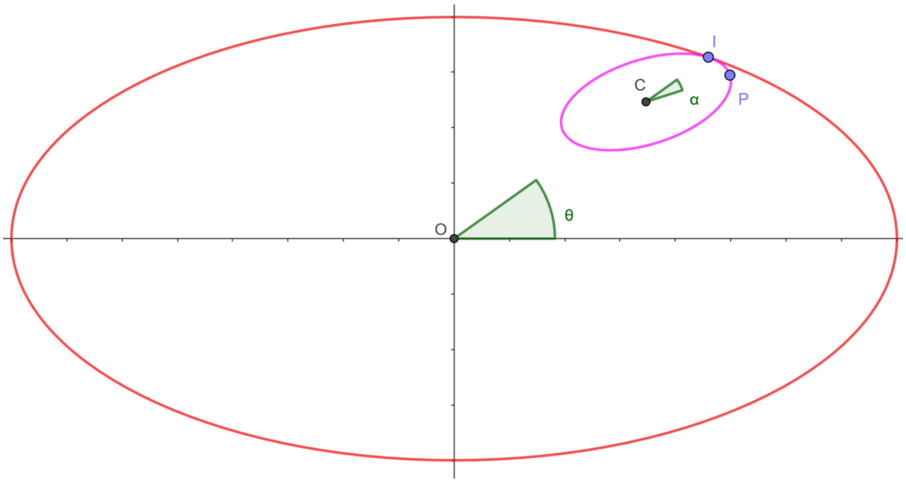
formulation du problème et observations



C est contenu entre l'ellipse verte (de demi grand axe $A-a$ et de demi petit axe $B-a$, et l'ellipse grise (de demi grand axe $A-b$ et de demi petit axe $B-b$.
On va d'abord déterminer sa trajectoire

Centre de la petite ellipse

Soit (x, y) les coordonnées de C dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y})$



On a :

$$\vec{OC} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} OC\cos(\theta) \\ OC\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Il suffit donc de trouver OC :
O, C et I sont toujours alignés, donc

$$OC = OI - CI$$

Les coordonnées de I s'écrivant en cylindrique

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} OI\cos(\theta) \\ OI\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Et I vérifie l'équation de l'ellipse rouge donc :

$$
\begin{aligned}
1 = \frac{x_i^2}{A^2} + \frac{y_i^2}{B^2} \quad &\iff \quad 1 = \frac{OI^2\cos^2(\theta)}{A^2} + \frac{OI^2\sin^2(\theta)}{B^2} \\
&\iff \quad \frac{1}{OI^2} = \frac{\cos^2(\theta)}{A^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{B^2} \\
&\iff \quad \frac{1}{OI^2} = \frac{B^2\cos^2(\theta + A^2\sin^2(\theta))}{A^2B^2} \\
&\iff \quad OI^2 = \frac{A^2B^2}{B^2\cos^2(\theta) + A^2\sin^2(\theta)} \\
&\iff \quad OI = \frac{A \times B}{\sqrt{B^2\cos^2(\theta) + A^2\sin^2(\theta)}}
\end{aligned}
$$

Et de la même façon on peut calculer la distance IC : On considère C comme étant l'origine, et on se place dans la petite ellipse. Le point P ici sur la figure sert à repérer le grand axe de l'ellipse, que l'on prend comme axe des abscisses. (le petit axe étant celui des ordonnées)

Les coordonnées de I dans ce repère sont :

$$
\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CI\cos(\alpha) \\ CI\sin(\alpha) \end{pmatrix}
$$

Donc par le même calcul que juste avant on trouve :

$$
CI = \frac{a \times b}{\sqrt{b^2\cos^2(\alpha) + a^2\sin^2(\alpha)}}
$$

Hors, de la même façon que pour les cercles, α est lié à θ par la relation :

$$
\alpha = -\frac{L}{l}\theta
$$

Avec L et l les périmètres des deux ellipses, valant :

$$
L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{A^2\sin^2(t) + B^2\cos^2(t)}dt \text{ et } l = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)}dt
$$

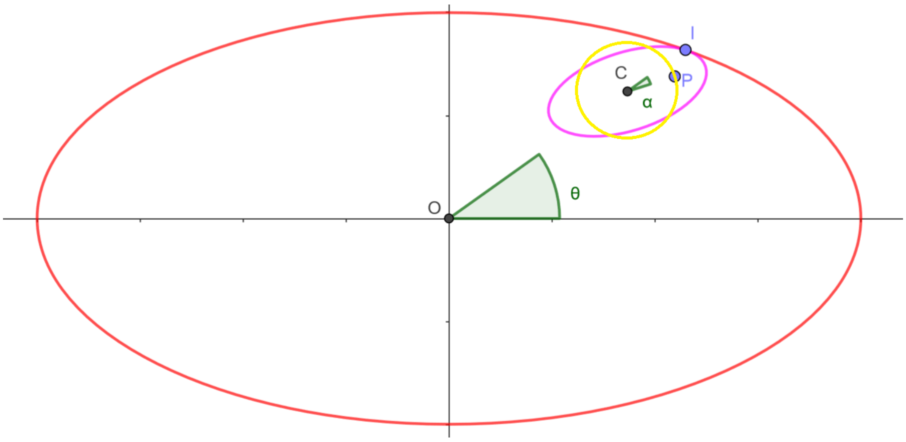
d'où :

$$
CI = \frac{a \times b}{\sqrt{b^2\cos^2\left(-\frac{4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{A^2\sin^2(t) + B^2\cos^2(t)}dt}{4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)}dt}\theta\right) + a^2\sin^2\left(-\frac{4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{A^2\sin^2(t) + B^2\cos^2(t)}dt}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)}dt}\theta\right)}}
$$

On a donc les coordonnées du point C :

$$
\begin{aligned}
\vec{OC} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} OC\cos(\theta) \\ OC\sin(\theta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (OI - CI)\cos(\theta) \\ (OI - CI)\sin(\theta) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

7. Solution du problème, coordonées du point C

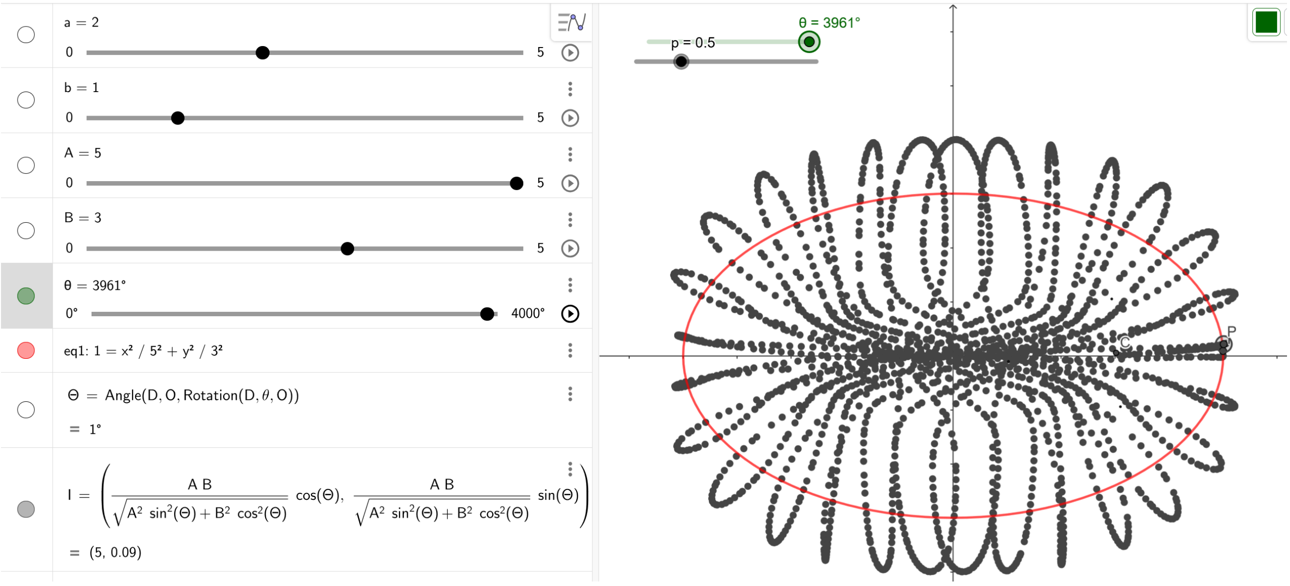


Ici on se rend compte que P décrit un cercle autour de C. Il suffit donc de reprendre les calculs du problème précédent, et d'adapter le α

Donc :

$$
\begin{aligned}
\vec{OP} &= \vec{OC} + \vec{CP} \\
&= \begin{pmatrix} (OI - CI)\cos(\theta) \\ \\ (OI - CI)\sin(\theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p\cos(\theta - \alpha) \\ \\ p\sin(\theta - \alpha) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left(\dfrac{A \times B}{\sqrt{B^2\cos^2(\theta) + A^2\sin^2(\theta)}} - \dfrac{a \times b}{\sqrt{b^2\cos^2(\alpha) + a^2\sin^2(\alpha)}} \right)\cos(\theta) \\ \left(\dfrac{A \times B}{\sqrt{B^2\cos^2(\theta) + A^2\sin^2(\theta)}} - \dfrac{a \times b}{\sqrt{b^2\cos^2(\alpha) + a^2\sin^2(\alpha)}} \right)\sin(\theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p\cos(\theta - \dfrac{L}{l}\theta) \\ \\ p\sin(\theta - \dfrac{L}{l}\theta) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

8. test de l'équation sur Géogébra

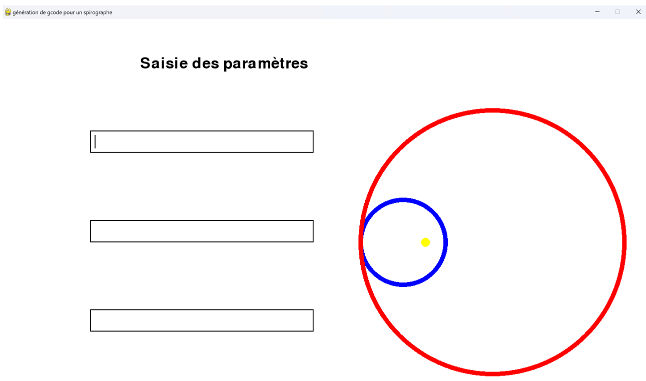


9. Interface

Outil d'affichage et de calcul

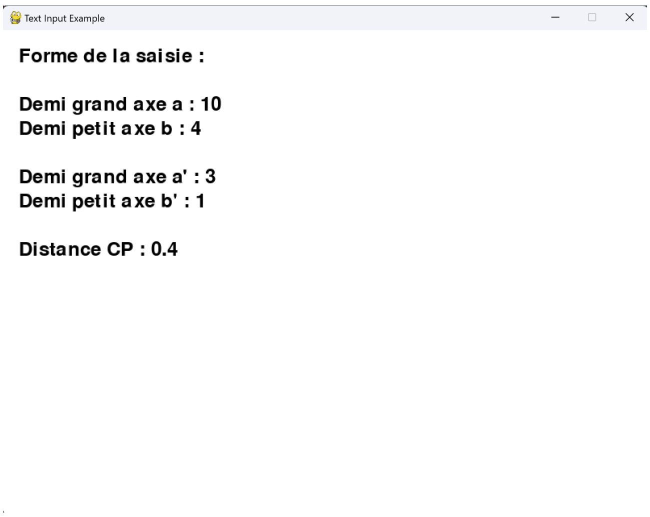
Nous utiliserons pour ce projet un programme python. Ce programme sera capable de receuillir les données rentrées par l'utilisateur via une interface facile d'utilisation. Il affichera le résultat de façon visuel, et produira un fichier GCODE capable d'être lu par une imprimante 3D. La librairie utilisée pour l'affichage est pygame.

Idée, maquette



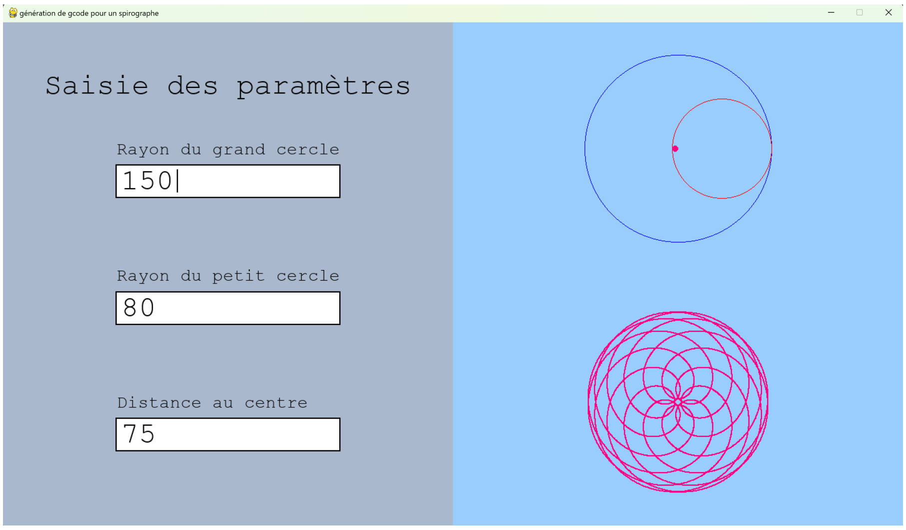
Le but est de permettre à l'utilisateur de saisir les différents paramètres. D'afficher la taille des ellipses/cercles en temps réel. D'afficher également le rendu final

saisie des paramètres



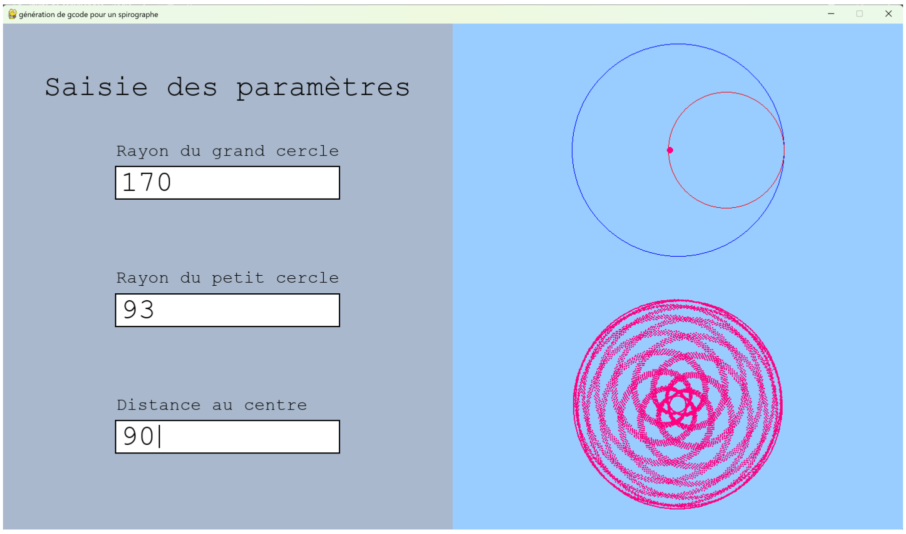
Avec pygame on est capable d'afficher les données rentrées par l'utilisateur

rendu final



Fonctionalitées :

- prend tout l'espace de l'écran
- les 3 champs sont clickables et modifiables
- apparition instantanée du rendu lors de l'appui sur la touche entrée
- au dessus la taille des 2 cercles et du point
- en dessous le rendu final
- le petit cercle ne peut pas dépasser le grand cercle.
- le point ne peut pas sortir du petit cercle.



10. Exécution

Même pas besoin d'avoir python installé pour faire tourner le logiciel !