ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน (Relation and Function)

ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน มีความสำคัญในเกือบทุกแขนงวิชาที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์เพราะเป็นเครื่องมือทางในการแปลงความของแขนงวิชานั้น ๆในรูปคณิตศาสตร์โดยมีรากฐานอยู่บนทฤษฎีเซต ความสัมพันธ์เป็นวลีที่แสดงการเกี่ยวข้องกันของเซตสองเซต จะแสดงความสัมพันธ์ในรูปคู่อันดับของสมาชิกทั้งสองเซต

1. คู่อันดับ

ในชีวิตประจำวันมีความเกี่ยวข้องกับคู่อันดับอยู่สมอเช่น เมื่อเราไปซื้อของจะมีการจับคู่ของที่ซื้อกับราคา หรือในรายการอาหารที่จะเห็นว่าส่วนมากจะพิมพ์ชื่ออาหารคู่กับราคา สิ่งเหล่านี้ล้วนเป็นลักษณะของคู่อันดับถ้าเราจับคู่ระหว่างพ่อกับลูกสาวแล้วเขียนในวงเล็บ เช่น (ดำ,มาลี), (แดง,สุดา), (ขาว,มีนา) สิ่งเหล่านี้คือคู่อันดับแต่ละคู่ประกอบด้วยสมาชิกสองตัวคือสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลัง หรือสมาชิกตัวที่หนึ่งกับสมาชิกตัวที่สองการเป็นสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังจะแสดงอันดับซึ่งมีความสำคัญมากดังจะเห็นได้จากคู่อันดับที่ยกตัวอย่างมา (ดำา ,มาลี) เราถือว่าสมาชิกตัวหน้าเป็นพ่อ และตัวหลังเป็นลูกสาว แต่ถ้าเราสลับ เป็น(มาลี,ดำ) สิ่งที่ได้มาจะผิดความหมายจากที่เรากำหนดให้เดิม

ดังนั้นสิ่งสำคัญในการเป็นคู่อันดับก็คือ จะต้องเป็นคู่และมีอันดับคู่ลำดับ ประกอบด้วย โดยถือว่าตำแหน่งหรืออันดับเป็นสำคัญถ้าสลับที่ของตำแหน่งจะทำ ให้ความหมายเปลี่ยนไป ในทางคณิตศาสตร์มักเขียนคู่อันดับในรูป (a, b) โดยที่ a เป็นสมาชิกตัวหน้า และ b เป็นสมาชิกตัวหลัง (a,b) และ (b,a) จะไม่เท่ากัน นอกจาก a=b เท่านั้น หรือ (a,b) =(c,d) ก็ต่อเมื่อ a=c และ b=d

นิยาม คู่อันดับ (order pairs) คือ สิ่งที่มีสมาชิกสองตัว และอันดับของสมาชิกนั้นมีความหมาย เราแทนคู่อันดับ ***a,b***
ด้วยสัญลักษณ์ (*a,b*) เราจะเรียก *a* ว่า สมาชิกตัวแรกของคู่อันดับ
และเรียก *b* ว่า สมาชิกตัวหลังของคู่อันดับ

หมายเหตุ

1. เราใช้คู่อันดับเมื่อกล่าวถึงสิ่งที่เกี่ยวข้องกัน
2. (a, b) ≠ (b, a) เมื่อ a ≠ b
3. ในระบบพิกัดฉากเราแทน (x, y) ด้วยจุดหนึ่งจุดบนระนาบ xy ในทำนองเดียวกัน จุดหนึ่งจุดบนระนาบ xy จะแทนด้วย (x, y)

2. ผลคูณคาร์ทีเซียน

นิยาม ให้ A กับ B เป็นเซตใด ๆ ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A กับ เซต B จะใช้สัญลักษณ์ A x B อ่านว่า A ครอส B คือเซตของคู่อันดับซึ่งสมาชิกตัวแรกเป็นสมาชิกของเซต A และสมาชิกตัวหลังเป็นสมาชิกของเซต B

จะสามารถเขียน A x B ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไขได้ดังนี้ $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A$ และ $b \in B)\}$

ข้อสังเกต

1. ถ้า A และ B เป็นเซตจำกัด จำนวนสมาชิกของเซต A x B เท่ากับ จำนวนสมาชิกของเซต A คูณกับจำนวนสมาชิกของเซต B
2. บางครั้งเราอาจใช้ A^2 แทน A x A

ตัวอย่าง เช่น A = {1,2,3} , B = {4,5,6}

และ A x B คือผลคูณคาร์ทีเชียนของเซต A และเซต B

ดังนั้น A x B = {(1,4),(1,5),(1,6),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6)}

ตัวอย่าง A={1,3,5} และ B = {a,b}

AxB = {(1,a),(1,b),(3,a),(3,b),(5,a),(5,b)}

BxA = {(a,1),(a,3),(a,5),(b,1),(b,3),(b,5)}

AxA = {(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5), (5,1),(5,3),(5,5)}

BxB = {(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)}

จากตัวอย่างจะเห็นว่า A x B ≠ B x A

3. ความสัมพันธ์ (Relations)

ความสัมพันธ์เกิดจากของสองสิ่งมาเกี่ยวข้องกันภายใต้กฎเกณฑ์อย่างใดอย่างหนึ่งและของทั้งสองสิ่งนั้น จะเขียนในรูปของคู่อันดับได้เสมอ

นิยาม 1. ความสัมพันธ์คือเซตของคู่อันดับแทนด้วยสัญลักษณ์ r

2. r เป็นความสัมพันธ์จาก เซต A ไปเซต B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ A X B เขียนได้ว่า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r ⊂ A X B และ rไม่เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r ⊄ A X B

ตัวอย่าง กำหนดให้ A ={2,4,6} และ B ={a,c,d}

R1 = {(2,a),(2,c)} R2 = {(4,9),(6,d),(d,c)}

จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ R1, R2 เป็นความสัมพันธ์ จาก A ไป B หรือไม่ เพราะเหตุใด

วิธีทำ A X B = {(2,a),(2,c),(2,d),(4,a),(4,c),(4,d),(6,a),(6,c),(6,d)}

R1 เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B เพราะเหตุว่า R1 ⊂ A X B

R2 ไม่เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B เพราะเหตุวา่ R2 ⊄ A X B

ในทำนองเดียวกัน

R เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ R ⊂ B X A

R เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป A ก็ต่อเมื่อ R ⊂ A X A

R เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป B ก็ต่อเมื่อ R ⊂ B X B

ความสัมพันธ์บางครั้งอาจจะเขียนอยู่ในรูปเงื่อนไข เช่น R = {(x,y) ⊂ A X A | x+ y < 19} โดยที่ A ={5,9,13,17}

ดังนั้นเราจะแจกแจงสมาชิกได้เป็น R = {(5,5),(5,9),(5,13),(9,5),(9,9),(13,5)}
ในที่นี้จะเห็นว่า R จะต้องเลือกมาจากคู่อันดับใน A X A เท่านั้นและจะต้องมี ความสัมพันธ์ $x + y < 19$ เช่นเราได้ $(5,5) \subset R$ เพราะ $5+5 = 10 < 19$

ตัวอย่าง ถ้า A ={2 , 3 , 4} และ B = {5 , 6 , 8 , 9}
ให้ r_1 คือความสัมพันธ์ " หารลงตัว" จาก A ไป B จะได้ r_1 = { (2,6) , (2,8) , (3,6) , (3,9) , (4,8) }
ให้ r_2 คือความสัมพันธ์ "เป็นรากที่สอง" จาก A ไป B จะได้ r_2 = { (3,9) }
ให้ r_3 คือความสัมพันธ์ "มากกว่า " จาก A ไป B จะได้ $r_3 = \phi$

ตัวอย่าง ให้ A ={x| x เป็นจำนวนเต็ม}
B ={x| x เป็นจำนวนเต็มบวก }
r1และ r2 ต่อไปนี้เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B
$r1 = \{(x, y) \subset A \times B \mid y = x^2\}$
$r_2 = \{(x, y) \subset A \times B \mid y = x/2\}$ เขียน r_1 และ r_2 แบบแจกแจงสมาชิกจะได้
$r_1 = \{(1,1), (-1,1), (2,4), (-2,4), ...\}$ หรือ $r_1 =\{(x, y) \subset A \times B$ และ$y = x^2\}$
$r^2 = \{(2,1), (4,2), (6,3), (8,4), ...\}$ หรือ $r^2 =\{(x, y) \subset A \times B$ และ$y = x/2\}$

ตัวอย่าง ให้ A ={0, 1, 2, 3, 4} และ B = {2, 4, 6, 8} จงหาความสัมพันธ์จาก A ไป B
$r_1 = \{(x, y) \subset A \times B \mid y = 2x\}$

4. โดเมน (Domain) และเรนจ์ (Range) ของความสัมพันธ์

โดเมนของความสัมพันธ์ได้แก่ เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับทั้งหมดกล่าวคือ พิกัด x ทั้งหมดที่ยอมรับได้ เขียนแทนด้วย D(r) หรือ D_r โดย $Dr = \{x \mid (x,y) \in r\}$

เรนจ์ของความสัมพันธ์ได้แก่ เซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทั้งหมดกล่าวคือ พิกัด y ทั้งหมด ที่ยอมรับได้ เขียนแทนด้วย R(r) หรือ R_r โดย $Rr = \{y \mid (x,y) \in r\}$

ตัวอย่าง r = {(1,2),(1,3),(2,2),(3,5)} จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์
วิธีทำ Dr = {1,2,3} Rr = {2,3,5}

ตัวอย่าง $r = \{(x,y) \in R \times R \mid y=2x - 3\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์
วิธีทำ $Dr = \{ x \mid x \in R\}$ $Rr = \{y \mid y \in R\}$

ตัวอย่าง ให้ A = {-3,-2,-1, 0, 1, 2, 3} และกำหนดให้ความสัมพันธ์ r ใน A คือ $\{(x, y) \mid y=x^2\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์นี้

r เป็นความสัมพันธ์ใน A หมายถึง $r \subset A \times A$ r= {(-1,1),(0,0),(1,1)} ดังนั้น Dr = {-1,0,1} Rr = {0,1}

ตัวอย่าง กำหนดให้ r= {(x,y)∈ IxI | y =x^2} จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r

เนื่องจาก r เป็นความสัมพันธ์ในเซตของจำนวนเต็มและจำนวนเต็มใด ๆ ไม่ว่าจะเป็นบวกหรือ ลบ หรือศูนย์ก็ตาม สามารถนำมายกกำลังสองได้ทั้งสิ้น

ดังนั้น D_r ={x | x เป็นจำนวนเต็ม} จำนวนเต็ม ใด ๆ เมื่อนำมายกกำลังสองแล้วผลที่ ได้ออกมาจะเป็นจำนวนบวกเสมอ นอกจาก ศูนย์ซึ่งยกกำลังสองแล้วได้ศูนย์

ดังนั้น R_r ={y | y เป็นจำนวนเต็มบวกที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ หรือศูนย์}

ตัวอย่าง กำหนดให้ $r = \{(x, y)| \; y = \frac{1}{x-1}\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r

การหาค่าของ $\frac{1}{x-1}$ เมื่อแทน x ด้วยจำนวนจริงใด ๆ ได้เสมอ นอกจาก เมื่อ x=1 เพราะ $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{0}$ ไม่มีความหมาย ดังนั้น D_r ={x | x ≠ 1}

การพิจารณาหาเรนจ์ของ r เขียน x ให้อยู่ในรูปของ y ได้คือ $x = \frac{1}{y} + 1$ จะเห็นได้ว่า y ต้อง ไม่เท่ากับศูนย์ ดังนั้น R_r ={y | y ≠ 0}

ตัวอย่าง กำหนดให้ $r = \{(x, y)| \; y = \sqrt{16 - x^2}\}$จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r

พิจารณาโดเมนจะเห็นว่าจา นวนที่จะนา มาแทนค่า x นั้นจะต้องไม่ทำ ให้ $16 - x^2$ เป็นลบ เพราะรากที่สองของจำนวนลบไม่เป็นจำนวนจริง เมื่อให้ $16 - x^2 \geq 0$ จึงมีค่าได้ตั้งแต่ -4 ถึง 4 หรือ เขียนได้ในรูป [-4, 4] หรือ |x| ≤ 4

ดังนั้น D_r ={x| -4 ≤ x ≤ 4} หรือ {x | |x| ≤ 4} หรือ [-4, 4]

เนื่องจาก $\sqrt{16 - x^2}$ จะต้องไม่เป็นจำนวนลบ และจะมากที่สุดเมื่อ x=0 ดังนั้น R_r ={y | 0 ≤ y ≤ 4} หรือ [0,4]

ตัวอย่าง กำหนดความสัมพันธ์ให้ต่อไปนี้จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ที่กำหนดขึ้น

1. $r_1 = \{(x, y) \in R \times R \mid x - 2y - 2 = 0\}$

2. $r_2 = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 4 - x^2\}$

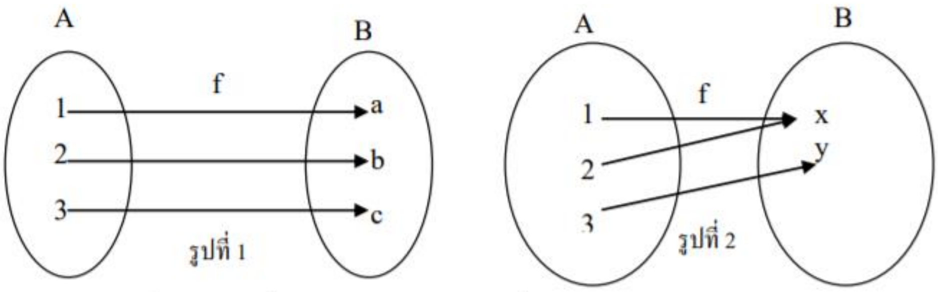
3. $r_3 = \{(x, y) \in R \times R \mid y = |x - 2|\}$

4. $r_4 = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 4\}$

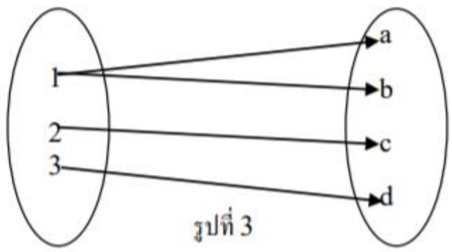
5. $r_5 = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x}$

5. ฟังก์ชัน (Function)

นิยาม ถ้า f เป็นความสัมพันธ์ จะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชัน เมื่อแต่ละสมาชิกในโดเมน (สมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับ) จะจับคู่หรือมีความสัมพันธ์กับสมาชิกในเรนจ์ (สมาชิกตัวหลังของคู่อันดับ) <u>ได้เพียงสมาชิกเดียว</u>



รูปที่ 1 และรูปที่ 2 เป็นลักษณะการจับคู่ที่ทำให้ความสัมพันธ์เป็นฟังก์ชั่น



รูปที่ 3 เป็นลักษณะการจับคู่ที่ทำให้ความสัมพันธ์ไม่เป็นฟังก์ชั่น

การตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชันหรือไม่

1. โดยใช้กราฟ วิธีการตรวจสอบคือ ให้ลากเส้นตรงขนานกับแกน y ตัดกราฟของความสัมพันธ์นั้น
   - ถ้าตัดกราฟเพียงจุดเดียว : แสดงว่า ความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชัน
   - ถ้าตัดกราฟมากกว่า หนึ่งจุด : แสดงว่า ความสัมพันธ์นั้น ไม่เป็นฟังก์ชัน
2. โดยใช้หลักการพิจารณาที่ว่า ถ้า (a, b) ∈ r และ (a, c) ∈ r ถ้าสามารถสรุปได้ว่า b = c ก็แสดงว่าความสัมพันธ์นั้นเป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่า ความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชัน หรือไม่

1. $r_1 = \{(0,1), (1,0), (-1,1), (2,1)\}$
2. $r_2 = \{(1,2), (2,3), (3,1), (1,4)\}$
3. $r_3 = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 2x + 1\}$
4. $r_4 = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 4\}$
5. $r_5 = \{(x, y) \in R \times R \mid y^2 = 4x + 1$
6. $r_6 = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x + 1}$

หมายเหตุ ในกรณีที่ความสัมพันธ์ f เป็นฟังก์ชัน เราสามารถเขียน y = f(x) แทน (x,y) ∈ f ได้ และ เรียก f(x) ว่า ฟังก์ชัน f ที่ x อ่านว่า เอฟที่เอ็กซ์หรือเอฟเอ็กซ์ จาก (x , y) ∈ f เขียนแทนได้ด้วย (x , f(x)) ∈ f

6. โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน

เนื่องจากฟังก์ชันเป็นความสัมพันธ์ชนิดหนึ่ง ดังนั้นการหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน จึงกระทำได้เช่นเดียวกับการหาโดเมนและเรนจข์องความสัมพันธ์

บทนิยาม ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B โดเมนของ f คือเซตของสมาชิกตัวหน้าทุกตัวของคู่อันดับ f เขียนแทนด้วย $D_f = \{x \mid (x, y) \in f\}$ เรนจ์ของ f คือเซตของสมาชิกตัวหลังทุกตัวของคู่อันดับ f เขียนแทนด้วย $R_f = \{y \mid (x, y) \in f\}$

ตัวอย่าง จงหาโดเมนและเรนจNของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = 3x - 1$

2. $g(x) = \frac{1}{x+2}$

3. $h(x) = \sqrt{x + 1}$

4. $f(x) = |x| - 3$