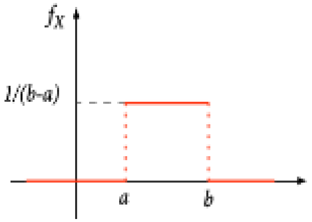
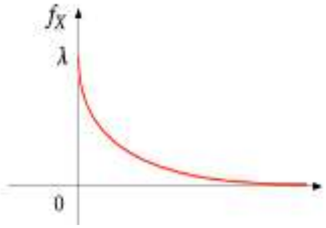
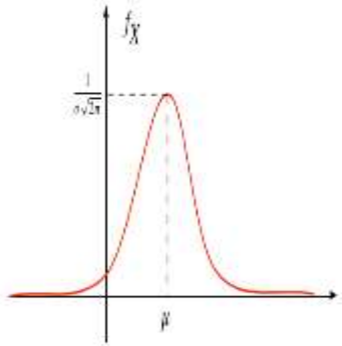
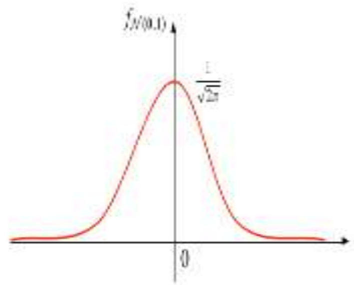
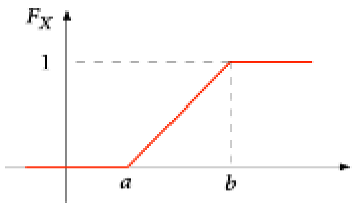
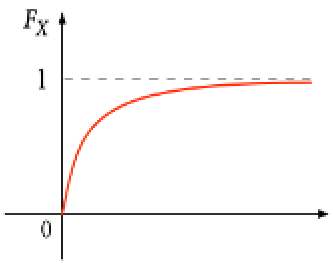
Variables aléatoires continues

Densité de probabilité	Fonction de répartition	Espérance mathématique	Variance
• On dit qu'une fonction f est une densité de probabilité si et seulement si: ➢ f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$ ➢ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$	• La fonction de répartition d'une va continue X est définie par: $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$	• $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx$	• $V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2\,f(x)\,dx = E(X^2) - E(X)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,f(x)dx - E(X)^2$ ➢
	Les propriétés d'une fonction de répartition : ➢ F est définie sur $\mathbb{R}$, et à valeurs dans $[0,1]$ ➢ F est continue sur $\mathbb{R}$ et croissante ➢ $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 1$ ➢ $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$ ➢ $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$ Remarque: Pour une variable aléatoire continue $P(X = x) = 0$	Les propriétés de l'espérance sont : ➢ $E(a) = a$ $où\ a\ une\ constante\ \in \mathbb{R}$ ➢ $E(aX) = aE(X)$ $où\ a\ une\ constante\ \in \mathbb{R}$ ➢ $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ ➢ on a ainsi $E(aX + b) = aE(X) + b$, où $a\ et\ b\ deux\ constantes\ \in \mathbb{R}$	Les propriétés de la variance sont : ➢ $V(a) = 0$ $où\ a\ une\ constante\ \in \mathbb{R}$ ➢ $V(aX) = a^2V(X)$ $où\ a\ une\ constante\ \in \mathbb{R}$ ➢ $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ si X et Y sont indépendantes ➢ on a ainsi $V(aX + b) = a^2V(X)$, où $a\ et\ b\ deux\ constantes\ \in \mathbb{R}$

Lois usuelles continues

Loi uniforme	Loi exponentielle	Loi normale Généralisée	Loi normale centrée réduite
On dit qu'une va X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$, si elle a pour **densité:** $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & si\ a \le x \le b \\ 0 & sinon \end{cases}$  f est une d.d.p car: $f\ est\ positive\ ou\ nulle\ sur\ \mathbb{R}$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}[x]_a^b = \frac{b-a}{b-a} = 1$	On dit qu'une va X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si elle a pour **densité:** $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si\ \ x \ge 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$  f est une d.d.p car: $f\ est\ positive\ ou\ nulle\ sur\ \mathbb{R}$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lambda\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = -\lim_{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} + e^0 = 0 + 1 = 1$	Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite normale de paramètres $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$ si elle a pour densité la fonction réelle f définie par: $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ $\forall\ x \in \mathbb{R}$  • La courbe admet comme axe de symétrie la droite d'équation $x = m$ • Le maximum de la courbe est atteint en m, espérance de la variable X, ce maximum vaut $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}}$	Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite normale centrée réduite, si elle a pour densité la fonction réelle f définie par: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\forall\ x \in \mathbb{R}$  • La courbe admet comme axe de symétrie la droite d'équation $x = 0$ • Le maximum de la courbe est atteint en 0, espérance de la variable X, ce maximum vaut $\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}$ • Si $X \sim N(0,1)$ alors $E(X) = 0$, et $V(X) = 1$ • Si $X \sim N(m, \sigma)$, (X suit la loi normale d'espérance m et d'écart type σ), alors la variable définie par $Z =$

		• Plus σ est grand, plus la courbe s'étale autour de la moyenne. • Si $X \sim N(m, \sigma)$, (X suit la loi normale d'espérance m et d'écart type σ), alors la variable définie par $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $N(0,1)$ • Si $X \sim N(m, \sigma)$ alors $E(X) = m$, et $V(X) = \sigma^2$	$\frac{X-m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $N(0,1)$
La fonction de répartition de X est donnée par $F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & si\ \ a \leq x \leq b \\ 1 & si\ x \geq b \end{cases}$  $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ $\underline{si\ x \leq a}$ $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$	La fonction de répartition de X est donnée par $F_X(x) \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$  $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$	Si $X \sim N(m, \sigma)$, $P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-m}{\sigma} \leq \frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{b-m}{\sigma}\right) = F_Z\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - F_Z\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$	• $F_Z(-z) = 1 - F_Z(z)$ • $P(Z > z) = 1 - P(Z \leq z) = 1 - F_Z(z)$ • $Pour\ tout\ a, b \in \mathbb{R}, P(a \leq X \leq b) = F_Z(b) - F_Z(a) = P(X > a) - P(X > b)$ • $Pour\ tout\ z \geq 0, P(-z \leq Z \leq z) = F_Z(z) - F_Z(-z) = 2F_Z(z) - 1 = 1 - 2P(Z \geq z)$ • $P(Z < -a) = P(Z > a)$ • Si on cherche z tel que $P(Z > z) = b$ <0,5 ; on doit regarder sur la table une probabilité de valeur s'approchant le plus de b,

$\underline{si\ \ a \leq x \leq b}$ $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a} dt = 0 + \frac{1}{b-a}[t]_a^x = \frac{x-a}{b-a}$ $\underline{si\ \ b \leq x}$ $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a} dt + \int_{b}^{x} 0dt = 0 + \frac{1}{b-a}[t]_a^b + 0 = 1$	$\underline{si\ x \leq 0}$ $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$ $\underline{si\ \ 0 \leq x}$ $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt = 0 + \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\right]_0^x = -e^{-\lambda x} + 1$		puis projeter sur les lignes et les colonnes pour trouver z • Si on cherche z tel que $P(Z > z) = b$ >0,5 ; alors on conclut que z et négatif et avant de regarder la valeur sur la table, il faut effectuer la transformation suivante $P(Z > z) = 1 - P(Z > -z)$, donc $P(Z > -z)$=1-b $<$ 0,5; on n'aura ainsi qu'à lire $1 - b$ sur la table et projeter sur les lignes et les colonnes pour trouver la valeur de $-z$
L'espérance de X est $E(X) = \frac{b+a}{2}$ $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)dx = \int_{a}^{b} x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2\,(b-a)} = \frac{b+a}{2}$	L'espérance de X est $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)dx = \int_{0}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_{0}^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[\left[-\frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{\lambda}\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx\right] = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{\lambda} \lim_{+\infty} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} e^0 = \frac{1}{\lambda}$ (en utilisant l'intégration par parties)	$E(X) = m$	$E(X) = 0$
La variance de X est $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$ $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ où	La variance de X est $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ où	$V(X) = \sigma^2$	$V(X) = 1$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f_X(x)dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{b^3-a^3}{3\,(b-a)} = \frac{b^2+ab+b^2}{3}$ d'où $V(X) = \frac{b^2+ab+b^2}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$	$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f_X(x)dx = \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda\left(\left[-\frac{1}{\lambda} x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx\right) = \lambda\left(0 + \frac{2}{\lambda}\frac{1}{\lambda^2}\right) = \frac{2}{\lambda^2}$ (on a effectué une intégration par partie et on a utilisé le fait que $\int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$) d'où $V(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$		

Estimation ponctuelle : Méthode des moments

Soient les moments théoriques et empiriques non centrés suivants :

Moments théoriques	Moments empiriques
$E(X)$	$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$
$E(X^2)$	$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}$
…	….
$E(X^k)$	$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^k}{n}$

On définit l'estimateur par la méthode des moments du paramètre θ la valeur $\hat{\theta}^{EMM}$ qui est solution de l'équation $E(X) = \bar{X}$,

Si cette équation ne permet pas de trouver θ, on passe à l'équation suivante: $E(X^2) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}$, et ainsi de suite jusqu'à trouver $\hat{\theta}^{EMM}$

En d'autres termes: on estime une espérance mathématique $E(X)$ (qui est une fonction de θ)par la moyenne empirique $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$,

(On estime $E(X^2)$ par $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}$. ,Ce qui implique que la variance théorique qui est égale à $\sigma_{pop}^2 = E(X^2) - (E(X))^2$ est estimée par: $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right)^2 = \sigma_{éch}^2$)

Ce qui entraine :

- si $E(X) = \theta$ alors $\hat{\theta}^{EMM} = \bar{X}$
- si $E(X) = \rho(\theta)$ alors $\hat{\theta}^{EMM} = \rho^{-1}(\bar{X})$, avec ρ, une fonction bijective

Exemples :

1. Prenons la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\theta} > 0$, comme $E(X) = \frac{1}{1/\theta} = \theta$ alors la résolution de l'équation $E(X) = \bar{X}$ nous donne $\hat{\theta}^{EMM} = \bar{X}$
2. Prenons la loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$, comme $E(X) = \frac{1}{\theta}$ alors la résolution de l'équation $\frac{1}{\theta} = \bar{X}$ nous donne $\hat{\theta}^{EMM} = \frac{1}{\bar{X}}$

Estimation ponctuelle : Méthode de maximum de vraisemblance

Soit $(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_\mathrm{n})$ un échantillon aléatoire de taille n d'une variable aléatoire X de loi $\mathbb{P}_\theta$ (discrète ou continue), avec $\theta \in \mathbb{R}$ un paramètre inconnu qu'on cherche à estimer.

La méthode de maximum de vraisemblance se résume en ces trois étapes :

- ✓ **<u>Etape1 :</u> écrire la fonction de vraisemblance de $\boldsymbol{\theta}$ (le paramètre à estimer) pour une réalisation $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n})$**

- Si X est discrète, la fonction de vraisemblance est donnée par: $L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_\theta\,(X_i = x_i) = \mathbb{P}_\theta\,(X_1 = x_1).\,\mathbb{P}_\theta\,(X_2 = x_2)\ldots\ldots\mathbb{P}_\theta\,(X_n = x_n)$
- Si X est continue, la fonction de vraisemblance est donnée par: $L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = f_\theta\,(x_1).\,f_\theta\,(x_2)\ldots\ldots f_\theta\,(x_n)$

- ✓ **<u>Etape2 :</u> écrire le log de la fonction de vraisemblance de $\boldsymbol{\theta}$ afin de transformer le produit en somme (puisque la dérivation d'une somme est plus simple que celle d'un produit**

- Si X est discrète, la fonction de log vraisemblance est donnée par: $\ln L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln \mathbb{P}_\theta\,(X_i = x_i) = \ln \mathbb{P}_\theta\,(X_1 = x_1) + \ln \mathbb{P}_\theta\,(X_2 = x_2) + \ldots\ldots + \ln \mathbb{P}_\theta\,(X_n = x_n)$
- Si X est continue, la fonction de log vraisemblance est donnée par: $\ln L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln f_\theta\,(x_i) = \ln f_\theta\,(x_1) + \ln f_\theta\,(x_2) + \cdots + \ln f_\theta\,(x_n)$

- ✓ **<u>Etape 3</u>: Maximiser la fonction log vraisemblance de $\boldsymbol{\theta}$ en annulant la dérivée première et en s'assurant que la dérivée seconde est négative**

On appelle estimateur du maximum de vraisemblance (EMV) de θ la variable aléatoire correspondante à la valeur $\hat{\theta}_n$ pour laquelle la fonction de vraisemblance atteint son maximum.

Ce qui donne que $\hat{\theta}_n$ est solution du système:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} < 0 \end{cases} \leftrightarrow \quad \begin{matrix} \dfrac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} < 0 \end{matrix}$$

Propriétés des estimateurs

avant de voir les propriétés des estimateurs il faut connaitre les résultats suivants: Si X est une va d'espérance $E(X) = m$ et de variance σ^2_{pop}. $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon de taille n de la variable X, iid (identiquement et indépendamment distribué)

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X) = m$$

$$V(\bar{X}) = V\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2_{pop} = \frac{\sigma^2_{pop}}{n}$$

1. **Estimateur sans biais**

Le biais d'un estimateur $\hat{\theta}$ de θ est mesuré par $biais = E(\hat{\theta}) - \theta$

Un estimateur est donc dit **sans biais** si $\boldsymbol{E(\hat{\theta}) = \theta}$ (en moyenne le décalage entre les valeurs prises par l'estimateur et la vraie valeur du paramètre est nulle)

Exemples

- Si $\theta = m = E(X)$. Alors $\bar{X}$ est un estimateur sans biais de la moyenne m car: $E(\bar{X}) = m$
- Si $\theta = \sigma^2_{pop}$. Si on l'estime par $\hat{\theta} = \sigma^2_{éch} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right)^2$. Calculons $E(\sigma^2_{éch}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} - (\bar{X})^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - E(\bar{X}^2)$

Or $E(X_i^2) = V(X_i) + (E(X_i))^2 = \sigma^2_{pop} + m^2$, et $E(\bar{X}^2) = V(\bar{X}) + (E(\bar{X}))^2 = \frac{\sigma^2_{pop}}{n} + m^2$,

- d'où: $E(\sigma^2_{éch}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} - (\bar{X})^2\right) = \frac{1}{n} * n(\sigma^2_{pop} + m^2) - \frac{\sigma^2_{pop}}{n} + m^2 = \sigma^2_{pop}(\frac{n-1}{n}) \neq \sigma^2_{pop}$

  donc $\sigma^2_{éch}$ n'est pas un estimateur sans biais de σ^2_{pop}.

  Un estimateur sans biais de σ^2_{pop} sera $\frac{n}{n-1}\sigma^2_{éch} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1} = S^2$

2. **<u>Estimateur asymptotiquement sans biais</u>**

Un estimateur $\hat{\theta}$ de θ est dit asymptotiquement sans biais si: $\lim_{n\to\infty}(E(\hat{\theta})-\theta)=0$

<u>Exemple:</u>

$\sigma^2_{éch}$ n'est pas un estimateur sans biais de σ^2_{pop}., mais c'est un estimateur asymptotiquement sans biais c'est-à-dire: $\lim_{n\to\infty}\left(E(\sigma^2_{éch}\right)=\lim_{n\to\infty}\sigma^2_{pop}\left(\frac{n-1}{n}\right)=\sigma^2_{pop}$

3. **<u>Estimateur convergent</u>**

$\hat{\theta}$ un estimateur de θ est dit **convergent** si $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} V(\hat{\theta})=0}$

<u>Exemple:</u>

$\bar{X}$ est un estimateur convergent car $\lim_{n\to\infty} V(\bar{X})=\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma^2_{pop}}{n}=0$

4. **Risque quadratique d'un estimateur**

On appelle risque quadratique d'un estimateur $\hat{\theta}$ de θ (s'il admet un moment d'ordre2): $R_{\hat{\theta}}(\theta)=E\left((\hat{\theta}-\theta)^2\right)$

Un estimateur est meilleur qu'un autre s'il a l'erreur quadratique la plus faible.

5. **Estimateur de variance minimale**

Si $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$ sont deux estimateurs sans biais et convergents de θ. $\hat{\theta}_1$ est meilleur que $\hat{\theta}_2$ si il a la variance la plus faible, c'est-à-dire $V(\hat{\theta}_1)<V(\hat{\theta}_2)$

Estimation par intervalle de confiance

- **Intervalles de confiance de la moyenne :**

	Loi de X	Loi réduite		Intervalle de confiance	
		σ connu	σ inconnu	σ connu	σ inconnu
$n < 30$	$X \sim N(\mu, \sigma)$	$Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim T(n-1)$	$IC(\mu) = \left[\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$	$IC(\mu) = \left[\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \dfrac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$
$n \geq 30$	X est de loi quelconque	$Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$IC(\mu) = \left[\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$	$IC(\mu) = \left[\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{S}{\sqrt{n}}\right]$

- **Intervalles de confiance de la variance :**

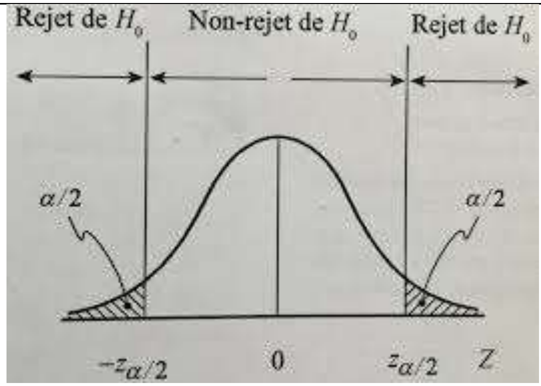
	Loi de X	S^2	Loi de S^2	Intervalle de confiance
μ:connu	$X \sim N(\mu, \sigma)$	$S_n^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{n}$	$(n) \dfrac{S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$	$IC(\mu) = \left[n \dfrac{S_n^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n}}, n \dfrac{S_n^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n}}\right]$
μ inconnu		$S_{n-1}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$	$(n-1) \dfrac{S_{n-1}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	$IC(\mu) = \left[(n-1) \dfrac{S_{n-1}^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}, (n-1) \dfrac{S_{n-1}^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right]$

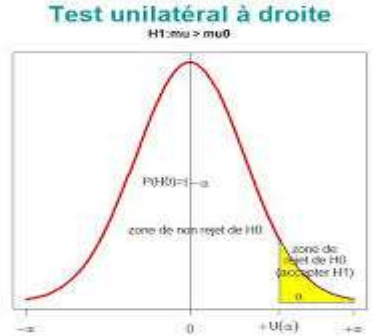
- **Intervalles de la proportion :**

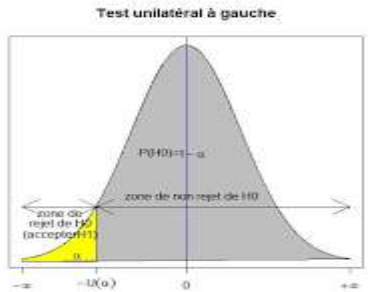
$n \geq 30,\ np \geq 5\ et\ n(1-p) \geq 5$		
Loi de $\hat{p}$	Loi réduite	Intervalle de confiance
$\hat{p} \sim N\left(p, \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right)$	$Z = \dfrac{\hat{p} - p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$	$IC(p) = \left[\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$

Tests d’hypothèses

- Tests d’hypothèses sur la moyenne

<table>
<tr><th>Etapes d’un test d’hypothèse</th><th>Test Bilatéral</th><th>Test unilatéral à droite</th><th>Test unilatéral à gauche</th></tr>
<tr><td>Etape1 : Construction du test</td><td>$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Etape2 : Détermination de l’écart réduit et sa distribution</td><td colspan="3">$n < 30, \sigma$ connu : $X \sim N(\mu, \sigma)$
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$n < 30, \sigma$ inconnu : $X \sim N(\mu, \sigma)$
$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim T(n-1)$$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$n \geq 30, \sigma$ connu :X est de loi quelconque
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$n \geq 30, \sigma$ inconnu :X est de loi quelconque
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$</td></tr>
<tr><td>Etape3: Détermination des régions critiques</td><td>

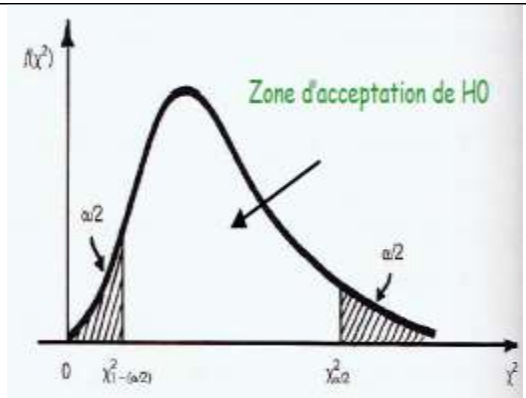
On accepte H_0, si $-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}$
(ou $-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \leq T \leq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$)</td><td>

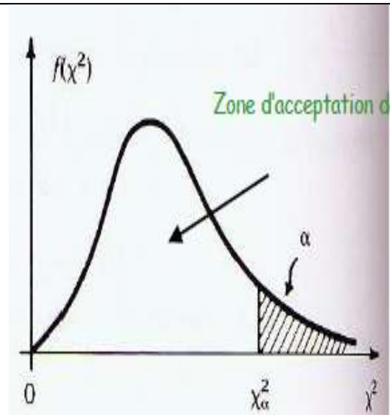
On accepte H_0, si $Z \leq z_\alpha$
(ou $T \leq t_\alpha(n-1)$)</td><td>

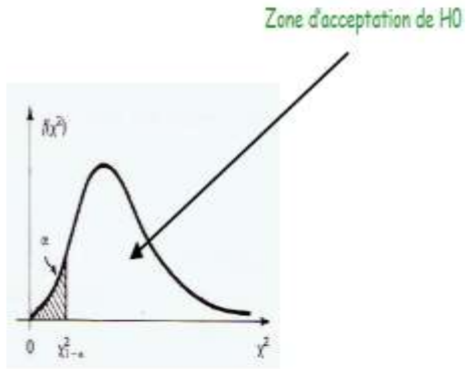
On accepte H_0, si $-z_\alpha \leq Z$
(ou $-t_\alpha(n-1) \leq T$)</td></tr>
</table>

Etape 4 : Prise de décision	On compare la valeur calculée de l'écart réduit et la valeur tabulée • On accepte H_0, si $-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z_0 \leq z_{\frac{\alpha}{2}}$ (ou $-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \leq T_0 \leq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$) • On rejette H_0 si $Z_0 > z_{\frac{\alpha}{2}}$ ou si $-z_{\frac{\alpha}{2}} > Z_0$ (ou $-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) > T_0 \; ou \; T_0 > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$)	On compare la valeur calculée de l'écart réduit et la valeur tabulée • On accepte H_0, si $Z_0 \leq z_\alpha$ (ou $t_\alpha(n-1) \geq T_0$)) • On rejette H_0 si $Z_0 > z_\alpha$ (ou $T_0 \geq t_\alpha(n-1)$)	On compare la valeur calculée de l'écart réduit et la valeur tabulée • On accepte H_0, si $Z_0 \geq -z_\alpha$ (ou -$t_\alpha(n-1) \leq T_0$)) • On rejette H_0 si $Z_0 < -z_\alpha$ (ou $-t_\alpha(n-1) > T_0$)

- Tests d'hypothèses sur la variance $\boldsymbol{X \sim N(\mu, \sigma)}$

<table>
<tr><th>Etapes d'un test d'hypothèse</th><th>Test Bilatéral</th><th>Test unilatéral à droite</th><th>Test unilatéral à gauche</th></tr>
<tr><td>Etape1 : Construction du test</td><td>$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Etape2 : Détermination de l'écart réduit et sa distribution</td><td colspan="3">μ connu , $S_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{n}$
$$Y = (n)\frac{S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$</td></tr>
<tr><td colspan="3">μ inconnu , $S_{n-1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1}$
$$Y = (n-1)\frac{S_{n-1}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$</td></tr>
<tr><td>Etape3: Détermination des régions critiques</td><td>

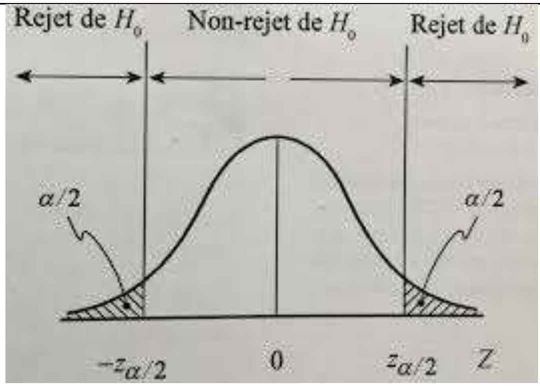
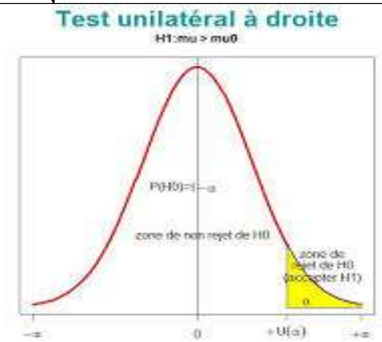
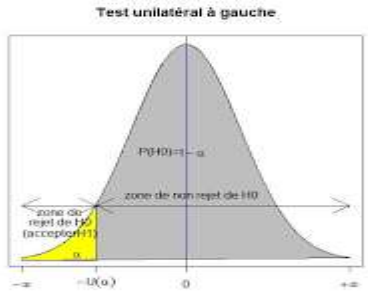
• Pour μ inconnue on accepte H_0, si $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \leq Y \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
• Pour μ connue on accepte H_0, si $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n) \leq Y \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$</td><td>

• Pour μ inconnue on accepte H_0, si $Y \leq \chi^2_{\alpha}(n-1)$
• Pour μ connue on accepte H_0, si $Y \leq \chi^2_{\alpha}(n)$</td><td>

• Pour μ inconnue on accepte H_0, si $Y \leq \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
• Pour μ connue on accepte H_0, si $Y \leq \chi^2_{1-\alpha}(n)$</td></tr>
</table>

Etape 4 : Prise de décision	On compare la valeur calculée de l'écart réduit et la valeur tabulée • On accepte H_0, si $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \leq Y_0 \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ (pour μ inconnue) • On accepte H_0, si $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n) \leq Y_0 \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$ (pour μ connue)	On compare la valeur calculée de l'écart réduit et la valeur tabulée • On accepte H_0, si $Y_0 \leq \chi^2_{\alpha}(n-1)$ (pour μ inconnue) • On accepte H_0, si $Y_0 \leq \chi^2_{\alpha}(n)$ (pour μ connue)	On compare la valeur calculée de l'écart réduit et la valeur tabulée • On accepte H_0, si $Y_0 \geq \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$ (Pour μ inconnue) • On accepte H_0, si $Y_0 \geq \chi^2_{1-\alpha}(n)$ (Pour μ connue)

- Tests d'hypothèses sur la proportion

Etapes d'un test d'hypothèse	Test Bilatéral	Test unilatéral à droite	Test unilatéral à gauche
Etape1 : Construction du test	$\begin{cases} H_0: p = p_0 \\ H_1: p \neq p_0 \end{cases}$	$\begin{cases} H_0: p = p_0 \\ H_1: p > p_0 \end{cases}$	$\begin{cases} H_0: p = p_0 \\ H_1: p < p_0 \end{cases}$
Etape2 : Détermination de l'écart réduit et sa distribution	Pour $n \geq 30, np_0 \geq 5, n(1-p_0)$ $Z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim N(0,1)$		
Etape3: Détermination des régions critiques	 On accepte H_0, si $-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}$	 On accepte H_0, si $Z \leq z_\alpha$	 On accepte H_0, si $-z_\alpha \leq Z$
Etape 4 : Prise de décision	On compare la valeur calculée de l'écart réduit et la valeur tabulée • On accepte H_0, si $-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z_0 \leq z_{\frac{\alpha}{2}}$ • On rejette H_0 si $Z_0 > z_{\frac{\alpha}{2}}$ ou si $-z_{\frac{\alpha}{2}} > Z_0$	On compare la valeur calculée de l'écart réduit et la valeur tabulée • On accepte H_0, si $Z_0 \leq z_\alpha$ • On rejette H_0 si $Z_0 > z_\alpha$	On compare la valeur calculée de l'écart réduit et la valeur tabulée • On accepte H_0, si $Z_0 \geq -z_\alpha$ • On rejette H_0 si $Z_0 < -z_\alpha$