



Vers l'optique de Fourier digitale - De la diffraction au plan de Fourier...

Date de publication :
10 octobre 2018

Cet article est issu de : **Électronique - Photonique | Optique Photonique**

par **Christophe LABBÉ, Benoît PLANCOULAINE**

Mots-clés
Echantillonnage | ondelettes |
Interférences | optique
ondulatoire | transformée de
Fresnel | réseau de diffraction

Résumé Les notions géométriques et ondulatoires sont des concepts très souvent employés en optique. Cependant, l'optique de Fourier associée à la théorie du traitement du signal reste complémentaire pour une interprétation efficace des phénomènes liés à la propagation des ondes lumineuses. Après avoir présenté ce concept en détail, quelques exemples classiques illustrent son usage.

Keywords
sampling | wavelets |
Interference | wave optics |
Fresnel's transform |
diffraction grating

Abstract Geometric optics and wave optics are familiar fields. However, Fourier optics, linked to the theory of signal processing, gives an efficient explanation of phenomena related to the propagation of light waves. After a detailed theoretical description, some classic examples are given to illustrate its use.

Pour toute question :
Service Relation clientèle
Techniques de l'Ingénieur
Immeuble Pleyad 1
39, boulevard Ornano
93288 Saint-Denis Cedex

Par mail :
infos.clients@teching.com
Par téléphone :
00 33 (0)1 53 35 20 20

Document téléchargé le : **03/02/2020**

Pour le compte : **7200029571 - univ mouloud mammeri tizi ouzou // bu08 SNDL // 193.194.82.178**

Vers l'optique de Fourier digitale

De la diffraction au plan de Fourier...

par **Christophe LABBÉ**

Maître de conférences à l'université de Caen

*Normandie Univ, UNICAEN, IUT de Caen, Département Mesures Physiques, Caen, France
Normandie Univ, ENSICAEN, UNICAEN, CEA, CNRS, CIMAP Caen, France*

et **Benoît PLANCOULAIN**

Maître de conférences à l'université de Caen

*Normandie Univ, UNICAEN, IUT de Caen, Département Mesures Physiques, Caen, France
Normandie Univ, UNICAEN, INSERM, ANTICIPE, Caen, France
Faculty of Medecine, Vilnius University, Vilnius, Lituanie*

1. Répartition spatiale de l'intensité lumineuse	E 4 150	- 2
1.1 Intensité et amplitude totale de l'onde lumineuse.....	—	2
1.2 Simplification du calcul de l'amplitude totale	—	2
1.3 Amplitude totale intégrée sur une surface quelconque	—	4
1.4 Amplitude totale intégrée sur une surface particulière	—	5
2. Restrictions expérimentales.....	—	6
2.1 Diffraction paraxiale et métaxiale	—	6
2.2 Étude transversale des rayons lumineux.....	—	7
2.3 Étude longitudinale de la surface des ondelettes	—	7
2.4 Champ proche	—	9
2.5 Exemples de transition du champ proche au champ lointain.....	—	10
2.6 Champ lointain	—	11
2.7 Emploi d'une lentille pour l'optique de Fourier.....	—	12
2.8 Cheminement vers l'optique de Fourier	—	13
3. Optique de Fourier	—	14
3.1 Transformée de Fourier en optique.....	—	14
3.2 Réalisation technique du plan de Fourier	—	14
3.3 Fréquences spatiales dans le plan de Fourier	—	14
3.4 Transmittance du plan objet	—	14
3.5 Définition de quelques propriétés de la transformée de Fourier	—	16
3.6 Optique de Fourier analogique	—	16
3.7 Optique de Fourier digitale	—	17
4. Conclusion.....	—	22
5. Glossaire	—	22
6. Symboles	—	22
Pour en savoir plus		Doc. E 4 150

L'optique de Fourier, nécessitant la cohérence des sources lumineuses, repose sur une représentation scalaire du champ électromagnétique, justifiée par l'indépendance de ses composantes spatio-temporelles. L'objectif de cet article est de trouver l'amplitude lumineuse en un point de l'espace afin de déduire l'intensité recueillie par un capteur optique. Pour atteindre cet objectif, une décomposition en ondelettes est tout d'abord effectuée. Puis, sa formulation microscopique est présentée avec l'équation d'onde, pour aboutir à une représentation macroscopique afin d'en étudier les applications.

Ensuite, l'étude des contraintes expérimentales impose de définir plusieurs domaines afin d'interpréter les phénomènes lumineux. En particulier, la notion de champ proche et de champ lointain est développée pour l'étude de la diffraction. Plusieurs exemples classiques sont traités, comme la diffraction par un bord et par différentes ouvertures. Ainsi, la transformée de Fourier s'invite naturellement pour obtenir l'intensité lumineuse. Puis, grâce à l'introduction d'une simple lentille convergente, l'optique de Fourier s'emploie dans un champ d'applications compatibles avec les dimensions réduites des systèmes optiques.

Cet article se termine avec la mise en œuvre technique de la transformée de Fourier en optique. La notion classique de fréquence est alors introduite sous sa forme spatiale. La définition et quelques propriétés de la transformée de Fourier sont succinctement rappelées, avant d'aborder des exemples bien connus comme le réseau de diffraction. Ces exemples sont traités sous l'aspect analogique, puis actualisés sous forme digitale permettant l'introduction de l'échantillonnage.

Un deuxième article [E 4 151] est proposé pour aborder des exemples analogiques et digitales appliqués à différents domaines industriels.

Le lecteur trouvera en fin d'article un glossaire et un tableau des symboles utilisés.

1. Répartition spatiale de l'intensité lumineuse

Objectif de la section

Afin d'en déduire l'intensité lumineuse en un point quelconque de l'espace, la connaissance de l'amplitude totale du champ électrique \vec{E} s'impose. L'objectif est donc de détailler le raisonnement qui simplifie le calcul de cette amplitude et qui constitue la base de toutes les applications en optique de Fourier.

1.1 Intensité et amplitude totale de l'onde lumineuse

La lumière se propage grâce aux variations du potentiel électromagnétique qui créent un champ électrique \vec{E} et un champ d'aimantation \vec{H} . L'intensité de l'onde lumineuse se mesure au moyen de capteurs sensibles à la valeur moyenne temporelle du module au carré de l'amplitude du champ électrique $\vec{E}(P)$, donnée au point P par $I_P = \langle |\vec{E}(P)|^2 \rangle$. Cette répartition spatiale d'intensité impose donc la connaissance de l'amplitude totale du champ électrique \vec{E} en tout point de l'espace.

Or, cette amplitude totale du champ $\vec{E}(P)$ en P engendrée par des sources $\{S_n\}$ se détermine à partir de l'amplitude des champs $\vec{E}(M_k)$ issus des sources secondaires ou **relais** aux points $\{M_k\}$, réparties arbitrairement dans l'espace (figure 1) [A 191] [1].

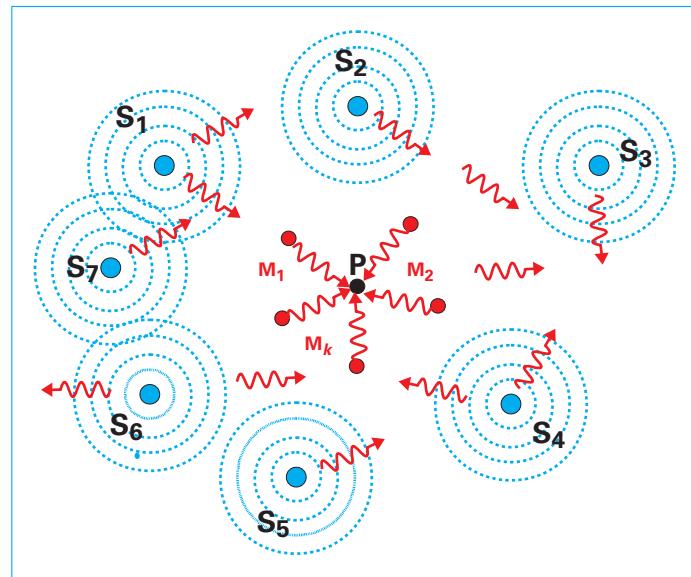


Figure 1 – Amplitude totale du champ électromagnétique

1.2 Simplification du calcul de l'amplitude totale

L'étude de l'amplitude totale des champs électriques, assez proches ou éloignés des dispositifs optiques qui l'engendent, permet d'obtenir un formalisme plus simple. Trois hypothèses simplificatrices s'articulent autour du découplage des **composantes spatio-temporelles du champ électrique**, de la **décomposition en ondes monochromatiques** et de la **décomposition en ondelettes sphériques**.

1.2.1 Découplage des composantes du champ électrique

Les composantes du champ électrique $\vec{E}(M)$ en un point M de l'espace se couplent généralement lors de la traversée des systèmes matériels au voisinage d'une discontinuité comme un bord, par exemple. Cet effet s'atténue et devient négligeable lorsque le milieu de propagation est homogène et que la taille des dispositifs optiques est grande devant la longueur d'onde λ . La décomposition $\vec{E}(M) = E_x(M)\vec{u}_x + E_y(M)\vec{u}_y + E_z(M)\vec{u}_z$ sur trois vecteurs unitaires du repère cartésien, définit trois coordonnées $[E_x(M), E_y(M), E_z(M)]$ du champ électrique, qui sont alors considérées indépendantes. La théorie vectorielle est ainsi détournée en une théorie scalaire [A 191] [1], afin d'analyser arbitrairement l'une des composantes du champ électrique. Cette composante est représentée par l'amplitude complexe $\psi_M(t)$. Ainsi, cette amplitude complexe permet non seulement le calcul de son intensité selon $I_M = \langle |\psi_M(t)|^2 \rangle$, mais introduit aussi la notion de phase, bien utile pour l'interprétation des phénomènes lumineux.

1.2.2 Décomposition en ondes monochromatiques

L'amplitude complexe $\psi_M(t)$ en tout point M varie, en particulier, dans le temps. Cette vibration lumineuse est considérée périodique au cours de son existence temporelle et possède une puissance finie, autorisant sa décomposition en série de Fourier :

$$\psi_M(t) = \sum_{q \in \mathbb{Z}} \psi_{M,q} \cdot e^{i 2\pi \nu_q t}$$

avec $e^{i 2\pi \nu_q t}$ base de fonctions exponentielles,

ν_q fréquence temporelle d'ordre q ,

$\psi_{M,q}$ ensemble des composantes monochromatiques.

Ainsi, les composantes monochromatiques sont indépendantes entre elles et l'analyse de l'amplitude $\psi_M(t)$ de la lumière polychromatique (figure 2) peut alors se conduire uniquement avec une seule de ses composantes $\{\psi_{M,q}\}$ qui est, elle-même, indépendante du temps. L'étude s'en trouve alors simplifiée.

Remarque : la notation de l'amplitude $\psi_{M,q}$ de cette composante monochromatique du champ électrique est simplifiée par la suite par ψ_M .

1.2.3 Décomposition en ondelettes sphériques

1.2.3.1 Décomposition spatiale de l'amplitude totale

Le calcul de l'amplitude totale ψ_P au point P du champ électrique a été imaginé par Christiaan Huygens [1] [2] à partir des sources relais (en rouge sur la figure 3), dont le rayonnement de chacune d'elle peut atteindre un point particulier P.

La figure 3 illustre ainsi les sources $\{S_n\}$ produisant un rayonnement dans tout l'espace, dont seulement une partie est vue au point P comme des sources relais d'amplitude complexe ψ_{M_k} provenant de l'ensemble des sources $\{S_n\}$. Ces sources relais sont modélisées par des ondelettes $\{\psi(M_k P)\}$ (§ 1.2.3.2), avec $\{M_k P\}$ la distance entre M_k et P. Ainsi, l'amplitude totale ψ_P du champ électrique au point P peut se formuler selon la combinaison linéaire (figure 3) :

$$\psi_P = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_{M_k} \cdot \psi(M_k P)$$

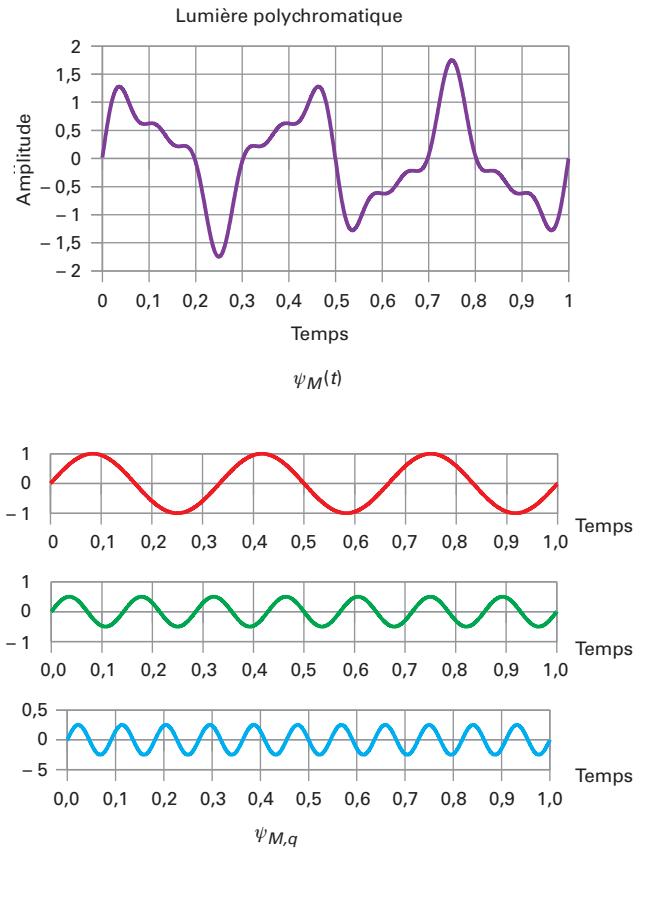


Figure 2 – Décomposition en harmoniques d'une vibration lumineuse

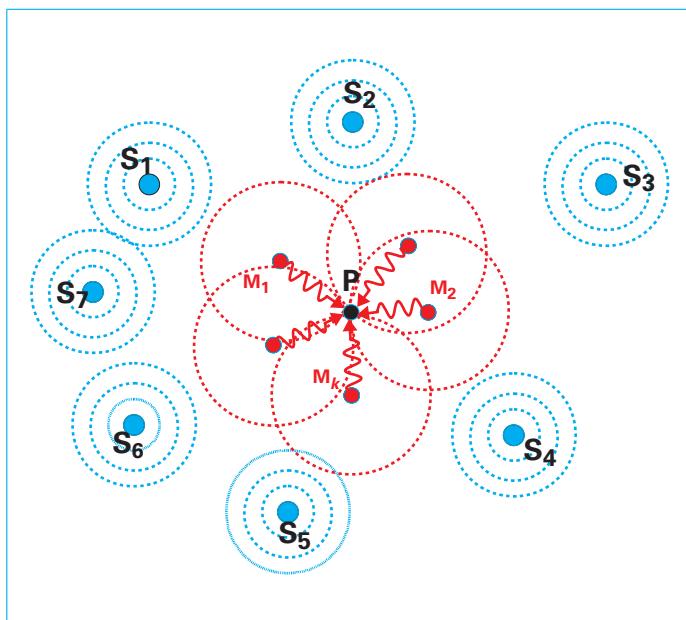


Figure 3 – Amplitude totale en P pour les sources discrètes M_k

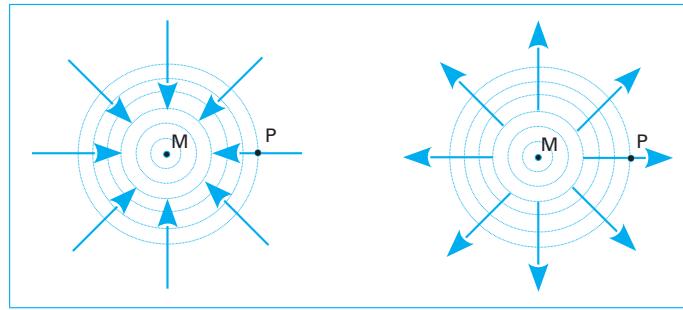


Figure 4 – Ondelettes respectivement convergente et divergente

1.2.3.2 Famille d'ondelettes sphériques

Les sources relais $\{\psi(M_k P)\}$ sont modélisées par des ondelettes sphériques convergentes et divergentes respectivement :

$$\psi(r_k) = \frac{1}{r_k} \cdot e^{\frac{i2\pi}{\lambda} r_k} \text{ et } \psi(r_k) = \frac{1}{r_k} \cdot e^{-\frac{i2\pi}{\lambda} r_k},$$

r_k représentant les distances $\{M_k P\}$ (figure 4).

Ces ondelettes sont éléments de l'ensemble des fonctions de Green (encadré 1). Elles sont des solutions particulières de l'équation différentielle de Helmholtz donnée par $\Delta\psi + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot \psi = 0$, λ étant la longueur d'onde.

En résumé :

- l'amplitude lumineuse totale au point P se décrit par une seule composante du champ électrique appelée ψ_P (§ 1.2.1) ;
- l'amplitude peut se décomposer en série de Fourier et une seule composante monochromatique est nécessaire (§ 1.2.2) ;
- l'amplitude peut également se décomposer sur la famille des ondelettes sphériques et s'exprime par (§ 1.2.3) :

$$\psi_P = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_{M_k} \cdot \psi(r_k)$$

1.3 Amplitude totale intégrée sur une surface quelconque

L'ensemble discret des sources $\{M_k\}$ est maintenant remplacé par un ensemble continu de sources aux points M formant une surface quelconque Σ fermée, de normale unitaire \vec{n} (figure 5), les distances r_k sont remplacées alors par r . Cette surface délimite un volume V excluant les sources $\{S_n\}$, où l'amplitude du champ électrique vérifie l'équation d'onde en tous ses points intérieurs (§ 1.2.3). Lorsque la distribution d'amplitude ψ_M est connue pour les sources relais en tout point M, l'amplitude totale ψ_P se détermine en utilisant une surface supplémentaire Σ_0 , de normale unitaire \vec{n}_0 selon le calcul de Kirchhoff (encadré 2).

Le **calcul de l'intégrale de Kirchhoff** donne l'amplitude totale ψ_P en tout point P à l'intérieur de la surface Σ :

$$\psi_P = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} (\psi \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \psi_M - \psi_M \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \psi) \cdot d\Sigma$$

avec ψ une des fonctions de Green,

ψ_M amplitude des sources relais aux différents points M (§ 1.2.3).

Encadré 1 – Fonctions de Green particulières pour l'équation de propagation

Équation de Helmholtz :

L'ondelette de Huygens monochromatique est une fonction de Green à valeurs complexes donnée par :

$$\psi(r, t) = \frac{1}{r} \cdot e^{\frac{i2\pi}{\lambda}(ct \pm r)}$$

avec r rayon d'une sphère élémentaire,
 λ longueur d'onde,
 c célérité de la lumière.

Elle vérifie alors l'équation d'onde : $\Delta\psi - \frac{1}{c^2} \frac{d^2\psi}{dt^2} = 0$, puisque sa dérivée partielle selon r donne :

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(r^2 \cdot \frac{d\psi}{dr} \right)$$

et sa dérivée partielle selon t donne :

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{d^2\psi}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot \psi$$

soit $\Delta\psi + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \cdot \psi = 0$.

Complémentarité des ondelettes de Huygens et de Shannon :

En outre, l'ondelette de Shannon monochromatique représentée par la fonction à valeurs réelles :

$$\hat{\psi}(r, t) = \frac{1}{r} \cdot \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda}(ct \pm r) \right]$$

vérifie l'équation d'onde en remplaçant les dérivées partielles selon r et t .

Son expression selon r prend la forme d'un sinus cardinal s'apparentant aux ondelettes souvent utilisée en traitement du signal pour l'étude des signaux échantillonés (§ 3.7.1). Ainsi, la complémentarité de ces deux types d'ondelettes $\psi(r, t)$ et $\hat{\psi}(r, t)$ permet d'interpréter plus facilement différents phénomènes observés en optique de Fourier.

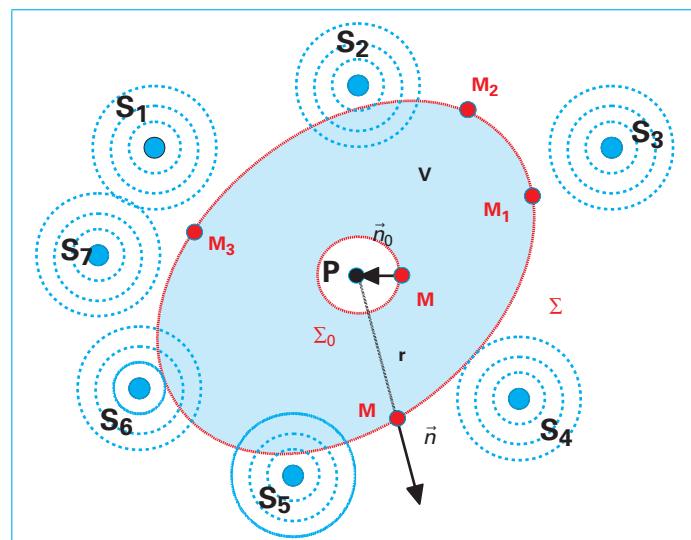


Figure 5 – Amplitude totale en P sur un ensemble continu de sources M

Encadré 2 – Calcul de l'intégrale de Kirchhoff

Théorème du flux-divergence :

Le théorème du flux-divergence, appelé également théorème de Green-Ostrogradski, est donné par l'identité :

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{u} \cdot dV = \iint_{\Sigma_{Tot}} \vec{u} \cdot d\vec{\Sigma}$$

avec V volume contenu dans une surface fermée Σ_{Tot} ne possédant pas de discontinuité,
 \vec{u} vecteur quelconque,
 $d\vec{\Sigma}$ élément infinitésimal de surface tel que sa normale soit dirigée vers l'extérieur.

Intégration sur une surface fermée ne contenant pas de discontinuité [1] :

La solution se détermine tout d'abord en combinant les deux équations de Helmholtz données par :

$$\Delta \psi_P + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \psi_P = 0 \text{ pour l'amplitude } \psi_P$$

et $\Delta \psi + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \psi = 0$ pour la fonction particulière de Green

$$\psi(r) = \frac{1}{r} e^{\frac{i2\pi}{\lambda} r}$$

soit $\psi \Delta \psi_P - \psi_P \Delta \psi = 0$.

En exprimant $\Delta \psi$ par $\Delta \psi = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \psi)$, l'intégration de cette dernière relation sur le volume V (figure 5) donne :

$$\iiint_V (\psi \cdot \Delta \psi_P - \psi_P \cdot \Delta \psi) dV = 0$$

Puis en appliquant le théorème du flux-divergence l'expression $\iint_{\Sigma_{Tot}} (\psi \operatorname{grad} \psi_M - \psi_M \operatorname{grad} \psi) d\vec{\Sigma} = 0$ apparaît. La solution en un point de convergence P du volume V se calcule en plaçant une sphère Σ_0 de rayon infinitésimal de centre P afin d'exclure la discontinuité en P du volume V et dans ce cas, Σ_{Tot} est l'union des deux surfaces Σ_0 et Σ . L'intégrale se sépare donc en :

$$-\iint_{\Sigma_0} (\psi \cdot \operatorname{grad} \psi_M - \psi_M \cdot \operatorname{grad} \psi) d\vec{\Sigma} = \iint_{\Sigma} (\psi \cdot \operatorname{grad} \psi_M - \psi_M \cdot \operatorname{grad} \psi) \cdot d\vec{\Sigma}$$

Le membre de gauche de cette égalité s'intègre tel que les points M de la sphère Σ_0 se confondent avec le point P ou tel que $r = MP \rightarrow 0$, soit :

$$\begin{aligned} & -\iint_{\Sigma_0} (\psi \cdot \operatorname{grad} \psi_M - \psi_M \cdot \operatorname{grad} \psi) \cdot d\vec{\Sigma} \\ &= 4\pi \cdot \lim_{r \rightarrow 0} \left[\psi_M + r \cdot \left(\frac{\partial \psi_M}{\partial r} - \frac{i2\pi}{\lambda} \right) \right] e^{\frac{i2\pi}{\lambda} r} = 4\pi \psi_P \end{aligned}$$

avec \vec{n}_0 sens opposé au rayon vecteur,

$\frac{\partial \psi_M}{\partial r}$ ne présentant pas de discontinuité au voisinage de P ,

ψ_M devenant ψ_P .

Finalement, la solution intégrale ψ_P au point P se calcule en connaissant ψ_M en tout point M de la surface Σ par

$$\psi_P = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} (\psi \cdot \operatorname{grad} \psi_M - \psi_M \cdot \operatorname{grad} \psi) \cdot d\vec{\Sigma}.$$

1.4 Amplitude totale intégrée sur une surface particulière

1.4.1 Répartition spatiale d'intensité au voisinage d'un foyer de miroir

La surface d'un miroir parabolique est éclairée par un faisceau de rayons lumineux parallèles. Selon les lois de l'optique géométrique, le faisceau de rayons lumineux converge vers le point F , appelé le foyer principal, pris comme origine (figure 6a).

Afin de connaître la répartition spatiale de l'amplitude autour de F et d'accéder à celle de l'intensité, l'intégrale de Kirchhoff s'emploie au point P dans le voisinage de F . Une sphère d'intégration Σ de rayon R et de centre F délimite le volume servant au calcul de l'amplitude ψ_P . Comme tous les rayons convergent vers F , l'amplitude ψ_M se décrit sur la sphère, par l'onde sphérique convergente de rayon constant $R = FM$ donnée par $\psi_M = \frac{\psi_0}{R} e^{\frac{i2\pi}{\lambda} R}$, tous les points M étant en phase.

Puis, la fonction de Green $\psi(r) = \frac{1}{r} e^{-\frac{i2\pi}{\lambda} r}$ est choisie pour le calcul de ψ_P tel que $r = PM \approx R$.

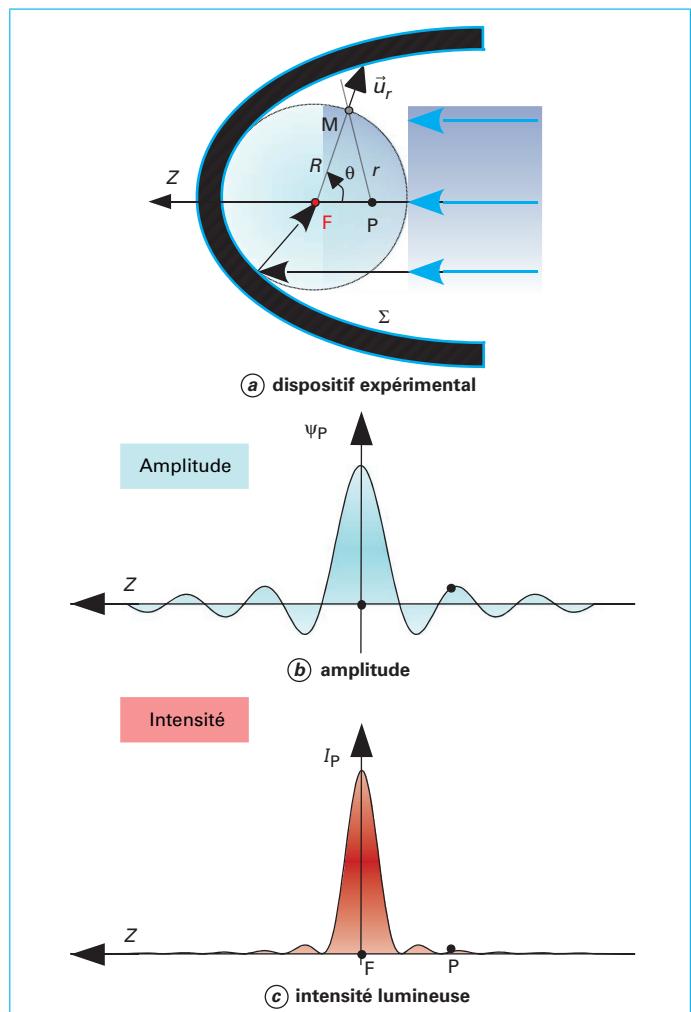


Figure 6 – Diffraction au voisinage d'un foyer d'un miroir parabolique

En supposant $\lambda \ll r$,

$$\overrightarrow{\text{grad}\psi_M} = \frac{i2\pi\psi_0}{\lambda R} \cdot e^{\frac{i2\pi}{\lambda}R} \cdot \vec{u}_r \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{grad}\psi} = -\frac{i2\pi}{\lambda r} \cdot e^{-\frac{i2\pi}{\lambda}r} \cdot \vec{u}_r.$$

Ainsi, en remplaçant dans l'intégrale de Kirchhoff, l'expression

$$\psi_P = \frac{i\psi_0}{\lambda R^2} \cdot \iint_{\Sigma} e^{\frac{i2\pi}{\lambda}(R-r)} d\Sigma \quad \text{est obtenue tel que } d\Sigma = \overrightarrow{d\Sigma} \cdot \vec{u}_r.$$

En considérant le triangle (F, P, M) , $r^2 = R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta$ et l'estimation de la distance $R - r = z \cos \theta$ sont obtenues à la suite du développement de r^2 au premier degré avec $z \ll R$.

Enfin, $\psi_P = \frac{2\pi\psi_0}{i\lambda} \cdot \int_0^\pi e^{\frac{i2\pi}{\lambda}z \cos \theta} \cdot d \cos \theta$ avec $d\Sigma = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$

$$\text{puis par intégration } \psi_P = \frac{4i\psi_0\pi}{\lambda} \cdot \text{sinc}\left(\frac{2\pi}{\lambda}z\right) [2].$$

Cette expression mathématique montre que l'amplitude du champ électrique ψ_P au voisinage de F se formule selon **une fonction sinus cardinal** (figure 6b) et qu'un déphasage de $\frac{\pi}{2}$ apparaît.

En outre, l'effet d'échelle lié à l'éloignement d'observation révèle que la répartition d'intensité $I_P = \langle |\psi_P|^2 \rangle$ au foyer du miroir n'est donc jamais réellement ponctuelle (figure 6c).

1.4.2 Répartition spatiale de l'amplitude totale produite par un obstacle plan

Pour les ondes limitées par un obstacle, le calcul de l'amplitude totale ψ_P par l'intégrale de Kirchhoff (§ 1.3) nécessite de définir plusieurs surfaces d'intégration. Ainsi, pour le cas d'un écran plan percé par un trou, l'amplitude ψ_M se décrit sur la surface fermée Σ_{Tot} , qui est scindée en trois portions (figure 7) : la première surface plane Σ pour laquelle ψ_M est l'amplitude des sources relais ; la deuxième surface plane Σ_2 occultée par l'écran donnant une amplitude ψ_M nulle ; et la troisième sphérique Σ_3 donnant également une amplitude ψ_M nulle car son rayon R tend vers l'infini.

L'intégrale de Rayleigh-Sommerfeld (RS) simplifie l'amplitude totale ψ_P en tout point P situé au voisinage d'une ouverture plane (encadré 3) :

$$\psi_P = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} \psi_M \cdot \frac{\cos \varphi}{r} \cdot e^{\frac{i2\pi}{\lambda}r} \cdot d\Sigma$$

Cette formule met en évidence trois paramètres dépendant de la géométrie : la surface d'intégration Σ , l'inclinaison par rapport à sa normale $\cos \varphi$ et la phase de l'ondelette $\frac{i2\pi}{\lambda}r$.

Ces trois paramètres sont étudiés en prenant en considération les contraintes expérimentales du paragraphe 2.

2. Restrictions expérimentales

2.1 Diffraction paraxiale et métaxiale

Le calcul de l'amplitude totale ψ_P par l'intégrale de Kirchhoff dépend de la surface d'intégration Σ . Une simplification de l'intégration apparaît pour une surface plane ou sphérique (figure 8).

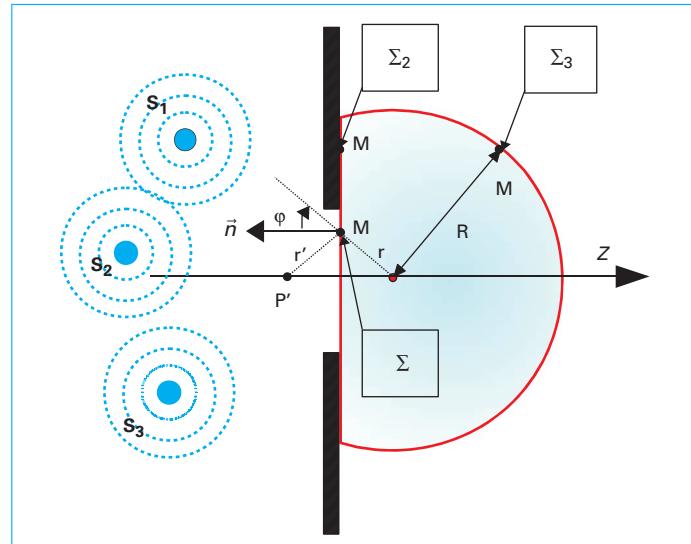


Figure 7 – Étude d'un écran plan percé par un trou

Encadré 3 – Intégrale de Rayleigh-Sommerfeld (RS)

Théorème sur la théorie des potentiels [3] :

Lorsqu'une fonction potentielle s'annule simultanément avec son gradient sur une surface finie, elle est identiquement nulle en tout point de l'espace.

Choix adapté d'une fonction de Green pour l'intégration de Kirchhoff [1] :

Suivant le théorème précédent, un choix adapté d'une fonction de Green doit permettre le calcul de l'intégrale de Kirchhoff en évitant simultanément $\psi_M = 0$ et $\overrightarrow{\text{grad}(\psi_M)} = \vec{0}$ sur l'élément de surface Σ_2 . D'après Rayleigh-Sommerfeld, cette fonction de Green se définit par la combinaison des deux ondelettes sphériques $\psi_- = \frac{1}{r} \cdot e^{\frac{i2\pi}{\lambda}r} - \frac{1}{r'} \cdot e^{\frac{i2\pi}{\lambda}r'}$, la première $\psi(r) = \frac{1}{r} \cdot e^{\frac{i2\pi}{\lambda}r}$ étant issue de P et la deuxième $\psi(r') = \frac{1}{r'} \cdot e^{\frac{i2\pi}{\lambda}r'}$ étant issue de P' symétrique de P par rapport aux surfaces planes (figure 7). Par conséquent, l'intégrale de Kirchhoff s'effectue successivement :

– **sur la surface sphérique Σ_3** , l'intégrale s'annule en imposant la condition de Sommerfeld donnée par :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[R \left(\overrightarrow{\text{grad}\psi_M} \cdot \vec{n} + \frac{i2\pi}{\lambda} \psi_M \right) \right] = 0$$

– **sur la surface plane Σ_2** prise en dehors de l'ouverture avec $r = r'$, les amplitudes ψ_M et ψ_- sont nulles et par conséquent, l'intégrale s'annule ;

– **sur la surface Σ** avec $r = r'$, $\psi_- = 0$ et :

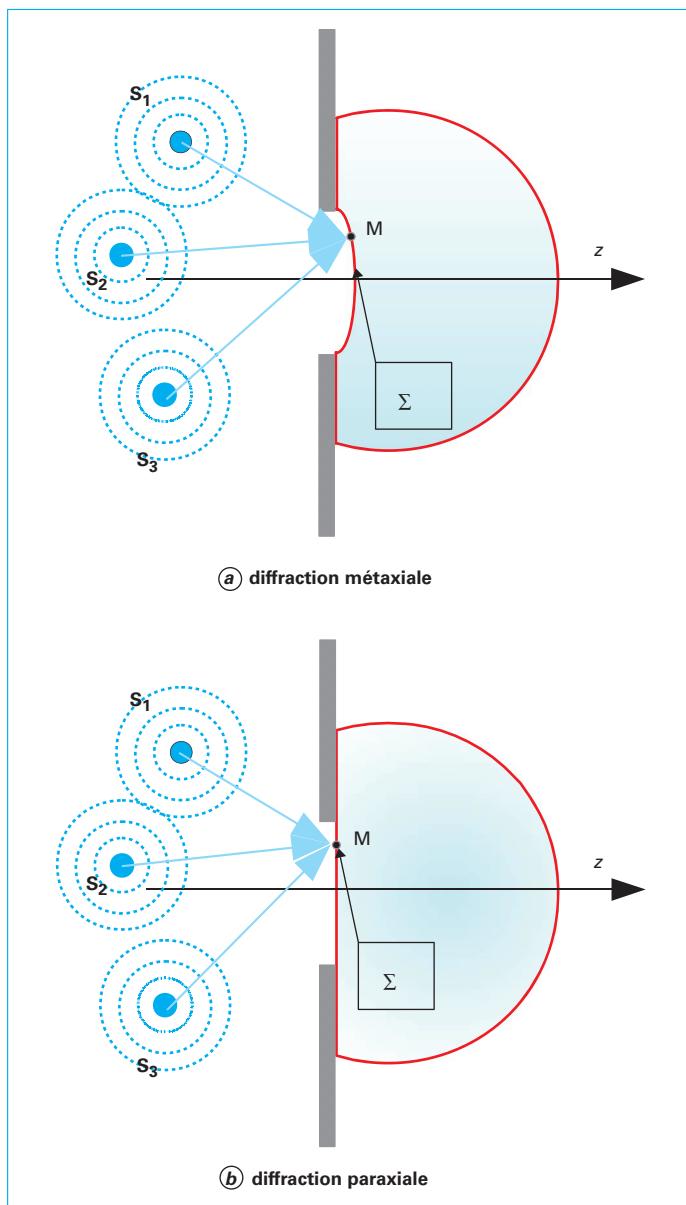
$$\overrightarrow{\text{grad}(\psi_-)} \cdot \vec{n} = 2 \cos \varphi \cdot \frac{i2\pi}{\lambda} \cdot e^{\frac{i2\pi}{\lambda}r},$$

calculée selon :

$$\overrightarrow{\text{grad}(\psi_-)} \cdot \vec{n} = \cos \varphi \cdot \frac{i2\pi}{\lambda} \cdot e^{\frac{i2\pi}{\lambda}r} - \cos(\varphi - \pi) \frac{i2\pi}{\lambda} \cdot e^{\frac{i2\pi}{\lambda}r}$$

en respectant l'hypothèse $r \gg \lambda$, l'intégrale devient :

$$\psi_P = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} \psi_M \cdot \frac{\cos \varphi}{r} \cdot e^{\frac{i2\pi}{\lambda}r} d\Sigma.$$



Ainsi, deux approximations sont possibles :

- la diffraction paraxiale classique pour laquelle l'amplitude ψ_P est recherchée à partir de **surfaces d'intégration planes** qui constituent l'intégrale de RS [A 191] [1] [2] [4] ;
- la diffraction métaxiale pour laquelle la solution est recherchée à partir de **surface d'intégration sous forme de calottes sphériques**. Cette dernière approximation étudie plus précisément les phénomènes lumineux, car elle préserve mieux la phase des ondelettes provenant d'une source [5] [6] [7].

Seule la **diffraction paraxiale** est traitée dans la suite de ce document, car la diffraction métaxiale fait appel à des notions plus délicates qui ne font pas l'objet du présent article [7]. Ainsi, la surface d'intégration Σ est considérée comme quasi-plane pour le reste de ce document.

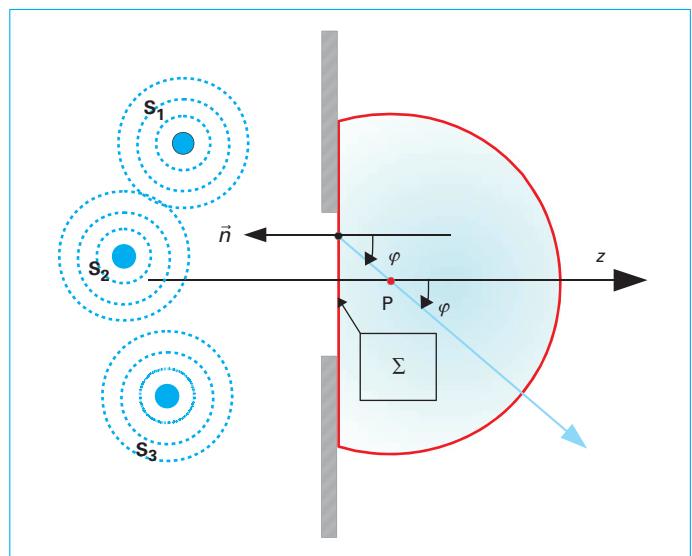


Figure 9 – Diffraction paraxiale (conditions de Gauss et d'aplanétisme)

2.2 Étude transversale des rayons lumineux

L'étude transversale de la propagation des rayons lumineux permet de considérer deux restrictions :

- la première limitation expérimentale impose que les surfaces de l'écran plan percé et du capteur pour la mesure de l'intensité soient disposées sur un axe perpendiculaire (**condition d'aplanétisme**). En conséquence, comme la surface d'intégration Σ est plane, sa normale est prise parallèle à l'axe optique (figure 9) ;
- la deuxième limitation expérimentale impose que les rayons lumineux se propagent en gardant un petit écartement et une faible inclinaison par rapport à l'axe optique (**conditions de Gauss**).

Ces deux limitations s'appliquent tout au long de l'article [E 8 250]. Ainsi, l'angle φ formé entre l'axe optique et les rayons reste petit et $\cos \varphi \approx 1$.

Sous les **conditions de Gauss**, l'intégrale de RS (§ 1.4.2), donnant l'amplitude totale intégrée ψ_P en un point P situé au voisinage d'une ouverture, est simplifiée par :

$$\psi_P = \frac{1}{i\lambda} \cdot \iint_{\Sigma} \frac{\psi_M \cdot e^{i\frac{2\pi}{\lambda}r}}{r} d\Sigma$$

2.3 Étude longitudinale de la surface des ondelettes

Les surfaces des ondelettes σ ne sont pas à confondre avec les surfaces d'intégration Σ . Les surfaces des ondelettes élémentaires

$\psi(r) = \frac{1}{r} e^{-\frac{i2\pi}{\lambda}r}$, conditionnées essentiellement par leur phase, sont sphériques en tous points de l'espace. Cependant, suivant l'éloignement du champ d'observation, ces surfaces peuvent être approximées à d'autres formes (paraboles, plans), comme expliqué au paragraphe 2.3.1 et illustrées en figure 10. Ainsi, l'amplitude totale ψ_P se simplifie plus ou moins en fonction du domaine d'observation.

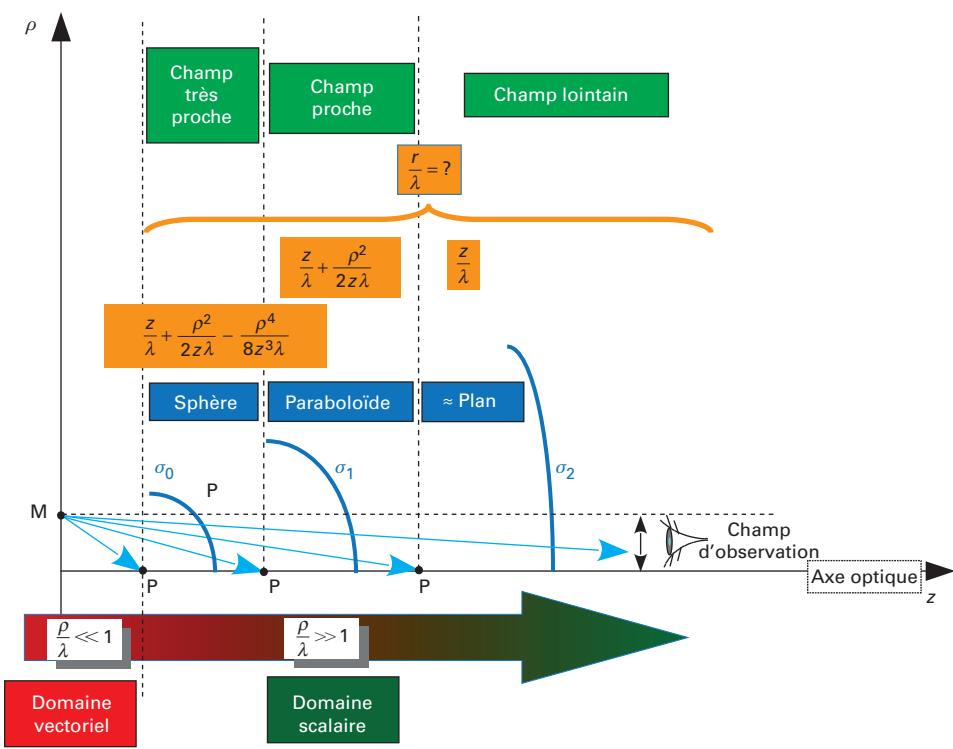


Figure 10 – Étude de l'approximation d'une surface d'ondelette lors de la propagation d'un rayon lumineux

2.3.1 Approximation de la forme de la surface des ondelettes

Le calcul de l'amplitude totale intégrée ψ_P (§ 2.2) dépend de la forme de la surface σ des ondelettes. Leur forme est donc fonction du paramètre $r = \sqrt{z^2 + \rho^2}$ dans le terme de phase $-\frac{i2\pi}{\lambda}r$ pour les points $M(\rho, 0)$ et $P(0, z)$ du champ d'observation, ρ et z étant les coordonnées cylindriques (figure 10). Les restrictions expérimentales du paragraphe 2.2 permettent l'approximation suivante $\frac{\rho}{z} \ll 1$ qui mène au développement limité :

$$r = z + \frac{\rho^2}{2z} - \frac{\rho^4}{8z^3}$$

Cependant, le terme de phase de l'ondelette dépend aussi de la longueur d'onde λ . Ainsi, deux domaines peuvent être considérés (figure 10) :

- $\frac{\rho}{\lambda} \ll 1$ pour le domaine **vectoriel**,
- et $\frac{\rho}{\lambda} \gg 1$ pour le domaine **scalaire**.

Cependant, comme la taille du champ d'observation est grande devant λ (§ 1.2.1), le développement limité ci-dessus doit être considéré uniquement dans le domaine scalaire. Pour ce dernier, trois champs peuvent être étudiés où le terme $\frac{r}{\lambda} = \frac{z}{\lambda} + \frac{\rho^2}{2z\lambda} - \frac{\rho^4}{8z^3\lambda}$ évolue au fur et à mesure de la propagation de la surface de l'ondelette sphérique le long de l'axe Oz (figure 10) :

– celui dit du **champ très proche** incluant les trois termes du développement limité. Dans ce cas, la surface de l'ondelette se modélise en une sphère σ_0 ;

– celui dit de **champ proche** tel que le troisième terme $\frac{\rho^4}{8z^3\lambda} \ll 1$ soit négligeable. Dans ce cas, la surface de l'ondelette se modélise en un paraboloïde σ_1 ;

– puis celui dit du **champ lointain** dont le deuxième terme $\frac{\rho^2}{2z\lambda} \ll 1$ devient aussi négligeable. Dans ce cas, la surface de l'ondelette s'approche en un plan σ_2 .

Le calcul de l'amplitude totale intégrée ψ_P (§ 2.2) dépend de la forme de la surface σ des ondelettes qui s'approche selon le nombre de termes pris en compte dans la phase. Deux domaines se définissent :

- celui du champ proche qui débute à $z_1 \approx \left(\frac{\rho^4}{8\lambda}\right)^{1/3}$ (§ 2.4) ;
- celui du champ lointain qui commence à $z_2 \approx \frac{\rho^2}{2\lambda}$ (§ 2.6).

Application numérique :

La position des frontières entre les différents domaines est calculée pour l'observation d'un phénomène de diffraction sur un champ d'observation de rayon $\rho = 1,6$ mm pour deux types de sources lasers à $\lambda = 488$ nm et $\lambda = 633$ nm (figure 11).

Ces positions sont déterminées successivement par :

$$z_1 \approx \left(\frac{\rho^4}{8\lambda}\right)^{1/3} \text{ et } z_2 \approx \frac{\rho^2}{2\lambda}.$$

Dans le domaine visible et pour un champ d'observation de 1,6 mm de rayon, la limite de séparation entre champ proche et champ lointain peut facilement atteindre l'ordre du mètre.

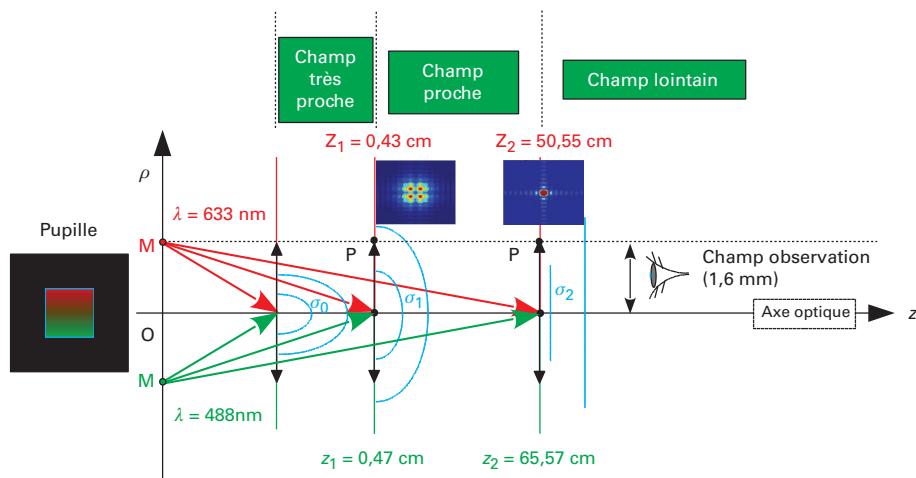


Figure 11 – Frontière des différents domaines et images de la diffraction simulées (§ 2.5.2)

2.4 Champ proche

2.4.1 Aspect théorique de la diffraction en champ proche

L'amplitude ψ_P au point P s'obtient à partir de l'éclairage d'un écran plan percé d'une ouverture où se situent les sources relais aux points M (§ 2.2). Par ces points M et P, passe un rayon lumineux. En outre, l'ouverture et le plan d'observation sont séparés d'une distance D (figure 12).

Le champ proche est le domaine d'étude pour lequel le développement limité de la distance $r = MP(\rho, z)$ est $\frac{r}{\lambda} \approx \frac{z}{\lambda} + \frac{\rho^2}{2z\lambda}$ pour P placé sur l'axe optique $O'P = \rho'$, la distance s'exprime par $r = MP(M'P, z)$, M' étant la projection M sur le plan d'observation à la distance $z = D$ (figure 12). Ainsi le développement limité devient :

$$\frac{r}{\lambda} \approx \frac{D}{\lambda} + \frac{M'P^2}{2D\lambda}$$

Le passage des coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes s'effectue selon ces quelques étapes de calcul :

- $M'P^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\omega' - \omega)$ (théorème de Pythagore généralisé) ;
- $M'P^2 = \rho^2 (\cos^2 \omega + \sin^2 \omega) + \rho'^2 (\cos^2 \omega' + \sin^2 \theta') - 2\rho\rho' \cos(\omega' - \omega)$;
- $M'P^2 = [\rho' \cos \omega' - \rho \sin \omega]^2 + [\rho' \sin \omega' - \rho \sin \omega]^2$;
- $M'P^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2$;

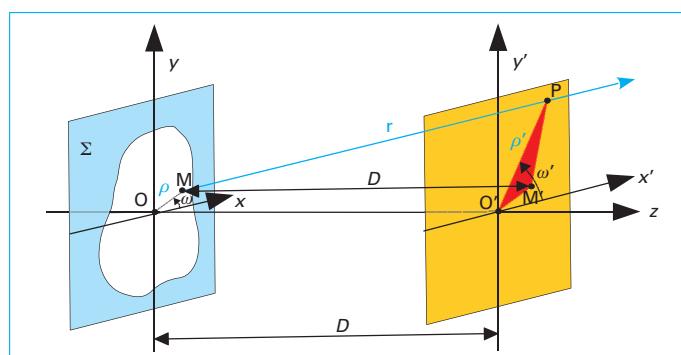


Figure 12 – Diffraction par une ouverture plane en champ proche

L'intégrale de RS devient alors :

$$\psi_P = \frac{e^{i2\pi D}}{i\lambda D} \iint_{\Sigma} \psi_M \cdot e^{\frac{i\pi}{\lambda D}[(x'-x)^2 + (y'-y)^2]} dx \cdot dy$$

Le terme $\frac{e^{i2\pi D}}{i\lambda D}$ ne dépendant que de D est normalisé à l'unité.

En champ proche, l'expression de l'amplitude totale intégrée ψ_P s'exprime par :

$$\psi_P = \iint_{\Sigma} \psi_M \cdot e^{\frac{i\pi}{\lambda D}[(x'-x)^2 + (y'-y)^2]} dx \cdot dy$$

communément appelée « transformée de Fresnel ».

Cette diffraction de champ proche est nommée **diffraction de Fresnel**.

La diffraction de Fresnel s'exprime plus aisément par le produit de convolution :

$$\psi_P = \psi_M * g_{MP} = \psi_M * e^{\frac{i\pi}{\lambda D}(x^2 + y^2)}$$

où g_{MP} est une distribution gaussienne complexe (encadré 4).

Encadré 4 – Produit de convolution

Le produit de convolution est très utilisé en physique, dès lors que les systèmes physiques transformant les signaux sont linéaires et invariants. Ce produit se définit par l'intégrale :

$$s(x') = e * h(x') = \int_R e(x) h(x' - x) dx$$

avec $e(x)$ signal appliquée à l'entrée,
 $s(x')$ signal engendré à la sortie,
 $h(x)$ caractérisant un système physique, appelée réponse impulsionnelle.

Il est caractérisé par deux propriétés principales utilisées par la suite :

- propriété de translation : $e(x - x_0) = e(x) * \delta(x - x_0)$;
 - propriété du produit algébrique : $e(x_0) = e(x) * \delta(x - x_0)$;
- avec δ notation de la distribution de Dirac.

2.4.2 Application à la diffraction par un bord

L'amplitude ψ_p produite par la diffraction par un bord placé en $x=0$ allongé suivant les ordonnées se calcule au moyen de la transformation de Fresnel (§ 2.4.1). L'amplitude du champ électrique au niveau du bord est représentée par :

$$\psi_M = \psi_0 H(x)$$

avec $H(x)$ fonction échelon $H(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq x < +\infty \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

La transformation de Fresnel se modifie selon :

$$\psi_p = \psi_0 \cdot \int_0^{+\infty} e^{i \frac{\pi}{\lambda D} (x'-x)^2} \cdot dx,$$

puisque le calcul n'est réalisé que selon les abscisses.

En effectuant le changement de variable :

$$\frac{\pi u^2}{2} = \frac{\pi}{\lambda D} (x'-x)^2,$$

l'amplitude lumineuse au point P change selon :

$$\psi_p = \psi_0 \int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{2}{\lambda D}} x'} e^{i \frac{\pi}{2} u^2} \cdot du$$

à une constante près, et se décompose selon sa partie réelle et imaginaire :

$$\psi_p = \psi_0 [C(x') + iS(x')]$$

avec $C(x') = \int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{2}{\lambda D}} x'} \cos\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) du$ et $S(x') = \int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{2}{\lambda D}} x'} \sin\left(\frac{\pi}{2} u^2\right) du$.

Le graphe de $S(x')$ en fonction de $C(x')$ forme alors la spirale de Cornu (figure 13).

Ainsi, l'amplitude $\psi_p = \psi_0 \left[\left(C\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda D}} x'\right) + \frac{1}{2} \right) + i \left(S\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda D}} x'\right) + \frac{1}{2} \right) \right]$ représente la longueur d'un vecteur dessiné sur la spirale de Cornu reliant son centre inférieur et son contour (figure 13). L'intensité, quant à elle, se calcule à partir de la norme carrée du vecteur précédent $I_p = \langle |\psi_p|^2 \rangle$ (figure 14).

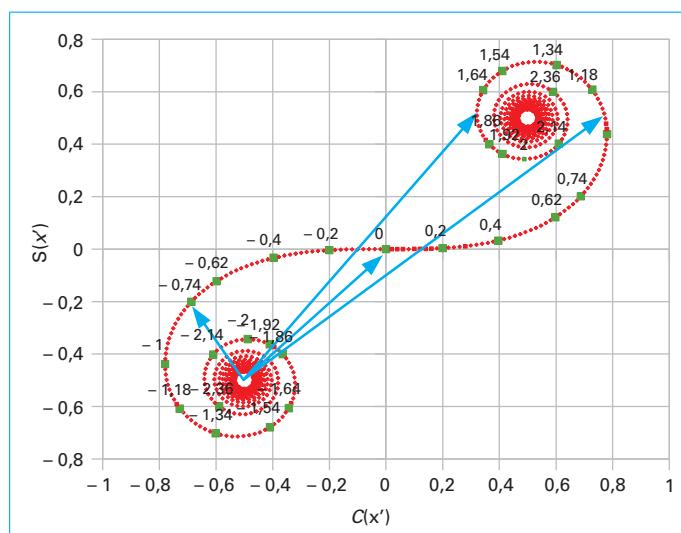


Figure 13 – Longueur des vecteurs bleus sur la spirale de Cornu représentant l'amplitude diffractée par un bord

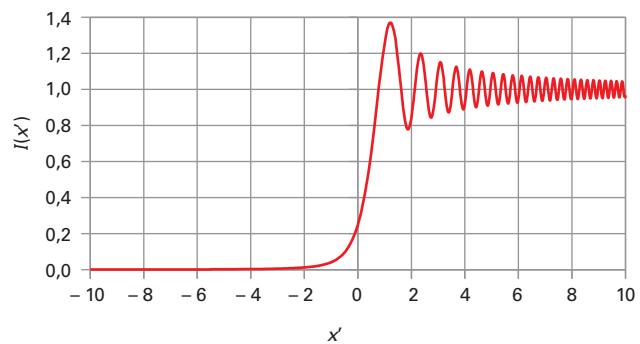


Figure 14 – Profil d'intensité de la diffraction par un bord en champ proche, déduit de la spirale de Cornu

2.5 Exemples de transition du champ proche au champ lointain

La frontière entre le champ proche et le champ lointain donnée au paragraphe 2.3.2 n'est en réalité pas aussi nette. Le passage entre ces deux domaines s'effectue progressivement. Ainsi, pour les deux domaines, l'amplitude totale ψ_p du champ électrique peut se calculer uniquement à partir de la transformation de Fresnel, à travers l'exemple d'une diffraction par une ouverture rectangulaire.

2.5.1 Aspect théorique de la diffraction par une fente

Une fente longue peut être vue comme deux bords (§ 2.4.2) « tête-bêche », longs et proches l'un de l'autre. Ainsi, l'amplitude du champ électrique au niveau de la fente s'exprime par deux fonctions échelon :

$$\psi_M(x) = \psi_0 \left[H\left(x + \frac{a}{2}\right) - H\left(x - \frac{a}{2}\right) \right]$$

avec a distance entre les deux bords.

Le profil du bord de gauche et du bord de droite étant respectivement $H\left(x + \frac{a}{2}\right)$ et $H\left(x - \frac{a}{2}\right)$, l'amplitude du champ électrique diffracté $\psi_p(x')$ se calcule par la soustraction des transformées de Fresnel :

$$\psi_0 \left[\left(C\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda D}} \left(x' + \frac{a}{2}\right)\right) + \frac{1}{2} \right) + i \left(S\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda D}} \left(x' + \frac{a}{2}\right)\right) + \frac{1}{2} \right) \right]$$

et

$$\psi_0 \left[\left(C\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda D}} \left(x' - \frac{a}{2}\right)\right) + \frac{1}{2} \right) + i \left(S\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda D}} \left(x' - \frac{a}{2}\right)\right) + \frac{1}{2} \right) \right]$$

respectivement pour le bord de gauche et de droite, compte tenu des décalages de $-\frac{a}{2}$ et $+\frac{a}{2}$.

Chaque transformée de Fresnel représente un vecteur dessiné sur la spirale de Cornu. La représentation sur cette dernière se réalise alors par la soustraction des deux vecteurs (figure 15) (bleu = vert - orange) (§ 2.4.2) associés à l'amplitude diffractée de chaque bord.

L'intensité se calcule alors à partir de la norme carrée du vecteur différence (§ 2.5.2).

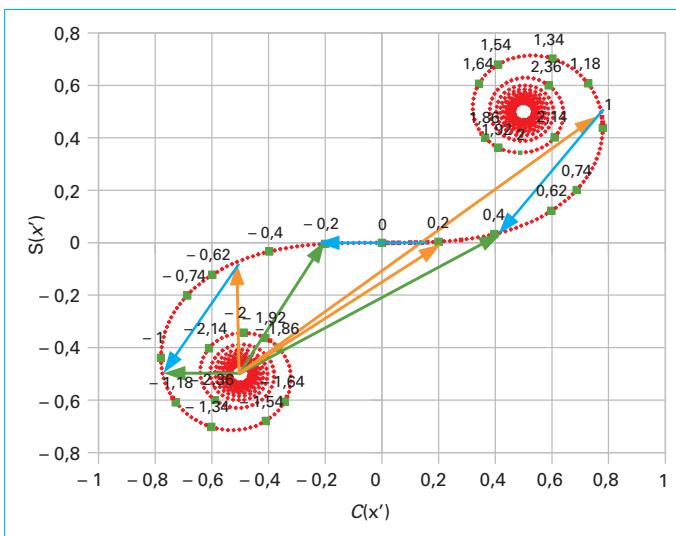


Figure 15 – Amplitude diffractée calculée par soustraction des vecteurs vert et orange

2.5.2 Simulation de la diffraction par une ouverture rectangulaire

L'intensité produite par la diffraction d'une ouverture rectangulaire, éclairée par une onde plane ($\lambda = 633 \text{ nm}$), se simule au moyen du plugin *Numerical Propagation* [8] exécuté à l'aide du logiciel ImageJ. Ainsi, il est possible d'obtenir les figures de diffraction **16**, **17** et **18**, en fonction de la distance d'observation en correspondance avec les limites calculées au (§ 2.3).

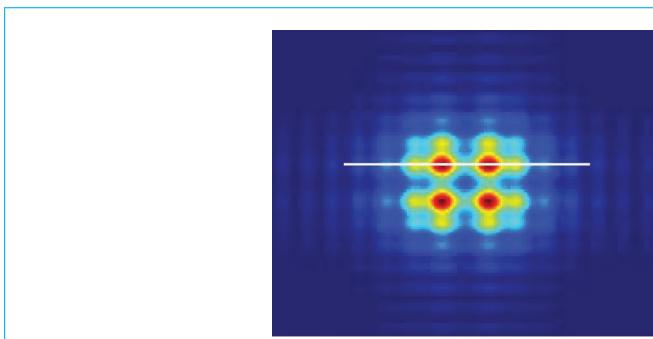


Figure 16 – Diffraction par une ouverture carrée en champ proche ($a = 0,31 \text{ mm}$, $D = 2 \text{ cm}$)

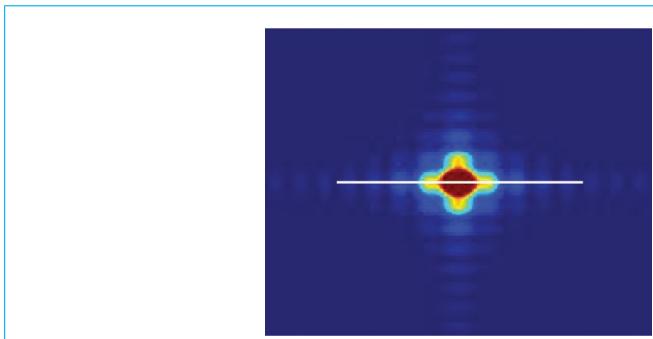


Figure 17 – Diffraction par une ouverture carrée en champ intermédiaire ($a = 0,31 \text{ mm}$, $D = 5 \text{ cm}$)

La figure **16** montre la superposition de l'intensité produite par deux bords « tête-bêche » ; la figure **17** présente une situation intermédiaire entre les domaines de champ proche et lointain ; et la figure **18** expose une figure de diffraction de champ lointain.

2.6 Champ lointain

Le champ lointain se définit à partir du champ proche en augmentant la distance $z = D$ (§ 2.3.1). Pour le champ proche (§ 2.4.1), le développement limité est : $\frac{r}{\lambda} \approx \frac{D}{\lambda} + \frac{M'P^2}{2D\lambda}$ avec $M'P^2 = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos(\omega' - \omega)$.

Or, la dimension de la pupille reste petite devant la dimension du champ d'observation (figure **19**). Par conséquent, les deux approximations $p^2 \ll p'^2$ et $p^2 \ll 2pp'$ apparaissent.

Ainsi, la distance se calcule selon les étapes :

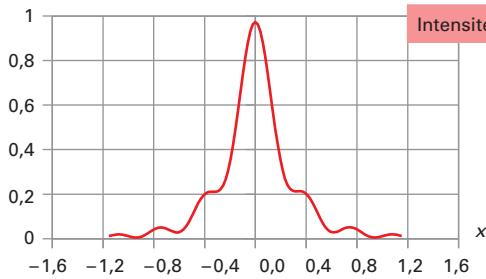
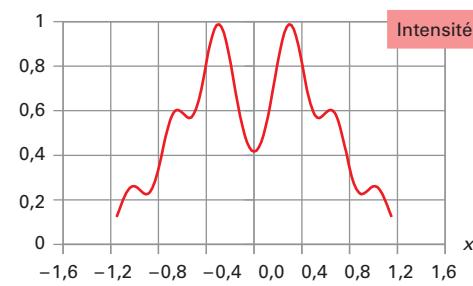
- $M'P^2 = p'^2 - 2pp' \cos(\omega' - \omega)$;
- $M'P^2 = p'^2 - 2(p' \cos(\omega') \cdot p \cos \omega + p' \sin(\omega') \cdot p \cdot \sin \omega)$;
- $M'P^2 = p'^2 - 2(x'x + y'y)$.

L'intégrale de RS devient :

$$\psi_P = \frac{e^{i\frac{2\pi}{\lambda}D}}{i\lambda D} \cdot e^{\frac{i\pi}{\lambda D}p'^2} \cdot \iint_{\Sigma} \psi_M \cdot e^{-\frac{2i\pi}{\lambda D}(x'x + y'y)} dx \cdot dy$$

Le terme $e^{i\frac{2\pi}{\lambda}D}$, ne dépendant que de D , est normalisé à l'unité et

le terme $e^{\frac{i\pi}{\lambda D}p'^2}$ disparaissant lors du calcul de l'intensité, est oublié. En revanche, si le dispositif optique comporte plusieurs pupilles, ce terme doit être pris en compte. Puis, en introduisant les coordon-



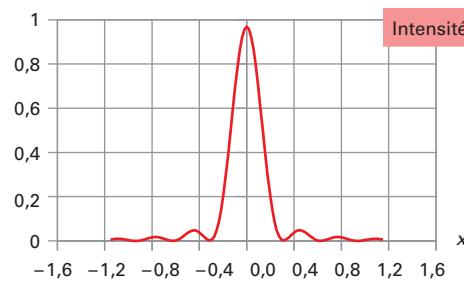
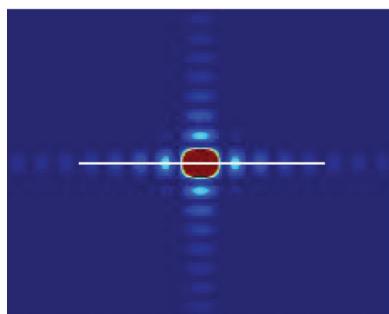
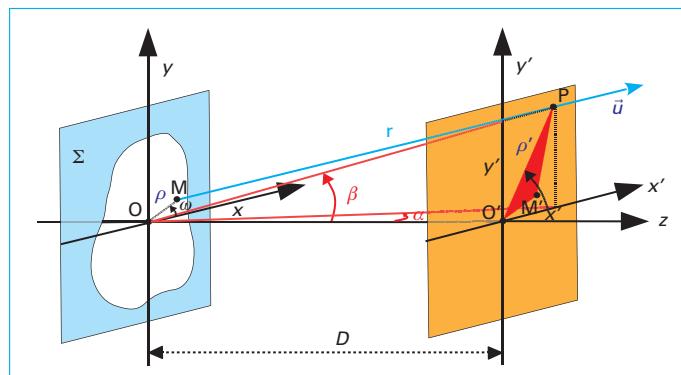
Figure 18 – Diffraction par une ouverture carrée en champ lointain ($a = 0,31 \text{ mm}$, $D = 50 \text{ cm}$)

Figure 19 – Diffraction par une ouverture plane en champ lointain

nées angulaires (α, β) du point P (encadré 5), comme celles du vecteur **directeur unitaire \vec{u} du rayon lumineux**, les coordonnées (x', y') sont remplacées par $x' = \alpha D$ et $y' = \beta D$ (figure 19).

En champ lointain, l'expression de l'amplitude totale intégrée ψ_P s'exprime par :

$$\psi_P = \iint \psi_M \cdot e^{-\frac{2i\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y)} dx dy$$

qui représente simplement **une transformée de Fourier bidimensionnelle ou spatiale** de l'amplitude ψ_M du plan de l'ouverture. Cette **diffraction de champ lointain** est nommée **diffraction de Fraunhofer** [4].

Encadré 5 – Coordonnées angulaires

Les coordonnées angulaires (α, β) sont définies à partir de la projection du vecteur directeur unitaire \vec{u} du rayon lumineux sur les deux vecteurs unitaires du repère cartésien (\vec{u}_x, \vec{u}_y) (figure 20).

La surface sphérique S_2 de centre P appartenant au domaine du champ lointain est formée à partir de la surface quasi-plane S_1 au voisinage du plan d'ouverture placée au point O (**application du principe de retour inverse de la lumière**). Dans le cadre des conditions de Gauss, les « sinus directeurs » du vecteur \vec{u} se confondent avec leur angle $\alpha = \sin \alpha$ et $\beta = \sin \beta$. Ainsi, par construction géométrique, les mêmes angles s'expriment aussi selon $\alpha = \tan \alpha = \frac{x'}{D}$ et $\beta = \tan \beta = \frac{y'}{D}$.

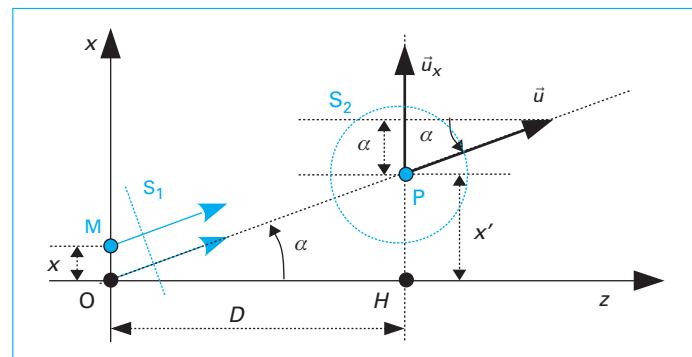


Figure 20 – Définition de l'abscisse angulaire dans le plan de coupe xOz

2.7 Emploi d'une lentille pour l'optique de Fourier

La diffraction de Fraunhofer peut néanmoins s'avérer difficile à mettre en œuvre techniquement, puisque les distances importantes à respecter pour entrer dans le domaine du champ lointain (figure 18 : $D = 50 \text{ cm}$) ne sont pas compatibles avec les dimensions de systèmes optiques à visée applicative. L'introduction d'une simple lentille réduit cette distance, en jouant le rôle de compensatrice de phase, et permet un encombrement plus modeste.

2.7.1 Phase introduite lors de la traversée d'une lentille

Une lentille biconvexe est un dispositif optique constitué de deux dioptrès sphériques de rayon de courbure $R_1 = \bar{S}_1 C_1$ et $R_2 = \bar{S}_2 C_2$ qui délimitent un verre d'indice de réfraction n , avec S et C le sommet et le centre de ces dioptrès respectivement (figure 21).

L'équation de la surface de séparation air – verre du dioptre sphérique d'entrée a pour expression $x^2 + y^2 + (z - R_1)^2 = R_1^2$ pour l'origine en S_1 , avec x, y et z respectivement les coordonnées d'un point sur la surface sphérique. Comme le rayon R_1 est supposé avoir une grande valeur par rapport aux dimensions de la lentille, l'équation précédente se simplifie en se limitant aux termes du premier degré selon z , soit $z = \frac{x^2 + y^2}{2R_1}$. Ainsi, une différence de chemin optique $\delta_e = zn - z$ lors de la traversée du dioptre d'entrée est produite entre un rayon passant par l'axe optique et un rayon proche de l'axe soit $\delta_e = (n-1) \frac{x^2 + y^2}{2R_1}$. Le dioptre de sortie génère

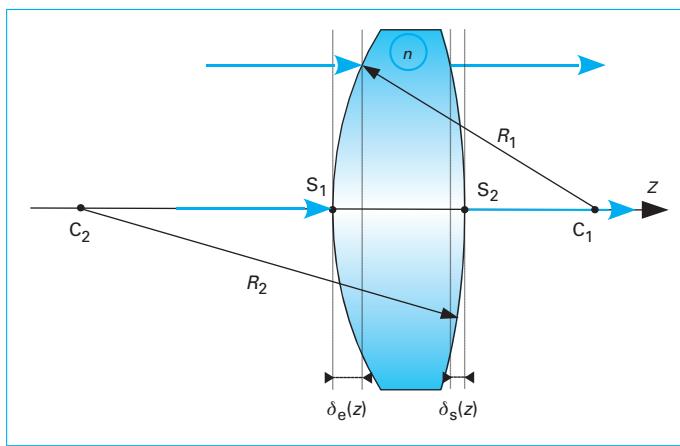


Figure 21 – Phase induite par une lentille biconvexe

quant à lui un retard optique $\delta_s = (n-1) \frac{x^2 + y^2}{2(-R_2)}$ pour finalement obtenir un retard optique totale δ_{tot} lors de la traversée de la lentille de [E 8 250] :

$$\delta_{\text{tot}} = \delta_e + \delta_s = \frac{x^2 + y^2}{2f}$$

avec f distance focale de la lentille donnée par $\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$.

L'amplitude complexe totale intégrée ψ_P à la sortie de la lentille est donc multipliée par $e^{-\frac{i2\pi}{\lambda} \delta_{\text{tot}}} = e^{-\frac{i\pi}{\lambda f} (x^2 + y^2)}$, montrant une avance de phase des rayons au fur et à mesure de leur éloignement de l'axe optique.

2.7.2 Montage aux foyers d'une lentille

Le montage est constitué d'une ouverture plane diffractant la lumière, d'une lentille biconvexe compensant la phase et d'un plan d'observation. L'ouverture et le plan d'observation sont placés respectivement au foyer objet et image de la lentille. La formule de Fresnel (§ 2.4.1) doit être appliquée successivement en prenant $D = f$ (figure 22) :

- entre le plan contenant l'ouverture et celui d'entrée de la lentille :

$$\psi_I = \psi_M * g_{MI} = \iint_{\Sigma} \psi_M \cdot e^{\frac{i\pi}{\lambda f} [(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2]} dx \cdot dy$$

- entre le plan de sortie de la lentille et celui d'observation :

$$\psi_P = \psi_I * g_{IP} = \iint_{\Sigma} \psi_I \cdot e^{\frac{i\pi}{\lambda f} [(\xi'-\xi)^2 + (\eta'-\eta)^2]} dx \cdot dy$$

Le cheminement dans l'espace objet de la lentille et la traversée de la lentille permet de calculer :

$$\psi_I = \iint_{\Sigma} \psi_M \cdot e^{\frac{i\pi}{\lambda f} (x^2 + y^2)} \cdot e^{-\frac{i2\pi}{\lambda f} (\xi x + \eta y)} dx \cdot dy$$

le terme $e^{-\frac{i\pi}{\lambda f} (\xi^2 + \eta^2)}$ étant alors compensé.

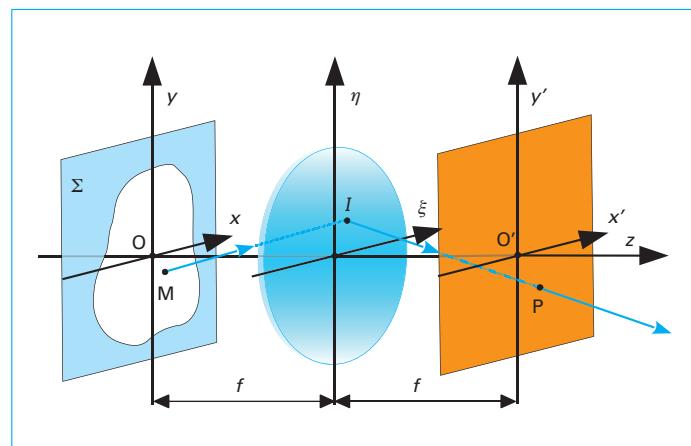


Figure 22 – Montage aux foyers d'une lentille biconvexe

Le cheminement dans l'espace image de la lentille permet de calculer l'amplitude dans le plan d'observation selon la relation :

$$\psi_P = \iint_{\Sigma} \psi_M \cdot e^{\frac{i\pi}{\lambda f} (x^2 + y^2)} \Gamma(x, y) dx \cdot dy$$

en substituant ψ_I , le terme $\Gamma(x, y)$ égalant avec une lentille supposée non diaphragmée :

$$\Gamma(x, y) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{i\pi}{\lambda f} [(\xi'-\xi)^2 + (\eta'-\eta)^2]} \cdot e^{-\frac{i2\pi}{\lambda f} (\xi x + \eta y)} d\xi \cdot d\eta.$$

L'intégration de $\Gamma(x, y)$ (encadré 6) donne :

$$\Gamma(x, y) = e^{-\frac{i\pi}{\lambda f} (x^2 + y^2)} \cdot e^{-\frac{i2\pi}{\lambda f} (x'x + y'y)}$$

Finalement, l'amplitude dans le plan d'observation se calcule selon :

$$\psi_P = \iint_{\Sigma} \psi_M \cdot e^{-\frac{i2\pi}{\lambda f} (x'x + y'y)} dx \cdot dy$$

les termes du second degré étant une deuxième fois compensés.

Ainsi les coordonnées (x', y') étant remplacées par $x' = \alpha x$ et $y' = \beta y$ (encadré 5), l'amplitude totale s'exprime par :

$$\psi_P = \iint_{\Sigma} \psi_M \cdot e^{-\frac{i2\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y)} dx \cdot dy$$

L'introduction d'une lentille permet de compenser les termes du deuxième degré dans la formule de Fresnel (§ 2.4.1) et l'amplitude totale ψ_P dans le plan d'observation est la transformée de Fourier spatiale $\psi_P = \iint_{\Sigma} \psi_M \cdot e^{-\frac{i2\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y)} dx \cdot dy$ de l'amplitude ψ_M présente dans le plan de l'ouverture.

2.8 Cheminement vers l'optique de Fourier

La décomposition de l'onde lumineuse en éléments simples a permis d'établir le contexte scalaire de l'optique ondulatoire en définis-

Encadré 6 – Calcul de l'intégrale Γ

Le calcul de l'intégrale Γ nécessite de connaître la transformée de Fourier d'une gaussienne, ou plus généralement celle de la distribution tempérée $g(x) = e^{-ax^2}$, a étant un nombre complexe à partie réelle positive.

Transformée de Fourier d'une distribution gaussienne :

La transformée de Fourier (TF) étant définie par :

$$G(u) = \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-i2\pi ux} dx$$

la TF de la distribution $g(x)$ est donnée par :

$$G(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{-(ax^2 + i2\pi ux)} dx.$$

L'expression $ax^2 + i2\pi ux$ se factorisant selon :

$$a\left(x + \frac{i\pi u}{a}\right)^2 + \frac{\pi^2 u^2}{a}, \quad G(u) = e^{-\frac{\pi^2 u^2}{a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-a\left(x + \frac{i2\pi u}{a}\right)^2} dx$$

Puis, sachant que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, l'expression de

la TF a alors pour expression $G(u) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2 u^2}{a}}$. De même dans un repère en coordonnées polaires, la TF de $g(\rho) = e^{-a\rho^2}$ donne $G(v) = e^{-\frac{\pi^2 v^2}{a}}$ à la constante près $\frac{\pi}{a}$, v étant la fréquence spatiale.

Calcul de l'intégrale Γ :

Le calcul de $\Gamma(x, y) = \Gamma_0(x) \Gamma_0(y)$ se réduit à effectuer l'intégrale de :

$$\Gamma_0(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i\pi}{\lambda f} (\xi - x')^2} \cdot e^{-\frac{i2\pi}{\lambda f} x \xi} d\xi$$

les variables x et y étant indépendantes.

En appliquant la propriété :

$$TF[h(\xi - x')] = e^{-i2\pi x' v}, \quad \Gamma_0(x) = e^{-i2\pi \frac{xx'}{\lambda f}} \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i\pi}{\lambda f} \xi^2} \cdot e^{-\frac{i2\pi}{\lambda f} x \xi} d\xi$$

Puis l'emploi du résultat ci-avant, donne donc $\Gamma(x)_0 = e^{-i2\pi \frac{xx'}{\lambda f}} e^{-\frac{i\pi}{\lambda f} x^2}$ en identifiant le coefficient a par $a = \frac{-i\pi}{\lambda f}$ et la fréquence spatiale u par $u = \frac{x}{\lambda f}$.

sant la notion d'ondelettes sphériques. Le domaine du champ proche a permis de simplifier l'intégrale de Sommerfeld pour donner la transformée de Fresnel ; le domaine du champ lointain, de simplifier l'intégrale de Sommerfeld pour donner la transformée de Fourier. Afin de miniaturiser les systèmes optiques, l'emploi d'une lentille démontre que la transformée de Fourier s'obtient naturellement à partir de la transformée de Fresnel.

Au cours des paragraphes précédents, le cheminement à travers les différents domaines d'observation a permis de montrer l'apparition de la transformée de Fourier en optique ondulatoire : c'est l'**« optique de Fourier »** (figure 23).

3. Optique de Fourier

3.1 Transformée de Fourier en optique

La transformée de Fourier en optique s'obtient donc de deux façons :

- observation à grande distance (§ 2.6) ;
- observation dans le plan focal image d'une lentille (§ 2.7).

Dans ces deux cas, l'amplitude totale intégrée ψ_P en un point P est :

$$\psi_P = \iint_{\Sigma} \psi_M \cdot e^{-\frac{i2\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y)} dx \cdot dy$$

Symboliquement, la transformée de Fourier (TF) s'écrit par :

$$\psi_P = TF[\psi_M]$$

3.2 Réalisation technique du plan de Fourier

Une source S , au foyer d'une première lentille convergente, produit un faisceau de rayons parallèles éclairant un objet $M(x, y)$ monté sur un plan transparent (figure 24).

Cet objet plan est placé au foyer d'une deuxième lentille. Ainsi, un faisceau de rayons parallèles éclaire son plan focal image, où se situe un écran. Cet écran matérialise le plan de Fourier (§ 2.7.2), visualisé par un ensemble de points matériels $P(x', y')$ de coordonnées telles que $\alpha = \frac{x'}{f}$ et $\beta = \frac{y'}{f}$, f étant la distance focale de la lentille convergente.

Le plan de Fourier est matérialisé techniquement dans le plan focal image d'une lentille, lorsque le plan objet se situe dans le plan focal objet de cette même lentille (§ 2.7.2).

3.3 Fréquences spatiales dans le plan de Fourier

La notion de **fréquences spatiales** (u, v) est introduite par $u = \frac{\alpha}{\lambda}$ et $v = \frac{\beta}{\lambda}$.

Cette nouvelle écriture correspond à une **normalisation** des coordonnées angulaires (α, β) procurant l'indépendance par rapport à la longueur d'onde λ .

Ainsi, la lentille permet de « passer » du domaine spatial $M(x, y)$ au domaine fréquentiel $P(u, v)$ appelé aussi domaine de Fourier (§ 2.7.2) (figure 25). Réciproquement, une lentille permet de passer du domaine fréquentiel au domaine spatial (§ 2).

3.4 Transmittance du plan objet

Lorsque l'objet plan $M(x, y)$ est éclairé par une source de lumière uniforme collimatée d'amplitude ψ_0 , le facteur de transmission $t(x, y) = t_M$ du plan objet, appelé aussi **transmittance**, caractérise la capacité à laisser passer la lumière.

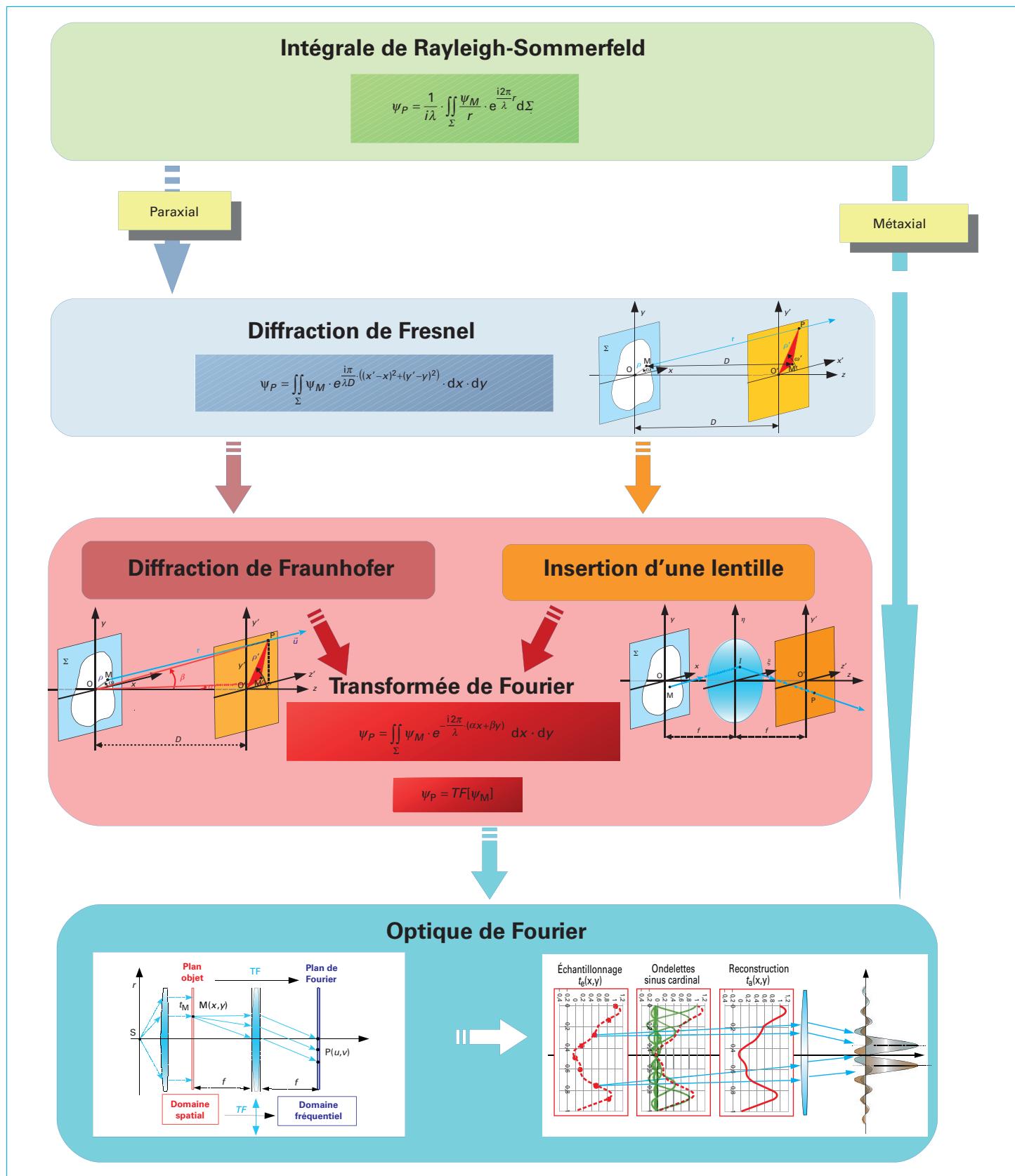


Figure 23 – Cheminement vers l'optique de Fourier

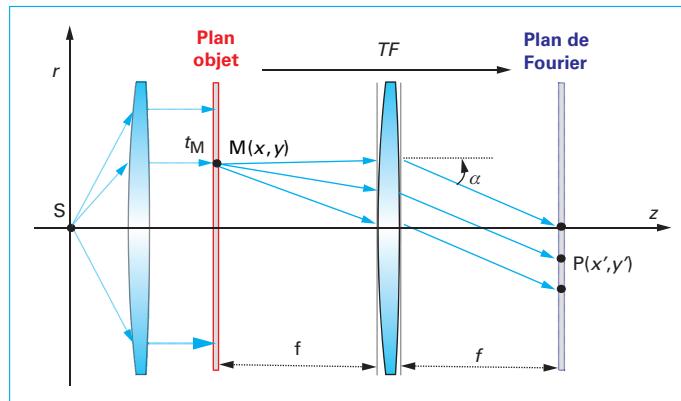


Figure 24 – Réalisation technique du plan de Fourier

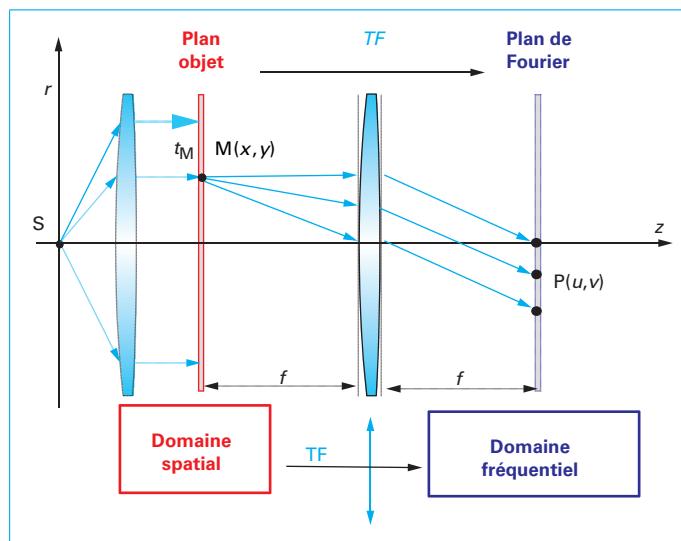


Figure 25 – Passage du domaine spatial au domaine fréquentiel

L'amplitude de la lumière à la sortie du plan objet s'exprime alors par :

$$\psi_M = \psi_0 t(x, y) = \psi_0 t_M$$

L'amplitude dans le plan de Fourier s'exprime donc sous la forme :

$$\psi_P = TF[\psi_M] = \psi_0 TF[t_M] = \psi_0 T(u, v)$$

3.5 Définition et quelques propriétés de la transformée de Fourier

La transformée de Fourier (TF) est un outil mathématique qui peut être utilisé pour l'analyse, le filtrage et la synthèse des signaux en physique, par exemple (§ 2) [AF 1 440] [AF 1 441] [AF 1 442] [E 4 151]. Les transformées de Fourier directe et inverse échangent la représentation du signal entre les **domaines spatial (x) et fréquentiel**. Lorsque les signaux n'utilisent qu'un formalisme à une seule dimension, les fonctions les représentant varient respectivement selon (x) pour l'aspect spatial et selon (u) pour l'aspect fréquentiel.

Tableau 1 – Quelques propriétés de la transformée de Fourier

Propriétés	Domaine spatial	Domaine fréquentiel
	$t(x) = TF^{-1}[T(u)]$	$T(u) = TF[t(x)]$
Linéarité (1)	$c_1 t_1(x) + c_2 t_2(x)$	$c_1 T_1(u) + c_2 T_2(u)$
Changement d'échelle (2)	$t\left(\frac{x}{a}\right)$	$ a \cdot T(a u)$
Translation (3)	$t(x - x_0)$	$T(u) \cdot e^{-i2\pi x_0 u}$
Modulation (4)	$t(x) e^{i2\pi u_0 x}$	$T(u - u_0)$
Produit de convolution (5)	$e(x) * t(x)$	$E(u) \cdot T(u)$
Produit algébrique (6)	$e(x) \cdot t(x)$	$E(u) \cdot T(u)$

Les définitions respectives sont données par :

$$- \text{TF directe} \rightarrow TF[t(x)] = T(u) = \int_{\mathbb{R}} t(x) \cdot e^{-i2\pi ux} dx ;$$

$$- \text{TF inverse} \rightarrow TF^{-1}[T(u)] = t(x) = \int_{\mathbb{R}} T(u) \cdot e^{i2\pi ux} du.$$

Quelques propriétés de la transformée de Fourier de la TF et quelques TF usuelles sont rassemblées respectivement dans les tableaux 1 et 2.

Les différents exemples présentés au paragraphe 3.6 font notamment référence à ces deux tableaux.

3.6 Optique de Fourier analogique

Sous l'appellation « optique de Fourier analogique », sont répertoriées des applications ne faisant pas appel à la notion d'échantillonnage (§ 3.7.1). Dans ce paragraphe, la transformée de Fourier est appliquée pour expliquer la diffraction et les interférences par des dispositifs composés de fentes allongées, afin de garder le formalisme à une seule dimension. Le dispositif expérimental pour les trois exemples suivants est formé d'une source de lumière collimatée d'amplitude ψ_0 , éclairant une(des) fente(s) longue(s) de transmittance $t(x)$, placée(s) au foyer objet d'une lentille et observée(s) au foyer image (figure 22).

Bien que ces raisonnements soient effectués à une seule dimension, ils s'étendent aux systèmes à deux dimensions comme les ouvertures rectangulaires par exemple [A 191] [R 6 475].

Exemple 1 : Diffraction par une fente longue

Sur cet exemple, la transmittance (figure 26) se définit le long de l'axe des abscisses, pour une fente de largeur a , par :

$$t(x) = \frac{1}{a} \Pi\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{pour } x \in \left[-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'amplitude ψ_P et l'intensité I_p sont respectivement la transformée de Fourier $\psi_P = \psi_0 TF[t_M] = \psi_0 \text{sinc}(au)$ (formule tableau 2 (5)) et le module au carré ($I_p = |\psi_P|^2 = I_0 \text{sinc}^2(au)$) (figure 26).

Tableau 2 – Transformée de Fourier

Distribution	Fonction de transmittance $t(x) = \mathbf{TF}^{-1}[T(u)]$	Transformée de Fourier $T(u) = \mathbf{TF}[t(x)]$
Gaussienne (1)	$t(x) = e^{-x^2}$	$T(u) = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 u^2}$
Porte de largeur unitaire (2)	$t(x) = \Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$T(u) = \text{sinc}(u) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}$
Dirac (3)	$t(x) = \delta(x)$	$T(u) = 1$
Peine de Dirac (4)	$t(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(x - kp)$	$T(u) = \frac{1}{p} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(u - \frac{k}{p}\right)$
Porte de largeur a (5)	$t(x) = \frac{1}{a} \Pi\left(\frac{x}{a}\right) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{pour } x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$T(u) = \text{sinc}(au)$

Exemple 2 : Fentes longues de Young

Les fentes longues de Young sont composées par deux fentes qui sont supposées infiniment fines, chacune étant modélisée par une distribution de Dirac $\delta(x)$ (figure 27). La transmittance est la somme donnée par $t(x) = \frac{1}{2} \left[\delta\left(x + \frac{p}{2}\right) + \delta\left(x - \frac{p}{2}\right) \right]$, l'une des distributions étant translatée de $-\frac{p}{2}$ et l'autre de $\frac{p}{2}$.

L'amplitude ψ_p et l'intensité I_p observées sont données respectivement par $\psi_p = \psi_0 \cos(\pi pu)$ (formules tableaux 2(3), 1(1), 1(3)) et par $I_p = I_0 \cos^2(\pi pu)$ (figure 27).

Exemple 3 : Réseau de fentes longues

Un réseau par transmission de fentes longues est composé de $2n$ fentes très fines gravées sur une lame de verre, chacune d'elles étant représentée par une distribution de Dirac (figure 28).

La transmittance d'un réseau centré à l'origine, de $2n$ fentes longues et fines espacées d'un pas p , est $t(x) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} \delta(x - k \cdot p - x_0)$

avec $x_0 = -\left(n - \frac{1}{2}\right)p$. Elle devient

$$t(x) = \frac{1}{2n} \delta\left[x + \left(n - \frac{1}{2}\right)p\right] * \sum_{k=0}^{2n-1} \delta(x - kp),$$

en appliquant la propriété de translation (propriété encadré 4).

Ainsi, l'amplitude ψ_p observée est donc :

$$\psi_p = \frac{\psi_0}{2n} e^{i\pi(2n-1)pu} \sum_{k=0}^{2n-1} e^{-i2\pi puk} \quad (\text{formules tableaux 2(3), 1(3), 1(5)}).$$

La somme discrète fait apparaître alors la série géométrique $\sum_{k=0}^{2n-1} e^{-i2\pi ku} = e^{-i\pi(2n-1)up} \frac{\sin(2n\pi pu)}{\sin(\pi pu)}$.

Comme le terme de phase disparaît grâce au centrage sur l'origine, l'amplitude ψ_p se modifie selon $\psi_p = \psi_0 \frac{\sin(2n\pi pu)}{2n \sin(\pi pu)}$ et l'intensité I_p est obtenue selon $I_p = I_0 \frac{\sin^2(2n\pi pu)}{4n^2 \sin^2(\pi pu)}$ (figure 28).

3.7 Optique de Fourier digitale

Les signaux analogiques engendrent un nombre infini de données de par leur propriété de continuité. Or, les techniques d'aujourd'hui utilisent des calculateurs qui ne travaillent qu'avec des volumes finis de données. Ainsi, sous l'appellation « optique de Fourier digitale » sont répertoriées des applications qui font appel à la notion d'échantillonnage.

3.7.1 Échantillonnage de la transmittance

L'échantillonnage est l'opération consistant à ne garder que quelques valeurs d'un signal. Le plus couramment utilisé est celui qui consiste à prendre des valeurs régulièrement réparties, distantes d'un pas fixe p comme illustrée sur la figure 29.

Sur la figure 29, à gauche la transmittance analogique $t_a(x)$ (pointillés rouges) est échantillonnée par un peigne de Dirac (points rouges). Ainsi, la transmittance échantillonnée est donnée par :

$$t_e(x) = t_a(x) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(x - kp)$$

qui se met sous la forme :

$$t_e(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} t_a(kp) \delta(x - kp)$$

en faisant apparaître les échantillons de valeur $t_a(kp)$ (points rouges) (propriété encadré 4).

Au centre, une fonction sinus cardinal $\frac{1}{\sqrt{p}} \text{sinc}\left(\frac{x}{p} - k\right)$ est associée à chaque échantillon (courbes vertes). La base orthonormée des fonctions sinus cardinaux peut être assimilée à la famille des ondelettes sphériques décrites par Huygens (comme des micro-taches de diffraction) (§ 1.2.3.2).

À droite, la combinaison linéaire permet de reconstruire :

$$t_a(x) = t_e(x) * \text{sinc}\left(\frac{x}{p}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} t_a(kp) \text{sinc}\left(\frac{x}{p} - k\right)$$

en respectant la condition de Shannon (courbe continue rouge). Lorsque cette condition n'est pas respectée, le résultat est erroné dans le plan de Fourier (encadré 7).

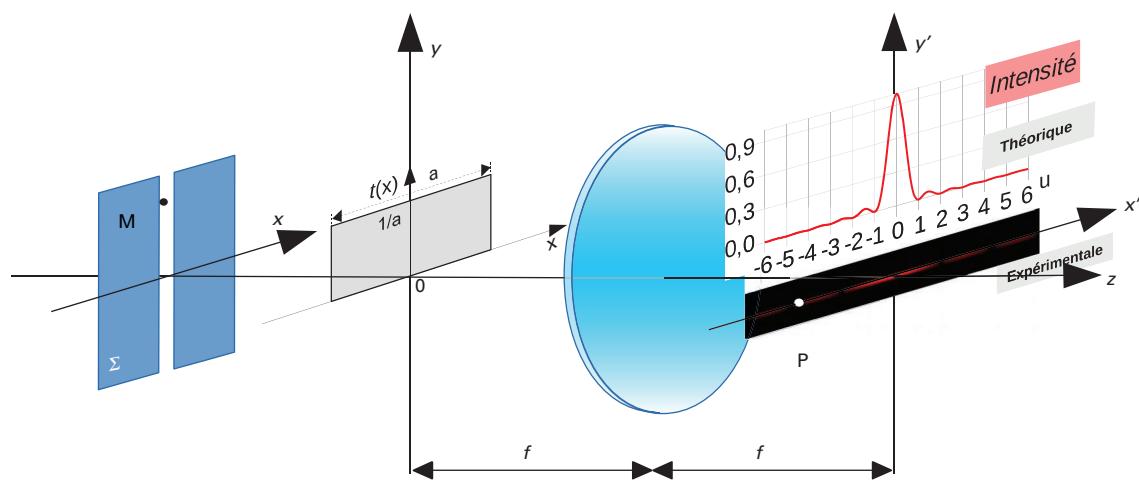


Figure 26 – Transmittance et diffraction par une fente longue

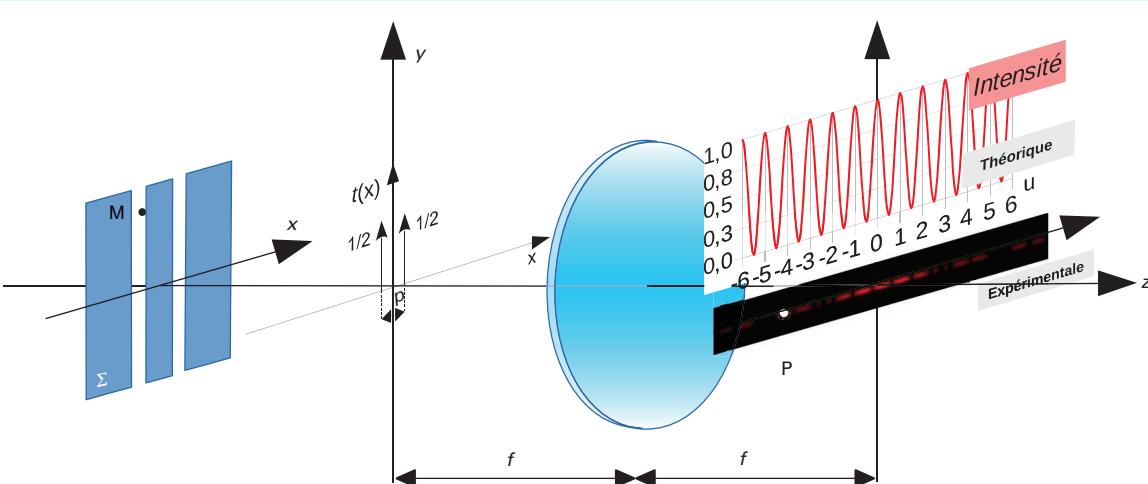
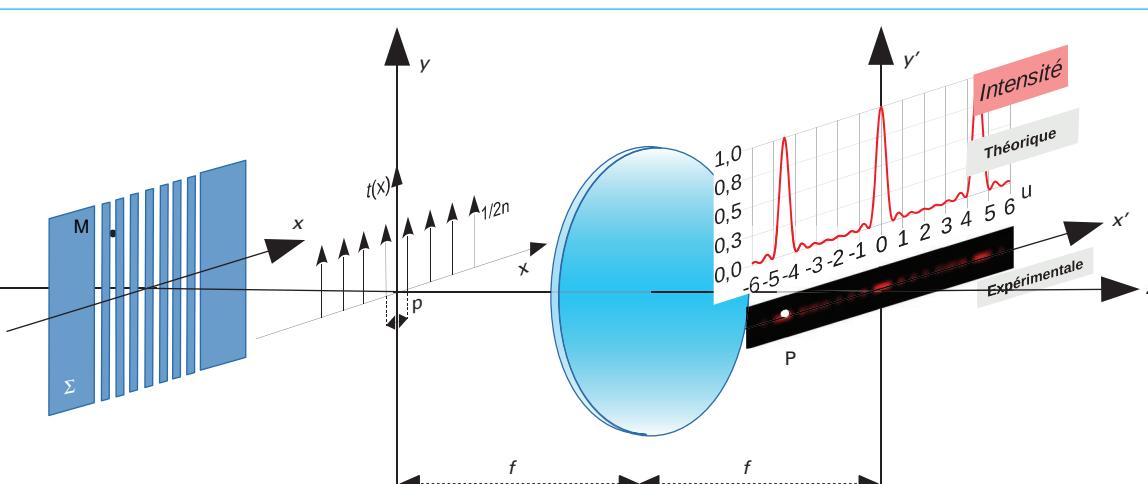


Figure 27 – Transmittance et diffraction par les fentes de Young

Figure 28 – Transmittance et diffraction par un réseau de fentes ($n = 4$)

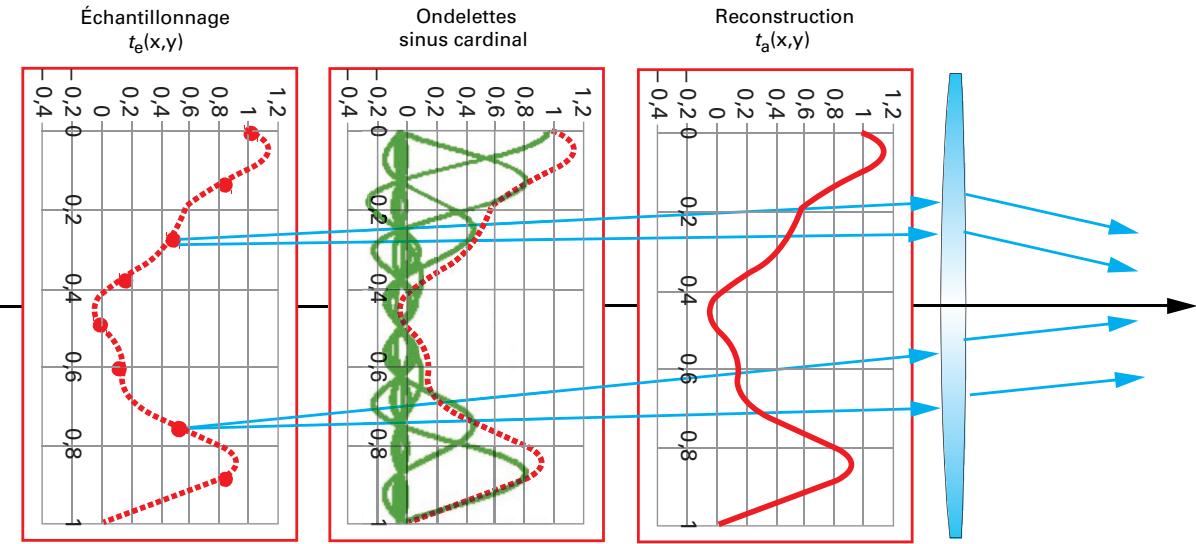


Figure 29 – Principe d'échantillonage et de reconstruction

Encadré 7 – Reconstruction sur la base des sinus cardinaux [AF 1 440] [AF 1 441] [AF 1 442]
Formule de Parseval :

Lorsque les fonctions $t(x)$ appartiennent à l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$, la formule de Parseval est définie par $\int_{\mathbb{R}} t_1(x) t_2^*(x) dx = \int_{\mathbb{R}} T_1(u) T_2^*(u) du$, * étant la marque du nombre complexe conjugué.

Base orthonormée des sinus cardinaux :

Le produit hermitien de deux éléments de l'ensemble $\left\{ \frac{1}{\sqrt{p}} \hat{\psi}\left(\frac{x}{p} - k\right) \right\}$ avec $\hat{\psi} = \text{sinc}(x)$, est donc :

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{p}} \hat{\psi}\left(\frac{x}{p} - k\right), \frac{1}{\sqrt{p}} \hat{\psi}\left(\frac{x}{p} - I\right) \right\rangle = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}\left(\frac{x}{p} - k\right) \hat{\psi}\left(\frac{x}{p} - I\right) dx$$

ou encore :

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{p}} \hat{\psi}\left(\frac{x}{p} - k\right), \frac{1}{\sqrt{p}} \hat{\psi}\left(\frac{x}{p} - I\right) \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} p \Pi(pu) e^{-i2\pi(k-I)pu} du$$

dans le domaine de Fourier en appliquant la formule de Parseval et $\text{TF}[\text{sinc}(x)] = \Pi(u)$.

Ainsi :

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{p}} \hat{\psi}\left(\frac{x}{p} - k\right), \frac{1}{\sqrt{p}} \hat{\psi}\left(\frac{x}{p} - I\right) \right\rangle = p \int_{-1/(2p)}^{1/(2p)} e^{-i2\pi(k-I)pu} du = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = I \\ 0 & \text{pour } k \neq I \end{cases}$$

montrant que les sinus cardinaux normalisés $\left\{ \frac{1}{\sqrt{p}} \hat{\psi}\left(\frac{x}{p} - k\right) \right\}$ forment une base orthonormée de l'espace de Hilbert.

Reconstruction respectant la condition de Shannon :

Toute fonction $t_a(x)$ de l'espace de Hilbert se décompose sur la base des sinus cardinaux, soit :

$$t_a(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \frac{1}{\sqrt{p}} \hat{\psi}\left(\frac{x}{p} - k\right)$$

$$\text{avec } c_k = \left\langle t_a(x), \frac{1}{\sqrt{p}} \hat{\psi}\left(\frac{x}{p} - k\right) \right\rangle.$$

Dans le domaine de Fourier :

$$c_k = \sqrt{p} \int_{\mathbb{R}} T_a(u) \Pi(u) e^{i2\pi k pu} du$$

Lorsque les valeurs non nulles de $T_a(u)$ sont comprises dans l'intervalle de fréquence $[-u_{sh}, u_{sh}]$ avec $u_{sh} = \frac{1}{2p}$ fréquence de Shannon :

$$c_k = \sqrt{p} \int_{\mathbb{R}} T_a(u) e^{i2\pi k pu} du = \sqrt{p} t_a(kp)$$

selon la $\text{TF}^{-1}[T_a(u)]$.

Ainsi, la reconstruction est $t_a(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} t_a(kp) \hat{\psi}\left(\frac{x}{p} - k\right)$, la condition de Shannon étant respectée.

En faisant apparaître le produit de convolution, l'expression devient :

$$t_a(x) = \text{sinc}\left(\frac{x}{p}\right) * \sum_{k \in \mathbb{Z}} t_a(kp) \delta\left(\frac{x}{p} - k\right)$$

soit $t_a(x) = t_e(x) * \text{sinc}\left(\frac{x}{p}\right)$ (encadré 4).

3.7.2 Plan de Fourier pour une transmittance échantillonnée

La transformée de Fourier de la transmittance échantillonnée $t_e(x) = t_a(x) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(x - kp)$ est donc :

$$TF[t_e(x)] = T_e(u) = T_a(u) * \left[\frac{1}{p} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(u - u_k) \right]$$

qui se développe en $T_e(u) = \frac{1}{p} \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} T_a(u - u_k) \right]$

avec $u_k = \frac{k}{p}$ (formules tableaux 1(6), 2(4)).

Ainsi, le plan de Fourier est constitué d'un ensemble de motifs $T_a(u) = TF[t_a(x)]$ (figure 30) décalés les uns des autres de l'intervalle $u_e = \frac{1}{p}$ en fréquence.

Trois cas possibles sont illustrés sur la figure 30 :

- à gauche, u_e n'a pas une valeur suffisante et les motifs $T_a(u)$ se recouvrent ;
- au centre, u_e a la valeur limite permettant juste la juxtaposition des motifs $T_a(u)$;
- à droite, u_e a une valeur suffisante pour assurer l'écartement des motifs $T_a(u)$.

Le deuxième cas illustre le critère de Shannon, qui conditionne le bon échantillonnage donné par l'inégalité $u_{sh} \geq \frac{u_e}{2}$ (encadré 7).

Exemple 4 : Interférences produites par une fente longue échantillonnée

L'étude des interférences produites par une fente longue échantillonnée est présentée comme une application directe de l'optique digitale. L'exemple du dispositif à $2n$ fentes est repris (§ 3.6), mais considéré, cette fois-ci, comme une unique fente longue de largeur a échantillonnée au moyen d'un réseau de dimension infinie constitué de traits espacés d'un pas p (figure 31).

Ce dispositif est la superposition d'un réseau de fentes longues disposées le long de l'axe Ox modélisé par un peigne de Dirac $\delta_p(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(x - kp)$ et d'une porte rectangulaire Π de largeur $a = mp$ centrée sur l'origine O tel que $m = 2n - 1$.

Sa transmittance résulte du produit de convolution donnée par :

$$t(x) = \left[\delta\left(x - \frac{p}{2}\right) * \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(x - kp) \right] \Pi\left(\frac{x}{mp}\right) \text{ (encadré 8).}$$

Une source de lumière collimatée d'amplitude ψ_0 éclaire le dispositif optique placé au foyer objet d'une lentille et observé au foyer image. La transformée de Fourier de l'amplitude $TF[\psi_M] = \psi_0 \cdot TF[t_M]$ montre que l'amplitude $\psi_P = TF[\psi_M]$ se décompose sur la base orthonormée des fonctions sinus cardinaux $\psi_P = \psi_0 \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \operatorname{sinc}[m(pu - k)]$ (encadrés 7 et 8). Ainsi, l'amplitude ψ_P résulte de la répétition périodique (§ 3.7.1) de la figure de diffraction d'une fente longue de largeur a (§ 3.6, exemple 1).

Pour une fente échantillonnée par un réseau à 2 traits ($n = 1$), les fonctions sinus cardinal se recouvrent fortement (condition de Shannon non respectée) et leur combinaison linéaire donne la fonction cosinus (figure 32).

Pour une fente échantillonnée par un réseau possédant 8 traits ($n = 4$), les fonctions sinus cardinal se recouvrent beaucoup moins (condition de Shannon mieux respectée), laissant apparaître plusieurs motifs de la figure de diffraction d'une fente longue (figure 33).

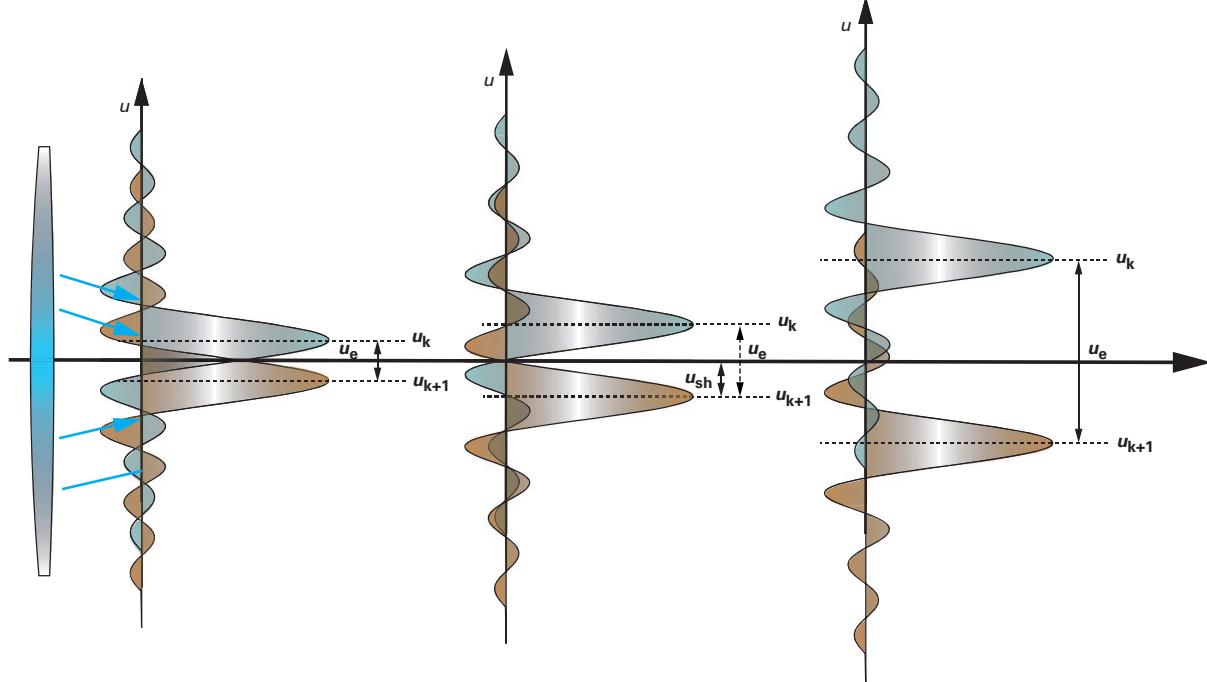


Figure 30 – Spectre d'une transmittance échantillonnée dans le plan de Fourier dans trois cas

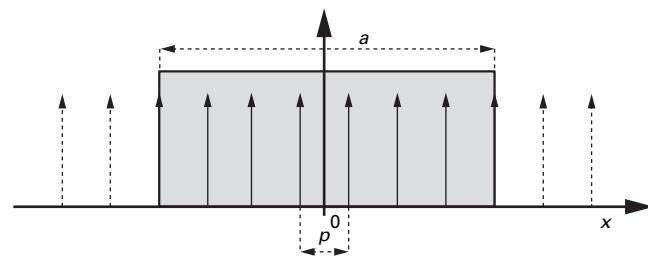


Figure 31 – Fente longue échantillonnée par un réseau

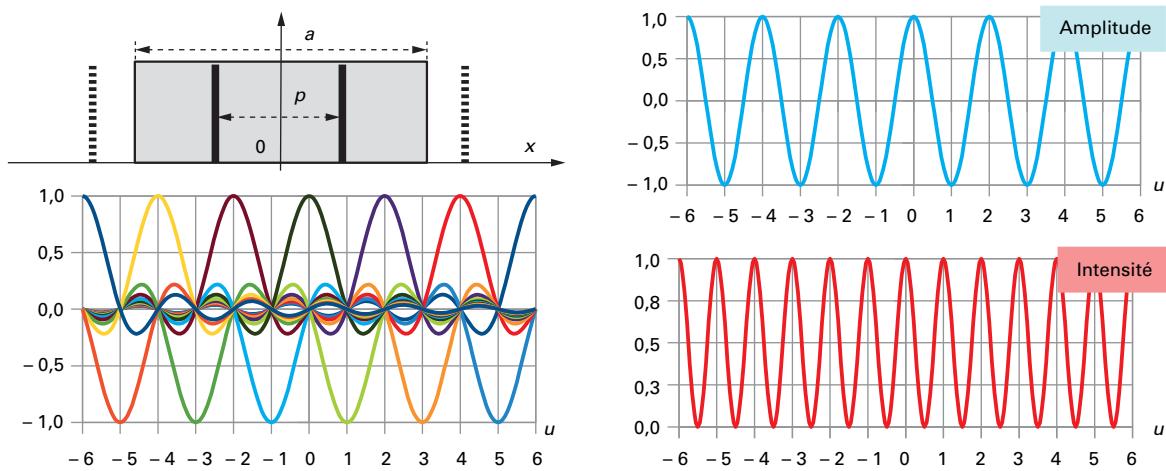


Figure 32 – Spectres d'une fente échantillonnée par un réseau à 2 traits

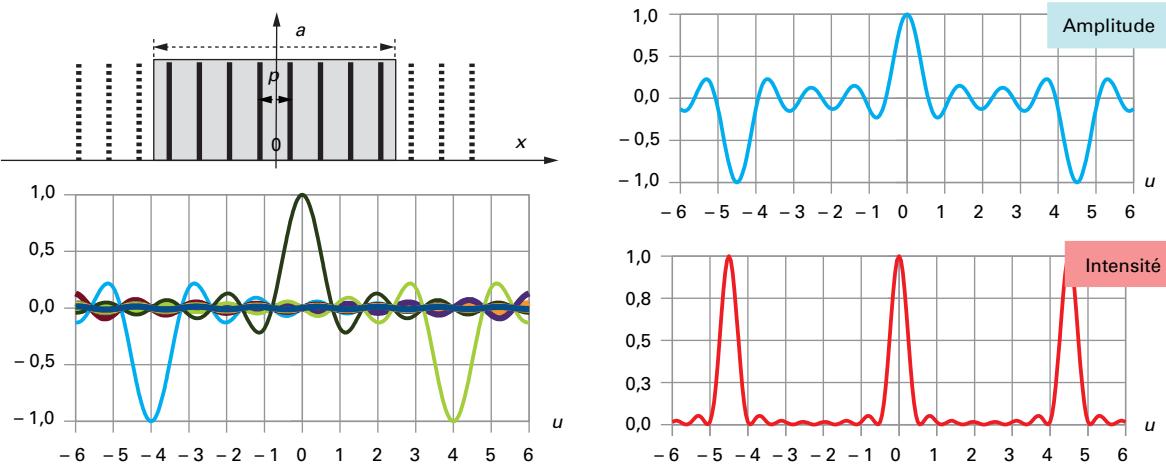


Figure 33 – Spectres d'une fente échantillonnée par un réseau à 8 traits

Encadré 8 – Transmittance pour une fente échantillonnée [1]
Calcul de $t(x)$:

La formule :

$$t(x) = \left[\delta\left(x - \frac{p}{2}\right) * \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(x - kp) \right] \Pi\left(\frac{x}{mp}\right)$$

s'obtient en appliquant la propriété de translation de la distribution de Dirac (propriété encadré 4). Ainsi, la première impulsion est positionnée en $\frac{p}{2}$, soit $\delta\left(x - \frac{p}{2}\right)$ et le peigne se déduit par translations successives de pas p , soit $\delta_p(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(x - kp)$. Finalement, le résultat se trouve en effectuant leur produit de convolution, puis le produit simple par la porte rectangulaire $\Pi\left(\frac{x}{mp}\right)$.

Calcul de $T(x)$:

La transformée de Fourier de la transmittance utilise quatre propriétés :

- deux étant liées à la convolution :

$$TF[e(x)h(x)] = TF[e(x)] * TF[h(x)]$$

$$\text{et sa duale } TF[e(x) * h(x)] = TF[e(x)] TF[h(x)],$$

- une liée à la fonction porte :

$$TF = \left[\Pi\left(\frac{x}{mp}\right) \right] = mp \operatorname{sinc}(mpu)$$

- et la dernière liée au réseau de fentes :

$$TF\left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(x - kp)\right] = \frac{1}{p} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(u - \frac{k}{p}\right).$$

L'enchaînement des opérations donne d'abord :

$$TF[t(x)] = TF\left[\Pi\left(\frac{x}{mp}\right)\right] * \left[TF\left[\delta\left(x - \frac{p}{2}\right)\right] \cdot TF\left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(x - kp)\right]\right]$$

puis par substitution :

$$TF[t(x)] = m \operatorname{sinc}(mpu) * \left[e^{-i\pi pu} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(u - \frac{k}{p}\right) \right]$$

puis par calcul entre les crochets :

$$TF[t(x)] = m \operatorname{sinc}(mpu) * \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-i\pi k} \delta\left(u - \frac{k}{p}\right) \right]$$

soit finalement :

$$TF[t(x)] = m \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \operatorname{sinc}[m(pu - k)]$$

4. Conclusion

Ce premier article a permis d'établir un modèle, appelé « optique de Fourier », entre les fondements physiques de la dif-

fraction et des concepts mathématiques utilisés en traitement du signal. Sa construction a nécessité de partir de la notion du champ électromagnétique et, de proche en proche, des simplifications légitimes, en fonction de l'éloignement du champ d'observation, ont montré que la transformée de Fourier s'invitait comme un outil efficace pour l'interprétation des phénomènes lumineux ondulatoires. Finalement, deux familles de montages expérimentaux permettent l'utilisation de l'optique de Fourier : l'éloignement suffisant du champ d'observation dit « du champ lointain » et l'utilisation d'une lentille convergente, qui permet de miniaturiser les dispositifs optiques.

La fin du document introduit l'optique de Fourier analogique avec des exemples classiques pris à une dimension, mais aussi l'optique de Fourier digitale occupant une place de plus en plus importante au sein de notre monde contemporain. Ces deux concepts sont repris dans un deuxième article [E 4 151] plus applicatif, illustrant la valorisation d'outils de recherche développés par une industrie de haute technologie.

5. Glossaire

ondelette ; wavelet

Fonction élémentaire oscillatoire limitée dans le temps et dans l'espace.

optique paraxiale ; paraxial

Approximation qui consiste à intégrer l'amplitude complexe du champ électrique sur une surface plane.

optique métaxiale ; metaxial

Approximation qui consiste à intégrer l'amplitude complexe du champ électrique sur une calotte sphérique.

transmittance ; transmittance

Fonction de transfert spécifique, caractérisant la transmission en amplitude de la lumière en chaque point d'un système optique.

6. Symboles

Symbol	Unité	Description
TF	–	Transformée de Fourier
λ	m	Longueur d'onde
n	–	Indice de réfraction
$ \psi_M $	V · m ⁻¹	Amplitude complexe en M
I_M	cd	Intensité lumineuse en M
RS	–	Intégrale de Rayleigh-Sommerfeld
t_M	–	Transmittance

Vers l'optique de Fourier digitale

De la diffraction au plan de Fourier...

par **Christophe LABBÉ**

Maître de conférences à l'université de Caen

*Normandie Univ, UNICAEN, IUT de Caen, Département mesures physiques, Caen, France
Normandie Univ, ENSICAEN, UNICAEN, CEA, CNRS, CIMAP Caen, France*

et **Benoît PLANCOULAINE**

Maître de conférences à l'université de Caen

*Normandie Univ, UNICAEN, IUT de Caen, Département mesures physiques, Caen, France
Normandie Univ, UNICAEN, INSERM, ANTICIPE, Caen, France
Faculty of Medecine, Vilnius University, Vilnius, Lituanie*

Sources bibliographiques

- [1] GOODMAN (W.). – *Introduction to Fourier optics*. Editions McGraw-Hill, New York, 2^e édition (1996).
- [2] ROIG (J.). – *Optique physique*. Masson et Cie, tome 1 (1967).
- [3] SOMMERFELD (A.). – *Optics – Lectures on theoretical physics*. Academic, New York, vol. 4, p. 199 (1954).
- [4] ERSOY (O.K.). – *Diffraction, Fourier optics and imaging*. J. Wiley and Sons, Inc. (2007).
- [5] BONNET (G.). – *Introduction à l'optique métaxiale. Première partie : Diffraction métaxiale dans un espace homogène : trilogie structurale, dioptre sphérique*. Annales des Télécommunications, vol. 33(5), p. 143-165 (1978).
- [6] BONNET (G.). – *Introduction à l'optique métaxiale. Deuxième partie : Systèmes diop-*
- triques centrés (non diaphragmés et non aberrants). Annales des Télécommunications, vol. 33(7), p. 225-243 (1978).
- [7] PELLAT-FINET (P.). – *Optique de Fourier : Théorie métaxiale et fractionnaire*. Springer-Verlag, France (2009).
- [8] PIEDRAHITA-QUINTERO (P.), CASTAÑEDA (R.) et GARCIA-SUCERQUIA (J.). – *Numerical wave propagation in image*. *J. Applied Optics*, vol. 54(21), p. 6410-6415 (2015).

À lire également dans nos bases

- BOUCHAREINE (P.). – *Interférences de la lumière – Théorie et applications*. [R 6 475] (2002).
- HENRY (M.). – *Optique ondulatoire – Interférences. Diffraction. Polarisation*. [A 191] (1982).
- LABBÉ (C.) et PLANCOULAINE (B.). – *Optique matricielle pour l'analyse des systèmes centrés*. [E 8 250] (2017).
- LABBÉ (C.) et PLANCOULAINE (B.). – *Vers l'optique de Fourier digitale – Du plan de Fourier à l'imagerie*. [E 4 151] (2019).
- LE ROUX (J.). – *La transformée de Fourier et ses applications (partie 1)*. [AF 1 440] (2007).
- LE ROUX (J.). – *La transformée de Fourier et ses applications (partie 2)*. [AF 1 441] (2007).
- LE ROUX (J.). – *La transformée de Fourier et ses applications (partie 3)*. [AF 1 442] (2007).

Ouvrages

- LAUG (M.) – *Traitemet optique du Signal et des Images*. CEPADUES Éditions (1980).
- MARAIS (B.) – *Exercices d'optique de Fourier*. Dunod Université (1980).
- FRANÇON (M.) – *Holographie*. Masson et Cie (1969).

Revues

Nombreuses applications industrielles dans le domaine de l'optique de Fourier « Photoniques »
<https://www.photoniques.com/>

Outils logiciels (liste non exhaustive)

Logiciel de traitement d'images « Imagej »
<https://imagej.nih.gov/ij/>

Un pluging « Numerical wave propagation » d'Imagej permet la simulation de la transformation en champ très proche et proche. Un article est consacré à

ce plugin : Piedrahita-Quintero P, Castañeda R, Garcia-Sucerquia, Numerical wave propagation in ImageJ, 2015, *J. Appl. Opt.* ; vol. 54[21]:6410-5

GAGNEZ DU TEMPS ET SÉCURISEZ VOS PROJETS EN UTILISANT UNE SOURCE ACTUALISÉE ET FIABLE

Techniques de l'Ingénieur propose la plus importante collection documentaire technique et scientifique en français !

Grâce à vos droits d'accès, retrouvez l'ensemble des **articles et fiches pratiques de votre offre, leurs compléments et mises à jour,** et bénéficiez des **services inclus.**



- + de 350 000 utilisateurs
- + de 10 000 articles de référence
- + de 80 offres
- 15 domaines d'expertise

- | | |
|---|---|
| <input type="radio"/> Automatique - Robotique | <input type="radio"/> Innovation |
| <input type="radio"/> Biomédical - Pharma | <input type="radio"/> Matériaux |
| <input type="radio"/> Construction et travaux publics | <input type="radio"/> Mécanique |
| <input type="radio"/> Électronique - Photonique | <input type="radio"/> Mesures - Analyses |
| <input type="radio"/> Énergies | <input type="radio"/> Procédés chimie - Bio - Agro |
| <input type="radio"/> Environnement - Sécurité | <input type="radio"/> Sciences fondamentales |
| <input type="radio"/> Génie industriel | <input type="radio"/> Technologies de l'information |
| <input type="radio"/> Ingénierie des transports | |

Pour des offres toujours plus adaptées à votre métier,
découvrez les offres dédiées à votre secteur d'activité

Depuis plus de 70 ans, Techniques de l'Ingénieur est la source d'informations de référence des bureaux d'études, de la R&D et de l'innovation.

www.techniques-ingenieur.fr

CONTACT : Tél. : + 33 (0)1 53 35 20 20 - Fax : +33 (0)1 53 26 79 18 - E-mail : infos.clients@teching.com

LES AVANTAGES ET SERVICES compris dans les offres Techniques de l'Ingénieur

ACCÈS



Accès illimité aux articles en HTML

Enrichis et mis à jour pendant toute la durée de la souscription



Téléchargement des articles au format PDF

Pour un usage en toute liberté



Consultation sur tous les supports numériques

Des contenus optimisés pour ordinateurs, tablettes et mobiles

SERVICES ET OUTILS PRATIQUES



Questions aux experts*

Les meilleurs experts techniques et scientifiques vous répondent



Articles Découverte

La possibilité de consulter des articles en dehors de votre offre



Dictionnaire technique multilingue

45 000 termes en français, anglais, espagnol et allemand



Archives

Technologies anciennes et versions antérieures des articles



Impression à la demande

Commandez les éditions papier de vos ressources documentaires



Alertes actualisations

Recevez par email toutes les nouveautés de vos ressources documentaires

*Questions aux experts est un service réservé aux entreprises, non proposé dans les offres écoles, universités ou pour tout autre organisme de formation.

ILS NOUS FONT CONFIANCE



www.techniques-ingenieur.fr

CONTACT : Tél. : + 33 (0)1 53 35 20 20 - Fax : +33 (0)1 53 26 79 18 - E-mail : infos.clients@teching.com