



**TECHNIQUES  
DE L'INGÉNIEUR**

Réf. : **AF3348 V1**

Date de publication :  
**10 janvier 2011**

# **Couches minces optiques et filtrage interférentiel - Champs et multicouches, synthèse, résonances et modes...**

Cet article est issu de : **Électronique - Photonique | Optique Photonique**

par **Claude AMRA, Catherine GRÈZES-BESSET**

**Résumé** Ces dernières années, les fonctions optiques, réalisées dans de nombreux secteurs, se sont multipliées et complexifiées, nécessitant l'emploi incontournable des couches minces optiques. Diversité des substrats et des matériaux déposés, la technologie a énormément progressé, rendant possible maintenant le dépôt de plusieurs centaines de couches avec une précision nanométrique. Des méthodes permettent de calculer la réponse optique d'un système multicouche et d'accéder aux paramètres de réflexion, transmission et absorption, front d'onde et polarisation, durée d'impulsion. La méthode des admittances complexes offre l'avantage du calcul analytique dans la prédiction de ces phénomènes. La programmation rapide du profil spectral d'un composant est non seulement rendue accessible, mais généralisable à l'étude des [...]

**Pour toute question :**  
Service Relation clientèle  
Techniques de l'Ingénieur  
Immeuble Pleyad 1  
39, boulevard Ornano  
93288 Saint-Denis Cedex

**Par mail :**  
infos.clients@teching.com  
**Par téléphone :**  
00 33 (0)1 53 35 20 20

Document téléchargé le : **03/02/2020**

Pour le compte : **7200029571 - univ mouloud mammeri tizi ousou // bu07 SNDL // 193.194.82.178**

© Techniques de l'Ingénieur | tous droits réservés

# Couches minces optiques et filtrage interférentiel

## Champs et multicouches, synthèse, résonances et modes...

par **Claude AMRA**

*Directeur de recherche au CNRS, Institut Fresnel*

et **Catherine GRÈZES-BESSET**

*Directeur technique à CILAS Marseille*

1. Préliminaires .....	AF 3 348	- 2
2. Méthode de calcul .....	—	3
3. Réflexion, transmission, absorption .....	—	7
4. Codage numérique .....	—	10
5. Premiers exemples numériques .....	—	11
6. Réflexion totale, résonances et modes de propagation .....	—	17
7. Lien avec l'optique planaire .....	—	19
Pour en savoir plus .....	Doc. AF 3 348	

**D**ans le domaine de l'espace libre, les **couches minces optiques** demeurent incontournables dans de nombreux secteurs. Ce constat résulte d'une maturité acquise au cours des trente dernières années, et de la diversité et la complexité des fonctions optiques réalisées : respect de contraintes simultanées sur l'intensité et la phase, la polarisation, l'achromaticité ou la résonance, la stabilité à l'incidence... Ce type de composant trouve également sa force dans la diversité des substrats (verres, cristaux, plastiques) et des matériaux déposés (oxydes, sulfures, nitrures, fluorures, métaux), qui lui permettent d'adresser de larges domaines spectraux (UV/VIS/PIR/MIR). Par ailleurs, ce domaine est quasiment le seul à bénéficier de logiciels de synthèse élaborés faisant appel aux techniques d'optimisation les plus récentes (algorithmes génétiques, recuit simulé, méthode des aiguilles...). Si, dans les années 2000, des progrès spectaculaires ont été réalisés dans le domaine de la fabrication de filtres destinés aux applications microélectronique, télécommunications optiques à haut débit et biomédical, la technologie a encore progressé au cours des cinq dernières années, notamment dans le domaine de l'automatisation des procédés, et rend aujourd'hui accessible le dépôt de plusieurs centaines de couches avec une précision nanométrique. Ces progrès ont été accompagnés par une métrologie de plus en plus sophistiquée dont la tenue au flux, qui est devenue un réel verrou dans le contexte d'intégration photonique et d'augmentation de la puissance des sources laser. Parallèlement

les contraintes non optiques (dureté, adhésion, sensibilité à l'environnement, vieillissement, auto nettoyage) ont pris une place considérable, notamment dans le domaine des applications grand public.

Cet article est consacré au calcul de la réponse optique d'un système multicouche : réflexion, transmission et absorption, front d'onde et polarisation, durée d'impulsion... Nous utilisons pour cela la méthode des admittances complexes, qui offre l'avantage du calcul analytique pour mieux comprendre et prédire les phénomènes. Les résultats permettent de programmer rapidement le profil spectral d'un composant ; par ailleurs, ils sont immédiatement généralisables à l'étude des résonances et modes guidés.

## 1. Préliminaires

Le formalisme des couches minces est en général donné en milieu linéaire, homogène, isotrope, non magnétique et non chargé, et pour un éclairage via une onde plane, ce qui fixe le régime (harmonique ou forcé), l'incidence et la longueur d'onde... Les préliminaires qui suivent ont pour but de permettre, lorsque nécessaire, l'extension du formalisme à d'autres configurations (régime pulsé, microcavités...). Le lecteur non intéressé pourra passer directement à la section 2.

On se place dans le cadre de l'électromagnétisme classique macroscopique. Toute lumière peut être associée à la présence d'un couple source  $(\mathbf{J}, q)$ , où  $\mathbf{J}$  et  $q$  désignent des densités de courant (vectoriel) et de charge (scalaire) électriques. Ces sources sont responsables de l'émission d'un champ électromagnétique caractéristique d'un quadrivecteur  $(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{H})$ , avec  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  les champs électrique et magnétique, respectivement. Les champs  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{H}$  sont souvent introduits comme des vecteurs « déplacement électrique » et « induction magnétique » pour tenir compte des polarisations induites de la matière.

Dans le régime spatio-temporel général, chaque grandeur  $X(\rho, t)$  dépend de la coordonnée d'espace  $\rho$  et de la variable temporelle  $t$  ; ses variations sont régies par les équations de Maxwell :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t & \operatorname{div} \mathbf{D} &= q \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

On se place en milieu linéaire, isotrope et non magnétique. Les relations constitutives permettent de relier les vecteurs  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{B}$  aux champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  comme :

$$\mathbf{D} = \epsilon_t^* \mathbf{E} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \mu_t^* \mathbf{H} \quad (2)$$

où la notation  $(\cdot)_t^*$  désigne un produit de convolution par rapport au temps, avec  $\epsilon$  et  $\mu$  les permittivité et perméabilité scalaires des milieux.

À ce stade, le champ électromagnétique, qui est une grandeur réelle de  $\mathbb{R}^3$ , est caractéristique d'une lumière polychromatique ou blanche. La décomposition de ce champ  $\mathbf{E}(\rho, t)$  en ses composantes fréquentielles ou monochromatiques  $\tilde{\mathbf{E}}(\rho, f)$  est basée sur le principe de reconstruction par transformée de Fourier (temps  $\Leftrightarrow$  fréquence temporelle), soit :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(\rho, f) &= \int_t \mathbf{E}(\rho, t) \exp(j2\pi f t) dt \\ \text{et } \mathbf{E}(\rho, t) &= \int_f \tilde{\mathbf{E}}(\rho, f) \exp(-j2\pi f t) df \end{aligned} \quad (3)$$

avec  $f$  la fréquence temporelle. On notera ici qu'on utilise une dépendance temporelle en  $\exp(-j\omega t)$ , avec  $\omega = 2\pi f$  la pulsation

temporelle. Ce choix imposera que soient positives les parties imaginaires des indices de réfraction.

Les nouveaux champs  $\tilde{\mathbf{E}}(\rho, f)$  sont complexes avec la symétrie hermitienne et sont régis dans le plan de Fourier par les équations de Maxwell harmoniques :

$$\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}} = j\omega \tilde{\mu} \tilde{\mathbf{H}} \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{H}} = -j\omega \tilde{\epsilon} \tilde{\mathbf{E}} \quad (4)$$

Ces équations sont maintenant données en l'absence de sources, ou du moins ces dernières sont supposées être à l'infini ; dans ces conditions, les relations de divergence de (1) en milieu homogène découlent de (4). La permittivité  $\tilde{\epsilon}$  peut avoir une forte partie imaginaire, comme dans le cas des métaux (courants photo-induits et loi d'Ohm).

Le champ harmonique solution de (4) est monochromatique (vibre à la pulsation  $\omega$ ) et sa répartition spatiale (faisceau convergent, divergent...) est *a priori* arbitraire. Toutefois, en espace libre, il obéit à l'équation de Helmholtz, conséquence directe de (4) :

$$\Delta \tilde{\mathbf{E}}(\rho, \omega) + k^2(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\rho, \omega) = 0 \quad (5)$$

avec  $k^2 = \omega^2 \tilde{\epsilon} \tilde{\mu}$  et  $\rho = (\mathbf{r}, z) = (x, y, z)$ .

Il est pratique de résoudre cette équation en considérant une seconde transformée de Fourier  $\hat{\mathbf{E}}(\sigma, z, f)$  (espace  $\Leftrightarrow$  fréquence spatiale), soit en omettant désormais la fréquence temporelle  $f$  :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, z) &= \int_{\sigma} \hat{\mathbf{E}}(\sigma, z) \exp(j\sigma \cdot \mathbf{r}) d\sigma \\ \text{et } \hat{\mathbf{E}}(\sigma, z) &= (1/4\pi^2) \int_r \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, z) \exp(-j\sigma \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (6)$$

On notera ici que c'est la variable d'espace réduite  $\mathbf{r} = (x, y)$  qui a pour variable conjuguée la pulsation spatiale  $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y)$  de  $\mathbb{R}^2$ , avec  $\nu = \sigma/2\pi$ , la fréquence spatiale (figure 1).

L'équation de Helmholtz s'écrit dans ce nouveau plan de Fourier comme :

$$\partial^2 / \partial z^2 [\hat{\mathbf{E}}(\sigma, z)] + \alpha^2(\sigma) \hat{\mathbf{E}}(\sigma, z) = 0 \quad (7)$$

avec  $\alpha(\sigma) = (k^2 - \sigma^2)^{0.5}$  et  $\sigma = |\sigma|$

et admet pour solution toute combinaison linéaire d'ondes progressives  $\hat{\mathbf{E}}^+$  et rétrogrades  $\hat{\mathbf{E}}^-$ , soit :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}^+(\sigma, z) &= \mathbf{A}^+(\sigma) \exp[j\alpha(\sigma) z] \\ \text{et } \hat{\mathbf{E}}^-(\sigma, z) &= \mathbf{A}^-(\sigma) \exp[-j\alpha(\sigma) z] \end{aligned} \quad (8)$$

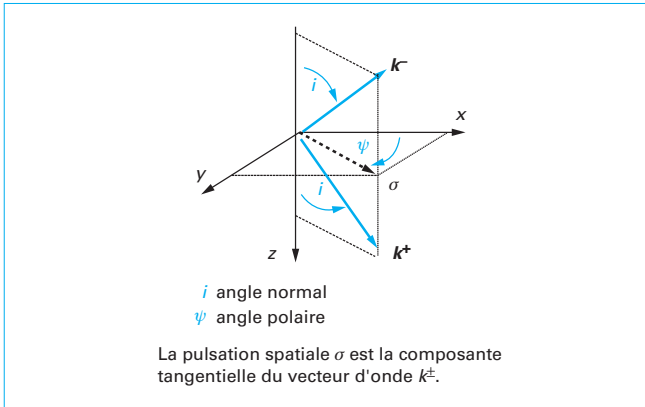


Figure 1 – Ondes planes progressives et rétrogrades

La solution harmonique générale s'écrit après reconstruction de Fourier (spatiale) comme :

$$\tilde{E}(r, z) = \int_{\sigma} \mathbf{A}^+(\sigma) \exp[j\mathbf{k}^+(\sigma) \cdot \rho] d\sigma + \int_{\sigma} \mathbf{A}^-(\sigma) \exp[j\mathbf{k}^-(\sigma) \cdot \rho] d\sigma \quad (9)$$

où l'on voit apparaître des paquets d'ondes progressives et rétrogrades, d'amplitudes complexes  $\mathbf{A}^{\pm}$  et de vecteurs d'onde  $\mathbf{k}^{\pm}(\sigma) = [\sigma, \pm \alpha(\sigma)]$ . Les basses fréquences ( $\sigma < k \Leftrightarrow \alpha$  réel en milieu transparent) sont caractéristiques d'ondes planes et rayonnent du flux en champ lointain ; chaque pulsation  $\sigma$  peut être associée à une direction (figure 1) comme :

$$\sigma = k \sin i (\cos \psi, \sin \psi) \Rightarrow \mathbf{k}^{\pm} = k (\sin i \cos \psi, \sin i \sin \psi, \pm \cos i) \quad (10)$$

Les hautes fréquences ( $\sigma > k \Leftrightarrow \alpha$  imaginaire pur en milieu transparent) sont caractéristiques d'ondes évanescentes et ne transportent pas d'énergie en champ lointain. Pour chaque composante élémentaire, champ électrique, champ magnétique et vecteur d'onde sont liés par une relation de trièdre direct.

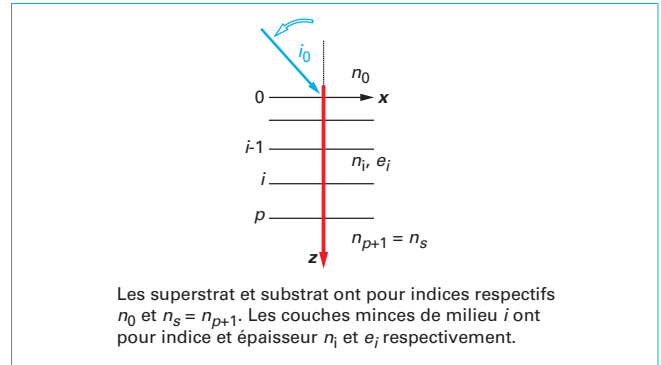
On peut enfin retrouver le régime spatio-temporel  $X(\rho, t)$  le plus général par reconstruction de TF temporelle, pour aboutir à :

$$E(\rho, t) = \int_f \int_{\sigma} \mathbf{A}^{\pm}(f, \sigma) \exp[j(\mathbf{k}^{\pm}(f, \sigma) \cdot \rho - 2\pi f t)] d\sigma df \quad (11)$$

Cette dernière relation montre que toute lumière en espace libre et en l'absence de source s'écrit comme une double intégrale sur les fréquences ou pulsations temporelle  $\omega$  et spatiale  $\sigma$ , dont les composantes élémentaires, basses ou hautes fréquences, prennent l'appellation d'onde progressive ou rétrograde, évanescente ou plane... Ainsi et compte tenu de la linéarité des équations de Maxwell, ou du **principe de superposition**, le calcul de la réponse électromagnétique d'un objet à une onde incidente arbitraire pourra s'effectuer en trois étapes :

- décomposition du champ incident en ses composantes élémentaires ;
- calcul de la réponse de l'objet pour chaque onde plane ou évanescente ;
- reconstruction par double transformée de Fourier (spatiale et temporelle).

En conséquence, ce chapitre est dévolu à l'interaction d'une composante élémentaire du champ, dite onde harmonique monodirectionnelle (une seule fréquence – ou longueur d'onde dans le vide, une seule direction de propagation), avec un objet plan multicouche (figure 2).

Figure 2 – Éclairement d'un multicouche sous l'incidence  $i_0$  dans le plan polaire  $\psi = 0$ 

L'objet étudié est une structure planaire multicouche invariante dans le plan  $Oxy$  (figure 2), dont les paramètres optogéométriques offrent un grand nombre de degrés de liberté pour modifier ou contrôler les paramètres descriptifs de la lumière : on parle ainsi de synthèse de fonctions optiques spectrales, capables d'agir sur la phase ou l'énergie véhiculées par les ondes.

Pour terminer ces préliminaires, on rappellera que :

- $n = (\tilde{\epsilon} \tilde{\mu} / \epsilon_0 \mu_0)^{0.5} = (\tilde{\epsilon}_r \tilde{\mu}_r)^{0.5}$ , avec  $n$  l'indice de réfraction ;
- $k = \omega (\tilde{\epsilon} \tilde{\mu})^{0.5} = 2\pi n / \lambda = \omega / v$ , avec  $v$  la vitesse de phase et  $\lambda$  la longueur d'onde ;
- $\tilde{\epsilon} \tilde{\mu} v^2 = 1$ .

## 2. Méthode de calcul

### 2.1 Définition du problème

On se place en régime harmonique ou monochromatique avec une dépendance temporelle en  $\exp(-j\omega t)$ . Les milieux sont supposés linéaires, homogènes, isotropes et non magnétiques ( $\mu = \mu_0$ ). On travaille également en l'absence de charges et courants, sans exclure le cas des métaux (courants photo-induits). Le composant est un système plan multicouche (figure 2) invariant selon  $Oy$ . Ce composant est éclairé à partir d'une source située à l'infini dans un superstrat transparent d'indice de réfraction  $n_0$ . L'onde incidente est plane progressive et heurte l'échantillon sous l'incidence  $i_0$  avec un vecteur d'onde dans le plan  $y = 0$  (angle polaire  $\psi = 0$ ). La fréquence spatiale  $\nu$  est ainsi portée par le vecteur unitaire  $\mathbf{x}$  :

$$\nu = (n_0 \sin i_0 / \lambda) \mathbf{x} \quad (12)$$

avec  $\lambda$  la longueur d'onde du rayonnement dans le vide. On utilisera souvent la notion de **pulsation spatiale**  $\sigma = 2\pi\nu$  laquelle représente la composante tangentielle du vecteur d'onde.

Le champ électrique incident s'écrit dans le plan complexe, avec  $\rho = (x, y, z)$  la variable d'espace, comme :

$$E_0^+(\rho) = \mathbf{A}_0^+ \exp(j\mathbf{k}_0^+ \cdot \rho) = \mathbf{A}_0^+ \exp[j(\sigma x + \alpha_0 z)] \quad (13)$$

avec  $\mathbf{A}_0^+$  son amplitude vectorielle complexe et  $\mathbf{k}_0^+$  son vecteur d'onde porté par les vecteurs unitaires  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{z}$  :

$$\mathbf{k}_0^+ = \sigma \mathbf{x} + \alpha_0 \mathbf{z} \quad (14)$$

$$\text{avec} \quad \alpha_0(\sigma) = (k_0^2 - \sigma^2)^{0.5} \quad \text{et} \quad k_0 = 2\pi n_0 / \lambda \quad (15)$$

On remarquera que la notation en  $\exp(-j\omega t)$  est omise ; le cas échéant, le champ réel s'obtient en considérant la partie réelle  $\text{Re}[\mathbf{E}_0^+ \exp(-j\omega t)]$ . Enfin et par souci de simplicité, la notation  $\mathbf{E}$  est utilisée en lieu et place de  $\hat{\mathbf{E}}$  (cf. section 1).

De façon similaire, le champ  $\mathbf{H}$  sera noté avec l'amplitude complexe  $\mathbf{B}$  (à ne pas confondre avec le champ magnétique), soit :

$$\mathbf{H}_0^+(\rho) = \mathbf{B}_0^+ \exp(j\mathbf{k}_0^+ \rho) = \mathbf{B}_0^+ \exp[j(\sigma x + \alpha_0 z)] \quad (16)$$

Les matériaux ont des épaisseurs « électromagnétiques », c'est-à-dire de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde, cela pour garantir les effets de cohérence. Les épaisseurs et indices des couches  $i$  sont notés  $e_i$  et  $n_i$  respectivement, avec  $p$  le nombre de couches minces. Le dernier milieu ou substrat est noté  $p+1$  ou  $s$ .

Notre premier objectif va être de relier les composantes tangentielles des champs électrique et magnétique à l'aide de la notion d'**indice effectif** pour les substrats ou superstrats, puis d'**admittance complexe** pour les multicouches. D'autres formalismes existent pour traiter le filtrage interférentiel par couches minces optiques, mais l'utilisation de l'admittance complexe présente l'avantage clé d'offrir nombre d'expressions analytiques pour la synthèse des composants.

## 2.2 Indice effectif en milieu homogène : cas des ondes progressives ou rétrogrades

Considérons une onde progressive en milieu homogène (figure 3) :

$$\mathbf{E}^+ = \mathbf{A}^+ \exp(j\mathbf{k}^+ \rho) \quad \text{et} \quad \mathbf{H}^+ = \mathbf{B}^+ \exp(j\mathbf{k}^+ \rho) \quad (17)$$

avec la variable d'espace  $\rho = (\mathbf{r}, z) = (x, y, z)$  et le vecteur d'onde  $\mathbf{k}^+ = \alpha \mathbf{x} + \alpha z$ . On a toujours :

$$\sigma = |\sigma|, \quad \alpha = [k^2 - \sigma^2]^{0.5}, \quad k = 2\pi n/\lambda \quad (18)$$

$\mathbf{A}^+$  et  $\mathbf{B}^+$  désignent les amplitudes vectorielles complexes des champs progressifs.

Le trièdre  $\mathbf{k}^+, \mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+$  est direct avec les relations classiques :

$$\mathbf{B}^+ = (1/\omega \mu) \mathbf{k}^+ \wedge \mathbf{A}^+ \quad \mathbf{A}^+ = (-1/\omega \varepsilon) \mathbf{k}^+ \wedge \mathbf{B}^+ \quad (19)$$

où le symbole  $\wedge$  désigne un produit vectoriel. On rappelle ici que ces écritures sont valables pour des ondes planes ou évanescentes (basses ou hautes fréquences), en milieu transparent ou dissipatif ; dans le cas des ondes planes ( $\sigma < k$ ), les paramètres  $\sigma$  et  $\alpha$  se réduisent à  $k \sin i$  et  $k \cos i$ , respectivement.

Nous allons maintenant considérer successivement les deux modes de polarisation du champ. Rappelons que toute vibration se décompose sur ces modes, puisque le champ est en rotation dans un plan perpendiculaire au vecteur d'onde. Dans le cas général, la superposition de ces modes décrit une **polarisation elliptique**. La rotation du champ disparaît lorsque les retards des modes, décrits par les arguments des amplitudes complexes du même champ sur les axes, sont identiques ; la polarisation est alors dite **linéaire**.

### 2.2.1 Cas d'une polarisation TE ou S (transverse électrique)

Le champ électrique est par définition perpendiculaire au plan de la figure 3a. Il est donc tangentiel au plan  $z=0$ , soit :

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}_{\text{tg}}^+ = A^+ \mathbf{y}$$

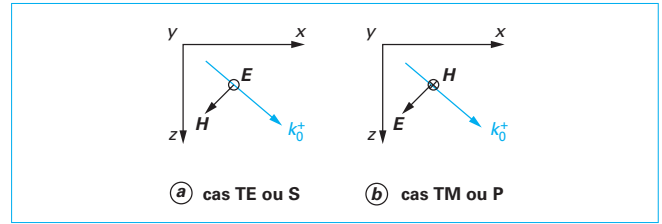


Figure 3 – Cas de polarisations transverse électrique (TE ou S) et transverse magnétique (TM ou P)

La relation (19) nous donne rapidement la composante tangentielle du champ  $\mathbf{B}^+$  :

$$\mathbf{B}_{\text{tg}}^+ = B_x^+ \mathbf{x} = (\alpha/\omega \mu) (\mathbf{z} \wedge \mathbf{A}_{\text{tg}}^+) \quad (20)$$

### 2.2.2 Cas d'une polarisation TM ou P (transverse magnétique)

Le champ magnétique est par définition perpendiculaire au plan de la figure 3b :

$$\mathbf{B}^+ = \mathbf{B}_{\text{tg}}^+ = B^+ \mathbf{y}$$

La relation (19) nous donne :

$$\mathbf{A}^+ = (-\alpha/\omega \varepsilon) \mathbf{z} \wedge \mathbf{B}^+ \mathbf{y}$$

Soit, en multipliant vectoriellement par  $\mathbf{z}$  :

$$\mathbf{B}_{\text{tg}}^+ = (\omega \varepsilon / \alpha) \mathbf{z} \wedge \mathbf{A}_{\text{tg}}^+ \quad (21)$$

### 2.2.3 Conclusion partielle

Pour chaque polarisation d'une onde progressive ou rétrograde, il existe un scalaire complexe  $\tilde{n}$  dit **indice effectif** traduisant la proportionnalité (20) et (21) entre les composantes tangentielles des champs électrique et magnétique :

$$\mathbf{B}_{\text{tg}}^+ = \tilde{n} \mathbf{z} \wedge \mathbf{A}_{\text{tg}}^+ \quad (22)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{n} &= \alpha/\omega \mu \quad \text{en polarisation TE} \\ \text{et } \tilde{n} &= \omega \varepsilon/\alpha \quad \text{en polarisation TM} \end{aligned} \quad (23)$$

On obtient, après développement :

$$\begin{aligned} \tilde{n} &= (1/\eta_0 \mu_r) n \alpha/k \quad \text{en polarisation TE} \\ \text{et } \tilde{n} &= (1/\eta_0 \mu_r) n k/\alpha \quad \text{en polarisation TM} \end{aligned} \quad (24)$$

avec  $\mu_r$  la perméabilité relative du milieu ( $\mu_r \approx 1$ ), et  $\eta_0 = (\mu_0/\varepsilon_0)^{0.5}$  l'impédance du vide.

Enfin, dans le cas des ondes planes en milieu transparent, ces expressions se réduisent à :

$$\begin{aligned} \tilde{n} &= (1/\eta_0 \mu_r) n \cos i \quad \text{en polarisation TE} \\ \text{et } \tilde{n} &= (1/\eta_0 \mu_r) n/\cos i \quad \text{en polarisation TM} \end{aligned} \quad (25)$$

Ces relations sont valables pour une onde progressive (propagation vers les  $z > 0$ ). Pour une onde rétrograde, il suffit de changer le signe de la composante normale  $\alpha$  du vecteur d'onde, pour obtenir (figure 4) :

$$\tilde{n}(-\alpha) = -\tilde{n}(\alpha) \Rightarrow \mathbf{B}_{\text{tg}}^- = -\tilde{n} \mathbf{z} \wedge \mathbf{A}_{\text{tg}}^- \quad (26)$$

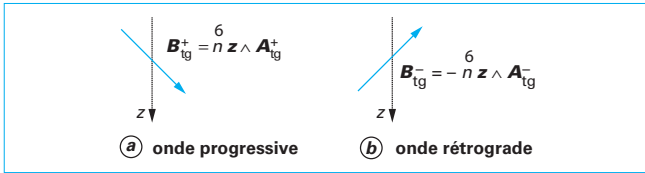


Figure 4 – Relations entre champs tangentiels pour des ondes progressive et rétrograde

On remarquera que dans un milieu transparent, l'indice effectif  $\tilde{n}$  est réel pour les ondes planes, et imaginaire pur pour les ondes évanescentes. Cet indice est toujours complexe dans un milieu dissipatif. Enfin, dans les calculs, on pourra souvent omettre le coefficient  $1/(\eta_0 \mu_r)$  qui s'élimine après différentes normalisations (par le flux incident ou la puissance émise par les sources...), ou parce qu'il intervient de façon homogène dans des fractions rationnelles. Pour éviter toute ambiguïté et gagner dans la simplicité des notations, on omettra souvent la constante  $(\eta_0 \mu_r)$  pour utiliser la notation réduite :

$$\begin{aligned} \tilde{n} &= n\alpha/k & \text{en polarisation TE} \\ \text{et } \tilde{n} &= nk/\alpha & \text{en polarisation TM} \end{aligned} \quad (27)$$

Il sera également utile de connaître l'expression du flux  $\Phi$  du vecteur de Poynting d'une onde progressive à travers un plan de cote  $z$  parallèle à  $Oxy$ . On obtient :

$$\Phi = (1/2\eta_0 \mu_r) \operatorname{Re}(\tilde{n}) |\mathbf{A}_{tg}^+|^2 \exp[-2\alpha''(\sigma)z] \quad (28)$$

avec  $\alpha = \alpha' + j\alpha''$ . Ce flux caractérise la puissance optique interceptée par le plan de cote  $z$ . La relation (28) rappelle que les ondes évanescentes ( $\sigma > k \Leftrightarrow \operatorname{Re}(\tilde{n}) = 0$ ) ne transportent pas d'énergie en milieu transparent.

### 2.3 Cas des ondes stationnaires : admittance complexe

On veut maintenant étendre la notion d'indice effectif aux ondes stationnaires qui existent dans une couche mince ou un multicouche (figure 5). On rappelle qu'une onde stationnaire est la somme d'une onde progressive et d'une onde rétrograde, soit :

$$\mathbf{E}(\rho) = \mathbf{E}^+(\rho) + \mathbf{E}^-(\rho) = \mathbf{A}^+ \exp(j\mathbf{k}^+ \rho) + \mathbf{A}^- \exp(j\mathbf{k}^- \rho) \quad (29)$$

$$\text{avec} \quad \mathbf{k}^\pm = \sigma \mathbf{x} \pm \alpha \mathbf{z}$$

soit encore :

$$\mathbf{E}(\rho) = \exp(j\sigma x) [\mathbf{A}^+ \exp(j\alpha z) + \mathbf{A}^- \exp(-j\alpha z)] \quad (30)$$

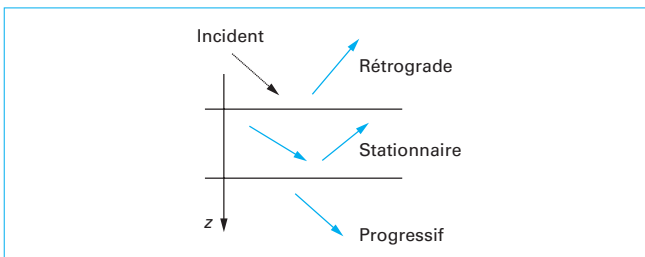


Figure 5 – Définition des ondes progressive, rétrograde et stationnaire

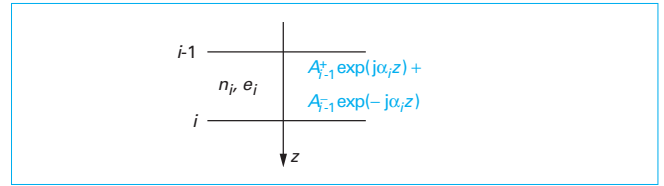


Figure 6 – Notations utilisées dans le milieu  $i$

La dépendance en  $x$  étant la même pour toutes ces composantes et dans tous les milieux (la variable de Fourier  $\sigma = k \sin i$  étant l'invariant de Snell-Descartes), on écrira dans chaque milieu indicé  $i$  ou d'indice  $n_i$  :

$$0 \leq z \leq e_i \Rightarrow \mathbf{E}_i(\rho) = \mathbf{A}_{i-1}(z) \exp(j\sigma x) \quad (31)$$

$$\text{avec} \quad \mathbf{A}_{i-1}(z) = \mathbf{A}_{i-1}^+ \exp(j\alpha_i z) + \mathbf{A}_{i-1}^- \exp(-j\alpha_i z).$$

L'introduction de l'indice  $i-1$  pour décrire le champ  $\mathbf{E}_i$  dans le milieu  $i$  est ici justifiée par la numérotation des dioptries et milieux (figure 6). Les composantes  $\mathbf{A}_{i-1}^\pm$  sont donc définies dans le milieu d'indice  $n_{i-1}$ , et les champs aux interfaces  $i-1$  et  $i$  dans ce même milieu  $i$  sont respectivement donnés par :

$$\mathbf{A}_{i-1} = \mathbf{A}_{i-1}(0) \quad \text{et} \quad \mathbf{A}_i = \mathbf{A}_{i-1}(e_i).$$

La relation (31) indique, par opposition à l'onde plane progressive ou rétrograde dont le module est constant en milieu transparent, que le champ stationnaire est une fonction trigonométrique ou hyperbolique de la cote  $z$ , selon que le coefficient  $\alpha$  est réel ( $\sigma < k_i$ ) ou imaginaire ( $\sigma > k_i$ ) dans le milieu. Des sur-intensifications locales peuvent également exister dans le multicouche. Rappelons enfin que le champ stationnaire tangentiel  $\mathbf{A}(z)$  est continu dans tout l'empilement en l'absence de sources, contrairement aux composantes progressives ou rétrogrades  $\mathbf{A}^\pm$ .

Le principe de généralisation à l'admittance est immédiat. En effet, on a dans le cas TE :

$$\mathbf{A} = A \mathbf{y} = \mathbf{A}_{tg} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = B \mathbf{x} = B_{tg} \mathbf{z}$$

de sorte que  $\mathbf{z} \wedge \mathbf{A}_{tg}$  est parallèle à  $\mathbf{B}_x = B_{tg}$ .

Dans le cas TM, on a :

$$\mathbf{A} = A \mathbf{x} + A_z \mathbf{z} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = B \mathbf{y} = B_{tg}$$

de sorte que  $\mathbf{z} \wedge \mathbf{A}_{tg}$  est encore parallèle à  $B_{tg}$ .

Ainsi, dans l'un ou l'autre cas de polarisation (TE ou TM), les composantes tangentielles des champs électrique et magnétique sont reliées par un scalaire  $Y$ , dit **admittance complexe** :

$$\mathbf{B}_{tg} = Y \mathbf{z} \wedge \mathbf{A}_{tg} \quad (32)$$

Cependant, par opposition à l'indice effectif qui est une grandeur constante (indépendante de  $z$ ) pour les ondes progressives ou rétrogrades, l'admittance  $Y$  est un nombre complexe qui dépend de l'altitude  $z$  dans le multicouche, et caractérise l'onde stationnaire à cette altitude. La fonction  $Y(z)$  est continue dans l'empilement en l'absence de sources, puisque  $\mathbf{A}_{tg}$  et  $\mathbf{B}_{tg}$  le sont, conformément aux relations de passage. Enfin, en champ lointain dans un milieu semi-infini (substrat ou superstrat), l'onde est uniquement rétrograde ou stationnaire, de sorte que l'admittance s'identifie à l'indice effectif :

$$Y = \pm \tilde{n} \quad \text{pour une onde progressive } (\tilde{n}) \text{ ou rétrograde } (-\tilde{n}) \quad (33)$$

Il nous reste maintenant à calculer la fonction complexe  $Y(z)$ . Ce calcul s'effectue par récurrence, et nécessitera tout d'abord un développement matriciel.



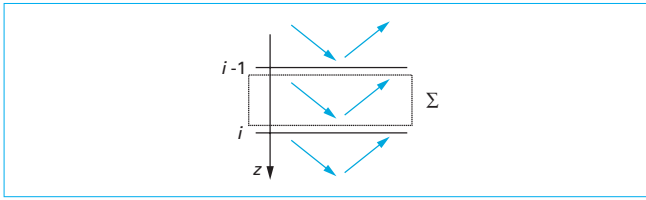


Figure 7 – Bilan d'énergie à travers la surface fictive  $\Sigma$ , réunion des interfaces  $i-1$  et  $i$  dans un empilement

Comme précédemment, il est utile de connaître le flux de Poynting d'une onde stationnaire à travers un plan de cote  $z$ . On obtient la même expression qu'en (28), à condition de remplacer l'indice effectif par l'admittance complexe et l'onde progressive par l'ordre stationnaire :

$$\Phi = 0,5 \operatorname{Re}(Y) |A_{\text{tg}}|^2 \quad (34)$$

Tout bilan d'énergie devant être associé à une surface fermée  $\Sigma$  (figure 7), on obtient par différence de flux entre les interfaces  $i-1$  et  $i$ , la quantité de lumière absorbée  $A_i$  dans le volume délimité par  $\Sigma$  :

$$2 A_i = -\operatorname{Re}(Y_{i-1}) |A_{\text{tg},i-1}|^2 + \operatorname{Re}(Y_i) |A_{\text{tg},i}|^2 \quad (35)$$

Cette relation (35) est une première expression pour calculer l'absorption. Dans le cas de milieux transparents, elle conduit à la propriété :

$$A_i = 0 \Rightarrow |A_{\text{tg},i-1}/A_{\text{tg},i}|^2 = \operatorname{Re}(Y_i)/\operatorname{Re}(Y_{i-1}) \quad (36)$$

où l'on voit que l'admittance « pilote » le rapport des champs dans l'empilement.

### 2.3.1 Matrice de passage

Tous les champs considérés ici sont tangentiels. On cherche une relation  $h_i$  entre les valeurs du couple de vecteurs  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  à chaque interface de l'empilement, soit :

$$(\mathbf{A}_{i-1}, \mathbf{B}_{i-1}) = h_i[(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i)]$$

avec  $\mathbf{A}_{i-1} = \mathbf{A}_{i-1}(0)$ ,  $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_{i-1}(e_i)$ ,  $\mathbf{B}_{i-1} = \mathbf{B}_{i-1}(0)$ ,  $\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_{i-1}(e_i)$

Sous forme matricielle, on écrira :

$$(\mathbf{z} \wedge \mathbf{A}_{i-1}, \mathbf{B}_{i-1}) = M_i(\mathbf{z} \wedge \mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i) \quad (37)$$

avec  $M_i$  la **matrice de passage** pour aller du dioptré  $i$  au dioptré  $i-1$ . On rappellera à nouveau que si le champ stationnaire (qui est le champ physique) est continu à l'interface, ce n'est pas le cas des composantes progressives ou rétrogrades.

Entre les interfaces  $i-1$  et  $i$ , le champ s'écrit dans la couche mince d'épaisseur  $e_i$  et d'indice  $n_i$  comme suit :

$$0 \leq z \leq e_i \Rightarrow \mathbf{A}_{i-1}(z) = \mathbf{A}_{i-1}^+ \exp(j\alpha_i z) + \mathbf{A}_{i-1}^- \exp(-j\alpha_i z)$$

de sorte que le champ  $\mathbf{B}$  vérifie, suite aux propriétés d'indice effectif :

$$\begin{aligned} 0 \leq z \leq e_i \Rightarrow \mathbf{B}_{i-1}(z) &= \mathbf{B}_{i-1}^+ \exp(j\alpha_i z) + \mathbf{B}_{i-1}^- \exp(-j\alpha_i z) \\ \Rightarrow \mathbf{B}_{i-1}(z) &= \tilde{n}_i [\mathbf{z} \wedge \mathbf{A}_{i-1}^+ \exp(j\alpha_i z) - \mathbf{z} \wedge \mathbf{A}_{i-1}^- \exp(-j\alpha_i z)] \end{aligned} \quad (38)$$

On obtient à l'interface  $i-1$ , soit en  $z=0$  dans le milieu  $i$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{i-1} &= \mathbf{A}_{i-1}(0) = \mathbf{A}_{i-1}^+ + \mathbf{A}_{i-1}^- \\ \mathbf{B}_{i-1} &= \mathbf{B}_{i-1}(0) = \tilde{n}_i [\mathbf{z} \wedge \mathbf{A}_{i-1}^+ - \mathbf{z} \wedge \mathbf{A}_{i-1}^-] \end{aligned} \quad (39)$$

Cette première relation (39) permet d'exprimer les champs stationnaires à l'interface  $i-1$  en fonction des composantes progressive et rétrograde dans le milieu  $i$  :

$$(\mathbf{A}_{i-1}, \mathbf{B}_{i-1}) = f_i[\mathbf{A}_{i-1}^+, \mathbf{A}_{i-1}^-] \quad (40)$$

De façon similaire, on obtient à l'interface  $i$ , soit en  $z=e_i$  dans le milieu  $i$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i &= \mathbf{A}_{i-1}(e_i) = \mathbf{A}_{i-1}^+ \exp(j\alpha_i e_i) + \mathbf{A}_{i-1}^- \exp(-j\alpha_i e_i) \\ \mathbf{B}_i &= \mathbf{B}_{i-1}(e_i) = \tilde{n}_i [\mathbf{z} \wedge \mathbf{A}_{i-1}^+ \exp(j\alpha_i e_i) - \mathbf{z} \wedge \mathbf{A}_{i-1}^- \exp(-j\alpha_i e_i)] \end{aligned} \quad (41)$$

Cette relation (41) permet d'exprimer les composantes  $\mathbf{A}_{i-1}^\pm$  en fonction des champs stationnaires à l'interface  $i$  :

$$(\mathbf{A}_{i-1}^+, \mathbf{A}_{i-1}^-) = g_i(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i) \quad (42)$$

En utilisant conjointement les relations (40) et (42), on aboutit à la relation recherchée :

$$(\mathbf{A}_{i-1}, \mathbf{B}_{i-1}) = f_i[g_i[(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i)]]$$

C'est-à-dire, après développement :

$$\begin{aligned} \mathbf{z} \wedge \mathbf{A}_{i-1} &= \cos \delta_i (\mathbf{z} \wedge \mathbf{A}_i) - j \sin \delta_i (\mathbf{B}_i / \tilde{n}_i) \\ \mathbf{B}_{i-1} &= -j \tilde{n}_i \sin \delta_i (\mathbf{z} \wedge \mathbf{A}_i) + \cos \delta_i (\mathbf{B}_i) \end{aligned} \quad (43)$$

Soit encore, sous forme matricielle :

$$(\mathbf{z} \wedge \mathbf{A}_{i-1}, \mathbf{B}_{i-1}) = M_i(\mathbf{z} \wedge \mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i) \quad (44)$$

où  $M_i$  est la **matrice caractéristique** de la couche ou du milieu  $i$  :

$$M_i = (a_{mn}^i) \quad (45)$$

avec

$$\begin{aligned} a_{11}^i &= \cos \delta_i, & a_{12}^i &= -j \sin \delta_i / \tilde{n}_i \\ a_{21}^i &= -j \tilde{n}_i \sin \delta_i, & a_{22}^i &= \cos \delta_i \end{aligned}$$

Dans ces expressions,  $\delta_i$  désigne pour la couche  $i$  un terme de phase sans dimension :

$$\delta_i = \alpha_i e_i \quad (46)$$

Dans le cas d'une onde stationnaire basse fréquence (somme d'ondes planes progressive et rétrograde) en milieu transparent, on obtient :

$$\delta_i = (2\pi/\lambda) n_i e_i \cos i_i$$

où  $n_i e_i$  est l'**épaisseur optique** de la couche mince, et  $n_i e_i \cos i_i$  est l'épaisseur optique apparente. On retiendra également que le déterminant de la matrice est unitaire dans le cas d'un milieu transparent, pour des ondes planes ou évanescentes :

$$\begin{aligned} \det(M_i) &= \cos^2 \delta_i + \sin^2 \delta_i = 1 \quad \text{pour } \delta_i \text{ réel } (\sigma < k_i) \\ \det(M_i) &= \operatorname{ch}^2 \delta_i' - \operatorname{sh}^2 \delta_i' = 1 \quad \text{pour } \delta_i = j \delta_i' \text{ imaginaire pur } (\sigma > k_i) \end{aligned} \quad (47)$$

Ces propriétés peuvent être utilisées pour montrer que la transmission de la lumière à travers un milieu multicouche ne dépend pas du sens de propagation de l'onde incidente (côté substrat ou superstrat). Ce n'est pas le cas du facteur de réflexion quand le composant est absorbant.

### 2.3.2 Relations de récurrence entre admittances

La relation matricielle (45) permet d'extraire une relation de récurrence immédiate entre les admittances complexes à l'intérieur d'un empilement. En effet, si l'on introduit dans (45) les propriétés d'admittance, à savoir :

$$\mathbf{B}_{i-1} = Y_{i-1} (\mathbf{z} \wedge \mathbf{A}_{i-1}) \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_i = Y_i (\mathbf{z} \wedge \mathbf{A}_i) \quad (48)$$

on obtient rapidement :

$$Y_{i-1} = (-j \tilde{n}_i \sin \delta_i + Y_i \cos \delta_i) / (\cos \delta_i - j Y_i \sin \delta_i / \tilde{n}_i) \quad (49)$$

de sorte que l'admittance  $Y_{i-1}$  à l'interface  $i-1$  se déduit de l'admittance  $Y_i$  à l'interface  $i$ . Si l'on veut maintenant calculer l'admittance  $Y_{i-1}(z)$  à l'altitude  $z$  dans la couche ( $i$ ), il suffit de remplacer l'épaisseur  $e_i$  par  $(e_i - z > 0)$  dans la relation (49).

La relation de récurrence sera complète si l'on dispose d'une valeur initiale pour l'admittance ; celle-ci est donnée par l'admittance  $Y_p$  à la dernière interface de l'empilement qui s'identifie à l'indice effectif  $\tilde{n}_s$  du substrat, puisque seule une onde progressive se propage dans ce milieu [cf. (33)] :

$$Y_p = \tilde{n}_{p+1} = \tilde{n}_s \quad (50)$$

En conséquence la suite  $(Y_i)_{i=0 \text{ à } p}$  est connue (figure 8) dès lors que la formule de l'empilement est connue :

$$Y_i = Y_i(\tilde{n}_s) \quad \text{ou encore} \quad Y_i = Y_i(z, \tilde{n}_s) \quad (51)$$

où la fonction  $Y_i$  se déduit de (49). Notons que l'indice  $i$  demeure dans la relation (51) pour rappeler que  $Y_i$  dépend des indices et épaisseurs des couches  $j > i$ .

On aura quelquefois besoin d'inverser la relation (49), on obtient alors :

$$Y_i = (j \tilde{n}_i \sin \delta_i + Y_{i-1} \cos \delta_i) / (\cos \delta_i + j Y_{i-1} \sin \delta_i / \tilde{n}_i) \quad (52)$$

Enfin et jusqu'ici, nous avons considéré un éclairage avec une source à l'infini dans le superstrat ( $z < 0$ ). Si l'éclairage a lieu côté substrat, il faut remplacer  $\alpha_i$  par  $-\alpha_i$  (composantes normales des vecteurs d'onde), ce qui laisse invariants  $\tilde{n}_i \sin \delta_i$  et  $\cos \delta_i$ , de sorte que les relations (49) et (52) demeurent valides à condition de ne pas changer l'indication des dioptries. Toutefois, dans ce cas, la récurrence doit être initiée à partir de la valeur de l'admittance au dioptré 0, où le champ est uniquement rétrograde dans le superstrat :

$$Y_0 = -\tilde{n}_0 \Rightarrow Y_i = Y_i(-\tilde{n}_0) \quad (53)$$

### 2.3.3 Relations de récurrence entre champs stationnaires

Les relations (44) et (45) établissent également une relation de récurrence entre les différents champs stationnaires tangentiels dans l'empilement. Celle-ci est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{z} \wedge \mathbf{A}_{i-1} &= (\cos \delta_i - j \sin \delta_i Y_i / \tilde{n}_i) (\mathbf{z} \wedge \mathbf{A}_i) \\ \mathbf{z} \wedge \mathbf{A}_i &= (\cos \delta_i + j \sin \delta_i Y_{i-1} / \tilde{n}_i) (\mathbf{z} \wedge \mathbf{A}_{i-1}) \end{aligned} \quad (54)$$

de sorte que tous les champs aux interfaces peuvent être calculés à partir du champ  $\mathbf{A}_0$  ou  $\mathbf{A}_{p+1}^+ = \mathbf{A}_s^+$  aux dioptries des milieux extrêmes (superstrat ou substrat). De façon analogue, le champ à l'altitude  $z$  se déduit de la même relation (54) à condition de remplacer  $e_i$  par  $(e_i - z)$  dans  $\delta_i$ .

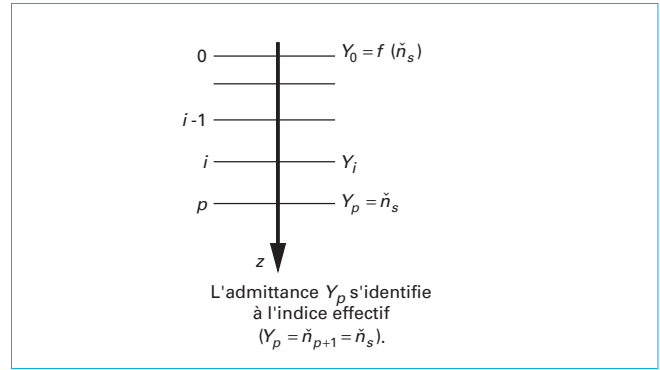


Figure 8 – Déduction des admittances  $Y_i$  par récurrence à partir de l'admittance  $Y_p$  du substrat

Enfin, remarquons que le système (54) conduit à la propriété :

$$(\cos \delta_i - j \sin \delta_i Y_i / \tilde{n}_i) (\cos \delta_i + j \sin \delta_i Y_{i-1} / \tilde{n}_i) = 1$$

ce qui nous donne, combiné à (49) :

$$(Y_i - Y_{i-1}) \cos^2 \delta_i = j [\sin(2\delta_i) / (2\tilde{n}_i)] (\tilde{n}_i^2 - Y_i Y_{i-1}) \quad (55)$$

Comme précédemment, ces formules restent valables pour un éclairage côté substrat.

## 3. Réflexion, transmission, absorption

On montre ici que des raisonnements analytiques simples sont accessibles dès lors que les admittances sont connues. Les empilements ci-après sont éclairés par une onde plane d'amplitude  $\mathbf{A}_0^+$  via le superstrat. On se limite à des champs tangentiels, ce qui nous permet d'utiliser les propriétés d'admittance.

### 3.1 Réflexion

Le coefficient de réflexion  $r_0$  en amplitude d'un empilement éclairé côté superstrat est défini pour chaque polarisation comme :

$$\mathbf{A}_0^- = r_0 \mathbf{A}_0^+ \quad (56)$$

Au dioptré 0, on a donc :

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_0^+ + \mathbf{A}_0^- = (1 + r_0) \mathbf{A}_0^+ \quad (57)$$

Le champ magnétique vérifie également :

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_0^+ + \mathbf{B}_0^- = \tilde{n}_0 [\mathbf{z} \wedge \mathbf{A}_0^+ - \mathbf{z} \wedge \mathbf{A}_0^-] = \tilde{n}_0 (1 - r_0) \mathbf{z} \wedge \mathbf{A}_0^+ \quad (58)$$

Sachant par ailleurs que l'on a par définition :

$$\mathbf{B}_0 = Y_0 \mathbf{z} \wedge \mathbf{A}_0 = Y_0 (1 + r_0) \mathbf{z} \wedge \mathbf{A}_0^+,$$

on obtient :

$$Y_0 (1 + r_0) \mathbf{z} \wedge \mathbf{A}_0^+ = \tilde{n}_0 (1 - r_0) \mathbf{z} \wedge \mathbf{A}_0^+$$

et donc :

$$r_0 = (\tilde{n}_0 - Y_0) / (\tilde{n}_0 + Y_0) \quad (59)$$



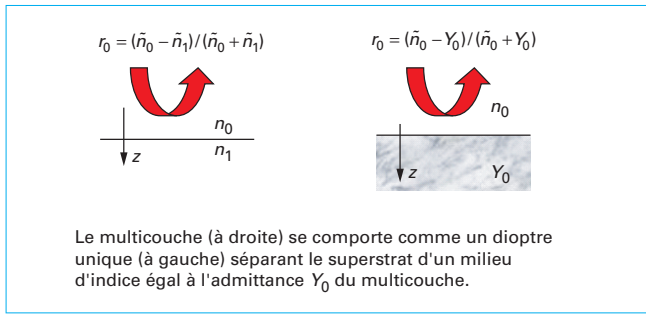


Figure 9 – Comportement d'un multicouche pour le calcul de la réflexion

Cette relation est analogue à la **formule classique de Fresnel** (figure 9) en réflexion pour un dioptre unique, que l'on retrouve en identifiant l'admittance et l'indice effectif dans le milieu substrat dans le cas d'un seul dioptre :  $r_0 = (\tilde{n}_0 - \tilde{n}_1) / (\tilde{n}_0 + \tilde{n}_1)$ . Ainsi, pour le calcul de la réflexion, l'empilement se comporte comme un substrat d'indice de réfraction  $Y_0$  (figure 9) prenant des valeurs arbitraires dans le plan complexe. Cette propriété remarquable est à la base des premiers développements analytiques pour la synthèse de filtres multicouches. Toutefois, l'analogie « indice  $\leftrightarrow$  admittance » se limite à la réflexion et ne saurait concerner d'autres grandeurs comme, par exemple, la transmission  $t$ . En effet, si celle-ci est donnée par  $t = 2 \tilde{n}_0 \tilde{n}_1 / (\tilde{n}_0 + \tilde{n}_1)$  pour un dioptre unique, il n'y a pas d'analogie d'écriture pour un multicouche :

$$t \neq 2 \tilde{n}_0 Y_0 / (\tilde{n}_0 + Y_0).$$

Pour conclure, le facteur de réflexion  $R$  en intensité est donné pour l'empilement par :

$$R = \Phi_0^- / \Phi_0^+ = \text{Re}(\tilde{n}_0) |A_0^+|^2 / \text{Re}(\tilde{n}_0) |A_0^+|^2 \Rightarrow R = |r_0|^2 \quad (60)$$

Cette expression est obtenue en calculant le rapport du flux de Poynting  $\Phi_0^-$  transporté par l'onde rétrograde à travers un plan de cote  $z$  (normale orientée selon  $-oz$ ), au flux  $\Phi_0^+$  transporté par l'onde progressive incidente (normale selon  $oz$ ), ces deux flux étant calculés en champ lointain dans le superstrat. On remarquera que l'indice effectif du superstrat est nécessairement réel, pour permettre un éclairage *via* une source à l'infini dans ce milieu :

$$\text{Re}(\tilde{n}_0) = \tilde{n}_0.$$

## 3.2 Transmission

Différentes méthodes sont utilisables pour le calcul de la transmission  $t$  en amplitude, définie comme :

$$A_{p+1} = A_s^+ = t A_0^+ \quad (61)$$

où  $A_s^+$  est le champ progressif transmis dans le substrat, au voisinage immédiat de la dernière interface. On peut donc utiliser, par exemple, la relation de récurrence (54) entre les champs dans l'empilement :

$$z \wedge A_0 = (z \wedge A_s^+) \prod_{i=1,p} (\cos \delta_i - j \sin \delta_i Y_i / \tilde{n}_i) \quad (62)$$

avec

$$z \wedge A_0 = (1 + r_0) z \wedge A_0^+$$

pour obtenir :

$$t = (1 + r_0) / \prod_{i=1,p} (\cos \delta_i - j \sin \delta_i Y_i / \tilde{n}_i) \quad (63)$$

On remarquera à nouveau que cette expression est différente de la relation donnée par la continuité des champs sur un dioptre unique  $t = 1 + r$  que l'on retrouve immédiatement en écrivant la continuité du champ électrique pour une interface :

$$A_0 = (1 + r_0) A_0^+ = A_0^+ = t_0 A_0^+ \Rightarrow 1 + r_0 = t_0.$$

Le facteur de transmission en énergie est donné pour l'empilement comme le rapport des flux progressifs des vecteurs de Poynting dans le substrat et le superstrat :

$$T = \Phi_s^+ / \Phi_0^+ = \text{Re}(\tilde{n}_s) |A_s^+|^2 / \text{Re}(\tilde{n}_0) |A_0^+|^2 \\ \Rightarrow T = [\text{Re}(\tilde{n}_s) / \text{Re}(\tilde{n}_0)] |t|^2.$$

Compte tenu du fait que le superstrat est transparent pour permettre à l'onde d'éclairer le composant (la source étant à l'infini), on écrira :

$$T = \text{Re}(\tilde{n}_s) |t|^2 / \tilde{n}_0 \quad (64)$$

La grandeur  $T$  est la quantité d'énergie transmise par le composant dans le substrat, au voisinage immédiat de la dernière interface. Si le substrat est dissipatif et que l'on veut la transmission à la cote  $z$  dans ce milieu, il faut prendre en compte la décroissance exponentielle classique du type :

$$T(z) = T \exp(-2 \alpha_s'' z)$$

avec  $\alpha_s'' = \text{Im}(\alpha_s)$ . En incidence normale, cette dernière équation peut s'écrire comme :

$$T(z) = T \exp(-4 \pi n_s'' z / \lambda) \quad (65)$$

où la quantité  $(4 \pi n_s'' / \lambda)$  est souvent désignée comme un coefficient d'extinction.

## 3.3 Absorption

En l'absence d'absorption  $A$ , l'énergie se retrouve en champ lointain en réflexion et transmission :

$$A = 0 \Rightarrow R + T = 1.$$

Cette relation s'obtient rapidement en calculant le flux du vecteur de Poynting à travers une surface fictive  $\Sigma$  englobant le multicouche (figure 10) à l'aide de deux plans parallèles à  $z$  dans le substrat et superstrat, respectivement. Précisons que ces grandeurs normalisées sont toutes bornées (inférieures à 1) parce qu'elles représentent des quantités physiques mesurables mises en jeu dans un bilan d'énergie. Ce ne serait pas le cas si l'on voulait, par exemple, calculer des grandeurs analogues à l'intérieur de l'empilement, sans préciser au préalable le bilan d'énergie recherché.

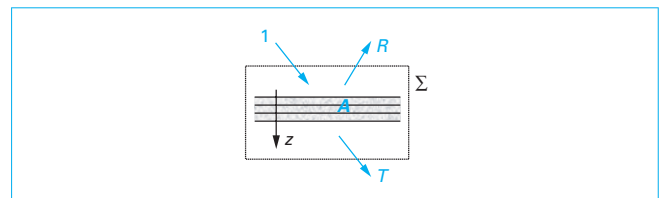


Figure 10 – Bilan d'énergie en champ lointain pour un multicouche

Dans le cas général, on peut toujours déduire l'absorption des valeurs de  $R$  et  $T$  :

$$A = 1 - R - T \quad (66)$$

Toutefois, cette expression ne permet pas d'appréhender le détail des absorptions  $A_i$  dans chacune des couches de l'empilement. Aussi est-il commode de revenir à la définition de la densité volumique d'absorption  $dA/dv$ , ici ramenée à une densité linéique d'absorption  $dA/dz$  compte tenu de l'invariance en  $x$  et  $y$  :

$$dA/dz = (\omega/2) [\varepsilon'' |E_c^2(z)| + \mu'' |H_c^2(z)|] \quad (67)$$

où  $\varepsilon''$  et  $\mu''$  sont les parties imaginaires de la permittivité et la perméabilité, et  $dz$  un élément de longueur. On remarquera ici, et contrairement aux grandeurs utilisées jusqu'ici, que le champ dans la relation (67) n'est pas le champ tangentiel, mais le champ total ; c'est pourquoi nous l'avons noté  $E_c$  pour éviter toute ambiguïté.

Dans notre cas, le milieu est non magnétique ( $\mu'' = 0$ ) et l'expression (67) se réduit à :

$$dA/dv = (\omega/2) \varepsilon'' |A_c(z)|^2 \quad (68)$$

Sachant que :

$$(\omega/2) \varepsilon'' = k' k'' / \omega \mu$$

avec

$$k = k' + j k'' = (2\pi/\lambda) (n' + j n''),$$

on obtient après normalisation par le flux incident :

$$(1/\Phi_0^+) dA/dz = (4\pi/\lambda) (n' n'' / \tilde{n}_0) |A_c(z)/A_{0t}^+|^2 \quad (69)$$

où  $|A_c(z)|$  est le module du champ total et  $A_{0t}^+$  le champ tangentiel incident. Notons ici que l'indice effectif réduit  $\tilde{n}_0$  ne comprend plus le terme en  $(1/\eta_0 \mu_r)$ , que l'on a déjà éliminé. Si l'on veut maintenant que la normalisation du champ  $A_c$  se fasse à l'aide du champ total incident  $A_{c,0}^+$ , on pourra écrire :

$$(1/\Phi_0^+) dA/dz = (4\pi/\lambda) (n' n'' / n_0 \cos i_0) |A_c(z)/A_{c,0}^+|^2 \quad (70)$$

L'absorption de l'empilement est ainsi donnée par :

$$A = \sum_{i=1,p} A_i$$

avec  $A_i$  l'absorption de la couche  $i$  donnée par :

$$A_i = (4\pi/\lambda) (1/\tilde{n}_0) \int_{0 < z < e_i} n_i' n_i'' |A_{c,i}(z)/A_{0t}^+|^2 dz \quad (71)$$

On notera que cette expression nécessite d'intégrer le champ dans chaque couche mince, ce qui se pratique simplement de façon analytique en fonction des composantes  $A_i^\pm$  :

$$\begin{aligned} \int_{0 < z < e_i} |A_{c,i}(z)|^2 dz = & - |A_{c,i}^+|^2 \{ [\exp(-2\alpha_i'' e_i) - 1]/2 \alpha_i'' \} \\ & + |A_{c,i}^-|^2 \{ [\exp(2\alpha_i'' e_i) - 1]/2 \alpha_i'' \} + 2 \operatorname{Re} \{ A_{c,i}^+ A_{c,i}^{*-} \} \\ & [\exp(2\alpha_i e_i) - 1]/2 j \alpha_i \} \end{aligned} \quad (72)$$

On peut remarquer que (71) peut aussi s'écrire, dans une seule couche, comme :

$$A_i = 4\pi (e_i/\lambda) (n_i' n_i'' / \tilde{n}_0) \left\langle |A_{c,i}(z)/A_{0t}^+|^2 \right\rangle \quad (73)$$

où le terme entre brackets désigne une moyenne dans l'épaisseur de la couche mince. En incidence normale, on obtient :

$$A_i = 4\pi (e_i/\lambda) (n_i' n_i'' / n_0) \left\langle |A_{c,i}(z)/A_{0t}^+|^2 \right\rangle \quad (74)$$

Pour obtenir un ordre de grandeur de l'absorption, on pourra donc considérer les paramètres clé donnés par l'indice imaginaire du matériau, le rapport de l'épaisseur à la longueur d'onde et la valeur moyenne du carré du champ dans la couche. Approximativement, le niveau d'absorption est proche du produit de l'indice imaginaire par la surintensité moyenne.

Enfin, signalons que si l'on veut se limiter exclusivement aux composantes tangentielles du champ pour calculer l'absorption, on pourra utiliser l'expression avant normalisation donnée par (35) et déduite des flux stationnaires :

$$2\Phi_0^+ A_i = -\operatorname{Re} (Y_{i-1}) |A_{tg,i-1}|^2 + \operatorname{Re} (Y_i) |A_{tg,i}|^2 \quad (75)$$

Le cas des substrats dissipatifs semi-infinis est également assez fréquent. Dans ce cas, la relation (75) conduit à une absorption dans le substrat donnée par :

$$2\Phi_0^+ A_i = \operatorname{Re} (Y_s) |A_{tg,s}^+|^2 = \operatorname{Re} (\tilde{n}_s) |A_{tg,s}^+|^2 \quad (76)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A_s &= \operatorname{Re} (\tilde{n}_s) |A_{tg,s}^+|^2 / \operatorname{Re} (\tilde{n}_0) |A_{c,0}^+|^2 \\ \Rightarrow A_s &= T \end{aligned} \quad (77)$$

ce qui signifie que toute la lumière transmise est absorbée dans le substrat.

### 3.4 Composantes normales

La quasi-totalité des expressions données dans ce chapitre concerne des champs tangentiels, parce qu'elles mettent en œuvre des admittances. Lorsque nécessaire, et comme c'est le cas pour le calcul de l'absorption, on pourra obtenir les composantes normales ou le champ total à l'aide des relations et remarques suivantes.

Si l'on désigne par  $A_t$  et  $A_N$  les composantes tangentielle et normale du champ, on peut tout d'abord montrer que, pour une polarisation TM :

$$\begin{aligned} r_N &= A_{0,N}^- / A_{0,N}^+ \Rightarrow r_N = -r \\ \text{et } t_N &= A_{s,N}^+ / A_{0,N}^+ \Rightarrow t_N = \alpha_0 / \alpha_s \end{aligned} \quad (78)$$

de sorte que les coefficients de réflexion et transmission en amplitude sont différents pour les composantes tangentielles ( $r$  et  $t$ ) et normales ( $r_N$  et  $t_N$ ). La connaissance conjointe de  $r$  et  $r_N$  permet, par exemple, de connaître la direction du champ total après réflexion.

Par ailleurs, la notion d'indice effectif peut s'étendre aux composantes normales, à quelques différences près liées au fait que les composantes normales de  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  peuvent être nulles selon la polarisation considérée. Si l'on introduit en effet un coefficient  $\tilde{n}_N$  défini comme :

$$\begin{aligned} \tilde{n}_N &= \tilde{n} \sigma / \alpha = (1/\eta_0 \mu_r) n \sigma / k \quad \text{en polarisation TE} \\ \tilde{n}_N &= \tilde{n} \alpha / k = (1/\eta_0 \mu_r) n k / \sigma \quad \text{en polarisation TM} \end{aligned} \quad (79)$$

on pourra vérifier que nos expressions précédentes peuvent être complétées en polarisation TE comme suit :

$$\mathbf{B}_t = Y (\mathbf{z} \wedge \mathbf{A}_t), \quad \mathbf{B}_N = \tilde{n}_N (\mathbf{x} \wedge \mathbf{A}_t), \quad A_N = 0 \quad (80)$$

et en polarisation TM comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_t &= Y (\mathbf{z} \wedge \mathbf{A}_t) = \tilde{n}_N (\mathbf{x} \wedge \mathbf{A}_N), \\ \mathbf{A}_N &= (-1/\tilde{n}_N) (\mathbf{x} \wedge \mathbf{B}_t) = (Y/\tilde{n}_N) (\mathbf{y} \wedge \mathbf{A}_t), \\ B_N &= 0 \end{aligned} \quad (81)$$

où  $Y$  désigne toujours l'admittance complexe. On précisera, contrairement à l'indice effectif  $\tilde{n}$ , que le coefficient  $\tilde{n}_N$  ne change pas de signe quand l'onde devient rétrograde. Par ailleurs, ce coefficient est indépendant du milieu en polarisation TE, et il demeure réel pour une onde évanescence en milieu transparent. Dans le cas d'onde progressive ou rétrograde, on pourra enfin vérifier que le rapport des composantes normales aux composantes tangentielle est donné par :

$$B_N/B_t \text{ (TE)} = A_N/A_t \text{ (TM)} = -\sigma/\alpha \quad (82)$$

avec  $\sigma/\alpha = \tan i$  pour une onde plane en milieu transparent.

Enfin, (80) et (81) pourront être utilisées pour obtenir le vecteur de Poynting  $\mathbf{P}$  comme suit :

$$\begin{aligned} 2\mathbf{P} &= |\mathbf{A}_t|^2 [Y\mathbf{z} + \tilde{n}_N\mathbf{x}] && \text{en polarisation TE} \\ 2\mathbf{P} &= |\mathbf{A}_t|^2 [Y\mathbf{z} + (Y^2/\tilde{n}_N^*)\mathbf{x}] && \text{en polarisation TM} \end{aligned} \quad (83)$$

## 4. Codage numérique

Programmer le calcul de la réponse spectrale d'un multicouche est un exercice relativement simple. Toutefois, pour garantir le caractère général du calcul (ondes planes, évanescences, milieux transparents ou dissipatifs, réflexion totale et résonance, extension à l'optique planaire, microcavités...), on veillera à ce que le cœur du calcul ne fasse intervenir que des fréquences spatiales, sans faire appel à la notion d'angle géométrique. L'organigramme basé sur les admittances se présente ainsi :

- les conditions d'éclairement dans le superstrat définissent la pulsation spatiale incidente :  $\sigma = 2\pi n_0 \sin i_0/\lambda$  qui est la composante tangentielle du vecteur d'onde. Cette pulsation réelle n'est autre que l'**invariant de Descartes**, puisque  $\sigma$  ne dépend pas des différents milieux ;

- on calcule ensuite les coefficients  $\alpha_i$  pour chaque milieu :  $\alpha_i = (k_i^2 - \sigma^2)^{0.5}$ , qui sont les composantes normales du vecteur d'onde, avec  $k_i = 2\pi n_i/\lambda$  et  $n_i$  l'indice réel ou complexe du milieu  $i$  ;

- le calcul des indices effectifs pour chaque milieu et chaque polarisation se fait comme :

$$\begin{aligned} \tilde{n}_i &= n_i \alpha_i / k_i && \text{en polarisation TE} \\ \text{et } \tilde{n}_i &= n_i k_i / \alpha_i && \text{en polarisation TM ;} \end{aligned}$$

- les termes de phase  $\delta_i$  sont indépendants de la polarisation et donnés par :

$$\delta_i = \alpha_i e_i ;$$

- partant de l'indice effectif du substrat ( $Y_p = \tilde{n}_s$ ), on calcule par récurrence les admittances  $(Y_i)_{i=0,p}$  à chaque dioptré de l'empilement et pour chaque polarisation :

$$Y_{i-1} = (-j \tilde{n}_i \sin \delta_i + Y_i \cos \delta_i) / (\cos \delta_i - j Y_i \sin \delta_i / \tilde{n}_i) ;$$

- les facteurs de réflexion en amplitude et en intensité sont alors donnés par :

$$r_0 = (\tilde{n}_0 - Y_0) / (\tilde{n}_0 + Y_0) \quad \text{et} \quad R = |r_0|^2$$

la phase à la réflexion tangentielle étant donnée par l'argument de  $r_0$  ;

- les facteurs de transmission en amplitude et en intensité sont donnés par :

$$t = (1 + r_0)/\Pi \quad \text{et} \quad T = \text{Re}(\tilde{n}_s) |t|^2 / \tilde{n}_0$$

avec

$$\Pi = \prod_{i=1,p} (\cos \delta_i - j \sin \delta_i Y_i / \tilde{n}_i)$$

la phase à la transmission tangentielle étant donnée par l'argument de  $t$  ;

- le champ stationnaire tangentielle à chaque dioptré de l'empilement peut se calculer comme :

$$A_{i-1} = (\cos \delta_i - j \sin \delta_i Y_i / \tilde{n}_i) A_i.$$

Et, dans la couche  $i$  :

$$A_{i-1}(z) = [\cos \delta_i(z) - j \sin \delta_i(z) Y_i / \tilde{n}_i] A_i$$

avec  $\delta_i(z) = \alpha_i(e_i - z)$  pour  $0 \leq z \leq e_i$ . Il conviendra, pour éliminer les constantes, de normaliser le module de ce champ par le flux incident donné par :

$$\Phi_0^+ = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{n}_0) |A_0^+|^2 ;$$

- enfin, l'absorption peut se déduire des valeurs de  $R$  et  $T$ , ou de l'intégrale du carré du champ dans l'épaisseur de l'empilement :

$$A = \sum_{i=0,p} A_i$$

avec

$$A_i = (4\pi/\lambda) (1/\tilde{n}_0) \int_{0 < z < e_i} n_i' n_i'' |A_c(z)/A_{0t}^+|^2 dz$$

où  $A_c$  est la composante totale du champ. On pourra également utiliser la relation (35), moins connue mais fort pratique ;

- à ce stade, on peut « boucler » sur le paramètre adéquat (figure 11), comme la longueur d'onde ou l'incidence d'éclairement...

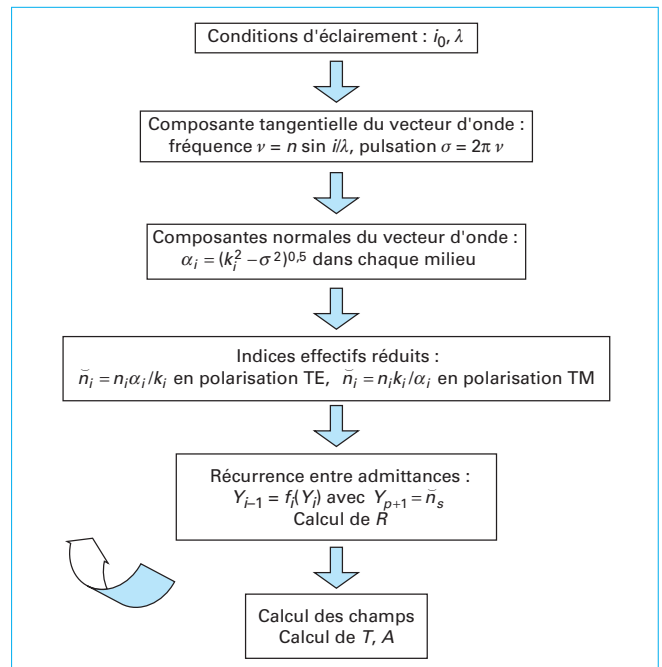


Figure 11 – Organigramme de base pour le calcul des propriétés optiques d'un multicouche

Lorsque la boucle s'effectue sur l'angle d'incidence à une longueur d'onde donnée, la pulsation est limitée à la valeur maximale correspondant à une incidence rasante dans le superstrat :  $\sigma_{\max} = 2\pi n_0/\lambda$ . Toutefois, il est utile que le calcul puisse s'effectuer au-delà de cette pulsation, afin de pouvoir l'étendre au cas de l'optique plane, de la diffusion lumineuse, des microcavités..., où vont intervenir des résonances et paquets d'onde avec des hautes fréquences. De même, on pourra considérer une pulsation complexe et boucler sur des lacets du plan complexe pour certaines applications comme la lumière piégée ; on parlera alors d'une réflexion ou transmission holomorphe.

## 5. Premiers exemples numériques

Dans ce qui suit, on considérera des matériaux diélectriques, donc **faiblement dissipatifs** (à faible absorption) : la partie imaginaire de l'indice de réfraction est faible devant la partie réelle. On désigne par matériau haut ou bas indice un matériau quasi transparent dont l'indice de réfraction réel ( $n_H$  ou  $n_B$ ) est supérieur ( $n_H > n_S$ ) ou inférieur ( $n_B < n_S$ ) à l'indice réel  $n_S$  du substrat. Les diélectriques utilisés pour le calcul numérique sont en général l'air (superstrat d'indice  $n_0 = 1$ ), le verre (substrat d'indice  $n_S = 1,52$ ), le sulfure de zinc (ZnS) d'indice  $n_H = 2,3$  et la cryolithe ( $\text{Na}_3\text{AlF}_6$ ) d'indice  $n_B = 1,3$ , bien que ces deux derniers matériaux ne soient plus que rarement utilisés. Ces valeurs d'indice sont données pour la longueur d'onde  $\lambda = 633 \text{ nm}$ . La dispersion d'indice est négligée, par souci de simplicité. On se limite également au spectre visible. Lorsque des calculs d'absorption sont donnés, ils mettent en jeu une valeur de  $10^{-4}$  pour l'indice imaginaire de chaque matériau. On rappellera cependant que les métaux, sous forme de fines couches partiellement transparentes, sont aussi fréquemment utilisés dans les empilements de couches minces.

### 5.1 Dioptré nu

Le cas du dioptré nu se résume simplement à :

$$r_0 = (\tilde{n}_0 - \tilde{n}_s)/(\tilde{n}_0 + \tilde{n}_s) \quad \text{et} \quad t_0 = 1 + r_0 = 2 \tilde{n}_0/(\tilde{n}_0 + \tilde{n}_s) \quad (84)$$

En incidence normale et pour un dioptré air/verre dans le visible, ce coefficient est négatif et déphase donc le champ réfléchi tangentiel d'une valeur égale à  $\pi$  (par rapport au champ incident) :

$$r_0 = (1 - n_s)/(1 + n_s) < 0 \Rightarrow \arg(r_0) = \pi \quad (85)$$

On retrouve ainsi, en termes de chemin optique et pour rejoindre l'optique géométrique, une différence de marche de  $\lambda/2$  à la réflexion.

Cherchons maintenant les conditions d'annulation du facteur de réflexion en incidence oblique :

$$r_0 = 0 \Leftrightarrow \tilde{n}_0 = \tilde{n}_s$$

avec

$$n \sin i = \text{constante.}$$

On trouve en milieu transparent une solution unique en polarisation TM, donnée classiquement par l'**angle de Brewster** :

$$\tan i_0 = 1/\tan i_1 = n_s/n_0 \Leftrightarrow \sigma_b = (2\pi/\lambda) n_0 n_s/(n_0^2 + n_s^2)^{0,5} \quad (86)$$

Cet angle de Brewster a été largement utilisé pour mesurer les couches de transition sur les substrats, ou pour polariser la lumière. Toutefois, on est ici limité à une incidence donnée, et qui varie avec la dispersion d'indice (avec la longueur d'onde). On notera qu'il n'existe pas d'angle de Brewster pour les empi-

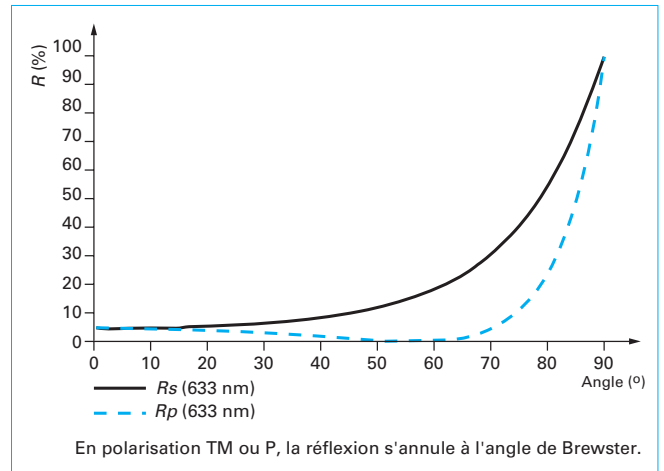


Figure 12 – Facteur de réflexion en fonction de l'incidence d'éclairement pour un dioptré unique

lements, compte tenu de la présence de trois indices au minimum, bien que des effets similaires puissent être utilisés. À la figure 12, nous avons tracé les variations angulaires du facteur de réflexion en intensité pour les deux polarisations.

Le profil spectral (variations avec la longueur d'onde) du dioptré nu n'est pas donné car en l'absence de dispersion d'indice, la réflexion est constante et proche de 4 % en incidence normale, quelle que soit la longueur d'onde (visible).

### 5.2 Antireflet

Tentons maintenant d'éliminer la réflexion sur un dioptré à la longueur d'onde  $\lambda_0$ , grâce au dépôt d'une seule couche mince sur ce dioptré (figure 13).

La condition d'annulation s'écrit :

$$r_0 = (\tilde{n}_0 - Y_0)/(\tilde{n}_0 + Y_0) = 0 \Leftrightarrow \tilde{n}_0 = Y_0$$

avec

$$Y_0 = (-j \tilde{n}_1 \sin \delta_1 + Y_1 \cos \delta_1)/(\cos \delta_1 - j Y_1 \sin \delta_1/\tilde{n}_1) \\ \text{et } Y_1 = \tilde{n}_2 = \tilde{n}_s.$$

On obtient :

$$\cos \delta_1 (\tilde{n}_0 - \tilde{n}_s) = j \sin \delta_1 (-\tilde{n}_1 + \tilde{n}_0 \tilde{n}_s/\tilde{n}_1) \quad (87)$$

Si le terme de phase  $\delta_1 = \alpha_1 e_1$  est réel, la solution requiert deux conditions :

$$\cos \delta_1 = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{n}_1^2 = \tilde{n}_0 \tilde{n}_s \quad (88)$$

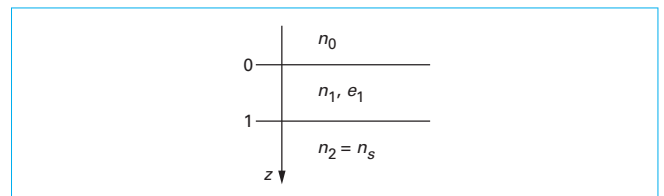


Figure 13 – Recherche d'un effet antireflet sur un substrat d'indice  $n_s$

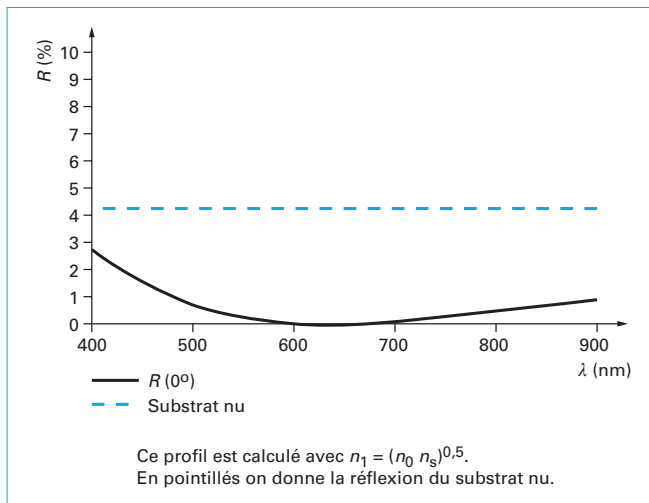


Figure 14 – Profil spectral d'une couche antireflet à 633 nm

La première condition impose que la couche ait une épaisseur optique multiple impair du quart de la longueur d'onde  $\lambda_0$  d'éclairement, soit :

$$\delta_1 = (2q + 1)\pi/2 \Leftrightarrow n_1 e_1 \cos i_1 = (2q + 1)\lambda_0/4 \quad (89)$$

avec  $q$  entier positif.

La deuxième condition impose que la couche soit de bas indice, c'est-à-dire d'un indice inférieur à celui du substrat (pour  $n_0 < n_s$ ). En incidence normale, on retrouve l'expression bien connue :

$$n_1 = (n_0 n_s)^{0,5} \quad (90)$$

En incidence oblique, les solutions dépendent de la polarisation. On retiendra de façon générale qu'une couche mince de bas indice réduit la réflexion du substrat, l'annulation intervenant pour une couche quart-d'onde de bas indice donné à  $i = 0^\circ$  par (90). On donne le profil spectral de la couche unique anti-reflet en figure 14, pour une annulation à  $\lambda_0 = 633$  nm.

On peut tenter d'étendre ces calculs au cas d'une couche mince déposée sur un empilement ou un métal, dont on veut supprimer la réflexion. Il faut alors remplacer l'indice effectif  $\tilde{n}_s$  du substrat par l'admittance  $Y$  au premier dioptré du composant dans la relation de récurrence ; les calculs sont plus lourds puisque cette admittance est complexe... Pour conclure, le problème des antireflets est bien plus délicat à traiter (lorsque les propriétés recherchées sont achromatiques (antireflet large bande) ou indépendantes de l'incidence (et de la polarisation), voire les deux. La difficulté croît également avec la réduction requise pour la réflexion (quelques  $10^{-2}$  ou  $10^{-4}$ ), ou dans le cas de substrat fortement réflecteur.

### 5.3 Couche « absente »

Considérons à nouveau une ou plusieurs couches minces sur le dioptré nu (figure 15), et recherchons des valeurs particulières des matrices de passage à une longueur d'onde  $\lambda_0$ . Le cas le plus simple est celui où la matrice est identique au signe près à la matrice unité, soit :

$$M_i = (-1)^q \text{Id} \Leftrightarrow \delta_i = q\pi \Leftrightarrow \cos \delta_i = (-1)^q \quad \text{et} \quad \sin \delta_i = 0$$

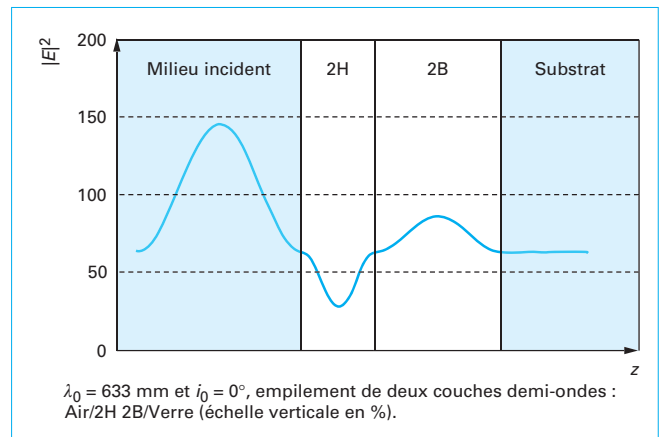


Figure 15 – Répartition spatiale du carré du module du champ électrique pour un empilement de deux couches demi-ondes

avec  $q$  entier positif. On obtient :

$$a_i e_i = q\pi \Rightarrow n_i e_i \cos i_i = q\lambda_0/2 \quad (91)$$

ce qui correspond à une couche d'épaisseur optique multiple d'une demi-onde en incidence normale ( $i = 0^\circ$ ). Dans le cas de l'incidence oblique, on parlera de **couche matchée demi-onde**. Précisons que la relation (91) ne peut être vérifiée que si le terme de phase  $\delta_i$  est réel, ce qui requiert que l'onde soit stationnaire basse fréquence et que les milieux soient transparents. Il n'y a donc pas de concept de couche absente pour les ondes évanescentes ou les milieux absorbants. Dans le cas d'une résonance ou d'une onde guidée, seule une couche de haut indice pourra être absente pour la fréquence considérée.

On remarquera (figure 15) que le champ commence par décroître dans la couche haut indice, et croître dans la couche bas indice. On peut vérifier ce résultat en dérivant le carré du champ dans la couche mince. On obtient en incidence normale et dans la couche bas indice :

$$g(z) = |A(z)|^2 = |\cos \delta_B - j \sin \delta_B (n_s/n_B)|^2 \quad (92)$$

$$\Rightarrow \partial g / \partial z = (\partial \delta_B / \partial z) \partial g / \partial \delta_B = \sin(2\delta_B) [-1 + (n_s/n_B)^2] > 0$$

avec

$$\partial \delta_B / \partial z = k_B = 2\pi n_B / \lambda.$$

Les relations de récurrence entre admittances et entre champs se réduisent pour la matrice unité à :

$$Y_{i-1} = Y_i \quad \text{et} \quad A_{i-1} = (-1)^q A_i \quad (93)$$

de sorte que tous les champs sont identiques en module aux interfaces. Cependant, dans le volume de la couche, le champ présentera un nombre d'extrema qui croît avec l'entier  $q$ .

On insistera sur le fait que la couche  $q$  fois demi-onde à  $\lambda_0$ , donnée par  $n(\lambda_0)e = q\lambda_0/2$ , est uniquement absente aux longueurs d'onde  $\lambda_k$  dites harmoniques, données à la dispersion d'indice près par :

$$\lambda_k = (2/k) n(\lambda_k) e \approx (2/k) q\lambda_0/2 = q\lambda_0/k \quad (94)$$

avec l'entier  $q$  fixé. La position spectrale de ces harmoniques (figure 16) est donc imposée par l'épaisseur optique de la couche mince. À chacune de ces longueurs d'onde  $\lambda_k$ , les facteurs  $R$  et  $T$  de la couche mince sont identiques à ceux du substrat s'il n'y a pas d'absorption. Tout écart par rapport à ce résultat traduirait la

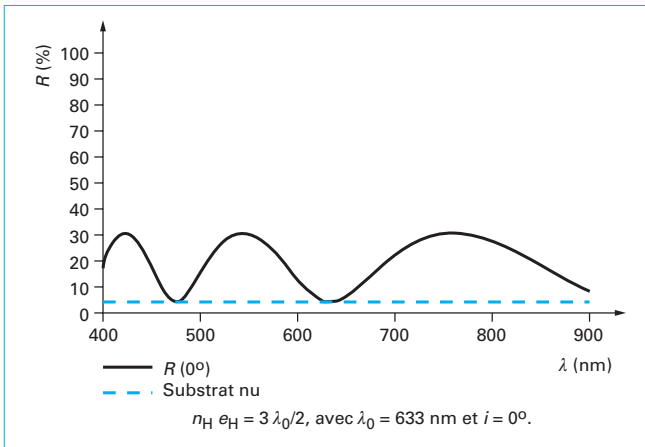


Figure 16 – Position spectrale des harmoniques d'une couche haut indice 3 fois demi-onde

présence d'un gradient vertical d'indice ou d'une absorption. De façon générale, les couches « absentes » sont utilisées pour la synthèse, la protection des composants fonctionnant sur une longueur d'onde spécifique...

## 5.4 Couches quart d'onde et cas des miroirs multidiélectriques

Considérons maintenant le cas plus général où toutes les couches de l'empilement, de haut ou de bas indice, sont quart d'onde à la longueur d'onde particulière  $\lambda_0$ , dite **de centrage** :

$$\begin{aligned} n_i e_i \cos i_i &= (2q+1) \lambda_0/4 \\ \Leftrightarrow \alpha_i e_i &= (2q+1) \pi/2 \Leftrightarrow \cos(\alpha_i e_i) = 0 \\ \text{et } \sin(\alpha_i e_i) &= (-1)^q \end{aligned} \quad (95)$$

La relation d'admittances se réduit à :

$$Y_{i-1} Y_i = \tilde{n}_i^2 \quad (96)$$

Et la relation entre champs à :

$$A_{i-1}/A_i = -j(-1)^q Y_i/\tilde{n}_i \Rightarrow |A_{i-1}/A_i| = |Y_i/\tilde{n}_i| \quad (97)$$

Plaçons-nous ainsi dans le cas d'un miroir quart d'onde multidiélectrique, constitué d'une alternance régulière de couches quart d'onde haut et bas indice (figure 17). La formule classique de ce composant est désignée comme :

$$M_{2n+1} = \text{Air (HB)}^n \text{ H Substrat} \quad (98)$$

ce qui représente  $2n+1$  couches minces entre l'air et le substrat. H et B désignent respectivement des couches haut et bas indice, quart d'onde à la longueur d'onde de centrage  $\lambda_0$  où le pouvoir réflecteur du composant doit être maximum. Remarquons ici que l'empilement commence et se termine par une couche haut indice. Détaillons maintenant la relation de récurrence entre admittances :

$$\begin{aligned} Y_{2n+1} &= \tilde{n}_s \\ Y_{2n} &= \tilde{n}_H^2/\tilde{n}_s \\ Y_{2n-1} &= \tilde{n}_B^2/(\tilde{n}_H^2/\tilde{n}_s) = \tilde{n}_s (\tilde{n}_B^2/\tilde{n}_H^2) \\ Y_{2n-2} &= (\tilde{n}_H^2/\tilde{n}_s) (\tilde{n}_B^2/\tilde{n}_H^2) \\ Y_{2n-3} &= \tilde{n}_s (\tilde{n}_B/\tilde{n}_H)^4 \\ Y_{2n-4} &= (\tilde{n}_H^2/\tilde{n}_s) (\tilde{n}_H/\tilde{n}_B)^4 \end{aligned}$$

de sorte que, après généralisation, on a :

$$\begin{aligned} Y_{2n-(2i+1)} &= \tilde{n}_s (\tilde{n}_B/\tilde{n}_H)^{2i+2} \\ Y_{2n-2i} &= (\tilde{n}_H^2/\tilde{n}_s) (\tilde{n}_H/\tilde{n}_B)^{2i} \end{aligned} \quad (99)$$

On en déduit, lorsque le nombre de couches  $(2n+1)$  croît indéfiniment, que :

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} Y_{2n-(2i+1)} &= 0 \Rightarrow \lim [r = (1-Y)/(1+Y)] = +1 \\ \lim_{i \rightarrow \infty} Y_{2n-2i} &= \infty \Rightarrow \lim [r = (1-Y)/(1+Y)] = -1 \end{aligned} \quad (100)$$

Les relations (99) et (100) montrent que l'admittance aux interfaces de l'empilement est réelle, et prend sur ces interfaces des valeurs alternativement nulles (dioptries impairs) ou infinies (dioptries pairs) selon leur parité, à mesure que l'on se rapproche du superstrat (air). Les coefficients de réflexion sont ainsi respectivement négatif et positif aux dioptries pairs et impairs, avec des valeurs de champs associés qui sont minimales ( $1+r \approx 0$ ) ou maximales ( $1+r \approx 2$ ). Cela montre l'intérêt de commencer et terminer l'empilement par une couche haut indice, condition qui garantit un champ minimum (figure 17) à l'interface au contact du superstrat, pour un effet de contamination moindre. On a, en effet, dans ce cas, à l'interface 0 :

$$Y_0 = (\tilde{n}_H^2/\tilde{n}_s) (\tilde{n}_H/\tilde{n}_B)^{2n} \quad \text{et} \quad r \approx -1 \quad (101)$$

de sorte que le champ est quasi nul à la première interface :

$$1+r \approx 0 \quad (102)$$

Si maintenant on rajoutait une couche quart d'onde bas indice sur ce miroir, on obtiendrait à l'interface (indicée -1) au contact de l'air :

$$Y_{-1} = \tilde{n}_s (\tilde{n}_B/\tilde{n}_H)^{2n+2}$$

de sorte que l'admittance serait quasi nulle et le champ maximum :

$$|1+r|^2 \approx 4 \quad (103)$$

Cette dernière configuration est d'un intérêt moindre, puisque diffusion, absorption et dégradation sous flux vont croître avec la contamination du premier dioptré au contact de l'air.

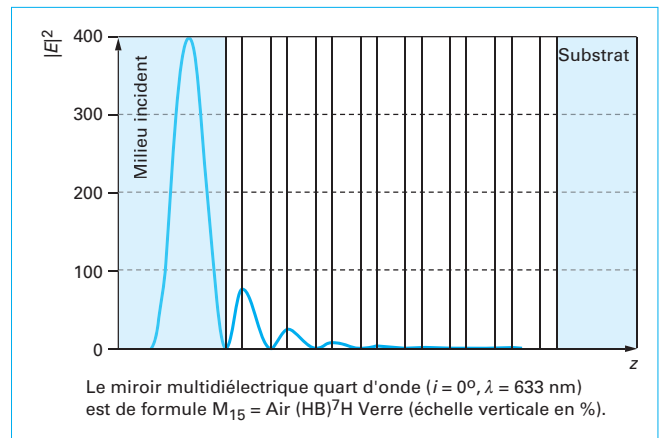


Figure 17 – Champ stationnaire dans un miroir multidiélectrique quart d'onde



Observons maintenant la décroissance du champ dans l'empilement. On pourra vérifier que la relation de récurrence entre champs conduit à :

$$|A_{2i-1}/A_{2i+1}|^2 = (\tilde{n}_H/\tilde{n}_B)^2 \quad (104)$$

En conséquence, seules les premières couches (côté air) sont excitées par l'onde optique, puisque le champ décroît exponentiellement (figure 17) à mesure que l'on se rapproche du substrat : on dit pour cela que la lumière dans un miroir « ne voit pas » le substrat. Le rapport  $\tilde{n}_H/\tilde{n}_B$  est appelé **choc d'indice**, et l'on voit tout l'intérêt d'en augmenter la valeur pour une décroissance rapide du champ avec un minimum de couches minces.

Notons que l'absorption, quant à elle, est liée à l'intégrale du champ électrique.

### Encadré – Développement limité de la réflexion

L'admittance étant forte ou faible quand le nombre de couches croît, on peut effectuer un développement limité au premier ordre de la réflexion :

$$r_0 = (\tilde{n}_0 - Y_0)/(\tilde{n}_0 + Y_0)$$

On a :

$$Y_0 = (\tilde{n}_H^2/\tilde{n}_s)(\tilde{n}_H/\tilde{n}_B)^{2n} \Rightarrow Y_0 = \beta \alpha^{2n}$$

avec

$$\beta = \tilde{n}_H^2/\tilde{n}_s \quad \text{et} \quad \alpha = \tilde{n}_H/\tilde{n}_B.$$

On obtient :

$$r \approx -1 + 2 \tilde{n}_0/(\beta \alpha^{2n}) \quad (105)$$

D'où, pour l'intensité :

$$R \approx 1 - 4 (\tilde{n}_0 \tilde{n}_s / \tilde{n}_H^2) (\tilde{n}_H/\tilde{n}_B)^{p-1} \quad (106)$$

où  $p = 2n + 1$  est le nombre de couches du miroir. Cette relation montre bien comment le choc d'indice intervient pour obtenir une réflexion maximale avec une épaisseur mécanique minimale d'empilement. On remarquera que la transmission est donnée en l'absence d'absorption par :

$$T \approx 4 (\tilde{n}_0 \tilde{n}_s / \tilde{n}_H^2) (\tilde{n}_H/\tilde{n}_B)^{p-1} \quad (107)$$

Enfin, on peut montrer que la bande passante  $\Delta\lambda$  du miroir (zone de réflexion, ou bande interdite – par analogie aux cristaux photoniques) dépend également du choc d'indice comme :

$$\Delta\lambda/\lambda_0 \approx (2/\pi) \arcsin [(n_H - n_B)/(n_H + n_B)] = f(n_H/n_B) \quad (108)$$

où  $\lambda_0$  est la longueur d'onde de centrage (figure 18). Pour élargir cette bande passante et obtenir des miroirs achromatiques dits large bande, on pourra superposer différents miroirs monochromatiques à condition de les adapter correctement. Enfin et à titre de remarque, les pics étroits de réflexion dans les filtres de Bragg réalisés dans le volume des fibres optiques s'expliquent par les faibles chocs d'indice obtenus par insolation UV. Il s'agit donc bien dans le principe de miroirs multicouches soumis à un éclairage modal, avec un très grand nombre de couches pour compenser la faible valeur du choc d'indice. Une différence réside cependant dans le gradient d'indice obtenu par ces techniques, que l'on retrouve en couches minces sous forme de filtres rugate.

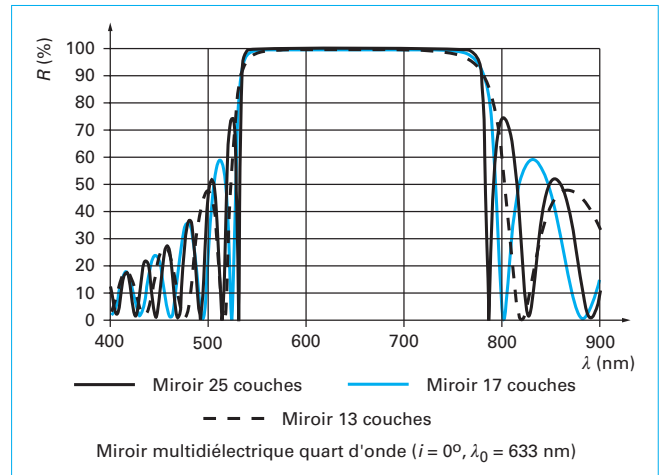


Figure 18 – Réflexion spectrale d'un miroir multidiélectrique quart d'onde avec différents nombres de couches minces

## 5.5 Cas des filtres Fabry-Pérot : filtres à bande étroite

La sélection spectrale (isolation de raies) à l'aide de filtres Fabry-Pérot est bien connue. Il s'agit de façon classique de mettre en regard des miroirs séparés par une couche médiane dont on ajuste l'épaisseur optique  $ne$  pour obtenir une résonance ou pic de transmission. La bande passante est inversement proportionnelle à l'épaisseur optique et à la réflexion des miroirs, dont le parallélisme joue un rôle critique. Avec les couches minces, le problème est différent, en pratique, puisque l'épaisseur totale du composant est de quelques longueurs d'onde, ce qui permet une intégration facile dans les systèmes de démultiplexage (mise en cascade...). Les bandes passantes sont en général plus larges en raison de la faible épaisseur de la couche médiane ; cependant, depuis une dizaine d'années, on obtient couramment des bandes passantes « bien rectangulaires » de largeur inférieure au nanomètre, avec des transmissions supérieures à 97 % et des réjections hors-bande de  $10^{-4}$ .

Un filtre Fabry-Pérot en couches minces pour la longueur d'onde  $\lambda_0$  est constitué de deux miroirs multidiélectriques centrés à  $\lambda_0$ , séparés par une cavité ou *spacer* d'épaisseur optique multiple d'une demi-longueur d'onde  $\lambda_0/2$ . La formule du filtre est ainsi donnée par :

$$FP = M C M = \text{Air} (HB)^n H C H (BH)^n \text{Substrat} \quad (109)$$

où l'on a choisi ici des miroirs de type  $M_{2n+1} = (HB)^n H$ , soit donc  $p = 4n + 3$  le nombre de couches du filtre. On remarque d'emblée que la matrice du *spacer* est la matrice unité, puisque son épaisseur optique est demi-onde :

$$(ne \cos i)_c = q (\lambda_0/2) \quad (110)$$

En conséquence, les deux couches H de part et d'autre du *spacer* donnent une matrice équivalente unité, ainsi que les deux couches B suivantes, etc., de sorte que la matrice totale de l'empilement à  $\lambda_0$  est la matrice identité. À la longueur d'onde de centrage  $\lambda_0$ , le filtre est donc absent (en l'absence d'absorption) et sa transmission est égale à celle du substrat. Pour accroître cette transmission (au-delà de 96 % pour du verre), il faudra déposer des antireflets spécifiques de part et d'autre du composant.

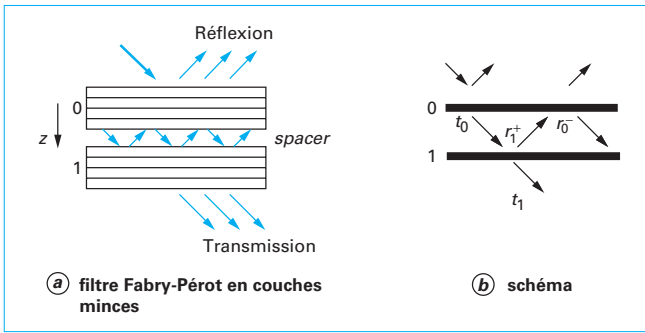


Figure 19 – Filtre Fabry-Pérot en couches minces et sa schématisation »

Un calcul élémentaire de réflexions multiples en amplitude (figure 19) nous conduit à :

$$A_s^+ = A_0^+ t_0 [e^{i\delta} + r_1^+ r_0^- e^{i3\delta} + \dots] \quad (111)$$

où  $A_s^+$  et  $A_0^+$  sont les ondes progressives respectivement incidente et transmise, et  $\delta$  le terme de phase de la cavité :

$$\delta = \alpha_c e_c$$

Les coefficients de réflexion  $r_0^-$  et  $r_1^+$  sont donnés pour les miroirs éclairés *via* la cavité superstrat (le substrat étant l'air), respectivement par une onde rétrograde ou progressive. Quant aux coefficients de transmission, ils sont donnés pour un couple superstrat/substrat de type air/cavité ( $t_0$ ) ou cavité/air ( $t_1$ ). On a donc :

$$T_0 = \text{Re}(\tilde{n}_c) |t_0|^2 / \tilde{n}_0 \quad \text{et} \quad T_1 = \text{Re}(\tilde{n}_0) |t_1|^2 / \tilde{n}_c \quad (112)$$

avec  $\tilde{n}_c$  l'indice effectif de la cavité et  $\tilde{n}_0 = \tilde{n}_s$  l'indice des milieux extrêmes.

On obtient la transmission en amplitude  $t^*$  du filtre :

$$t^* = t e^{i\delta} [1/(1 - r e^{i2\delta})] \quad (113)$$

avec

$$t = t_0 t_1 \quad \text{et} \quad r = r_1^+ r_0^-$$

En posant  $r = R^{0.5} \exp(j\psi)$ , avec  $\psi = \psi_1^+ + \psi_0^-$  le déphasage à la réflexion des miroirs, on a :

$$t^* = t e^{i\delta} [1/(1 - R \exp[j(2\delta + \psi)])] \quad (114)$$

Sachant que :

$$|t|^2 = T_0 T_1 \tilde{n}_c / [\text{Re}(\tilde{n}_0) \text{Re}(\tilde{n}_c)] \Rightarrow |t|^2 = T_0 T_1 \text{ en milieux transparents.}$$

On aboutit à :

$$T^* = |t^*|^2 = T^2 / [1 + R^2 - 2R \cos(2\delta + \psi)] \quad (115)$$

avec

$$T^2 = T_0 T_1, \quad R^2 = R_0 R_1, \quad \psi = \psi_1^+ + \psi_0^-, \quad \delta = \alpha_c e_c.$$

Cette transmission  $T^*$  est encadrée comme suit :

$$T_m = [T/(1+R)]^2 < T^* < T_M = [T/(1-R)]^2 \quad (116)$$

On remarquera que le maximum s'écrit comme :

$$t_m = [T/(A+T)]^2 \approx 1 - 2A/T \quad \text{pour les faibles absorptions.}$$

Pour des miroirs identiques et donc pour un filtre symétrique (superstrat = substrat), on a de plus :

$$r_0^- = r_1^+, \quad T_0 = T_1 \quad \text{et} \quad \psi_1^+ = \psi_0^-$$

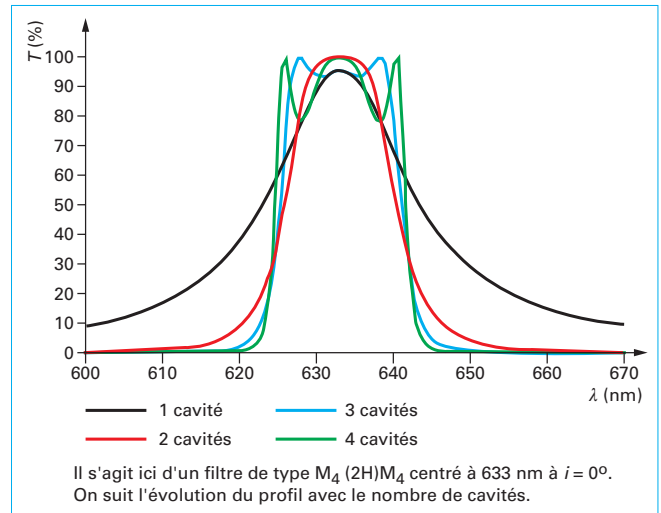


Figure 20 – Profil spectral d'un filtre Fabry-Pérot en couches minces

Il s'agit ici d'un filtre de type  $M_4(2H)M_4$  centré à 633 nm à  $i = 0^\circ$ . On suit l'évolution du profil avec le nombre de cavités.

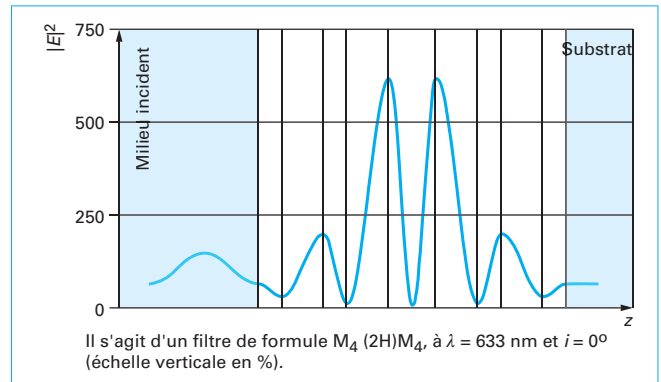


Figure 21 – Champ stationnaire dans un filtre

Soit, en posant  $\phi = \delta + \psi^\pm$  :

$$T^* = T^2 / [1 + R^2 - 2R \cos(2\phi)] \quad (117)$$

La **bande passante** ou finesse du filtre se calcule directement à partir de (117). En dehors de cette bande passante où la transmission est maximale (figure 20), le filtre réfléchit la lumière et l'on dit qu'il est réjecteur, avec une **bande de réjection** (ou bande interdite) identique à la bande passante des miroirs. On remarquera que le centrage du filtre dépend conjointement de la cavité (terme de phase  $\delta$ ) et de la phase  $\psi$  des miroirs, lesquels doivent en conséquence être correctement centrés. Notons par ailleurs que pour isoler une raie, il faudra aussi veiller à rejeter les harmoniques du filtre au-delà de la bande de réjection. On citera également l'utilisation de filtres métal/diélectrique (filtres induits) pour agrandir les bandes de réjection.

Enfin, si l'on veut améliorer la réponse du filtre (figure 20) et se rapprocher d'un profil de type rectangle, on peut superposer plusieurs filtres Fabry-Pérot à condition de les adapter par une couche intermédiaire. On parle alors de filtres multicavités ou multiondes, et ceux-ci révèlent des oscillations dans la bande passante, que l'on cherchera à éliminer en rompant la symétrie de l'empilement.

En figure 21, on donne la répartition spatiale du champ stationnaire dans le cas d'une cavité de haut indice. On peut déduire cette répartition de celle observée pour les miroirs.

## 5.6 Autres fonctions

On ne saurait insister sur la diversité des fonctions optiques que l'on peut atteindre avec des empilements de couches minces : polariseurs, séparateurs et dichroïques, filtres inverses, filtres froids et chauds, filtres en peigne, égaliseurs de gain et miroirs chirpés, miroirs et Fabry-Pérot... La difficulté ne réside pas simplement dans le type de gabarit à obtenir, mais dans les performances recherchées : pics de résonance étroits ( $\Delta\lambda < 0,1$  nm) avec faible absorption ( $T > 98\%$  à  $\lambda_0$ ) et forte réjection ( $T < 10^{-4}$  en dehors de  $\Delta\lambda$ ), réflexion maximale ( $R > 1 - 10^{-4}$ ) ou minimale ( $R < 10^{-4}$ ), en plus de la stabilité à la longueur d'onde ou l'incidence et la polarisation...

## 5.7 Couches matchées

Il est utile de savoir que les couches (ou empilements) matchées généralisent à l'incidence oblique nombre de formules données pour l'incidence normale. En effet, on a vu qu'un composant centré à  $\lambda_0$  en incidence normale est en général constitué de couches demi-ondes ou quart d'onde, soit :

$$n_H e_H = n_B e_B = q \lambda_0 / 4 \quad (118)$$

Cette propriété se généralise à l'incidence oblique, pourvu que les **épaisseurs optiques apparentes** des couches vérifient :

$$n_H e_H \cos i_H = n_B e_B \cos i_B = q \lambda_0 / 4 \quad (119)$$

où  $i_H$  et  $i_B$  sont les angles d'incidence dans les milieux H et B respectivement. Sachant que les termes de phase  $\delta$  ne dépendent pas de la polarisation, les seuls paramètres de calcul qui varient avec l'incidence dans ces conditions sont les indices effectifs, dont l'influence est moindre puisqu'ils apparaissent sous forme de scalaires. Pour une polarisation donnée, la technique de synthèse du filtre est donc quasi identique pour l'incidence oblique, à cela près que le choc d'indice est modifié ( $\tilde{n}_H/\tilde{n}_B$  au lieu de  $n_H/n_B$ ), ce qui altère la forme du filtre et demande une rétroaction. La réponse de l'empilement matché dépend de la polarisation, dont dépend le choc d'indice. Pour conclure, on remarquera qu'un empilement centré à  $\lambda_0$  pour l'incidence normale, se décalera approximativement (et avec altération) vers les courtes longueurs d'onde si on l'éclaire en incidence oblique :

$$\lambda_0(i) = \lambda_0 \cos i \quad (120)$$

## 5.8 Lieu et amplitude des harmoniques spectrales

La plupart des filtres en couches minces sont multidélectriques quart d'onde, ce qui s'explique par des propriétés de stationnarité spectrale. Nous donnons ci-après et pour ces composants des expressions analytiques simples pour le lieu et l'amplitude des extrema de la réflexion ou la transmission. Ces relations sont utiles pour un premier contrôle des composants, ou pour la détermination d'indice, le contrôle optique *in situ* de la fabrication...

### 5.8.1 Lieu des extrema de $R$ ou $T$

Considérons une couche mince d'indice  $n$  et d'épaisseur  $e$  sur un substrat d'indice  $n_s$ . L'éclairement provient du superstrat d'indice  $n_0$ . La réflexion s'écrit :

$$r = (\tilde{n}_0 - Y_0) / (\tilde{n}_0 + Y_0) \quad (121)$$

$$\text{avec } Y_0 = (-j \tilde{n} \sin \delta + \tilde{n}_s \cos \delta) / (\cos \delta - j \sin \delta \tilde{n}_s / \tilde{n})$$

et  $\delta$  l'épaisseur de phase de la couche. On obtient avec ces deux relations :

$$r = [\alpha \cos \delta + j \beta \sin \delta] / [\alpha' \cos \delta + j \beta' \sin \delta] \quad (122)$$

$$\text{avec } \alpha = \tilde{n}_0 - \tilde{n}_s, \quad \beta = \tilde{n} - \tilde{n}_0 \tilde{n}_s / \tilde{n}, \quad \alpha' = \tilde{n}_0 + \tilde{n}_s \text{ et } \beta' = \tilde{n} + \tilde{n}_0 \tilde{n}_s / \tilde{n}.$$

Ces quatre derniers coefficients sont réels pour une onde plane en milieu transparent, hypothèse que nous considérons ici. Le terme de phase  $\delta$  est donc aussi réel, de sorte que le module s'écrit :

$$R(\delta) = [\alpha^2 \cos^2 \delta + \beta^2 \sin^2 \delta] / [\alpha'^2 \cos^2 \delta + \beta'^2 \sin^2 \delta] \quad (123)$$

Dans cette expression,  $\delta$  dépend de la longueur d'onde et de l'épaisseur, et tous les autres coefficients ne dépendent que de la longueur d'onde. On a donc :

$$dR/d\delta = (2\pi n \cos i / \lambda) dR/d\delta \quad (124)$$

Par ailleurs, si on néglige la dispersion d'indice, la dépendance spectrale de la réflexion est essentiellement signée par le terme de phase  $\delta$ , soit :

$$dR/d\lambda = (-2\pi n \cos i / \lambda^2) dR/d\delta.$$

En conséquence et moyennant l'hypothèse sur la dispersion d'indice, il y a coïncidence entre les zéros des dérivées de la réflexion par rapport à l'épaisseur et par rapport à la longueur d'onde :

$$dR/d\delta = 0 \Leftrightarrow \sin 2\delta = 0 \Leftrightarrow \delta = q\pi/2 \Leftrightarrow ne \cos i = q\lambda/4 \quad (125)$$

avec  $q$  entier. Ainsi les extrema de la réflexion sont obtenus pour des couches quart d'onde ou demi-ondes. Plus exactement, lorsque l'on fait croître l'épaisseur de la couche mince pendant qu'elle est éclairée à une longueur d'onde de contrôle  $\lambda_c$ , des extrema sont obtenus chaque fois que les épaisseurs optiques  $(ne)_q$  sont multiples du quart de cette longueur d'onde :

$$(ne)_q \cos i = q\lambda_c/4 \quad (126)$$

Ce principe ou critère est largement utilisé pour le contrôle optique *in situ* de la fabrication des empilements, généralement à  $i = 0^\circ$ .

De façon similaire, lorsque la longueur d'onde varie pour une épaisseur optique donnée, la réflexion est extrême aux longueurs d'onde :

$$\lambda_q = (4/q) ne \cos i \quad (127)$$

Ce critère est également utilisé pour le contrôle optique *in situ* de la fabrication des composants, ou pour la caractérisation optique *ex situ* (mesure d'indice ou d'épaisseur). Toutefois, on retiendra que le dernier résultat (127) est obtenu en négligeant la dispersion d'indice et l'absorption. Dans le cas contraire, les zéros des dérivées ( $dR/d\lambda$ ) et ( $dR/d\delta$ ) ne coïncident plus, même s'ils demeurent voisins en raison des faibles dispersions et absorptions.

### 5.8.2 Contraste aux harmoniques

Examinons maintenant le **contraste** ou l'amplitude des harmoniques  $\lambda_q$ . Supposons que l'on ait fabriqué une couche quart d'onde définie comme :

$$ne = \lambda_0 / 4$$

avec  $\lambda_0$  une longueur d'onde dite de centrage ou fabrication. Les extrema ont alors lieu aux longueurs d'onde  $\lambda_q$  données par :

$$\lambda_q = (4/q) ne = \lambda_0 / q.$$

Aux harmoniques impaires  $\lambda_q = \lambda_0, \lambda_0/3, \lambda_0/5, \lambda_0/7, \dots$ , la couche est quart d'onde à  $\lambda_q$  et la réflexion s'écrit en incidence normale comme :

$$R_q = [(n^2 - n_0 n_s)/(n^2 + n_0 n_s)]^2 \quad (128)$$

de sorte qu'elle est maximale pour un matériau haut indice, et minimale pour un matériau bas indice.

Aux harmoniques paires  $\lambda_q = \lambda_0/2, \lambda_0/4, \lambda_0/6, \lambda_0/8, \dots$ , la couche est demi-onde à  $\lambda_q$  et la réflexion est identique à celle du substrat nu, soit :

$$R_q = [(n_0 - n_s)/(n_0 + n_s)]^2 \quad (129)$$

On voit donc qu'à partir des relations (128) et (129), on pourra extraire une première approximation des valeurs d'indices de la mesure spectrophotométrique  $R(\lambda)$ , à condition de négliger la dispersion et l'absorption... Ces résultats sont illustrés en figure 22.

### Encadré – Synthèse

Des progrès spectaculaires ont été obtenus concernant les méthodes de synthèse, qui mériteraient un ouvrage dédié. Les premières techniques furent analytiques et basées sur la manipulation des admittances complexes, ou l'utilisation d'empilements symétriques... Elles ont été relayées par de nombreuses méthodes numériques (simplex et recuit simulé, algorithmes génétiques, flip-flop, Fourier, Needle...) mises en œuvre pour minimiser la distance entre le gabarit recherché et la fonction optique en cours d'élaboration. On notera la difficulté liée au très grand nombre de paramètres : nombre et nature des matériaux, nombre et épaisseurs des couches minces, choix des séquences à alterner... Dans ce domaine, certains chercheurs auront véritablement été des pionniers. Plusieurs logiciels sont aujourd'hui commercialisés.

On notera que l'organigramme présenté à la section 4 permet d'exprimer le facteur de réflexion comme une fraction rationnelle des variables  $x_j = \exp(j\delta_j)$ , avec des coefficients qui dépendent des indices effectifs  $\tilde{n}_j$ . Dans le cas d'empilements « simplement » quart d'onde  $(ne)_i = \lambda_0/4$ , le terme de phase s'écrit :

$$\delta_i = \delta = (\pi/2) \lambda_0/\lambda = (\pi/2) g_0(\lambda) \quad (130)$$

de sorte que la fraction ne fait intervenir qu'une seule variable périodique  $x_0 = \exp[j\pi g_0(\lambda)/2]$ . Si l'on néglige maintenant la dispersion d'indice, la réflexion se réduit à une fraction rationnelle de  $x_0$  avec des scalaires constants (à incidence donnée). On peut l'étendre au plan complexe et en étudier les zéros et les pôles pour en extraire des propriétés générales...

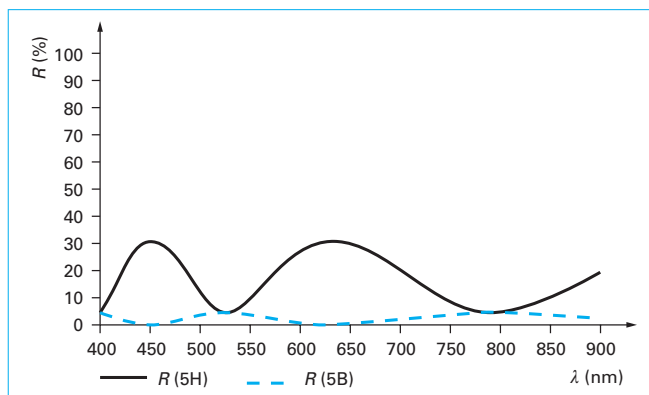


Figure 22 – Lieu et contraste des harmoniques spectrales pour une couche quart d'onde d'ordre  $q = 5$

## 6. Réflexion totale, résonances et modes de propagation

Le cas de la réflexion totale, *a priori* bien connu, mérite une attention particulière ; en particulier l'analyse de ce phénomène permet de mieux aborder l'étude des résonances et modes de propagation...

### 6.1 Réflexion totale

La **réflexion totale** sur un substrat transparent (figure 23) est bien connue, et se traduit simplement par la condition [cf. relation (28)] :

$$\alpha_s \text{ imaginaire pur} \Leftrightarrow \sigma > k_s \quad (131)$$

Cette relation garantit que l'onde est évanescente dans le substrat, et qu'il n'y a donc pas de transport d'énergie dans ce milieu. La partie réelle du flux du vecteur de Poynting est en effet régie par celle de  $\alpha_s$ , ici nulle. La condition (131) requiert également que l'indice du superstrat soit supérieur à celui du substrat, soit :

$$\sigma = k_0 \sin i_0 > k_s \Rightarrow n_0 > n_s \quad (132)$$

de sorte que l'on fait souvent appel à un matériau haut indice pour le superstrat, ou à l'air pour le substrat.

En figure 24, on donne les fenêtres fréquentielles accessibles *via* un éclairage en espace libre ( $\sigma < k_0$ ), avec les zones de réflexion totale lorsqu'elles existent (cas  $n_0 > n_s$ ). L'axe des abscisses est donné en fréquences normalisées  $\nu^* = (\lambda/2\pi) \sigma$ , homogène à  $(n \sin i)$  aux basses fréquences.

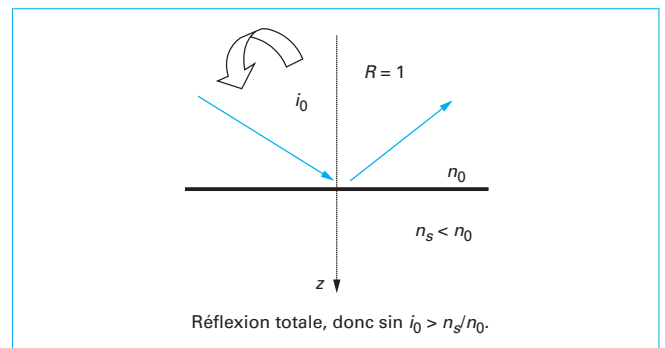


Figure 23 – Cas de la réflexion totale avec un superstrat d'indice  $n_0 > n_s$

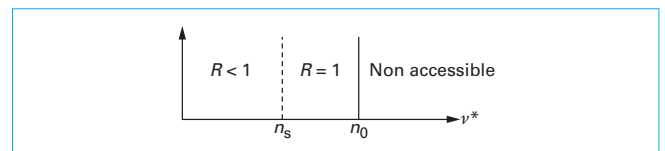


Figure 24 – Fenêtre fréquentielle de réflexion totale (cas  $n_s < n_0$ )

L'angle limite  $i_0$  à partir duquel il y a réflexion totale est donné en l'absence d'absorption par :

$$\sin i_0 > n_s/n_0 \Leftrightarrow R=1 \quad (133)$$

On peut vérifier rapidement que la réflexion est dans ce cas unitaire pour un substrat transparent ; en effet :

$$r_0 = (\tilde{n}_0 - \tilde{n}_s)/(\tilde{n}_0 + \tilde{n}_s)$$

avec  $\tilde{n}_s = n_s \alpha_s / k_s$  en polarisation TE  
et  $\tilde{n}_s = n_s k_s / \alpha_s$  en polarisation TM.

Les grandeurs  $n_s$  et donc  $k_s$  étant réelles, avec  $\alpha_s = j \alpha_s''$  imaginaire pur, l'indice effectif est imaginaire pur dans les deux cas de polarisation :

$$\tilde{n}_s = j \tilde{n}_s''.$$

On obtient donc :

$$r_0 = (\tilde{n}_0 - j \tilde{n}_s'')/(\tilde{n}_0 + j \tilde{n}_s'') \Rightarrow |r_0| = 1 \quad (134)$$

Remarquons ici que l'indice effectif du superstrat est en général réel, puisqu'il correspond à un éclairage physique *via* un milieu transparent :

$$0 < \sin i_0 < 1 \Rightarrow \sigma < k_0 \Rightarrow \alpha_0 \text{ réel} \Rightarrow \tilde{n}_0 \text{ réel.}$$

Dans le cas où le substrat est dissipatif, la réflexion n'est plus unitaire ( $R < 1$ ) car la partie réelle du coefficient  $\alpha_s$  est non nulle, entraînant des pertes par absorption dans ce substrat.

D'un point de vue pratique, le superstrat est choisi avec une géométrie sphérique (figure 25), pour éviter toute réfraction ou déviation supplémentaire qui viendrait modifier la fréquence spatiale incidente. On utilise également souvent des prismes (figure 25), plus simples à réaliser ; dans ce cas, les angles d'incidence à l'interface prisme/air  $i^*$  et à l'interface prisme/composant  $i_0$  sont liés par la relation :

$$\sin i^* = -(n_0/n_{\text{air}}) \cos(\beta + i_0) \quad (135)$$

où  $\beta$  désigne le demi-angle au sommet du prisme.

On peut également obtenir une réflexion totale grâce à une réfraction sur la face latérale d'un substrat (figure 26). Dans ce cas, la condition sur l'angle est donnée par :

$$\sin^2 i^* < (n_0/n_{\text{air}})^2 - 1 \quad (136)$$

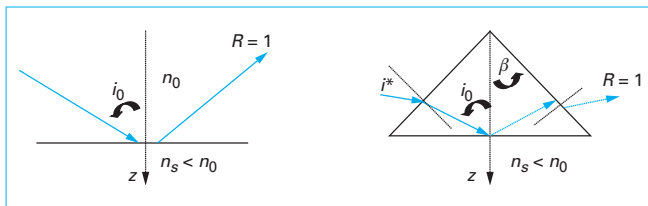


Figure 25 – Réflexion totale à l'aide d'une demi-sphère ou d'un prisme haut indice

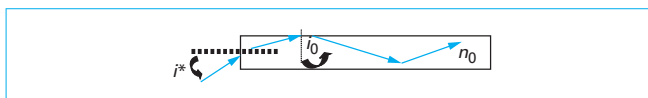


Figure 26 – Réflexion totale *via* la « tranche » d'un substrat

## 6.2 Résonances

Le cas des multicouches (figure 27) n'est pas très différent, puisque la condition de réflexion totale ( $\sigma > k_s$ ) ne porte que sur l'indice du substrat dans lequel il ne doit pas y avoir transport d'énergie, alors que la pulsation incidente  $\sigma$  n'est pas modifiée (éclairage identique). En conséquence, la question ne se pose pas de savoir sur quelle interface il y a réflexion totale. On notera cependant que le champ stationnaire dans l'empilement peut être **trigonométrique** ( $\sigma < k_i$ ) ou **hyperbolique** ( $\sigma > k_i$ ) selon l'indice des couches. Dans le cas trigonométrique, on pourra toujours définir un angle à partir de la fréquence ( $\sigma = k_i \sin i_i$ ).

Ainsi, quel que soit le multicouche que l'on déposerait sur le substrat, la réflexion demeure totale en l'absence d'absorption. Ce résultat est dû à l'**invariant de Descartes** dans l'empilement. Cette propriété se vérifie à nouveau comme en (134), car la suite récurrente des admittances montre que l'admittance  $Y_0$  d'un multicouche transparent demeure imaginaire pure si sa valeur initiale dans le substrat l'est. Remarquons toutefois qu'il peut ici y avoir dissipation (absorption) de l'énergie dans le multicouche, contrairement au cas du dioptre unique. Dans ce cas, on écrira :

$$R = 1 - A.$$

Une particularité concerne l'existence, à la réflexion totale dans un multicouche et sous certaines conditions, de fortes **résonances** ou **amplifications** (surintensités) du champ électromagnétique à des fréquences  $\sigma_m$ . On peut détecter ces résonances en traçant la courbe de réflexion  $R(\sigma) = 1 - A(\sigma)$  pour une valeur non nulle ( $10^{-4}$ ) des indices imaginaires dans le multicouche. À chaque résonance  $\sigma_m$  ou incidence  $i_{0m}$  donnée par  $\sigma_m = k_0 \sin i_{0m}$ , l'amplification du champ accroît l'absorption et fait chuter la réflexion (figure 28). On parle de **résonance d'ordre zéro** (ou mode fondamental) pour l'angle le plus incliné ( $\sigma_{\text{max}}$  ou  $i_{0\text{max}}$ ), puis de **résonance d'ordre n...** On retiendra que ces résonances dépendent de la polarisation, et l'on pourra les trouver dans la fenêtre (figure 28) :

$$k_s < \sigma_m = k_0 \sin i_{0m} < \max(k_i) \quad (137)$$

où  $k_i$  désigne le  $k = 2\pi n_i/\lambda$  d'une couche  $i$  de l'empilement. Cette condition impose que l'un au moins des matériaux constituant l'empilement soit de haut indice pour garantir l'existence d'une résonance (condition nécessaire) :

$$\exists i/n_i > n_s \quad (138)$$

Un exemple est donné en figure 29. L'abscisse  $v^* = \lambda v$  est à nouveau la fréquence spatiale normalisée, identique à ( $n \sin i$ ) aux basses fréquences. L'empilement est constitué de six couches minces de  $\text{Ta}_2\text{O}_5$  ou  $\text{SiO}_2$  centrées à 633 nm et directement déposées sur un prisme de verre (le substrat est donc l'air) ; sa formule est donnée par : Verre/H/5B/2H/6B/2H/6L/Air.

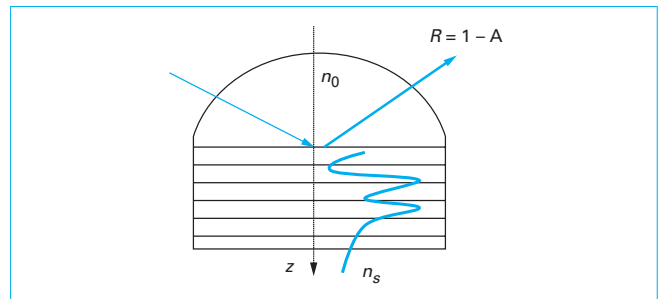


Figure 27 – Réflexion totale sur un multicouche



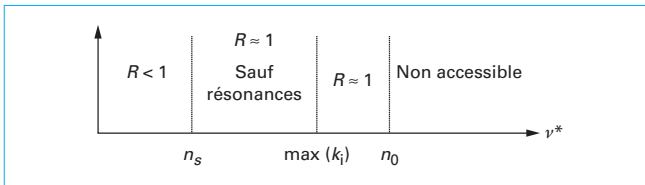


Figure 28 – Fenêtres fréquentielles de résonances à la réflexion totale

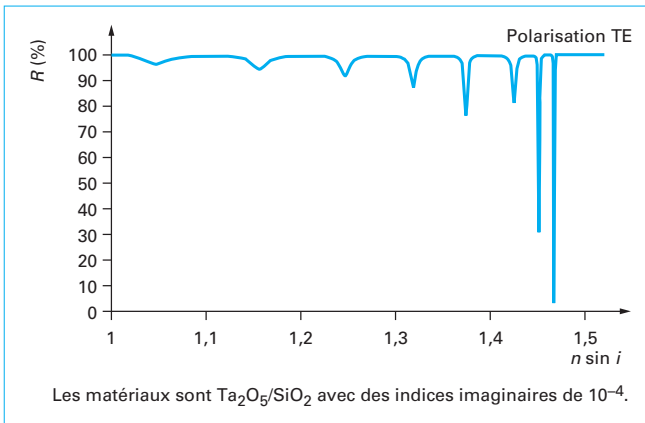


Figure 29 – Résonances en réflexion totale sur un empilement de six couches minces déposées sur un prisme de verre

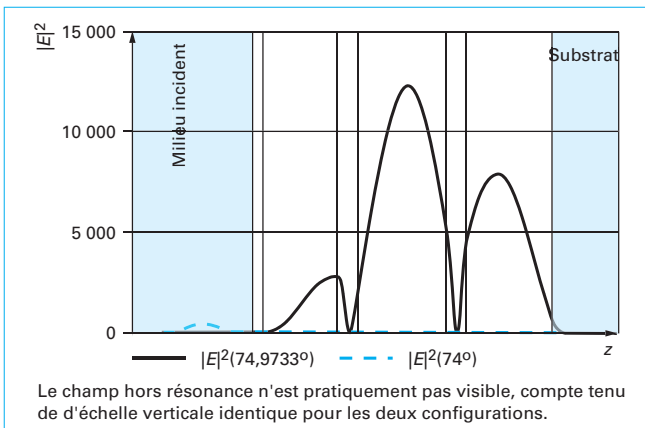


Figure 30 – Champs stationnaires sous une résonance et hors résonance pour l'empilement de la figure 29

La longueur d'onde d'éclairement est  $\lambda_i = 514 \text{ nm}$ , et l'indice imaginaire est pris égal à  $10^{-4}$  pour les deux matériaux. On assiste à plus de huit résonances en polarisation TE. Selon la fréquence  $\sigma_m$  considérée, la résonance est plus ou moins forte, avec une valeur maximale d'absorption proche de 96 % pour l'ordre zéro. À titre de comparaison, l'absorption hors résonance n'est que de quelques  $10^{-4}$  pour le même composant. Les champs stationnaires sont également tracés en figure 30 comme illustration de la surintensité.

On indiquera que ces résonances, liées aux pôles complexes de la réflexion, sont à l'origine de nombreux phénomènes, comme les

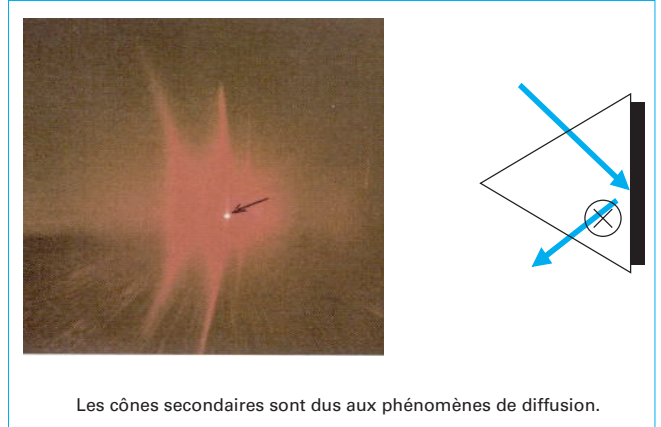


Figure 31 – Étalement du faisceau réfléchi à la résonance, ou cône brillant

cônes brillants ou lignes noires (figure 31), le déplacement de *Goos-Hanken*, les pics de transmission ou réflexion, le rendement au couplage par prisme ou réseau, la lumière piégée dans les microcavités... Toutefois, un traitement mathématique correct requiert de considérer des paquets d'onde, pour éviter toute divergence des grandeurs calculées. Précisons également que dans le cas de fines couches métalliques partiellement transparentes, on parle de résonance plasmon. Enfin, ces phénomènes de résonances sont couramment utilisés pour exalter nombre de propriétés des composants (réduction du seuil laser, lumière lente, guidage...). On les retrouve en particulier dans les capteurs optiques, en raison de l'extrême sensibilité à toute modification du substrat (pollution, contamination) et de la forte amplification de la densité d'énergie (détection accrue).

Enfin, il est utile d'appréhender le phénomène de **découplage d'onde évanescente**, ou découplage par **effet tunnel optique**. Rappelons pour cela les fenêtres fréquentielles des ondes planes ( $\sigma < k_s$ ) et évanescentes ( $\sigma > k_s$ ). La coupure  $k_s$  est donnée par l'indice  $n_s$  du substrat, de sorte que toute augmentation de cet indice (contamination ou introduction d'un autre matériau) d'une valeur  $\Delta k_s$  rendra propagatives (planes) les fréquences situées entre  $k_s$  et  $k_s + \Delta k_s$ . C'est également, de façon réductrice, le principe de base du microscope à effet tunnel optique, où l'approche d'une fibre optique vient modifier le voisinage immédiat de la surface. Il s'agit donc bien ici d'un effet interférentiel.

## 7. Lien avec l'optique planaire

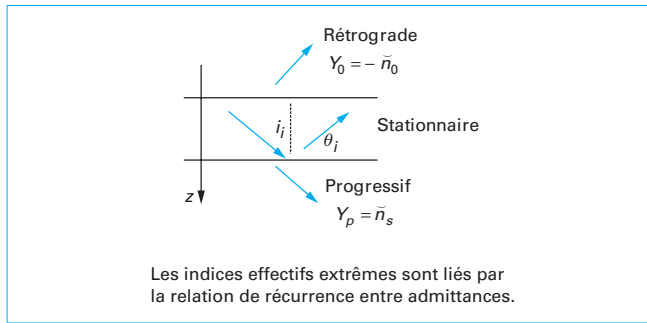
On terminera cet article par l'analogie entre les résonances de l'espace libre observées à la réflexion totale et les modes de propagation caractéristiques de l'optique guidée.

### 7.1 Modes de propagation

Jusqu'ici nous avons traité du cas de l'espace libre où la source est à l'infini dans le substrat. La caractéristique de cette configuration de l'espace libre est donnée par :

$$Y_0 = f(Y_p = \tilde{n}_s) \quad (139)$$





**Figure 32 – Lien entre indices effectifs extrêmes dans le cas de l'optique planaire**

En effet, cette relation décrit le fait qu'il n'y a pas d'onde rétrograde dans le substrat, de sorte que l'admittance  $Y_0$  de l'empilement au dioptre 0 (côté air) est calculée par récurrence à partir de l'admittance  $Y_p$  au dernier dioptre (côté substrat), laquelle s'identifie à l'indice effectif  $\tilde{n}_s$  du substrat [cf. relation (33)].

Dans le cas de l'optique planaire (ou modale, guidée...), on recherche des solutions électromagnétiques en l'absence de sources (substrat et superstrat). En conséquence et par opposition à l'espace libre, la caractéristique de l'optique planaire (figure 32) réside dans le fait que l'onde est également rétrograde dans le superstrat (et non plus stationnaire), puisqu'il n'y a pas de source dans ce milieu. Dans ces conditions, l'admittance dans le superstrat s'identifie à l'indice effectif :

$$Y_0 = -\tilde{n}_0 \quad (140)$$

La conséquence pour le facteur de réflexion en espace libre est immédiate :

$$r_0(\sigma) = (\tilde{n}_0 - Y_0)/(\tilde{n}_0 + Y_0) \approx 2\tilde{n}_0/0 \approx \infty \quad (141)$$

Ainsi, il n'y a **propagation guidée** que pour certaines valeurs particulières  $\sigma_m$  de la fréquence, dites fréquences modales ou constantes de propagation. Ces modes sont donnés par la relation (141) et constituent les pôles du facteur de réflexion de l'empilement. Pour les trouver, il suffit de rechercher les zéros de la fonction  $1/r$ , soit encore les solutions de  $Y_0(\tilde{n}_s) = -\tilde{n}_0$ . Toutefois la solution recherchée en optique planaire requiert que le guidage s'effectue sans perte par rayonnement, de sorte que l'onde doit être évanescence dans les milieux extrêmes supposés transparents [cf. relation (28)], soit :

$$\alpha_0 \text{ et } \alpha_s \text{ imaginaires purs} \Leftrightarrow \sigma_m > \max(k_0, k_s) \quad (142)$$

Cette relation montre que l'une au moins des couches de l'empilement doit être de haut indice, c'est-à-dire d'indice supérieur à ceux des milieux extrêmes. Les modes sont dits sans fuite, car le flux de Poynting est imaginaire pur dans les milieux extrêmes. Notons qu'à chaque fréquence correspond un angle dans les milieux vérifiant  $\sigma < k_i$  où l'onde est trigonométrique ( $\sigma = k_i \sin \theta_i$ ) ; dans les milieux  $\sigma > k_i$ , l'onde est hyperbolique. En optique planaire, l'usage est de considérer l'angle  $\theta_i$  donné par  $\pi/2 - \theta_i$ , de sorte que la plus faible inclinaison (figure 32), caractéristique de la fréquence la plus élevée, correspond au mode fondamental.

## 7.2 Atténuation à la propagation guidée

Dans le cas de milieux dissipatifs, on parle de **mode à fuite**. Dans tous les cas, l'équation des modes donnée en (141) reste

valable. On cherche alors des fréquences complexes  $\beta = \beta' + j\beta''$  caractéristiques d'une propagation avec atténuation selon Ox :

$$E_i = \exp(j\beta x) [A_i^+ \exp(j\alpha_i z) + A_i^- \exp(-j\alpha_i z)] = \exp(j\beta x) A_i(z) \quad (143)$$

$$\Rightarrow |E_i|^2 = \exp(-2\beta'' x) |A_i(z)|^2$$

avec  $\alpha_i(\beta) = (k_i^2 - \beta^2)^{0.5}$ . Le coefficient d'atténuation à la propagation guidée  $2\beta''$  est souvent donné en dB/cm, soit :

$$\exp(-2\beta'' x) = 10^{-a/10} \text{ pour } x = 1 \text{ cm} \Rightarrow a \text{ (dB/cm)} = 2\beta''/(10 \ln 10) \quad (144)$$

Il est utile, dans le cas de faibles absorptions, de savoir prédire ce coefficient à partir des fréquences réelles calculées en l'absence d'absorption. On obtient par exemple en polarisation TE :

$$\beta' \beta'' = \int_z k_i' k_i'' |A_i(z)|^2 dz / \int_z |A_i(z)|^2 dz \quad (145)$$

ce qui revient à supposer que dans les expressions intégrales l'amplitude du champ n'est pas sensiblement modifiée par l'absorption.

## 7.3 Fenêtre « modale »

On a vu en milieux transparents que les solutions recherchées se situaient dans la fenêtre  $\sigma_m > \max(k_0, k_s)$ , afin d'éviter les fuites par rayonnement dans les milieux extrêmes. On montre de plus que ces solutions sont majorées, soit :

$$\max(k_0, k_s) < \sigma_m < \max(k_i) \quad (146)$$

Cette relation (146) ne garantit pas l'existence de solutions, mais définit la **fenêtre fréquentielle modale** (condition nécessaire). Cette propriété peut se démontrer comme ci-après.

Dans chaque milieu, on a vu que le champ stationnaire tangentiel s'écrivait comme :

$$E_i(\rho) = A_{i-1}(z) \exp(j\sigma x)$$

avec

$$A_{i-1}(z) = A_{i-1}^+ \exp(j\alpha_i z) + A_{i-1}^- \exp(-j\alpha_i z),$$

ce qui conduit classiquement à l'équation d'Helmholtz en l'absence de sources :

$$A_{i-1}''(\sigma, z) + \alpha_i^2 A_{i-1}(\sigma, z) = 0 \quad (147)$$

avec

$$A_{i-1}'' = (\partial^2 / \partial z^2) [A_{i-1}].$$

En multipliant (147) par  $A_{i-1}^*$ , on a :

$$A_{i-1}'' A_{i-1}^* + \alpha_i^2 |A_{i-1}|^2 = 0 \quad (148)$$

Puis, après intégration dans un milieu particulier :

$$\int_{z_i} A_{i-1}'' A_{i-1}^* dz + \alpha_i^2 \int_{z_i} |A_{i-1}|^2 dz = 0$$

$$\Rightarrow [A_{i-1}' A_{i-1}^*] - \int_{z_i} |A_{i-1}'|^2 dz + \alpha_i^2 \int_{z_i} |A_{i-1}|^2 dz = 0$$

avec

$$A_{i-1}' = (\partial / \partial z) [A_{i-1}].$$

En sommant maintenant sur les différents milieux incluant les substrat (0) et superstrat ( $p+1$ ), on obtient :

$$\sum_{i=0, p+1} [A_{i-1}' A_{i-1}^*] + \sum_{i=0, p-1} \alpha_i^2 \int_{z_i} |A_{i-1}|^2 dz = \sum_{i=0, p+1} \int_{z_i} |A_{i-1}'|^2 dz \quad (149)$$

Dans le cas d'une polarisation TE, on peut vérifier que le champ électrique et sa dérivée sont continus. Ainsi en sommant sépa-

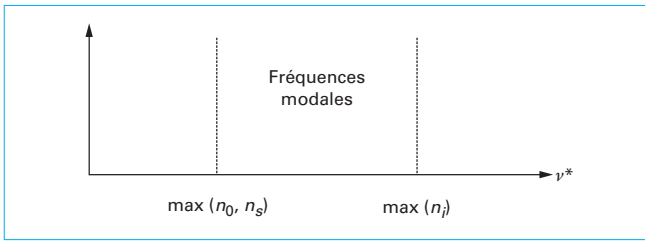


Figure 33 – Fenêtre fréquentielle de l'optique planaire

rément sur le nombre de couches et sur les milieux extrêmes, (149) devient :

$$\begin{aligned} & \{[\mathbf{A}'_{i-1} \mathbf{A}_{i-1}^*]_{\infty} - [\mathbf{A}'_{i-1} \mathbf{A}_{i-1}^*]_{-\infty}\} + \sum_{i=0, p+1} \alpha_i^2 \int_{z_i} |\mathbf{A}_{i-1}|^2 dz \\ &= \sum_{i=0, p+1} \int_{z_i} |\mathbf{A}'_{i-1}|^2 dz \end{aligned} \quad (150)$$

Enfin, puisque les ondes sont évanescentes dans les milieux extrêmes, on obtient :

$$\sum_{i=0, p+1} (k_i^2 - \sigma^2) \int_{z_i} |\mathbf{A}_{i-1}|^2 dz = \sum_{i=1, p} \int_{z_i} |\mathbf{A}'_{i-1}|^2 dz > 0 \quad (151)$$

Cette dernière relation conduit à la propriété recherchée :

$$\exists i/\sigma_m < k_i \Leftrightarrow \sigma_m < \max(k_i) \quad (152)$$

La démonstration en polarisation TM s'effectue de façon analogue (utiliser le champ magnétique). En figure 33, on trouvera un schéma récapitulatif de la fenêtre fréquentielle de l'optique planaire.

Pour terminer, notons que la minoration (142) ne peut pas être *a priori* réalisée via des conditions d'éclairement en espace libre, qui imposent d'écrire la fréquence comme  $\sigma_m = k_0 \sin i_{0m} < k_0$ . Il faut donc, d'un point de vue expérimental, utiliser des techniques spécifiques de couplage (arête de prisme, réseau de diffraction, couplage par la tranche...).

## 7.4 Analogie résonances $\Leftrightarrow$ modes de propagation

Dans le cas des guides d'onde, la réflexion n'est pas bornée parce que la grandeur  $r_0 = A_0^-/A_0^+$  est infinie en l'absence d'onde incidente  $A_0^+$ . Cela ne pose pas de difficulté puisque ce coefficient n'intervient dans aucun bilan d'énergie. À l'inverse, dans le cas de la réflexion totale, ce coefficient est de module unité ( $|r_0|^2 = 1$ ) et traduit le fait que toute l'énergie incidente est réfléchie (cas des milieux transparents). Pour un multicouche donné, la différence entre ces deux configurations réside dans le milieu incident ou superstrat.

Les fenêtres fréquentielles de ces deux configurations sont données en figures 28 et 33, respectivement ; on note *a priori* sur ces figures l'absence d'intersection entre les constantes de propagation modales et les résonances libres, compte tenu des positions relatives des valeurs d'indice  $n_0$  des superstrats. Pour plus de clarté, désignons maintenant cet indice par  $n_0$  pour le superstrat de l'optique guidée et par  $n'_0$  pour le superstrat de la réflexion totale. Insérons maintenant (figure 34) dans le cas de la réflexion totale, une couche de bas indice (un *gap*)  $n_B$  entre le superstrat et le multicouche, ce qui correspond à une procédure expérimentale pour associer le prisme (superstrat) au composant. Lorsque cette adhérence est réalisée, il subsiste une fine couche de colle ou

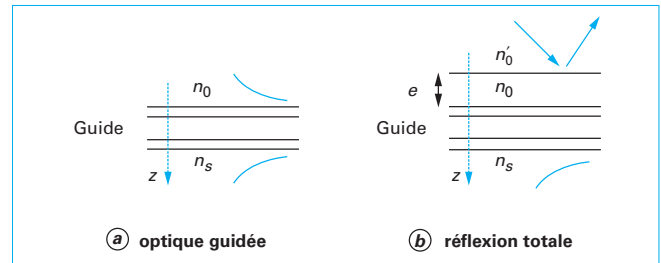
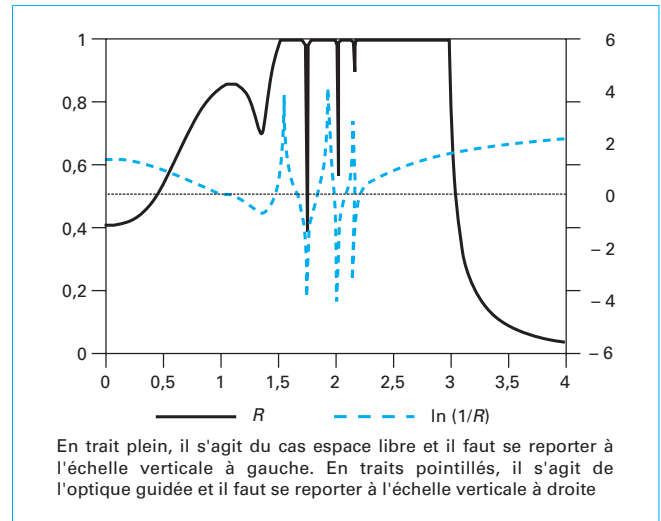
Figure 34 – Configurations de l'optique guidée et de la réflexion totale en présence de *gap*

Figure 35 – Superposition des fréquences de résonances et des constantes de propagation

d'air..., dont on supposera l'indice égal à celui du superstrat de l'optique guidée ( $n_B = n_0$ ). Dans ces conditions, on peut admettre intuitivement que la configuration de l'optique guidée est obtenue en faisant croître vers l'infini l'épaisseur  $e$  du *gap* inséré dans le cas d'une réflexion totale.

D'un point de vue mathématique, la fonction  $r_0'(e)$  calculée en présence du *gap* admet des pôles nécessairement complexes (non réels), puisqu'elle est de module unité. On montre que lorsque l'épaisseur du *gap* croît, ces pôles se rapprochent de l'axe réel ; pour une épaisseur infinie, ces pôles deviennent réels et s'identifient à ceux de l'optique guidée (fonction  $r_0$ ). Ces remarques rejoignent ainsi la représentation intuitive du paragraphe précédent. Cependant, compte tenu de la rapidité de décroissance de l'onde évanescence, il suffit que l'épaisseur du *gap* soit de quelques longueurs d'onde pour considérer que la valeur asymptotique des pôles est obtenue. Cela explique pourquoi les fréquences de résonance de l'espace libre sont extrêmement proches des constantes de propagation de l'optique guidée. Ce résultat est illustré en figure 35.

L'empilement est constitué de trois couches minces, avec pour formule :

- Verre/0,95B/8H/Verre pour l'optique guidée (coefficient  $R_0$ ) ;
- Prisme/0,95B/8H/Verre pour la réflexion totale (coefficient  $R'_0$ ).

Les modes de l'optique guidée s'obtiennent directement en traçant le logarithme de la courbe  $1/R_0$  (en pointillés), où l'on voit apparaître trois modes en polarisation TE. Si l'on trace maintenant

(en trait plein) la courbe de réflexion totale  $R'_0$ , on constate que les résonances et constantes modales sont globalement en coïncidence. Ainsi, la présence du *gap* 0,95 B a permis de rapprocher la partie réelle  $\beta'_m$  du pôle complexe de l'espace libre, à la constante modale réelle  $\sigma_m$ .

Enfin, on notera que la répartition du champ stationnaire dans le guide est identique (à la normalisation près) à celle obtenue en réflexion totale, puisque l'indice effectif dans le substrat est calculé, dans les deux cas, pour la même fréquence réelle  $\beta'_m = \sigma_m$ . Cet indice étant la valeur initiale de la suite récurrente donnant

accès aux admittances, les grandeurs résultantes sont identiques dans la partie commune de l'empilement. Il s'agit là d'un résultat général : le dépôt d'un multicouche  $M$  sur un multicouche initial  $M_0$  ne modifie pas la répartition spatiale du champ stationnaire dans le multicouche initial  $M_0$ . Cette propriété, valable pour l'espace libre et modal, est exploitable dans nombre de situations (mise en série de filtres, protection...). On retiendra que, comme en réflexion totale, l'énergie est de plus en plus confinée à mesure que l'on se rapproche de l'ordre zéro. Ainsi ce mode fondamental sera-t-il moins sensible aux effets de pollution et de contamination...

---

# Couches minces optiques et filtrage interférentiel

## Champs et multicouches, synthèse, résonances et modes...

par **Claude AMRA**

*Directeur de recherche au CNRS, Institut Fresnel*

et **Catherine GRÈZES-BESSET**

*Directeur technique à CILAS Marseille*

### Sources bibliographiques

MacLEOD (H.A.) et MacLEOD (A.). – *Thin film optical filters*. Taylor and Francis Ed. 3 (2001).

DOBROWOLSKI (J.A.). – *Optical properties of films and coatings*. In *Handbook of Optics*, BASS (M.) et al., McGraw-Hill (1995).

BAUMEISTER (P.W.). – *Optical coating technology*. SPIE Press Book (2004).

THELEN (A.). – *Design of optical interference coatings*. McGraw-Hill (1989).

FURMAN (S.A.) et TIKHONRAROV (A.V.). – *Basics of optics of multilayer systems*. Éditions Frontières (1992).

PETIT (R.). – *Ondes électromagnétiques en radio-électricité et en optique*. Masson (1992).

# GAGNEZ DU TEMPS ET SÉCURISEZ VOS PROJETS EN UTILISANT UNE SOURCE ACTUALISÉE ET FIABLE

Techniques de l'Ingénieur propose la plus importante collection documentaire technique et scientifique en français !

Grâce à vos droits d'accès, retrouvez l'ensemble des **articles et fiches pratiques de votre offre**, **leurs compléments et mises à jour**, et bénéficiez des **services inclus**.



RÉDIGÉE ET VALIDÉE  
PAR DES EXPERTS



MISE À JOUR  
PERMANENTE



100 % COMPATIBLE  
SUR TOUS SUPPORTS  
NUMÉRIQUES



SERVICES INCLUS  
DANS CHAQUE OFFRE

- + de 350 000 utilisateurs
- + de 10 000 articles de référence
- + de 80 offres
- 15 domaines d'expertise

- ☐ Automatique - Robotique
- ☐ Biomédical - Pharma
- ☐ Construction et travaux publics
- ☐ Électronique - Photonique
- ☐ Énergies
- ☐ Environnement - Sécurité
- ☐ Génie industriel
- ☐ Ingénierie des transports
- ☐ Innovation
- ☐ Matériaux
- ☐ Mécanique
- ☐ Mesures - Analyses
- ☐ Procédés chimie - Bio - Agro
- ☐ Sciences fondamentales
- ☐ Technologies de l'information

**Pour des offres toujours plus adaptées à votre métier,  
découvrez les offres dédiées à votre secteur d'activité**

Depuis plus de 70 ans, Techniques de l'Ingénieur est la source d'informations de référence des bureaux d'études, de la R&D et de l'innovation.

**[www.techniques-ingenieur.fr](http://www.techniques-ingenieur.fr)**

**CONTACT :** Tél. : + 33 (0)1 53 35 20 20 - Fax : +33 (0)1 53 26 79 18 - E-mail : [infos.clients@teching.com](mailto:infos.clients@teching.com)

# LES AVANTAGES ET SERVICES compris dans les offres Techniques de l'Ingénieur

## ACCÈS



### Accès illimité aux articles en HTML

Enrichis et mis à jour pendant toute la durée de la souscription



### Téléchargement des articles au format PDF

Pour un usage en toute liberté



### Consultation sur tous les supports numériques

Des contenus optimisés pour ordinateurs, tablettes et mobiles

## SERVICES ET OUTILS PRATIQUES



### Questions aux experts\*

Les meilleurs experts techniques et scientifiques vous répondent



### Articles Découverte

La possibilité de consulter des articles en dehors de votre offre



### Dictionnaire technique multilingue

45 000 termes en français, anglais, espagnol et allemand



### Archives

Technologies anciennes et versions antérieures des articles



### Impression à la demande

Commandez les éditions papier de vos ressources documentaires



### Alertes actualisations

Recevez par email toutes les nouveautés de vos ressources documentaires

\*Questions aux experts est un service réservé aux entreprises, non proposé dans les offres écoles, universités ou pour tout autre organisme de formation.

## ILS NOUS FONT CONFIANCE



**www.techniques-ingenieur.fr**

**CONTACT :** Tél. : + 33 (0)1 53 35 20 20 - Fax : +33 (0)1 53 26 79 18 - E-mail : [infos.clients@teching.com](mailto:infos.clients@teching.com)