

## TABLE DES FIGURES

1.1	Modèle proposé de système de Ball Beam . . . . .	4
1.2	Paramétrage proposé de système de Ball Beam . . . . .	4
2.1	Fonction de transfert du modèle simplifié . . . . .	8
2.2	Modèle original non linéaire . . . . .	9
2.3	Réponse indicielle de système non linéaire . . . . .	10
2.4	Réponse indicielle de système linéaire . . . . .	10
3.1	Correcteur proportionnelle . . . . .	12
3.2	Réponse indicielle de système corrigé . . . . .	13
3.3	Simulation de système corrigé avec un correcteur PD . . . . .	13
3.4	Réponse indicielle du système corrigé . . . . .	14
3.5	Simulation de commande par retour d'état de système . . . . .	17
3.6	Réponse indicielle de système . . . . .	18

## INTRODUCTION

À fin de réaliser en pratique les différentes acquis de cours théorie de la commande, Nous les étudiants de 2<sup>ème</sup> années, nous avons essayés de commander différents systèmes avec **Simulink**, une plate-forme de simulation multidomaine et de modélisation de systèmes dynamiques intégrée à **MATLAB**.

Notre groupe est formé par **HAMMAMI Nassim** et **KHANNOUS Hedi**, nous avons travaillé sur le système "ball and beam" (balle et poutre).

Dans un premier lieu on a commencé par présenter notre système, après on a proposé un modèle simple pour ce système. En suite on a simplifié le modèle mathématique à travers une linéarisation autour d'un point d'équilibre. En suite on a donné une simulation du modèle originel et du modèle simplifié, après on a essayé de commander les systèmes avec différentes méthodes :

- commande PID(P, PI ou PID)
- commande par retour d'état
- commande numérique RST

et on a interprété chacune de ces méthodes précédentes. En fin on a terminé par une conclusion concernant ce mini-projet.

## 1.1 DESCRIPTION DU SYSTÈME

Le système balle et poutre est également appelé « équilibrer une balle sur une poutre ». Ça peut se trouver généralement dans la plupart des laboratoires de contrôle universitaires, car il est relativement facile à construire, modéliser et contrôler théoriquement. Le système comprend une boule, une poutre, un moteur et plusieurs capteurs. Elle est généralement liée à des problèmes de contrôle réels tels que stabiliser horizontalement un avion lors de l'atterrissage et dans un flux d'air turbulent.

Il y a deux degrés de liberté dans ce système. L'un est la balle qui roule de haut en bas faisceau, et l'autre est le faisceau tournant à partir de son extrémité. Système boule et poutre est un système très intéressant par sa dynamique non linéaire et sa sous-action phénomène.

## 1.2 UTILISATION

Ces types de systèmes ont un large éventail d'applications industrielles y compris l'équilibrage de la plate-forme des passagers pour le confort dans les voitures de luxe, le contrôle de processus chimiques exothermiques où l'ajout de chaleur accélère le processus, le contrôle des fusées et des avions à décollage vertical et des pétroliers transportant des liquides sur les routes où le liquide se comporte comme une boule sur une poutre.

Avec l'intéressante application, sa dynamique donne une large gamme de flexibilité pour mettre en œuvre classique, techniques de contrôle modernes et avancées. C'est un équipement de laboratoire idéal pour tester théorie des systèmes de contrôle classiques, modernes et avancés.

## 1.3 SCHÉMA

Une balle est placée sur une poutre, voir figure ci-dessus, où elle peut rouler avec 1 degré de liberté sur la longueur de la poutre. Un bras de levier est attaché à la poutre à une

extrémité et un servo-engrenage à l'autre. Lorsque le servomoteur tourne d'un angle  $\theta$ , le levier modifie l'angle du faisceau par  $\alpha$ . Lorsque l'angle est modifié par rapport à la position horizontale, la gravité fait rouler la balle le long du faisceau. Un contrôleur sera conçu pour ce système afin que la position de la balle puisse être manipulée.

- La sortie de notre système est : la position de la balle :  $r$
- L'entrée de notre système est l'angle générée par le moteur :  $\theta$

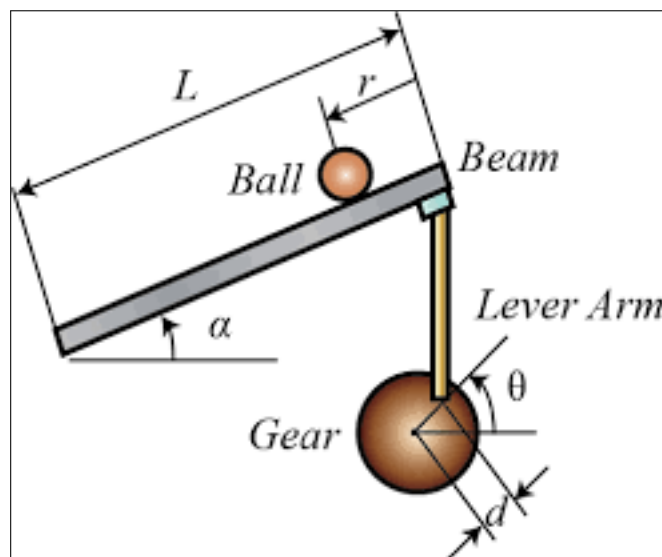


FIGURE 1.1 – Modèle proposé de système de Ball Beam

## 1.4 PARAMÉTRAGE DU SYSTÈME :

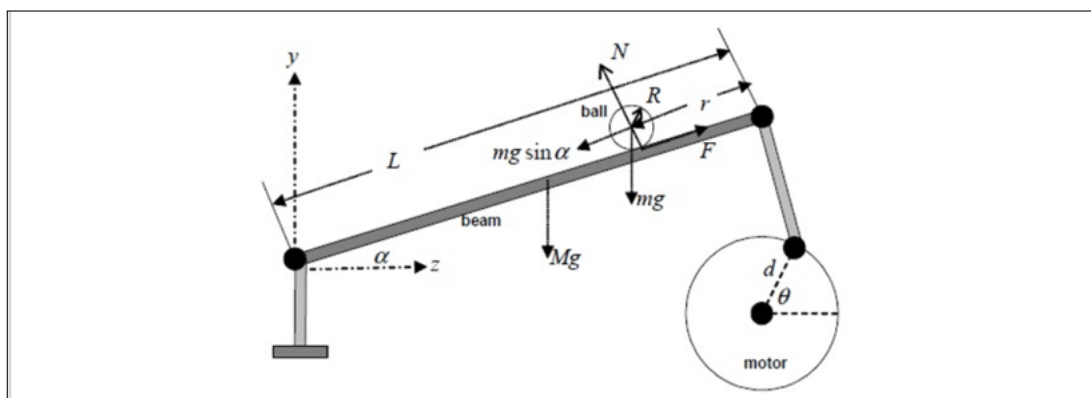


FIGURE 1.2 – Paramétrage proposé de système de Ball Beam

les constantes et variables sont définies comme suit :  
(m) :masse de la boule 0,11 kg

- (R) : rayon de la boule 0,015 m
- (d) : distance du bras de levier 0.03 m
- (g) : constante gravitationnelle  $9.8m/s^2$
- (L) : longueur de la poutre 1.0 m
- (J) : le moment d'inertie de la boule  $9.99e - 6kg.m^2$
- (r) : position de la boule sur la poutre
- ( $\alpha$ ) : angle que fait la poutre avec l'horizontale
- ( $\theta$ ) : angle définie par le moteur

## 2.1 MODÈLE MATHÉMATIQUE DE SYSTÈME NON LINÉAIRE

La dérivée seconde de l'angle d'entrée  $\alpha$  affecte en fait la dérivée seconde de  $r$ . Cependant, nous ignorons cette contribution. L'équation **lagrangienne** du mouvement de la balle est alors donnée par :

$$0 = \left( \frac{J}{R^2} + m \right) \ddot{r} + mg \sin \alpha - mr\dot{\alpha}^2$$

On obtient finalement la relation entre  $r$  et  $(\alpha)$  donné par :

$$\ddot{r} = \frac{mr\dot{\alpha}^2 - mg \sin(\alpha)}{(J/R^2 + m)}$$

Sachant que l'angle du faisceau  $(\alpha)$  peut être exprimé en termes d'angle de l'engrenage  $(\theta)$ .

$$\alpha = \frac{d}{L}\theta$$

---

## 2.2 LINÉARISATION DU SYSTÈME AUTOUR D'UN POINT DE FONCTIONNEMENT

On remarque que le point  $\alpha = 0$  est un point de fonctionnement. autour de ce point l'équation différentielle est la suivante :

$$\left(\frac{J}{R^2} + m\right)\ddot{r} = -mg\alpha$$

Sachant que :

$$\alpha = \frac{d}{L}\theta$$

Finalement, on a la relation entre la position de boule et l'angle  $\theta$  est donnée par :

$$\left(\frac{J}{R^2} + m\right)\ddot{r} = -mg\frac{d}{L}\theta$$

### FONCTION DU TRANSFERT LINÉAIRE :

En prenant la transformée de Laplace de l'équation ci-dessus, on trouve l'équation suivante : Et donc la fonction de transfert est donnée par  $P(s)$

$$P(s) = \frac{R(s)}{\Theta(s)} = -\frac{mgd}{L\left(\frac{J}{R^2} + m\right)} \frac{1}{s^2} \quad \left[\frac{m}{rad}\right]$$

### Implémentation de la fonction du transfert simplifiée en MATLAB

Un système linéaire continu à temps invariant est asymptotiquement stable si et seulement si les pôles de sa fonction de transfert sont à parties réelles strictement négatives.

$$\mathbf{1 + FTBO = 0}$$

---

```
>> m = 0.111;
R = 0.015;
g = -9.8;
L = 1.0;
d = 0.03;
J = 9.99e-6;

>> s = tf('s');

>> FTB0=-m*g*d/L/(J/R^2+m)/s^2

FTB0 =

    0.21
    ----
    s^2

Continuous-time transfer function.
```

FIGURE 2.1 – Fonction de transfert du modèle simplifié

```
Poly =

    1.0000    0    0.2100

>> roots(Poly)

ans =

    0.0000 + 0.4583i
    0.0000 - 0.4583i
```

Le système est non stable



## 2.3 SIMULATION

## Simulation du modèle original

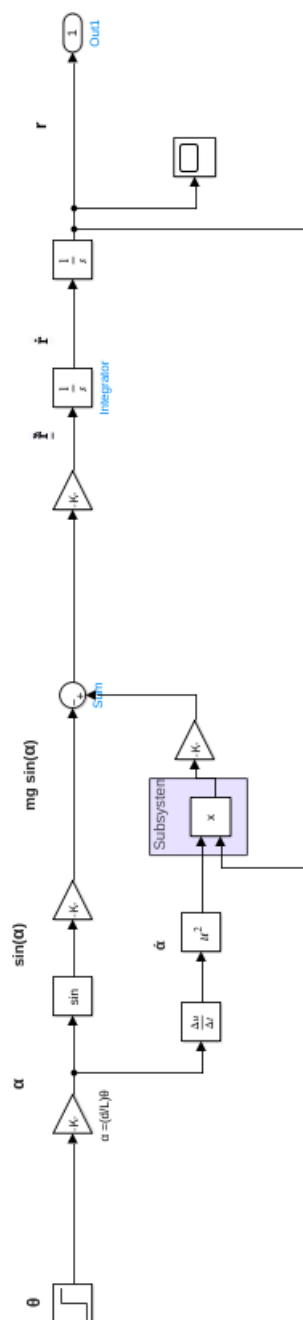


FIGURE 2.2 – Modèle original non linière

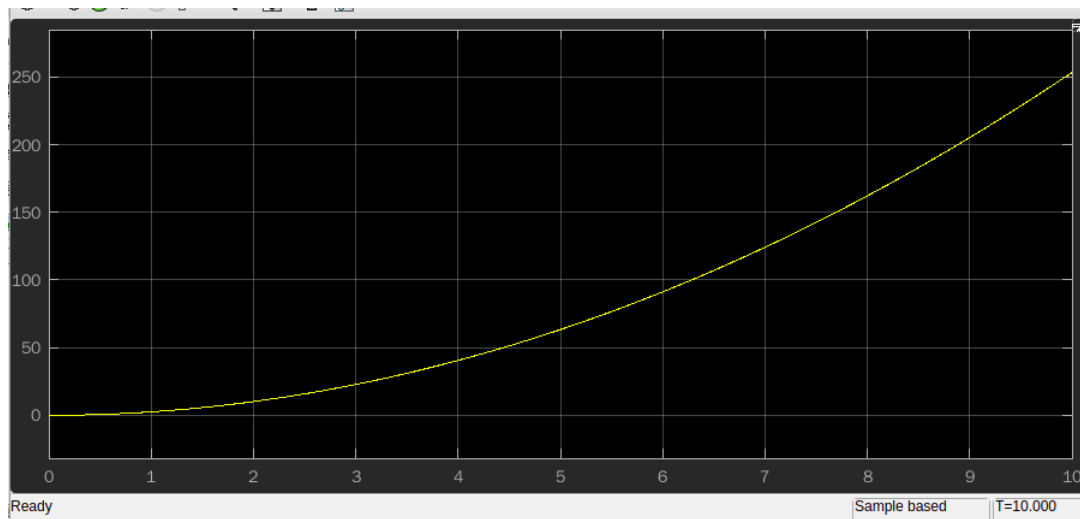


FIGURE 2.3 – Réponse indicielle de système non linéaire

*Interprétations :* D'après ce tracé, il est clair que le système est instable en boucle ouverte, ce qui fait que la balle roule juste à l'extrémité de la poutre. Par conséquent, une certaine méthode de contrôle de la position de la balle dans ce système est nécessaire

### Simulation du modèle simplifié

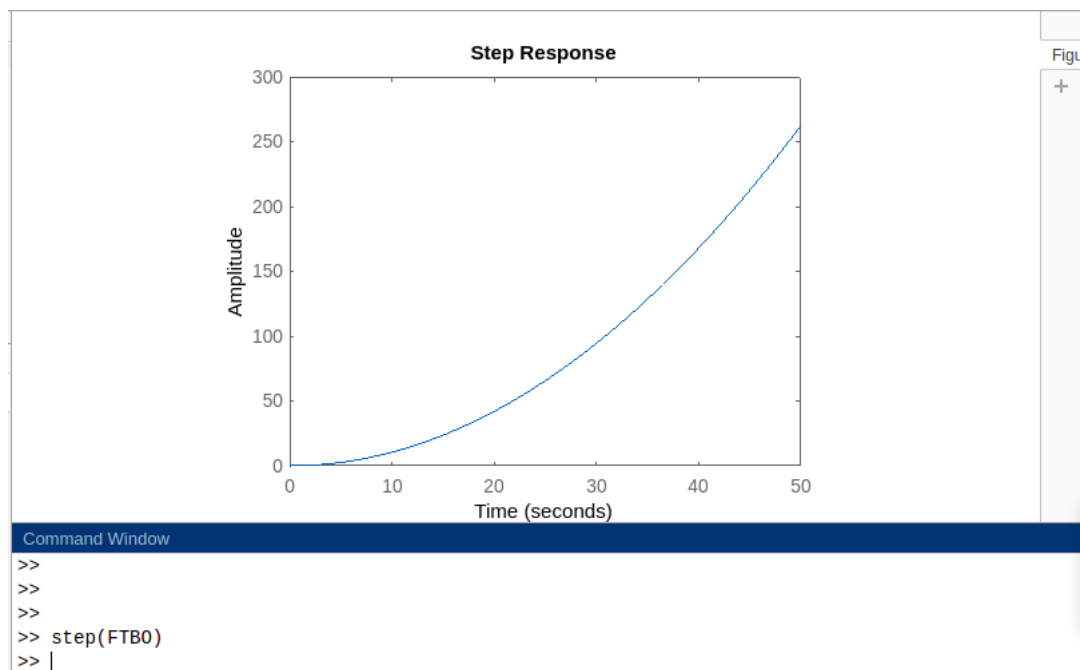


FIGURE 2.4 – Réponse indicielle de système linéaire

*Interprétations :* D'après ce tracé, il est clair que le système est instable en boucle ouverte, ce qui fait que la balle roule juste à l'extrémité de la poutre. Par conséquent, une certaine méthode de contrôle de la position de la balle dans ce système est nécessaire

*Remarque :* Les fichiers MATLAB/ Simulink sont accessibles à partir des liens ci-dessous :

---

SIMULATION Du MODÈLE ORIGINAL NON LINIÈRE  
SIMULATION DU MODÈLE SIMPLIFIÉ

### 3.1 CORRECTEUR PID

Dans un premier temps, nous étudierons la réponse du système présenté ci-dessus lorsqu'un contrôleur proportionnel est utilisé. Ensuite, un contrôle dérivé et/ou intégral sera ajouté si nécessaire.

Rappelons que la fonction de transfert pour un régulateur PID est :

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$$

#### 3.1.1 CORRECTEUR PROPORTIONNELLE

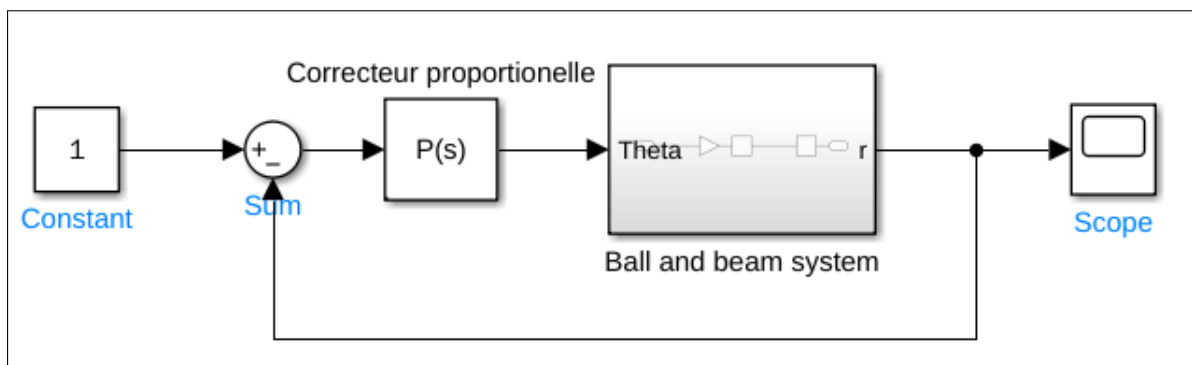


FIGURE 3.1 – Correcteur proportionnelle

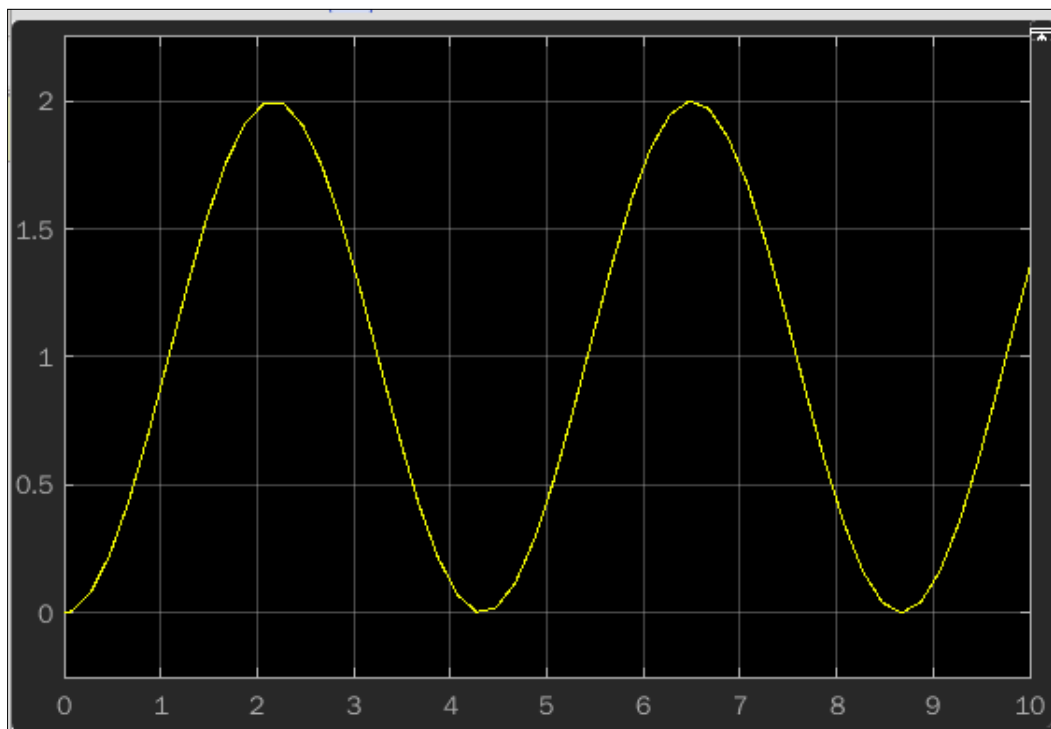


FIGURE 3.2 – Réponse indicielle de système corrigé

*Interprétation :* Comme vous pouvez le voir, le système reste marginalement stable avec l'ajout d'un gain proportionnel. Essayez de changer la valeur de  $K_p$  et notez que le système reste instable.

### 3.1.2 CORRECTEUR PROPORTIONNELLE-DÉRIVATEUR PD

$$K_p=10, K_d=10$$

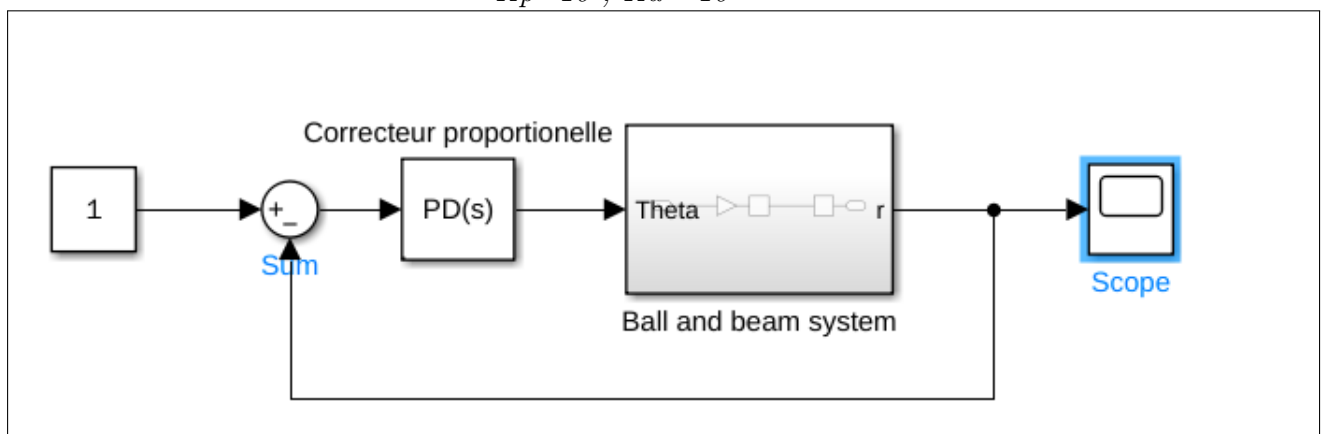


FIGURE 3.3 – Simulation de système corrigé avec un correcteur PD

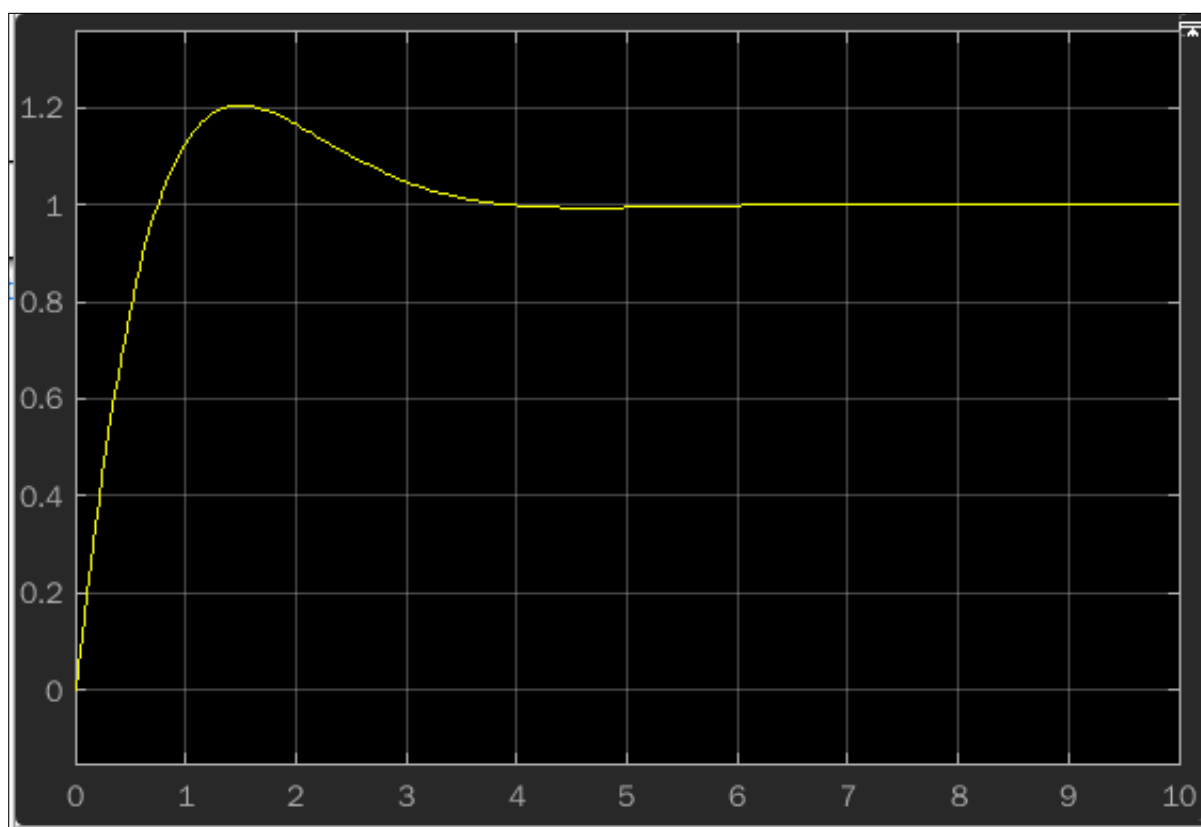
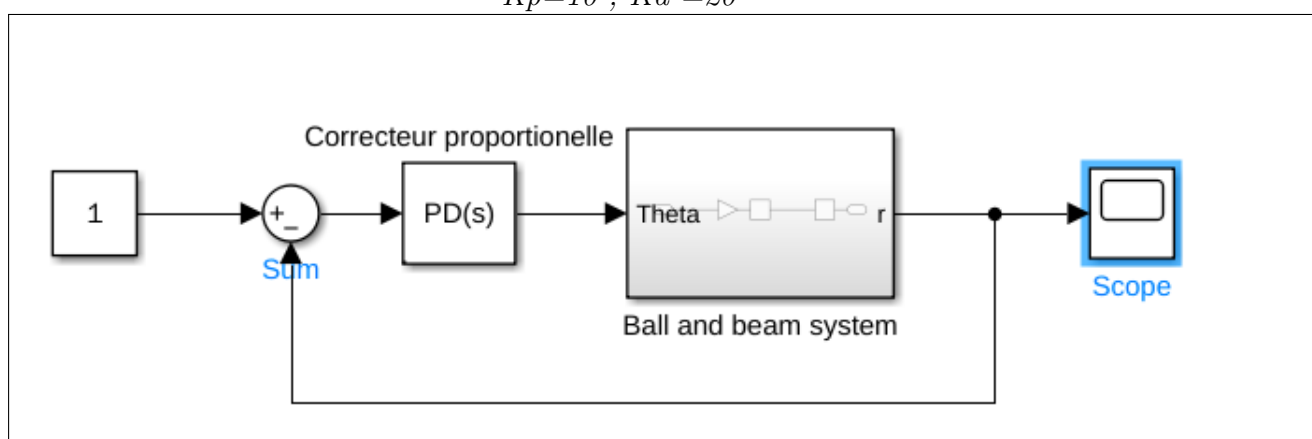
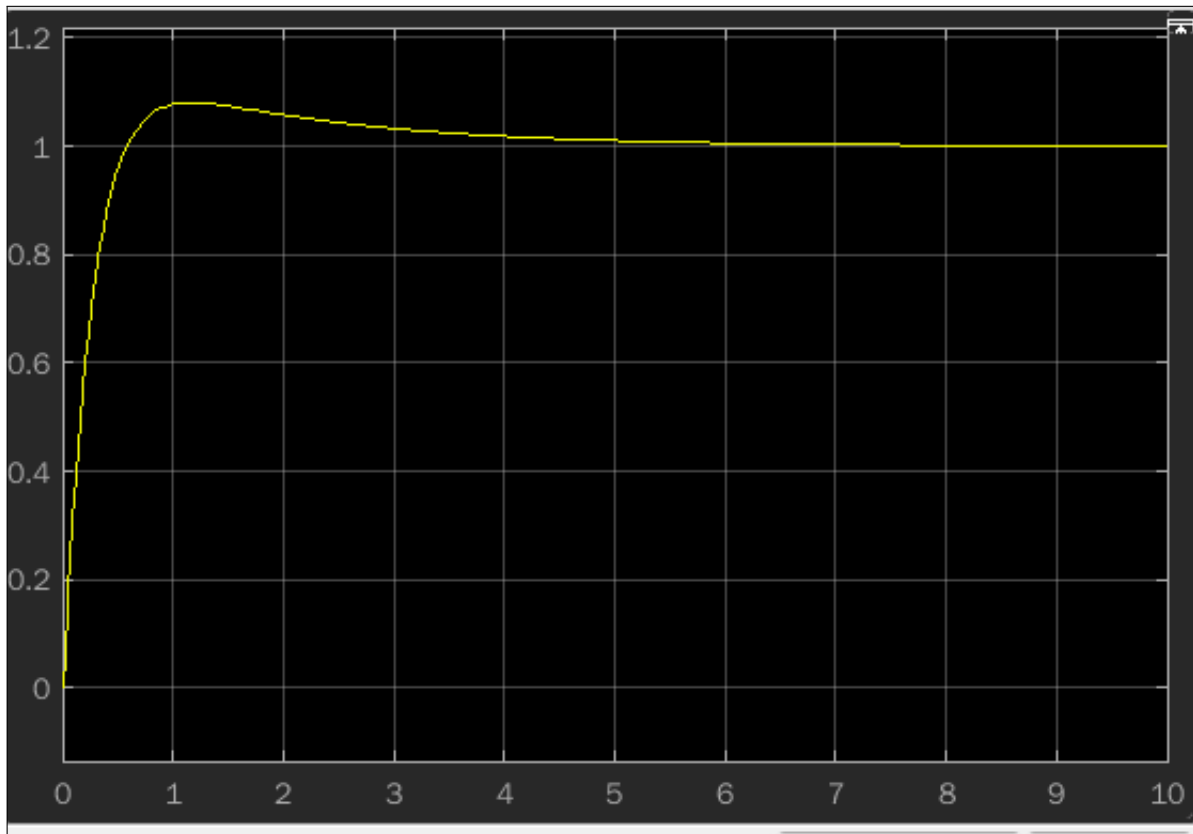


FIGURE 3.4 – Réponse indicielle du système corrigé

*Interprétation* : Maintenant, le système est stable mais le dépassement est beaucoup trop élevé et le temps de stabilisation doit diminuer un peu.

$$-K_p=10, K_d=20$$





*Interprétation :* On remarque que le dépassement a diminué en augmentant la valeur de  $K_d$  à 20.

*Remarque :* Les fichiers MATLAB/ Simulink sont accessibles à partir des liens ci-dessous :

[Simulation du modèle avec un correcteur PID](#)

---

## 3.2 COMMANDE PAR RETOUR D'ÉTAT

Soit le système d'état

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$  : colonne qui représente les n variables d'état

$u(t) \in \mathbb{R}^m$  : colonne qui représente les m commandes

$y(t) \in \mathbb{R}^p$  : colonne qui représente les p sorties

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  : matrice d'état

$C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  : matrice d'observation

$D \in \mathbb{R}^{p \times m}$  : matrice d'action directe.

- On pose notre système d'états comme suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{r} \\ \ddot{r} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-mg}{(\frac{J}{R^2} + m)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \alpha \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \alpha \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}$$

Contrairement aux exemples précédents où nous contrôlions l'angle de l'engrenage pour contrôler le faisceau et la balle, ici nous contrôlons  $\ddot{\alpha}$ . En faisant cela, nous contrôlons essentiellement un couple appliqué au centre de la poutre par un moteur. Par conséquent, nous n'avons pas besoin d'un système d'engrenage et de levier.

On désire avoir :

- Temps de réponse inférieur à 3 secondes
- Dépassement inférieur à 5 %

Pour cela on a effectué une opération de placement des pôles pour déterminer le vecteur K.



```

m = 0.111;
R = 0.015;
g = -9.8;
J = 9.99e-6;

H = -m*g/(J/(R^2)+m);

A = [0 1 0 0
      0 0 H 0
      0 0 0 1
      0 0 0 0];
B = [0;0;0;1];
C = [1 0 0 0];
D = [0];

ball_ss = ss(A,B,C,D);

p1 = -2+2i;
p2 = -2-2i;
p3 = -20;
p4 = -80;

K = place(A,B,[p1,p2,p3,p4])

```

```

K =
    1.0e+03 *
    1.8286    1.0286    2.0080    0.1040

```

### Simulation

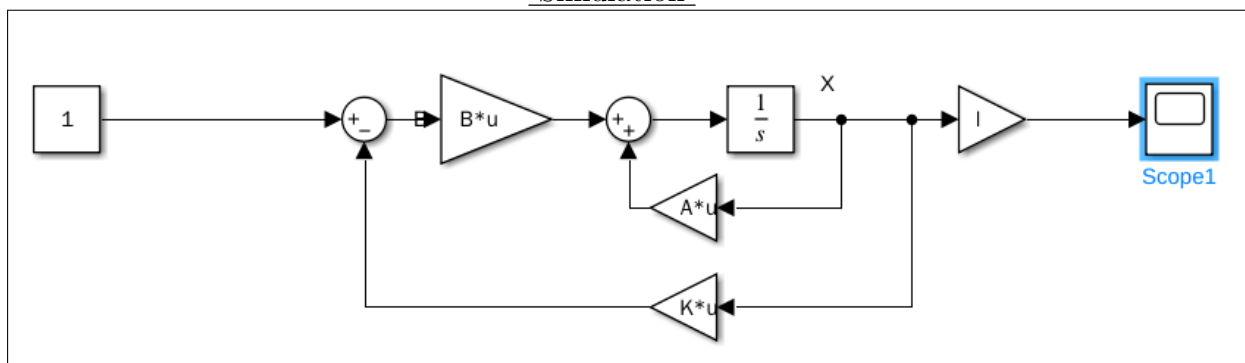


FIGURE 3.5 – Simulation de commande par retour d'état de système

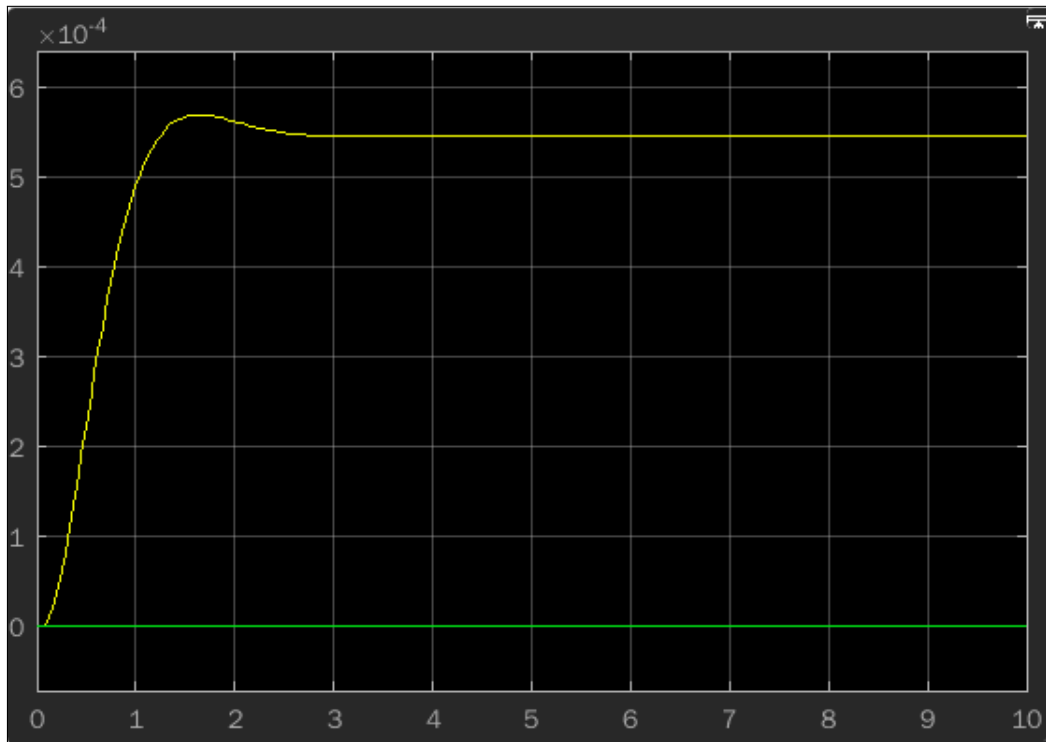
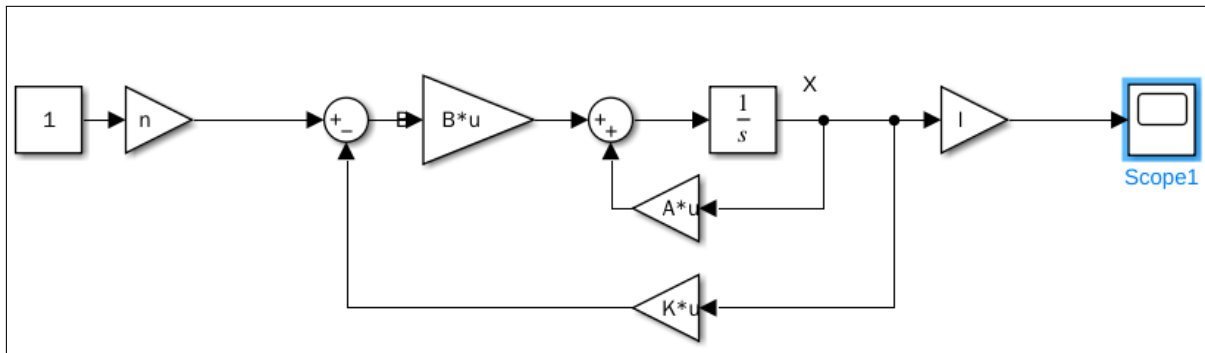


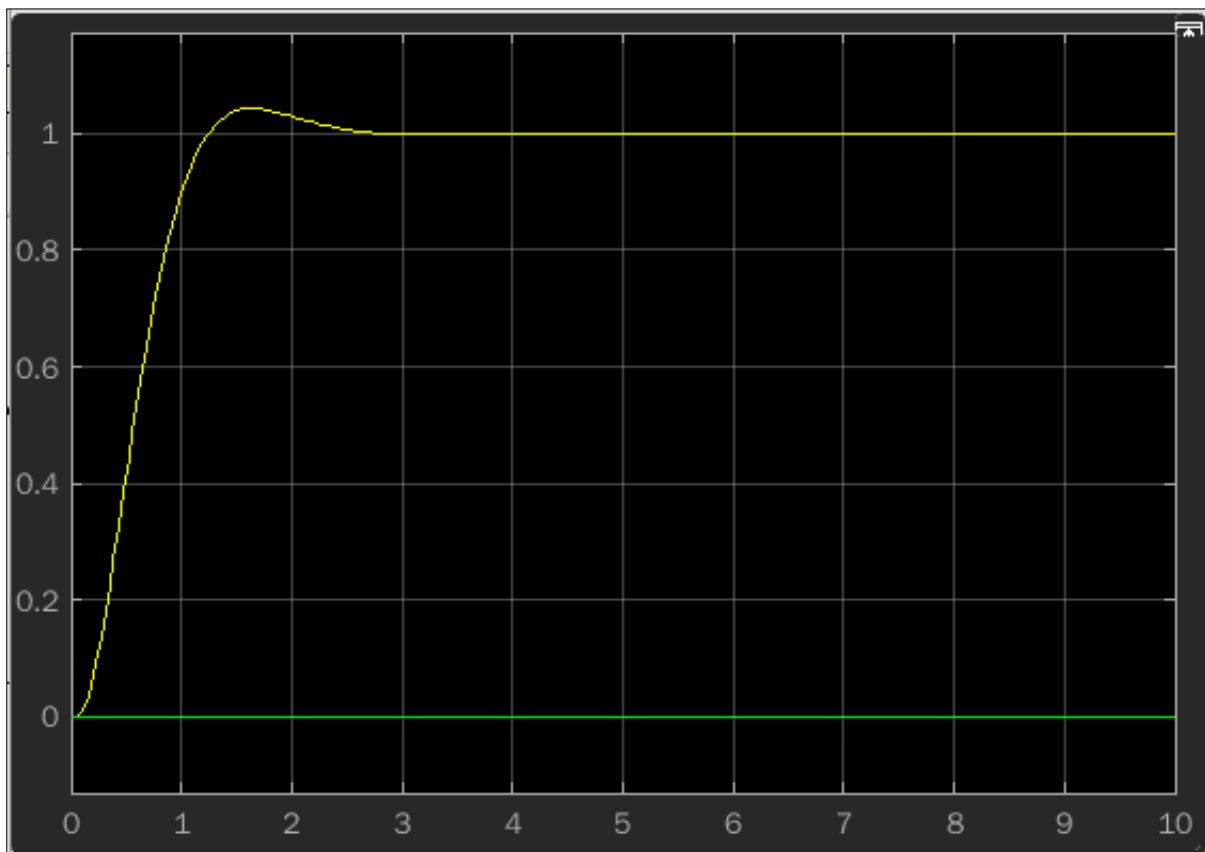
FIGURE 3.6 – Réponse indicielle de système

*Interprétation :* À partir de ce tracé, nous voyons qu'il y a une grande erreur d'état stable, pour compenser cela, nous devrions ajouter une compensation d'entrée de référence (expliquée dans la section suivante). Cependant, les critères de dépassement et de temps de stabilisation sont respectés. Si nous voulions réduire davantage le dépassement, nous pourrions rendre la partie imaginaire du pôle plus petite que la partie réelle. De plus, si nous voulions un temps de stabilisation plus rapide, nous déplacerions les pôles plus loin dans le demi-plan gauche.

Maintenant, nous voulons nous débarrasser de l'erreur en régime permanent. Contrairement aux autres méthodes de conception, où nous renvoyons la sortie et la comparons à l'entrée de référence pour calculer une erreur, avec un contrôleur de rétroaction à état complet, nous renvoyons les deux états. Nous devons calculer quelle devrait être la valeur en régime permanent des états, la multiplier par le gain choisi  $K$  et utiliser une nouvelle valeur comme référence pour calculer l'entrée. Cela peut être fait en ajoutant un gain constant  $n$  après la référence. Le schéma ci-dessous montre cette relation :



$n$  peut être trouvé en utilisant la fonction définie par l'utilisateur `rscale.m`.



*Interprétation* : Maintenant, l'erreur en régime permanent a été éliminée et tous les critères de conception sont satisfaits.

*Remarque* : Les fichiers MATLAB/ Simulink sont accessibles à partir des liens ci-dessous :

[Placement des pôles](#)

[Simulation du modèle commandé par retour d'état](#)

---

### 3.3 COMMANDE NUMÉRIQUE : RST

Nous allons dans cette section mettre notre système sous la forme discrète , calculer sa fonction de transfert , analyser sa réponse à un échelon et proposer un système de commande RST.

FONCTION DE TRANSFERT DISCRÈTE :

```
>> m = 0.111;
R = 0.015;
g = -9.8;
L = 1.0;
d = 0.03;
J = 9.99e-6;
s = tf('s');
P_ball = -m*g*d/L/(J/R^2+m)/s^2;

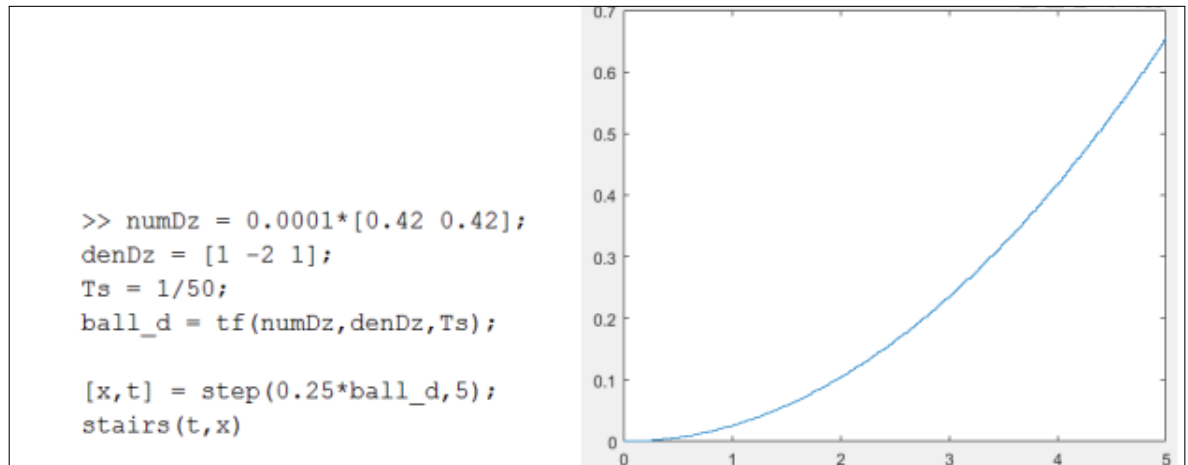
Ts = 1/50;
ball_d = c2d(P_ball,Ts,'zoh')

ball_d =

      4.2e-05 z + 4.2e-05
      -----
      z^2 - 2 z + 1

Sample time: 0.02 seconds
Discrete-time transfer function.
```

Nous allons maintenant observer la réponse de la balle à un pas de 0,25 m.

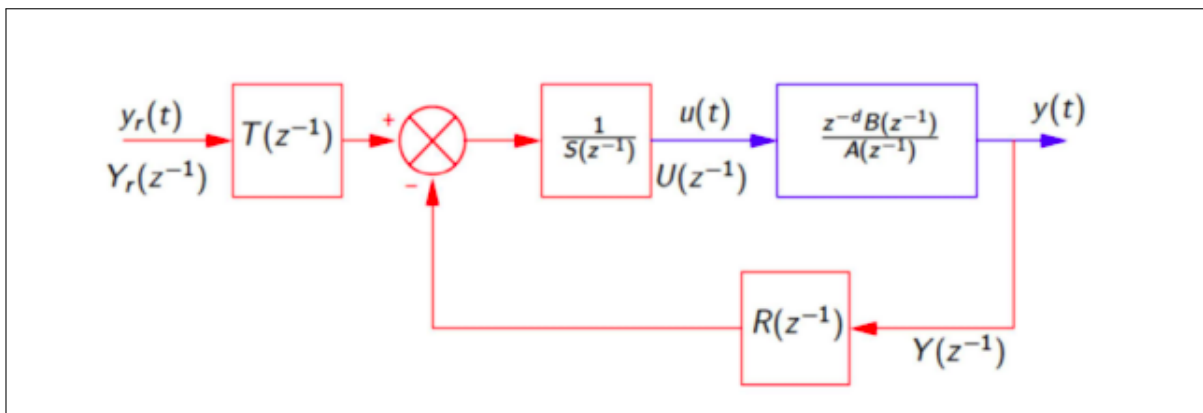


*Interprétation :* D'après ce graphique, il est clair que le système en boucle ouverte est instable, ce qui fait que la balle roule de l'extrémité du faisceau.

### 3.3.1 COMMANDE RST

Partie Théorique :

Le schéma général pour la synthèse RST est :



La fonction en boucle fermée est :

$$H_d = \frac{z^{-d} B(z^{-1}) T(z^{-1})}{\underbrace{A(z^{-1}) S(z^{-1}) + z^{-d} B(z^{-1}) R(z^{-1})}_{P(z^{-1})}}$$

Nous devons déterminer les polynômes R, S et T pour avoir un système stable . Nous choisissons le polynôme P tel que le système bouclé ait une dynamique du second ordre

---

caractérisée par un coefficient d'amortissement  $\xi = 0.7$  et une pulsation naturelle  $\omega n = 3rd.s.$

$$P(z^{-1}) = (1 - P_1 z^{-1}) \cdot (1 - P_2 z^{-1})$$

$$P_{1,2} = e^{T_e w_n (\xi \pm \sqrt{1 - \xi^2})}$$

avec :

$$\Rightarrow P(z^{-1}) = 1 - 1.915z^{-1} + 0.919z^{-2}$$

il faut que R et S soient solution de cette équation :

$$P(z^{-1}) = A(z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})R(z^{-1})$$

d'après le théorème de bezout :

$$\begin{cases} n_p \leq n_A + n_B + d - 1 \\ n_S = n_A - 1 \\ n_R = n_B + d - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_S = 1 \\ n_R = 1 \end{cases}$$

et donc :

$$S(z^{-1}) = 1 + s_1 z^{-1}$$

$$R(z^{-1}) = r_0 + r_1 z^{-1}$$

Nous avons après identification :

$$\Rightarrow \begin{cases} -2 + s_1 + 4.210^{-5} r_0 = -1.915 \\ 1 - 2s_1 + 4.210^{-5} r_0 + 4.210^{-5} r_1 = 0.919 \\ s_1 + 4.210^{-5} r_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s_1 = 0.0415 \\ r_0 = 1035.7 \\ r_1 = -988.1 \end{cases}$$

Finalement :

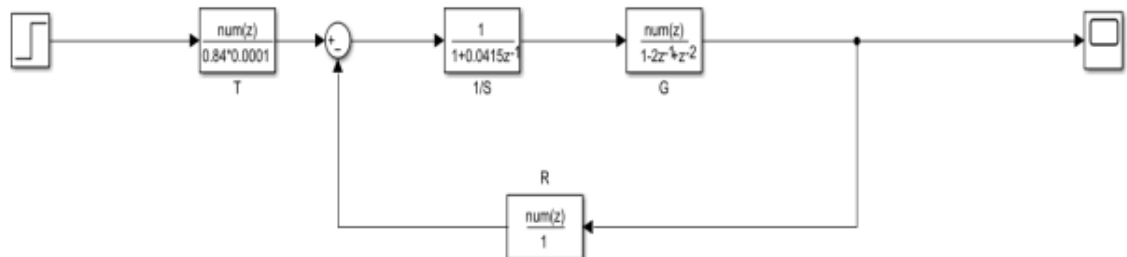
$$S(z^{-1}) = 1 + 0.0415z^{-1}$$

$$R(z^{-1}) = 1035.7 - 988.1z^{-1}$$

et nous choisissons T tel que :

$$T(z^{-1}) = \frac{P(z^{-1})}{B(1)}$$

Implémentation numérique :



---

Le graphique suivant est sa réponse à un échelon :



*Interprétation :* Comme vous pouvez le voir, toutes les exigences de conception sont satisfaites .

*Remarque :* Les fichiers MATLAB/ Simulink sont accessibles à partir des liens ci-dessous :

[Simulation de modèle commandé numériquement RST](#)



P OUR conclure on peut dire avec une grande confiance que c’été une riche expérience au cours de laquelle on a mis en pratique nôtres acquis de cours. On a réussie à commander notre système avec différentes méthodes.

Fort de cette expérience, j’aimerais beaucoup par la suite aller vers une prochaine projet.

J’exprime ma sincère gratitude à M. Nacer BENHADJ BRAIEK et M. Mohamed BOUAFOURA qui nous aidait tout ou long les séances de travaux pratiques à fin de réaliser ce mini-projet.