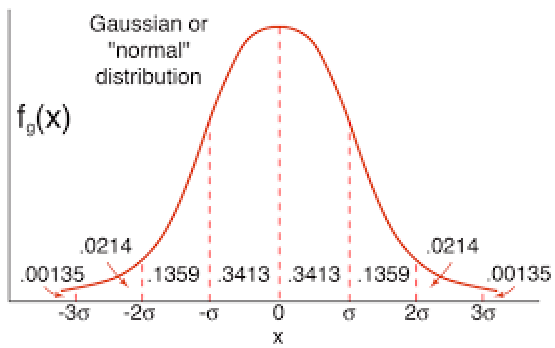
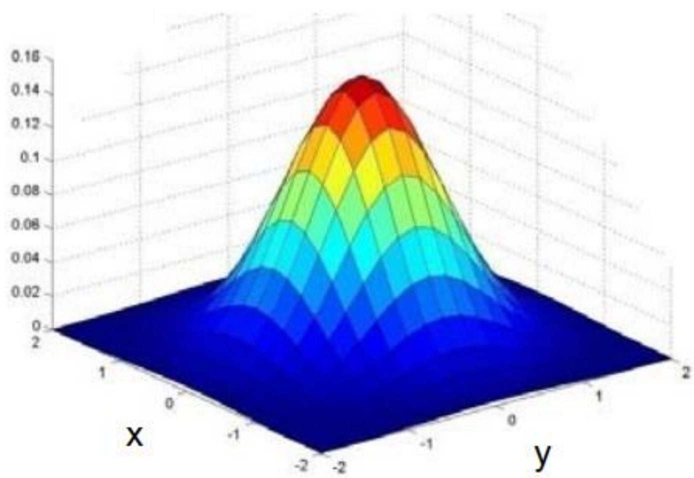
17955 Nastasija Stankovic

1. **Kolika je dimenzija kernela Gausovog filtra ako je standardna devijacija Gausove raspodele σ? Zašto?**

Dimenzija jezgra Gausovog filtra obično se bira da bude neparan broj, recimo **2k+1**, gde je **k** pozitivan ceo broj. Ako bi jezgro imalo paran broj piksela, tada bi središnji piksel bio "između" dve tacke na funkciji Gausovog filtra, što bi značilo da ne postoji jednoznačno određen vrh funkcije.Međutim, ako je dimenzija jezgra 2k+1, tada postoji jedinstveni središnji piksel koji odgovara vrhu Gausove funkcije, jer se funkcija simetrično raspoređuje oko središnjeg piksela.

Gausova distribucija:





Formula za Gausovo jezgro je:

$$G_\sigma = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}$$

gde su x i y koordinate svake tačke u 2D prostoru, a e je Eulerov broj .Standardna devijacija σ kontroliše širinu funkcije, odnosno koliko će se vrednosti proširiti oko središnje tačke. Odnosno standardna devijacija σ kontroliše koliko se muti ulazna slika primenom Gausovog filtra. Veća **σ** dovodi do šire Gausove distribucije i zato je potrebno veće jezgro kako bi se obuhvatio veci deo distribucije. Manje **σ** dovodi do uže Gausove distribucije i zbog toga se može koristiti manje jezgro.

Da bi se osiguralo da jezgro obuhvata dovoljno Gausove distribucije, uobičajeno je da se veličina jezgra postavi na 6σ+1(Gausova distribucija se brzo smenjuje prema nuli). To osigurava da jezgro obuhvata vecinu Gausove distribucije.

Dakle, dimenzija jezgra Gausovog filtra iznosi:

2k+1=6 σ+1

K=3 σ

Dimenziju jezgra Gausovog filtera treba odabrati tako da bude **2*3σ+1**.

2. **Šta se dobija na amplitudi spektra Furijeovom transformacijom kernela Gausovog filtra sa standardnom devijacijom σ?**

Furijeova transformacija pretvara signal iz vremenskog domena u frekventni domen. Gausov filter je linearni filter koji deluje na sliku u vremenskom domenu. Kada se primeni Fourierova transformacija na Gausov filter, dobije se amplitudni spektar Gaussove funkcije u frekventnom domenu.

Amplituda spektra Furijeove transformacije kernela Gausovog filtra sa standardnom devijacijom σ smanjuje se kako se frekvencija povećava zato sto Gausov filter ima svojstvo glatkoće, što znači da smanjuje visoke frekvencije i zadržava niske frekvencije.

3. **Pokazati nelinearnost Median filtra.**

Median filter se koristi za uklanjanje šuma iz slike, pri čemu se koristi medijan (srednja vrednost) vrednosti piksela u određenoj regiji slike.Kada se primenjuje median filter, pikseli u svakoj regiji se sortiraju prema veličini, a zatim se medijan vrednosti koristi za zamenu vrednosti piksela u sredini regije. Na taj način, pikseli koji predstavljaju šum se eliminiraju, a ostatak slike ostaje nepromenjen.

Nelineranost Median filtra mozemo dokazati ako posmatramo ponasanje median filtra u odnosu na razlicite vrste šuma. Na primer, ako se na ulaz median filtra primeni impulsni šum odnosno "salt and pepper" šum, koji se sastoji od slučajnih visokih i niskih vrednosti signala, tada će median filter pomoći u uklanjanju šuma tako što će zameniti ekstremne vrednosti signala s medijanom okolnih vrednosti. Ova operacija je nelinearna jer se medijan menja zavisno od vrednosti signala u okolini, a ne na linearni način.

Da bismo matematicki dokazali da median filter nije linearni filter, moramo pokazati da on ne zadovoljava svojstvo aditivnost I svojstvo homogenost.

Aditivnost - primena dva filtra na sliku može se zameniti primenom svakog filtra pojedinačno, a zatim sabiranje njihovih rezultata:

filter2D(I1+I2,f) = filter2D(I1,f) + filter2D(I2,f) - Median filter ne zadovoljava ovu svojstvo jer ne radi na principu konvolucije.Kada primenimo median filter f na ulaznu sliku I1, dobijamo izlaznu sliku npr P1. Slično, kada primenimo median filter na sliku I2, dobijamo izlaznu sliku P2. Spajanje izlaznih slika P1 i P2 neće dati isti rezultat kao primena median filtra f na sliku I1+I2.

Da bismo to dokazali, razmotrimo jednostavan primer ulazne slike I1 I I2:

I1 = [1, 3, 5, 7, 9],I2 = [9, 7, 5, 3, 1]

Neka je f median filter veličine 3.Kada primenimo median filter f na ulaznu sliku I, dobijamo izlaznu sliku P1:

P1=[3, 5, 7, 7,9]

Kada primenimo median filter f na ulaznu sliku I2, dobijamo izlaznu sliku P2:

P2 = [3, 5, 7, 7, 9]

Njihovim spajanjem dobijamo:

P3=P1 + P2 = [6, 10, 14, 14, 18]

Međutim, ako primenimo median filter f na ulaznu sliku I1+I2, dobijamo izlaznu sliku P4:

I1 + I2 = [10, 10, 10, 10, 10]

P4 = [10,10,10,10,10]

P3 i P4 nisu iste, zbog toga median filter ne zadovoljava svojstvo aditivnosti.

Homogenost:

Neka je ulazna slika I = [1, 3, 2, 5, 4] i neka je veličina median filtera f=3.Primenom filtra na I dobija se:

P1 = [1, 2, 3, 4, 4]

Sada, neka je funkcija I2 = I + k, gde je k proizvoljna konstanta. Ako primenimo median filter na funkciju I2, dobijemo funkciju P2:

I2 = I + k = [1+k, 3+k, 2+k, 5+k, 4+k]

P2 = [1+k, 2+k, 3+k, 4+k, 4+k]

Kako bi se pokazalo da median filter ne zadovoljava homogenost, dovoljno je pronaći takvu konstantu k, za koju imamo da P1 i P2 nisu jednaki. U ovom slučaju, možemo uzeti k = 1. Tada dobijamo:

P1 = [1, 2, 3, 4, 4]

P2 = [2, 3, 4, 5, 5]

Vidimo da se funkcije P1 i P2 razlikuju, što znači da median filter ne zadovoljava homogenost.

Ovim smo dokazali da Median filter ne zadovoljava svojstvo aditivnosti i homogenosti, zato predstavlja nelinearnu transformaciju.

4. Pokazati linearnost Box (Mean) filtra.

Da bismo dokazali da je box filter linearna transformacija, potrebno je pokazati da filter zadovoljava svojstva aditivnost i homogenost.

Aditivnost:

filter2D(I1+I2,f) = filter2D(I1,f) + filter2D(I2,f)
I1 i I2 su slike nad kojima primenjujemo filer f.

Sada možemo zapisati ekvivalentni izraz za box filter:

Box((I1+I2), f) = (1/n^2) * filter2D((I1+I2), f)

Koristeći svojstvo lineariteta operatora konvolucije, možemo napisati:

(1/n^2) * filter2D((I1+I2), f) = (1/n^2) * (filter2D(I1, f) + filter2D(I2, f))

Ovo nam govori da primena filtera B na I1 + I2 daje isti rezultat kao zbir primene filtera na I1 i I2 pojedinačno, što je upravo ono što smo želeli da dokažemo.

Sada ćemo pokazati homogenost. Neka je k skalarni faktor, a I slika koju obrađujemo. Tada je izraz za primenu Box filtra na skaliranu sliku:

Box(kI) = (1/n^2) * filter2D(kI, f)

Primenimo sada svojstvo skaliranja operatora konvolucije:

filter2D(k*I, f) = k * filter2D(I, f)

Zakljucujemo da:

Box(k*I) = (1/n^2) * k * filter2D(I, f)= k * ((1/n^2) * filter2D(I, f))= k * Box(I)

Ovaj izraz pokazuje da primena Box filtra na skaliranu sliku daje isti rezultat kao primena Box filtra na neskaliranu sliku pomnoženu skalarom.

Ovim smo dokazali da box filter zadovoljava svojstvo aditivnosti i homogenosti, zato predstavlja linearnu transformaciju.