Domaći zadatak broj 7

Ime i prezime studenta: Nastasija Stankovic Broj indeksa: 17955

Uputstvo: 1. Pre početka izrade promenite ime datoteke u Domaci7_ime_prezime. (ubacite svoje ime i prezime) 2. Popunite ćeliju ispod naslova odgovarajućim podacima. 3. Za rešavanje zadataka, ukoliko je potrebno, otvorite ispod teksta zadataka dodatne ćelije za upisivanje tekstualnog odgovora (Markdown) ili programskog koda (Code). 4. Nakon završetka izrade rešenja Notebook dokument sačuvati u pdf formatu i proslediti ga nastavniku. To možete da uradite ili kroz Teams ili na mail adresu jovana.dzunic@elfak.ni.ac.rs

In [1]:
```
import numpy as np
import numpy.random as rndm
```

Zadatak 1. Dati geometrijsku interpretaciju transformacije koju proizvodi matrica A^9, gde je $A \in 2 \times 2$ matrica rotacije za ugao $\pi/3$. Dati eksplicitni izraz matrica A i A^9.

(5poena)

In [2]:
```
a1 = np.sqrt(3)/2
a2 = 1/2
A=np.array([[a2,-a1],[a2,a1]])
print(A)
print(A@A@A@A@A@A@A@A@A)
```

```
[[ 0.5       -0.8660254]
 [ 0.5        0.8660254]]
[[ 0.41013611 -0.3035254 ]
 [ 0.17524047  0.53842104]]
```

Iz ovih vrednosti vidimo da je ugao θ priblizno jednak sa $k\pi$,to znaci da je matrica A^9 izvrsila rotaciju za tu vrednost. Takodje determinantu matrice mozemo izracunati:

$$det(A) = cos^2(\pi/3) + sin^2(\pi/3) = 1$$

Na osnovu ove vrednosti zakljucujemo da ne dolazi do povecanja vektora nakon rotacije.

$$A = \begin{bmatrix} \cos(n\frac{\pi}{3}) & -\sin(n\frac{\pi}{3}) \\ \sin(n\frac{\pi}{3}) & \cos(n\frac{\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

$$A^9 = \begin{bmatrix} \cos(3\pi) & -\sin(3\pi) \\ sin(3\pi) & \cos(3\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Zakljucujemo da je matrica A za n=9 izvrsila rotaciju za 3π ($9(\pi/3) = 3\pi$).

Zadatak 2. Ako je P matrica projekcije pokazati da je $P + \lambda I$ regularna matrica za svako $\lambda > 0$.

(5 poena)

Za regularne matrice vazi da je njihova determinanta razlicita od nule,takodje znamo da za matrice projekcije vazi da njene sopstvene vrednosti mogu da budu samo $\lambda = 0$ i $\lambda = 1$. Sto znaci da matrica $P + \lambda I$ moze da bude singularna samo u slucaju kada je $\lambda = 0$ ili $\lambda = 1$. Zakljucujemo da su matrice $P + \lambda I$ regularne za $\lambda > 0$.

Zadatak 3. Neka su date matrice $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B) = n$, $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(B)$. Objasniti (dokazati) zbog čega su sledeće matrice ortogonalnih projekcija jednake:

$$A(A^TA)^{-1}A^T \quad \text{i} \quad B(B^TB)^{-1}B^T.$$

(10 poena)

U tekstu zadatka nam je dato da je $rang(A) = rang(B)$,i kako su ove matrice ortogonalnih projekcija u potpunosti odredjena prostorom slika mozemo zakljuciti da su prostori slika matrica $A(A^TA)^{-1}A^T \quad \text{i} \quad B(B^TB)^{-1}B^T$ jednaki. Sledi da su matrice A i B jednake.

Zadatak 4. a) Odrediti normu vektora v za koju je $I - vv^T$ ortogonalna matrica.

(5 poena)

Uslov ortogonalnosti je: $(I - vv^T)(I - vv^T)^T = I$.

Sredjivanjem dobijamo:

$(I - vv^T)(I^T - vv^T) = I$

$I - Ivv^T - Ivv^T + vv^Tvv^T = I$

$I - vv^T - vv^T + vv^Tvv^T = I$

$vv^T(vv^T - 2) = 0$

$vv^T = 2$

Norma vektora:$||v|| = \sqrt{vv^T} = \sqrt{2}$.

b) Dat je nenula vektor $u. \in \mathbb{R}^n$. Odrediti sve vrednosti relanog parametra λ za koje je $I - \lambda uu^T$ ortogonalna matrica.

(5 poena)

Uslov ortogonalnosti je: $(I - \lambda uu^T)(I - \lambda uu^T)^T = I$

Daljim sredjivanjem dobijamo:

$$(I - \lambda uu^T) \cdot (I - \lambda uu^T) = I$$

$$I^2 - 2\lambda uu^T + \lambda^2 uu^Tuu^T = I$$

$$I - 2\lambda uu^T + \lambda^2 uu^Tuu^T = I$$

$$\lambda^2 uu^Tuu^T - 2\lambda uu^T = 0$$

$$\lambda uu^T(\lambda uu^T - 2) = 0$$

Iz cega sledi da je: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \dfrac{2}{uu^T} = \dfrac{2}{||u^2||}$

Zadatak 5. Iterativnim postupkom odrediti ortogonalnu Šurovu dekompoziciju matrice A generisanu donjim kodom. Napisati kod za rešavanje ovog problema. Koje su sopstvene vrednosti matrice A?

(20 poena)

In [4]:
```
D=np.diag([4,3,2,1])
M=np.random.rand(4,4)
M=(M-0.5)*2
A=M@D@np.linalg.inv(M)
print(np.round(A,2))
```

```
[[  2.72   0.13  -1.32   1.55]
 [  0.51   3.94  -1.78   2.53]
 [ 14.3    6.45 -10.9   17.56]
 [ 10.98   4.56  -8.86  14.24]]
```

In [18]:
```
A1=np.copy(A);
n=4;
for i in range(n-2):
    k1=np.copy(A1[i+1:,i])
    k2=np.linalg.norm(k1)
    A1[i+1,i]=-np.sign(k1[0])*k2
    A1[i+2:,i]=0
    k1[0]-=A1[i+1,i]
    k2=2/np.dot(k1,k1)
    A1[:,i+1:]=A1[:,i+1:]-k2*np.outer(A1[:,i+1:]@k1,k1)
    A1[i+1:,i+1:]=A1[i+1:,i+1:]-k2*np.outer(k1,k1@A1[i+1:,i+1:])
print(np.around(A1,2))
```

```
[[  2.72   0.1    0.74   1.9 ]
 [-18.03   2.85 -15.63 -22.88]
 [  0.    -0.17   4.03   1.29]
 [  0.     0.    -1.38   0.4 ]]
```

In [20]:
```
for i in range(10):
    [Q,R]=np.linalg.qr(A1,mode='complete')
    A1=R@Q
print(np.around(A1,2))
```

```
[[ 4.   -0.84  9.34 30.08]
 [-0.    3.    4.12  9.14]
 [ 0.   -0.    2.    3.01]
 [ 0.    0.   -0.    1.  ]]
```

In [21]:
```
print("Sopstvene vresnosti su:")
np.linalg.eigvals(A)
```

```
Sopstvene vresnosti su:
```

Out[21]:
```
array([4., 3., 2., 1.])
```