Domaći zadatak broj 6

Ime i prezime studenta: Nastasija Stankovic Broj indeksa: 17955

Uputstvo: 1. Pre početka izrade promenite ime datoteke u Domaci6_ime_prezime. (ubacite svoje ime i prezime) 2. Popunite ćeliju ispod naslova odgovarajućim podacima. 3. Za rešavanje zadataka, ukoliko je potrebno, otvorite ispod teksta zadataka dodatne ćelije za upisivanje tekstualnog odgovora (Markdown) ili programskog koda (Code). 4. Nakon završetka izrade rešenja Notebook dokument sačuvati u pdf formatu i proslediti ga nastavniku. To možete da uradite ili kroz Teams ili na mail adresu jovana.dzunic@elfak.ni.ac.rs

Zadatak 1. Poznata je jedna sopstvena vrednost matrice $A = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ na 4 decimale $\lambda \approx 0.7574$. Proceniti drugu sopstvenu vrednost na osnovu traga matrice A. Iz dobijenih informacija dati procenu vrednosti $\det(A)$. Proveriti dobijene procene upotrebom NumPy ugrađenih funkcija.

(5poena)

Kako je trag matrice A (koja je kvadratna, dimenzija 2×2) zbir njenih elemenata na glavnoj dijagonali, lako možemo uočiti da je trag ove matrice jednak 10. Kako vazi da je $\lambda_1 + \lambda_2 = tr$, a imamo poznatu jednu sopstvenu vrednost matrice, na osnovu ovih informacija mozemo odrediti i drugu sopstvenu vrednost matrice: $\lambda_2 = tr - \lambda_1$.

$\lambda_2 \approx 9.2426$

Procena vrednosti $det(A)$:

$\lambda_1 \lambda_2 = det(A). det(A) = 0.7574\dot{9}.2426 \approx 7.00035$

In [3]:
```
import numpy as np
A = np.array([[8,3],[3,2]]);
t=np.trace(A);
print("Trag matrice A je:",t);
```

```
Trag matrice A je: 10
```

Sopstvene vrednosti matrice A:

In [4]:
```
np.linalg.eigvals(A)
```

Out[4]:
```
array([9.24264069, 0.75735931])
```

det(A):

In [5]:
```
np.linalg.det(A)
```

Out[5]:
```
6.999999999999998
```

Zadatak 2. Za matricu $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}$ poznat je spektar: $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1, 2\}$. Ta informacija je dovoljna da se daju neke od narednih informacija. Odrediti koje i dati odgovarajuće informacije.

a) Poznat je $\mathrm{rang}(A)$.

b) Poznato je da li je A regularna matrica.

c) Poznata je $\det(A)$.

d) Poznat je $\mathrm{tr}(A)$.

e) Poznata je $\det(AA^T)$.

f) Poznate su sopstvene vrednosti matrice $A^T A$.

g) Poznate su sopstvene vrednosti matrice A^T.

h) Poznate su sopstvene vrednosti matrice $A^T A$.

i) Poznate su sopstvene vrednosti matrice $A^T + 4I$.

j) Poznate su sopstvene vrednosti matrice $(A^2 - 4I)^{-1}$.

(10 poena)

Spektar matrice predstavlja skup sopstevenih vrednosti matrice. Na osnovu zadatka, poznat nam je spektar matrice A, i odatle imamo 3 spostvene vrednosti matrice A: $\lambda_1 = 0$,$\lambda_2 = 1$,$\lambda_3 = 3$. Na osnovu ovoga mozemo odrediti sledece informacije:

a) Rang matrice odredjujemo na osnovu sopstvenih vrednosti koje su razlicite od nule. Posto je $\lambda_1 = 0$ zakljucemo da je rang(A)=2.

b) Matrica A ne moze biti regularna jer vrsi preslikavanje iz prostora R^3 u prostor R^2

c) Determinatnu matrice racunamo kao proizvod sopstvenih vrednosti,$det(A) = 0$

d) Trag kvadratne matrice se dobija kada saberemo sve sopstvene vrednosti matrice A, $tr(A) = 3$

e) Determinatnu $det(AA^T) = det(A) \cdot det(A^T)$, posto je $det(A) = 0$ sledi da je $det(AA^T) = 0$

f) Ukoliko znamo sopstvene vrednosti matrice A,onda znamo i sopstvene vrednosti matrice $A^T A$.

g) Ukoliko znamo sopstvene vrednosti matrice A ,onda znamo i sopstvene vrednosti matrice A^T.

i) Za racunanje determinantne preko $det(A^T + 4I - \lambda I) = det(A^T - (\lambda - 4)I) = det(A^T - \alpha I)$, dobijamo za $\alpha_1 = 0$,$\alpha_2 = 1$,$\alpha_2 = 2$. Kako je $\lambda = \alpha + 4$, sledi $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 5$,$\lambda_3 = 6$

j) Vrednosti za A^2 su {0,1,4}. Uvescemo da je:

$$X = A^2 det(X - 4I - \lambda I) = det(X - (\lambda + 4)I) = det(X - \alpha I)$$

, odatle nam je $\alpha = \lambda + 4$

Da bi izracunali sopstvene vrednosti za $\lambda = \alpha - 4$, dobicemo

$$\lambda_1 = -4$$

$$\lambda_2 = -3$$

$$\lambda_3 = 0$$

Zadato je $(A^2 - 4I)^-1$, posto nam trebaju nam reciprocne vrednosti sledi da su $\lambda_1 = -1/4$,$\lambda_2 = -1/3$,$\lambda_3 = \infty$

Zadatak 3. Neka je $E_n = [1]_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ kvadratna matrica sastavljena samo od jedinica. Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori ove matrice određeni su u zadatku 12 Jupyter radne sveske 17. Napisati spektralnu dekompoziciju matrice E_n.

(5 poena)

Sopstevene vrednosti matrice su $\lambda = 0$ i $\lambda = n$.

Vektor koji odgovara λ je $e = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T$.Baza sopstvenih vektora koji odgovara $\lambda = 0$,visestrukosti n-1 je :

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\vdots$$

$$v_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}^T$$

Spektralna dekompozicija matrice A : $A = VDV^-1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/n & 1/n & 1/n & \dots & 1/n \\ 1/n & 1/n-1 & 1/n & \dots & 1/n \\ 1/n & 1/n & 1/n-1 & \dots & 1/n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/n & 1/n & 1/n & \dots & 1/n-1 \end{bmatrix}$$

Na osnovu spektralne dekompozicije matrice E_n odrediti spektralne dekompozicije matrice K u blok formi. Matrica K glasi

$$\text{a) } K = \begin{bmatrix} I_n & O_n \\ O_n & E_n \end{bmatrix}, \qquad \text{b) } K = \begin{bmatrix} E_n & O_n \\ O_n & E_n \end{bmatrix},$$

gde je I_n jedinična matrica reda n i O_n nula-matrica reda n.

(5+5 poena)

Vrsimo dijagonalizaciju matrica duz glavne dijagonale:

$K_d = \begin{bmatrix} TDT^-1 & O \\ O & TDT^-1 \end{bmatrix}$, **pri cemu je $TDT^-1 = I_n I_n I_n$.**

Sto se matrice E_n tice, koristimo dobijenu spektralnu dekompoziciju.

a) $K = \begin{bmatrix} I_n I_n I_n & O_n \\ O_n & VDV^-1 \end{bmatrix}$

b) $K = \begin{bmatrix} VDV^-1 & O_n \\ O_n & VDV^-1 \end{bmatrix}$

$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$

Zadatak 4. Neka je poznat monični karakteristični polinom matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$,

$$M_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

Pokazati da je $\mathrm{tr}(A) = -a_{n-1}$.

(5 poena)

$det(A - \lambda I_n) =$

$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) \cdot \ldots \cdot (a_{nn} - \lambda) + \ldots = \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \ldots$

Uz pretpostavku da je λ^n koeficijent 1, mozemo zakljuciti:

$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = -a_{n-1}$

Zadatak 5. Niz brojeva definisan je rekurentnom formulom $x_{k+2} = \dfrac{x_{k+1} + x_k}{2}$. Za matrični zapis iskoristiti sledeći sistem diferencnih jednačina:

$$\begin{cases} x_{k+2} = \dfrac{1}{2} x_{k+1} + \dfrac{1}{2} x_k, \\ x_{k+1} = x_{k+1}. \end{cases}$$

a) Odrediti matricu A dinamičkog sistema $v_{k+1} = \begin{bmatrix} x_{k+2} \\ x_{k+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_k \end{bmatrix} = Av_k$.

(2 poena)

Neka je matrica $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Na osnovu ovoga, mozemo zakljuciti sledece:

$x_{k+2} = ax_{k+1} + bx_k$

$x_{k+1} = cx_{k+1} + dx_k$

Kada ove dobijene vrednosti uporedimo sa datim sistemom diferencnih jednacina, mozemo lako utvrditi da su koeficijenti koji stoje uz odgovarajuce clanove jednaki $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = 1, d = 0$.

Iz ovoga, sledi da je matrica A:

$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) Odrediti sopstvene vrednosti i sopstvene vektore matrice A.

(7 poena)

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\lambda + \lambda^2 - \frac{1}{2}$$

Sopstvene vrednosti matrice A su nule ovog karaktesticnog polinoma $P_A(\lambda)$.

$$\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0$$

Resenja cemo dobiti resavanjem kvadratne jednacine:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{1}{2}$$

In [7]:
```
A=np.array([[1/2,1/2],[1,0]]);
vr,v= np.linalg.eig(A);
for i,j in enumerate (vr):
    print("Sopstvena vrednost:",j, "sopsteveni vektor: ", v[:,i])
```

```
Sopstvena vrednost: 1.0 sopsteveni vektor:  [0.70710678 0.70710678]
Sopstvena vrednost: -0.5 sopsteveni vektor:  [-0.4472136   0.89442719]
```

c) Odrediti $\lim\limits_{k\to\infty} A^k$.

(3 poena)

Karakteristicni polinom $P_A(\lambda)$ = $(\lambda - 1)(\lambda - (-\frac{1}{2}))$.Ako vrednosti karakteristicnog polinom $P_A(\lambda)$ izjednacimo sa nulom, mozemo da dobijemo sopstvene vrednosti: $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. Sopstveni vektor koji odgovara λ_1 je v_1=$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, a za λ_2 je v_2=$\begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}^T$

$$A = VDV^{-1}, V = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Mozemo da zakljucimo sledece:

$$A^\infty = \lim_{n\to\infty} A^n = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} 1^n & 0 \\ 0 & \lim\limits_{n\to\infty} -(\frac{1}{2})^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

d) Za početni vektor $v_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ pokazati da $\lim\limits_{k\to\infty} v_k = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$.

(3 poena)

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} A^n v_0 = \lim_{n\to\infty} A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ukoliko pomnozimo $\lim_{n\to\infty} A^n$ i v_0 dobicemo:

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$