Domaći zadatak broj 5

Ime i prezime studenta: Nastasija Stankovic Broj indeksa: 17955

Uputstvo: 1. Pre početka izrade promenite ime datoteke u Domaci5_ime_prezime. (ubacite svoje ime i prezime) 2. Popunite ćeliju ispod naslova odgovarajućim podacima. 3. Za rešavanje zadataka, ukoliko je potrebno, otvorite ispod teksta zadataka dodatne ćelije za upisivanje tekstualnog odgovora (Markdown) ili programskog koda (Code). 4. Nakon završetka izrade rešenja Notebook dokument sačuvati u pdf formatu i proslediti ga nastavniku. To možete da uradite ili kroz Teams ili na mail adresu jovana.dzunic@elfak.ni.ac.rs

Zadatak 1. Poznata je LU faktorizacija matrice

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3&-1\\0&-3&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Na osnovu nje:

a) Navesti (bez izračunavanja) elementarne transformacije vrsta sprovedene nad matricom A za njeno dovođenje na stepenasti oblik. Voditi računa o redosledu navođenja operacija.

(5 poena)

Elementarne transformacije vrste su: 1.Mnozenje vrste nekim koeficijentom. 2.Sabiranje dve vrste. 3.Zamena mesta vrstama. Postupak nad ovoj matrici:

1. **Pomnožiti prvu vrstu sa -2**
2. **Sabrati prvu i drugu vrstu**
3. **Sabrati prvu i treću vrstu**
4. **Pomnožiti drugu vrstu sa -1**
5. **Sabrati drugu i treću vrstu**

b) Nabrojati pivot elemente dobijene faktorizacije.

(2 poena)

Pivot elementi su elementi na glavnoj dijagonali U.Pivot element u prvom koraku je 2,a u drugom koraku -3.

c) Odrediti jednu faktorizaciju punog ranga matrice A.

(3 poena)

Kako je rang matrice A jednak 2, znači da postoji linearna zavisnost između kolona matrice A u nefaktorisanom obliku. Ova zavisnost je prisutna između druge i treće kolone, jer je druga kolona jednaka trećoj koloni pomnoženoj sa -3, pa se za faktorizaciju koriste druga i treća kolona.

Matricu A treba predstaviti kao: A=$B_{3\times 2}C_{2\times 3}$.

Neka je matrica B:

$$B=\begin{bmatrix}2&-1\\4&-1\\-2&2\end{bmatrix}$$

Matrica C je oblika:

$$C=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\end{bmatrix}$$

Za date matrice A i B, jedina matrica C koja zadovoljava jednakost $A=BC$ je:

$$C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-3&1\end{bmatrix}$$

Jedna od faktorizacija punog ranga matrice A je:

$$A=\begin{bmatrix}2&-1\\4&-1\\-2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-3&1\end{bmatrix}.$$

d) Opisati fundamentalne potprostore (baze) matrice A i njihove dimenzije.

(10 poena)

Prostor kolona je jedan od fundamentalnih potprostora:

$$u_1=\begin{bmatrix}2\\4\\-2\end{bmatrix},u_2=\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix}$$

$\mathcal{R}(A)=\mathcal{R}(B)=\mathcal{L}(u_1,u_2)\in R^2, dim(\mathcal{R}(A))=2$

Prostor vrsta je jedan od fundamentalnih potprostora:

$$u_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},u_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1/3\end{bmatrix}$$

$\mathcal{R}(A^T)=\mathcal{R}(C^T)=\mathcal{L}(u_1,u_2)\in R^2, dim(\mathcal{R}(A^T))=2$

Desno jezgro je vektor V koji kada mnozi matricu A sa njene desne strane daje nula vektor.

$$V=\begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}$$

$\mathcal{N}(A)=\mathcal{L}(V), dim(\mathcal{N}(A))=1$

Zadatak 2. Naći LDL faktorizaciju matrice A. (bilo kojim postupkom koji odaberete)

a) $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&2&3&3\\1&2&3&4\end{bmatrix}.$

(5 poena)

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&2&3&3\\1&2&3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&2&2\\0&1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

b) $A=\begin{bmatrix}a&a&a&a\\a&b&b&b\\a&b&c&c\\a&b&c&d\end{bmatrix},\quad a,b,c,d\neq 0$ **su međusobno različiti realni brojevi.**

(5 poena)

$$A=\begin{bmatrix}a&a&a&a\\a&b&b&b\\a&b&c&c\\a&b&c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&a&a&a\\0&b-a&b-a&b-a\\0&b-a&c-a&c-a\\0&b-a&c-a&d-a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&a&a&a\\0&b-a&b-a&b-a\\0&0&c-b&c-b\\0&0&c-b&d-b\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&a&a&a\\0&b-a&b-a&b-a\\0&0&c-b&c-b\\0&0&0&d-c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&0&0&0\\0&b-a&0&0\\0&0&c-b&0\\0&0&0&d-c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

1) Prvu vrstu matrice A pomnozimo sa -a i dodamo svakoj vrsti.

2) Prethodno dobijenu drugu vrstu matrice A pomnozimo sa -b+a i dodamo svakoj vrsti.

3) Prethodno dobijenu trecu vrstu matrice A pomnozimo sa -c+b i dodamo svakoj vrsti.

Zadatak 3. Data je trodijagonalna matrica T dimenzije $n\times n$. Odrediti broj operacija neophodnih za dobijanje njene LU faktorizacije bez izbora pivot elementa.

$$T=\begin{bmatrix}a_1&c_1&0&0&\dots&0&0\\b_1&a_2&c_2&0&\dots&0&0\\0&b_2&a_3&c_3&\dots&0&0\\&&\ddots&\ddots&\ddots&&\\0&0&\dots&&a_{n-2}&c_{n-2}&0\\0&0&\dots&&b_{n-2}&a_{n-1}&c_{n-1}\\0&0&\dots&&0&b_{n-1}&a_n\end{bmatrix}$$

(5 poena)

Na osnovu date matrice zakljucujemo da za svaki korak LU faktorizacije treba odrediti jedan element matrice koji je b_i/a_i,zatim pomnoziti sa $c_i(b_i/a_i)$ pa oduzeti $a_{i+1}-c_i(b_i/a_i)$ Vidimo da za svaki korak je slozenost 3.Iz toga sledi: $t(n)=\sum_{k=2}^{n}3=(n-1)3=3n-3$

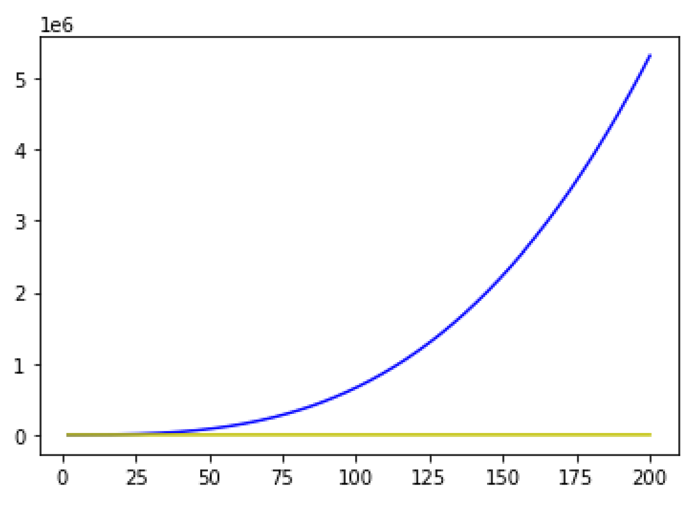
Ako je $f(n)$ broj operacija LU faktorizacije regularne matrice $A\in\mathcal{M}_{n\times n}$ i $t(n)$ broj operacija LU faktorizacije trodijagonalne matrice $T\in\mathcal{M}_{n\times n}$, napraviti grafik kojim se prikazuje odnos vrednosti funkcija za $n\in\{2,3,\dots,200\}$.

(5 poena)

In [5]:
```
import numpy as np
import matplotlib as mpl
import matplotlib.pyplot as plt

n=np.arange(2,201)
x=(2/3)*n**3-(1/2)*n**2-n/6
y=3*n-3
plt.plot(n,x,'b')
plt.plot(n,y,'y')
```

Out[5]:
```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x1d9f3543f70>]
```



Zadatak 4. Data je pojasna matrica $T(2,2)$ dimenzije $n\times n$. Izvesti formule za LU faktorizaciju (bez izbora pivot elementa) matrice T.

$$T=\begin{bmatrix}a_1&d_1&e_1&0&\dots&0&0\\b_1&a_2&d_2&e_2&\dots&0&0\\c_1&b_2&a_3&d_3&\dots&0&0\\&&\ddots&\ddots&\ddots&&\\0&0&\dots&&a_{n-2}&d_{n-2}&e_{n-2}\\0&0&\dots&&b_{n-2}&a_{n-1}&d_{n-1}\\0&0&\dots&&c_{n-2}&b_{n-1}&a_n\end{bmatrix}$$

Odrediti broj operacija neophodnih za dobijanje ove LU faktorizacije.

(10 poena)

Kako je u ovoj matrici pojas širine 2, potrebno je u svakom koraku odrediti vrednosti elemenata $\frac{b_i}{a_i}$ i $\frac{c_i}{a_i}$.

Nakon ovoga, sledi množenje ovih vrednosti sa d_i i e_i, tj. dobijaju se sledeće vrednosti: $d_i\frac{b_i}{a_i}$, $d_i\frac{c_i}{a_i}$, $e_i\frac{b_i}{a_i}$, $e_i\frac{c_i}{a_i}$.

Naredni korak je oduzimanje ovako dobijenih vrednosti od elemenata $a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}, a_{i+2}$.

Dakle, u svakom od koraka potrebno je izvršiti 2 operacije deljenja, 4 operacije množenja i 4 operacija sabiranja, što je ukupno 10 operacija.

Ukupan broj operacija je $3+(n-2)*10=3+10n-20=10n-17$.