ЗАДАЧА №2

Пусть:

NC — число компонент;

k — число групп;

n — число векторов;

$S = \{s_i \mid s_i = \{s_{i,1}, \dots, s_{i,NC}\} \in R > 0, i \in \{1, \dots, n\}\}$ —множество векторов;

$W = \{w_1, \dots, w_{NC}\}$, $\sum_{l \in \{1,\dots,NC\}} w_l = 1$ — веса

Задача:

Разбить множество векторов S на k групп.

Критерий оптимизации:

Минимизация взвешенной суммы относительных отклонений суммарных характеристик групп от идеальных значений по координатам.

Неизвестные:

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{вектор } s_i \text{ попал в группу } j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \forall j \in \{1, \dots, k\}$$

$\tilde{y}_l = \frac{\sum_{i \in \{1,\dots,n\}} s_{i,l}}{k}$, $\forall l \in \{1, \dots, NC\}$ — идеальное значение для группы по компоненте

$$y_{l,j} = \sum_{i \in \{1,\dots,n\}} x_{i,j} \cdot s_{i,l}, \forall j \in \{1, \dots, k\}, \forall l \in \{1, \dots, NC\}$$

$$\sum_{l \in \{1,\dots,NC\}} w_l \sum_{j \in \{1,\dots,k\}} \left| 1 - \frac{y_{l,j}}{\tilde{y}_l} \right| \to min$$

Введем такую Δ, что:

$$\Delta \in R,$$

$$\sum_{l \in \{1,\dots,NC\}} w_l \sum_{j \in \{1,\dots,k\}} \Delta_{l,j} \to min$$

$$\Delta_{l,j} \geq \left|1 - \frac{y_{l,j}}{\tilde{y}_l}\right| \qquad \forall l \in \{1, \dots, NC\}, \ \forall j \in \{1, \dots, k\}$$

$$\sum_{j \in \{1,\dots,k\}} x_{i,j} = 1, \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \ \forall j \in \{1, \dots, k\} \tag{1}$$

$$x_{i,j} \in \{0,1\}$$

$$\Delta_{l,j} + \frac{y_{l,j}}{\tilde{y}_l} \geq 1 \qquad \forall l \in \{1, \dots, NC\}, \ \forall j \in \{1, \dots, k\} \tag{2}$$

$$-\Delta_{l,j} + \frac{y_{l,j}}{\tilde{y}_l} \leq 1 \qquad \forall l \in \{1, \dots, NC\}, \ \forall j \in \{1, \dots, k\} \tag{3}$$

ЗАДАЧА №3

Пусть:

NC — число компонент;

k — число групп;

n — число векторов;

$S = \{s_i \mid s_i = \{s_{i,j,1}, \dots, s_{i,j,NC}\}, i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, k\}\}$—множество векторов;

$W = \{w_1, \dots, w_{NC}\}$, $\sum_{l \in \{1,\dots,NC\}} w_l = 1$ — веса.

Задача:

Разбить множество векторов S на k групп.

Критерий оптимизации:

Минимизация взвешенной суммы относительных отклонений суммарных характеристик групп от идеальных значений по координатам для каждой группы.

Неизвестные:

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{вектор } s_i \text{ попал в группу } j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \forall j \in \{1, \dots, k\}$$

$\tilde{y}_{l,j} = \frac{\sum_{i \in \{1,\dots,n\}} s_{i,j,l}}{k}, \forall j \in \{1, \dots, k\}$, $\forall l \in \{1, \dots, NC\}$ — идеальное значение;

$$y_{l,j} = \sum_{i \in \{1,\dots,n\}} x_{i,j} \cdot s_{i,j,l} \, , \forall j \in \{1, \dots, k\}, \forall l \in \{1, \dots, NC\}$$

$$\sum_{l \in \{1,\dots,NC\}} w_l \sum_{j \in \{1,\dots,k\}} \left| 1 - \frac{y_{l,j}}{\tilde{y}_{l,j}} \right| \to min$$

Введем такую Δ, что:

$$\Delta \in R,$$

$$\sum_{l \in \{1,\dots,NC\}} w_l \sum_{j \in \{1,\dots,k\}} \Delta_{l,j} \to min$$

$$\Delta_{l,j} \geq \left|1 - \frac{y_{l,j}}{\tilde{y}_{l,j}}\right| \qquad \forall l \in \{1, \dots, NC\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, k\}$$

$$\sum_{j \in \{1,\dots,k\}} x_{i,j} = 1, \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, k\} \tag{1}$$

$$x_{i,j} \in \{0,1\}$$

$$\Delta_{l,j} + \frac{y_{l,j}}{\tilde{y}_{l,j}} \geq 1 \qquad \forall l \in \{1, \dots, NC\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, k\} \tag{2}$$

$$-\Delta_{l,j} + \frac{y_{l,j}}{\tilde{y}_{l,j}} \leq 1 \qquad \forall l \in \{1, \dots, NC\}, \quad \forall j \in \{1, \dots, k\} \tag{3}$$