



Лекция 8

Байесовские методы



1. Оптимальное байесовское правило и генеративные модели
2. Методы восстановления плотности и наивный байесовский классификатор
3. Байесовский подход в машинном обучении

Часть 1

Оптимальное байесовское правило



Вероятностное описание моделей



Вероятностное описание наиболее удобно для алгоритмов машинного обучения.

- Все модели описаны единым языком (см. Bishop Model Based Machine Learning)
- Мощный и выразительный язык теории вероятностей
- Позволяет строить модели, которые можно исследовать вероятностными методами



Делаем банковский скоринг.

$p(y | x)$ — вероятность получить ответ y для объекта x , моделируем машинным обучением.

К нам пришли множество клиентов $X_{clients}$

Как посчитать возможные убытки?

$$RISK = \sum_{x \in X_{clients}} \lambda_{x,y} p(y | x)$$

Можно заранее рассчитать с помощью стохастического моделирования!

Байесовский подход



Считаем, что наши объекты и ответы описываются распределением $p(x, y)$

Обучающая выборка взята **случайно и независимо** из этого распределения

$p(y)$ — **априорная** вероятность класса y

$p(x | y)$ — **правдоподобие** объекта x

$p(y | x)$ — **апостериорная** вероятность класса y

$p(x)$ — **обоснованность (evidence)** объекта x

A priori (латынь) — от предшествующего

A posteriori (латынь) — из последующего



На самом деле достаточно знать только совместное распределение!

Правило суммирования (sum rule):

$$p(x) = \int p(x, y) dy, \quad p(y) = \int p(x, y) dx$$

$$p(y | x) = \frac{p(x | y)p(y)}{p(x)} = \frac{p(x, y)}{\int p(x, y) dx}$$

Формула Байеса



По определению условной вероятности

$$p(y | x) = \frac{p(x, y)}{p(x)}, p(x | y) = \frac{p(x, y)}{p(y)},$$

Если величины независимы, то $p(x, y) = p(x)p(y)$

$$p(y | x) = \frac{p(x | y)p(y)}{p(x)} = \frac{p(x | y)p(y)}{\int p(x | y)p(y)dy} \text{ — формула Байеса}$$



Источник: en.wikipedia.org/wiki/Thomas_Bayes

Функционал среднего риска



Функция потерь $L(a, x, y)$ — неотрицательная функция, показывающая величину ошибки алгоритма a на объекте x с ответом y .

Функционал среднего риска — мат. ожидание функции потерь

$$R(a) = \int \int L(a, x, y) p(x, y) dx dy$$

$$a^* = \operatorname{argmin} R(a)$$



Какая связь с эмпирическим риском?

Связь с эмпирическим риском



Было:

$$Q(a, X, Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L(a, x_i, y_i), x_i \in X, y_i \in Y$$

$$a^* = \operatorname{argmin} Q(a, X_{train}, Y_{train})$$

Стало:

$$R(a) = \int \int L(a, x, y) p(x, y) dx dy$$

$$a^* = \operatorname{argmin} R(a)$$

Эмпирический риск это просто наша стохастическая оценка среднего риска, так как мы не знаем истинного распределения!



Почему просто не оптимизировать всегда средний риск?

Почему сложно оптимизировать средний риск



- Мы не знаем аналитический вид совместного распределения!
- Если бы знали, то мы бы учились брать интегралы, а не занимались машинным обучением :)
- Если бы знали, то машинное обучение было бы решенной задачей.

? Как же быть?

Как же быть?



- На самом деле, для оптимальной классификации совместное распределение знать и не нужно, достаточно только знать **апостериорное распределение** $p(y | x)$
- Но мы его тоже не знаем аналитически! Значит у нас возникает задача **оценки плотности распределения**
- Для регрессии есть аналогичный подход, разберите дома

Оптимальный байесовский классификатор



Классификация на Y классов, функция потерь $L(y, \hat{y}) = [y \neq \hat{y}]$

$$R(a) = \int \int L(a, x, y) p(x, y) dx dy = \sum_{s=1}^Y \int L(y, \hat{y}) p(x, y) dx$$

По правилу суммирования:

$$\sum_{l=1}^Y \int L(y, \hat{y}) p(x, y) dx + \int p(x, \hat{y}) dx = 1$$

$$R(a) = 1 - \int p(x, \hat{y}) dx \geq 1 - \int \max_{y \in Y} p(x, y) = R(a^*)$$

Оптимальный Байесовский классификатор:

$$a^*(x) = \operatorname{argmax}_{y \in Y} p(x, y) = \operatorname{argmax}_{y \in Y} p(y | x) p(x) = \operatorname{argmax}_{y \in Y} p(y | x)$$

Maximum a posteriori (MAP) классификатор

Типы моделей в машинном обучении



Алгоритм $a(x)$ будем называть:

1. Генеративной вероятностной моделью, если он моделирует **совместное распределение** $p(x, y)$
2. Дискриминативной вероятностной моделью, если он моделирует **апостериорное распределение** $p(y | x)$
3. Дискриминативной моделью, если он моделирует только функцию $y = f(x)$



Приведите примеры



Дискриминативные вероятностные модели —
логистическая регрессия

Дискриминативные модели — KNN, SVM, деревья

Генеративные вероятностные модели — еще не
проходили, на этой лекции будет наивный
байесовский классификатор!

? Какие плюсы и минусы дискриминативных и
генеративных моделей?

Плюсы и минусы



$p(x, y) = p(y | x)p(x)$, разница, что генеративные помимо $p(y | x)$ моделируют $p(x)$

Плюсы дискриминативных моделей:

- **Намного** проще учить (что проще, научить модель отличать Ван Гога от Дега или научиться отличать, но еще уметь рисовать картину каждого художника?)
- Из-за этого, как правило, в типовых задачах работают лучше

Плюсы генеративных моделей:

- Более общие
- Легко работают с пропущенными значениями признаков
- Легко находить выбросы
- Способны **генерировать новые объекты**



Зачем генерировать объекты?

Зачем генерировать объекты?



- Это весело! (medium.com/coinmonks/celebrity-face-generation-using-gans-tensorflow-implementation-eaa2001eef86, thispersondoesnotexist.com)
- Получать объекты с нужными свойствами (например, молекулы, которые борются с определенными болезнями)
- Для датасета для другой модели
- Для отладки модели

Резюме первой части



- Вероятностное описание моделей позволяет более глубоко их исследовать.
- Мы должны оптимизировать средний риск, но из-за того, что у нас нету совместного распределения, мы считаем эмпирический.
- Оптимальный классификатор этот тот, который возвращает класс с наибольшей вероятностью $p(y | x)$ (регрессор смотрим дома)
- Бывают генеративные и дискриминативные модели. Генеративные моделируют $p(x)$, поэтому позволяют генерировать новые объекты

Часть 2

Методы восстановления плотности

Наивный байесовский классификатор



Оптимальный байесовский классификатор



Оптимальный Байесовский классификатор:

$$a^*(x) = \operatorname{argmax}_{y \in Y} p(y | x)$$

Аналитически не знаем, нужно сделать оценку
«Насколько вероятно, что целевая переменная
равна классу y при условии, что этот объект имеет
вектор весов x »

Считаем такую вероятность **по обучающей
выборке!**



Удобно ли считать такую вероятность напрямую?

Преобразовываем оптимальное байесовское правило



$$p(y | x) = \frac{p(x | y)p(y)}{p(x)}$$

$$a^*(x) = \operatorname{argmax}_{y \in Y} p(y | x) = \operatorname{argmax}_{y \in Y} \frac{p(x | y)p(y)}{p(x)} = \operatorname{argmax}_{y \in Y} p(x | y)p(y)$$

Вот так уже проще!

«Насколько вероятно, что этот объект имеет **вектор** весов x при условии, что целевая переменная равна классу y »



Как оценить $p(y)$?

Как оценить $p(y)$



$p(y)$ это априорная вероятность понаблюдать объект из класса y

С какой вероятностью объект принадлежит классу y , если мы сами объект даже не видели?

Можно оценить как **долю** объектов из выборки.

Смысл формулы оптимального байесовского классификатора



$$a^*(x) = \operatorname{argmax}_{y \in Y} p(y | x) = \operatorname{argmax}_{y \in Y} p(x | y)p(y)$$

- $p(x | y)$ — насколько наш объект x похож на объекты из класса y , которые мы видели на обучении.
- $p(y)$ — насколько этот класс популярен

? Зачем тогда вообще нужен $p(y)$? Почему бы не брать просто $\operatorname{argmax}_{y \in Y} p(x | y)$

Потому что снова переобучение



$$a^*(x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} p(y | x) = \underset{y \in Y}{\operatorname{argmax}} p(x | y)p(y)$$

- $p(x | y)$ — насколько наш объект x похож на объекты из класса y , которые мы видели на обучении. Учимся оценивать далее
- $p(y)$ — позволяет уменьшить переобучение, то есть **регуляризация**. Уже умеем оценивать через долю класса





Разбираемся, как оценить $p(x | y)$

1. Непараметрический — смотрим, какой процент точек из обучающей выборки лежит в окрестности оцениваемого значения.
2. Параметрический — предполагаем, что наше распределение из параметрического семейства. Настраиваем параметры распределения по обучающей выборке.
3. Восстановление из смеси распределений — предполагаем, что наше распределение смесь параметрических распределений.

На этой лекции обсудим первые два варианта.

Непараметрическое восстановление плотности



Хотим оценить $p(x | y)$ — насколько вероятно, что объект класса y принимает значение признака x (функция от x)

Для простоты считаем, что у нас один признак.

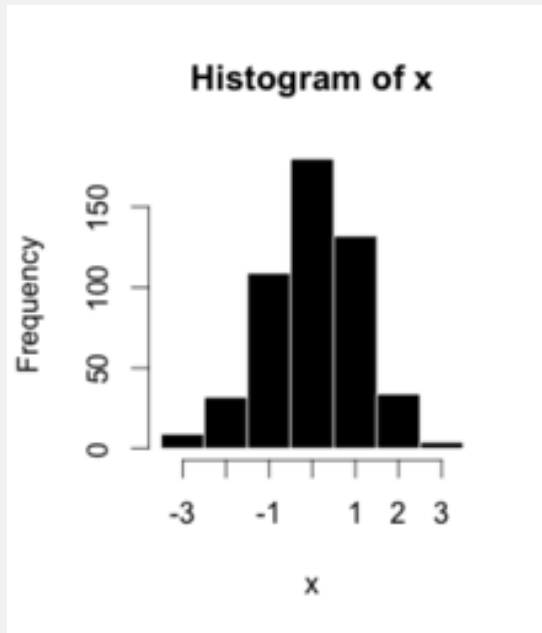
Основная идея — посмотрим, сколько объектов **на обучающей выборке** из класса y принимает такое значение или близкое.

Категориальный признак



Если признак категориальный, то просто строим гистограмму!

$p(x|y)$ — доля объектов класса y , у которые признак = x



Источник: en.wikipedia.org/wiki/Histogram

А если вещественный?

А если вещественный?



Точно так же, как и раньше, только дискретизируем вещественный признак с помощью окна ширины h , а потом считаем долю точек класса, которые попали в это окно!

? Что в таком подходе может не устраивать?

Хотим гладкую плотность



Такая плотность будет кусочно-постоянной!

$$p(x|y) = \frac{1}{2Nh} \sum_{i=1}^N (|x - x_i| < h)[y_i = y]$$

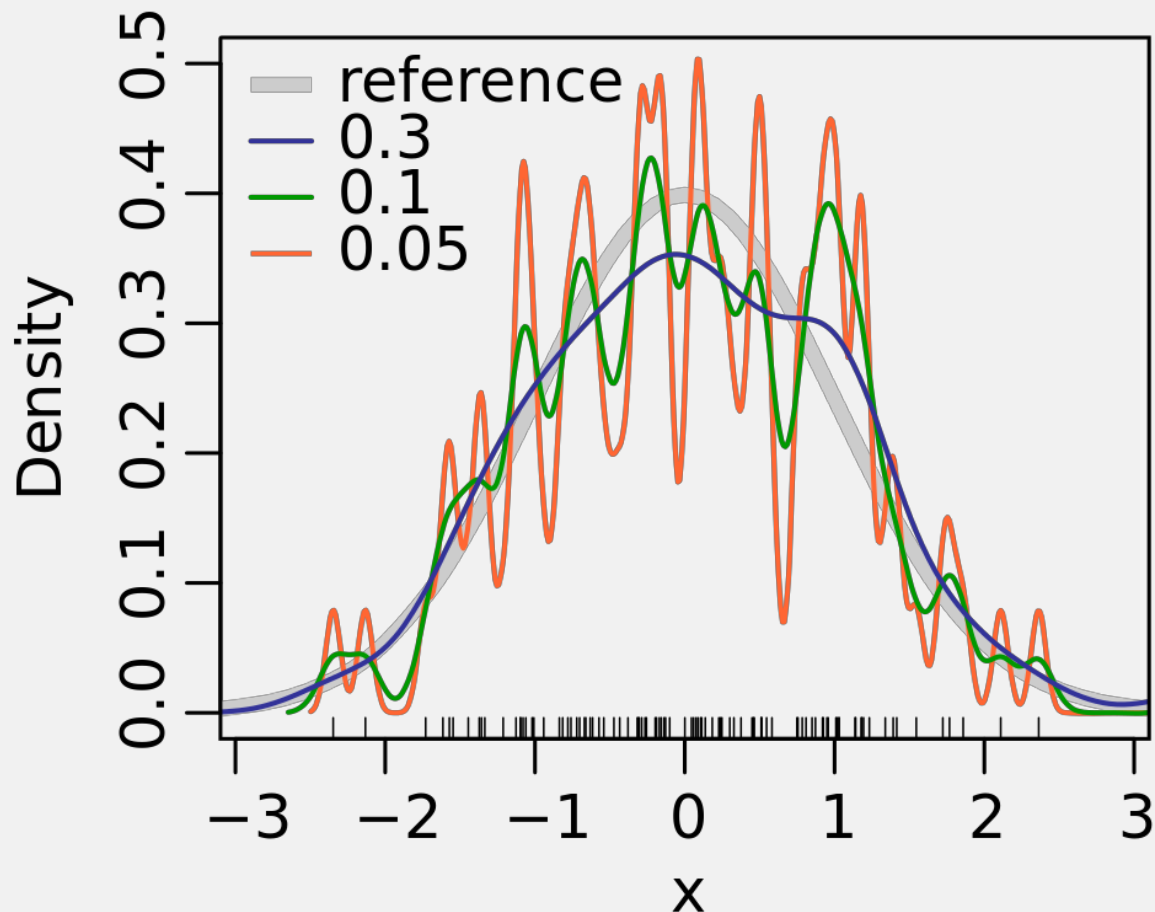
Можно использовать метод парзеновского окна:

$$p(x|y) = \frac{1}{Nh} \sum_{i=1}^N K\left(\frac{x - x_i}{h}\right)[y_i = y]$$

где K - четная нормированная функция, которую называют ядром.

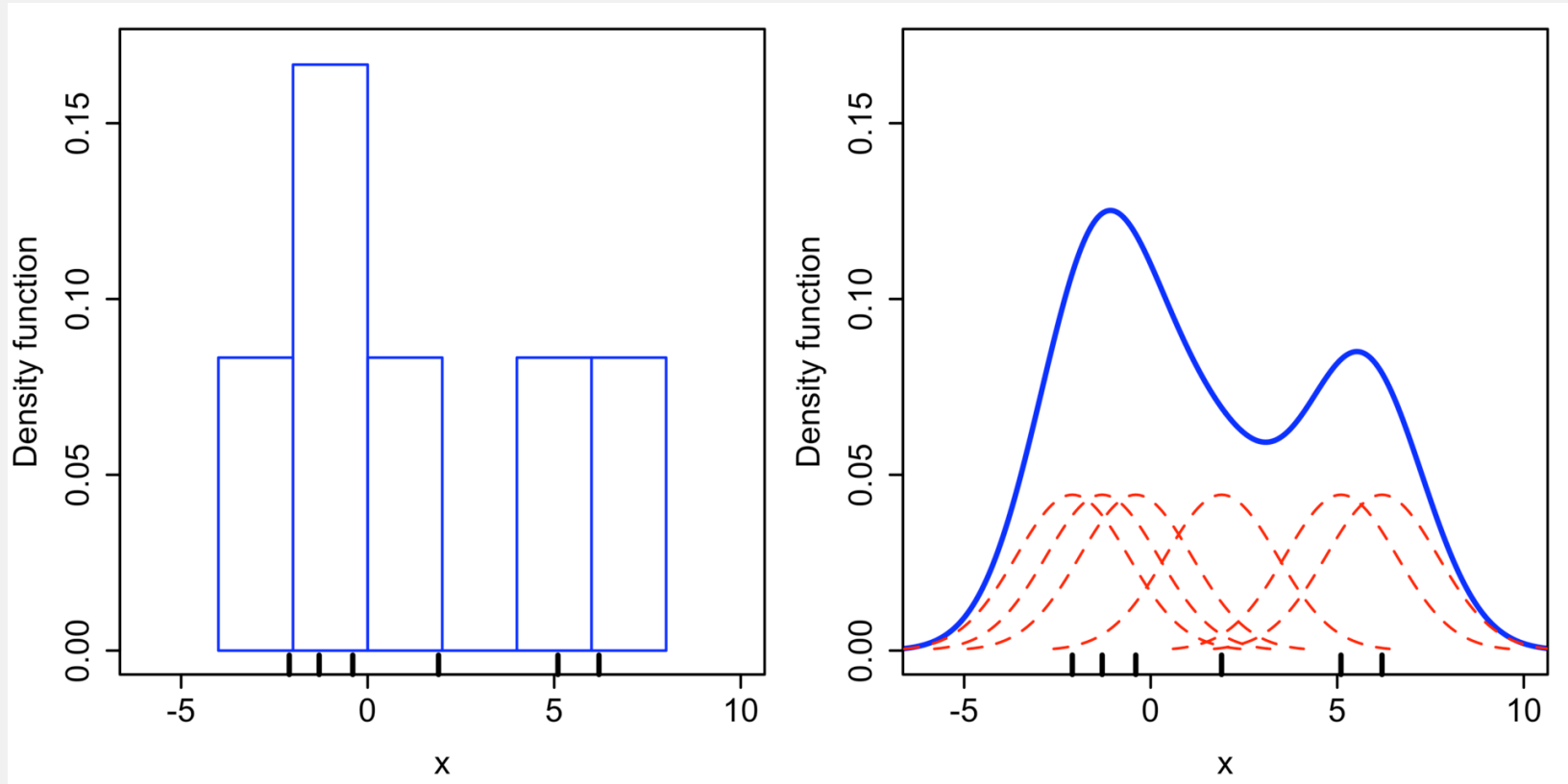
Например, Гауссовское — $K(r) = (2\pi)^{-0.5} \exp(-\frac{1}{2}r^2)$

Пример



Источник: en.wikipedia.org/wiki/Kernel_density_estimation

Пример



Источник: en.wikipedia.org/wiki/Kernel_density_estimation

А многомерно так можно?



Конечно! Вместо:

$$p(x | y) = \frac{1}{Nh} \sum_{i=1}^N K\left(\frac{x - x_i}{h}\right) [y_i = y]$$

Делай:

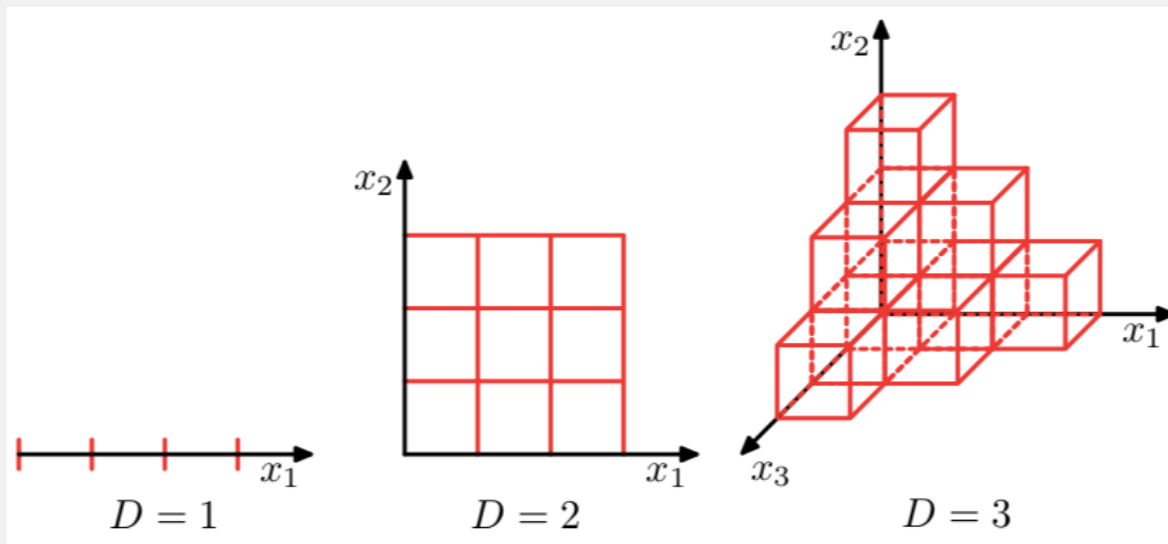
$$p(x | y) = \frac{1}{Nh} \sum_{i=1}^N K\left(\frac{\rho(x, x_i)}{h}\right) [y_i = y], \text{ где } \rho$$

метрика в многомерном пространстве!

?

В чем может быть проблема?

Поклятие размерности!



Источник: Bishop

Все тоже самое, что в методе ближайшего соседа!



Можно ли посчитать многомерную плотность с D измерениями, восстанавливая D раз одномерную?

Вспоминаем, что работаем с векторами



Задача: оценить $p(x | y)$, где x **вектор** признаков.

2 варианта восстановить плотность **многомерного** распределения:

- Восстанавливать в лоб многомерную плотность (проклятие размерности)
- Перейти от многомерной плотности к одномерным

$$p(x | y) = \prod_{j=1}^D p(x_j | y), \text{ где } D \text{ — число признаков}$$

Предположение алгоритма наивного байеса — признаки независимы **при условии целевой переменной**

Параметрическое восстановление плотности



Хотим оценить $p(x | y)$ — насколько вероятно, что объект класса y принимает значение признака x (функция от x)

Для простоты считаем, что у нас один признак.

Основная идея — предположим, что наше $p(x | y)$ лежит в каком-то **параметрическом семействе** распределений $p(x | y, \theta)$, где θ — параметры, а затем находим параметры, используя **метод максимума правдоподобия**.

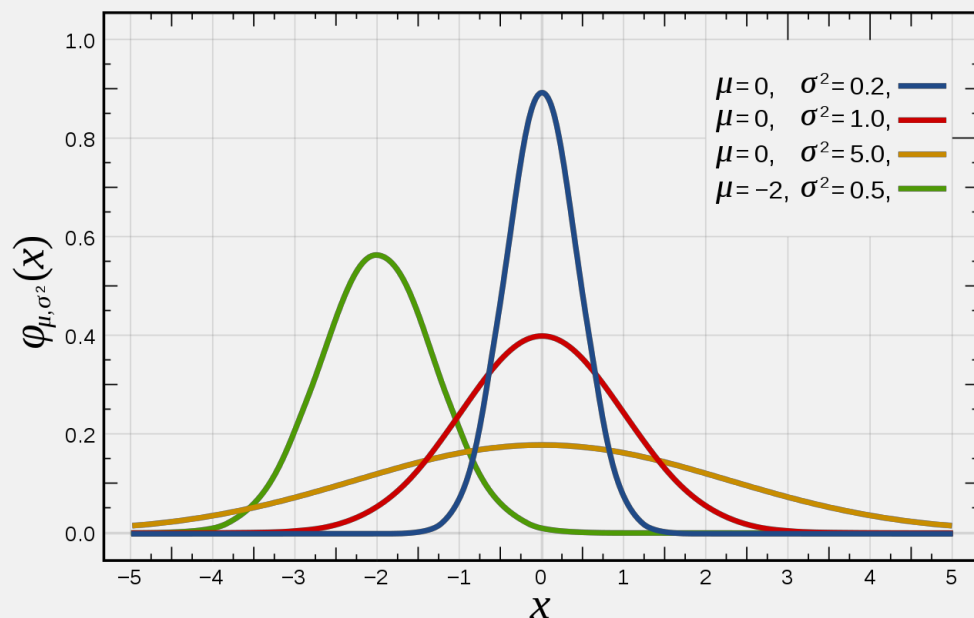
? Какие параметры у одномерного нормального распределения?

Параметры нормального распределения



Среднее μ и стандартное отклонение σ

$$p(x | y, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp\left(-\frac{(x - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right)$$



Источник: en.wikipedia.org/wiki/Normal_distribution

Метод максимума правдоподобия



Правильные те параметры, при которых
пронаблюдать такую выборку максимально
правдоподобно!

Случайная величина η — число луж во дворе

Параметр θ — (был дождь, поливали двор, ничего
не было)

Выходите на улицу видите **выборку** — кругом
лужи!

Чему **максимально вероятно** равна θ ?

Метод максимума правдоподобия



Максимально вероятно, что «был дождь»

Пишем функцию правдоподобия, то есть вероятность пронаблюдать выборку, если все объекты берутся независимо:

$$L(\theta) = p(X | \theta) = \prod_{i=1}^N p(x_i | \theta)$$

С суммой, как правило, удобнее работать. (Почему?)

$$\log L(\theta) = \sum_{i=1}^N \log p(x_i | \theta)$$

Правильные параметры те, которые максимизируют $L(\theta)$

Пример



Идем на пересдачу. Преподаватель может поставить сколько угодно баллов (вещественное число) в зависимости от его «лояльности»



Как понять, к какому преподавателю идти?

Пример

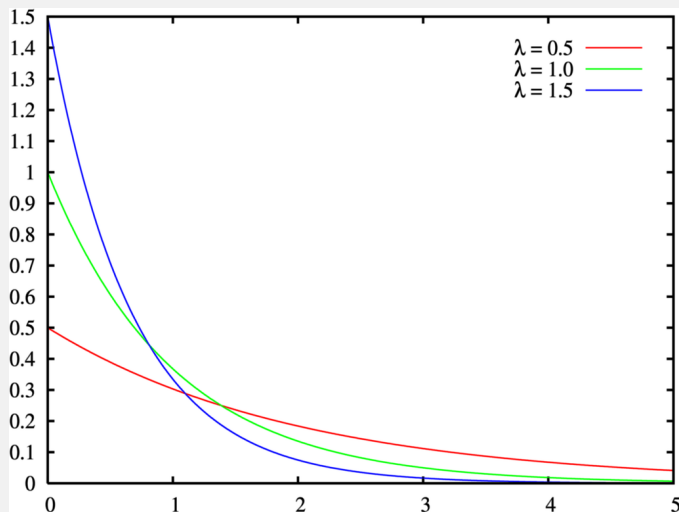


Наша выборка — баллы других студентов.

Для k преподавателя знаем $X_k = \{x_1^k, x_2^k \dots x_{N_k}^k\}$

баллы, которые он поставил N_k студентам

Считаем, что x_i^k случайная величина из экспоненциального распределение



$$p(x | \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$$
$$p(x | \lambda) = 0, x < 0$$

$$E[x] = \frac{1}{\lambda}$$

Источник:

en.wikipedia.org/wiki/Exponential_distribution

Пример



Нужно просто оценить параметр λ_k по выборке из прошлых оценок преподавателя!

$$L(\lambda_k) = p(X_k | \lambda_k) = \prod_{i=1}^N p(x_i | \lambda_k), \text{ где } p(x_i | \lambda_k) = \lambda_k e^{-\lambda_k x_i}$$

$$\log L(\lambda_k) = \sum_{i=1}^N \log p(x_i | \lambda_k) = \sum_{i=1}^N (\log \lambda_k - \lambda_k x_i) = N \log \lambda_k - \lambda_k \sum_{i=1}^N x_i$$

$$\frac{\partial \log L(\lambda_k)}{\partial \lambda_k} = \frac{N}{\lambda_k} - \sum_{i=1}^N x_i = 0$$

$$\lambda_k = \frac{N_k}{\sum_{i=1}^N x_i}, E[x_k] = \frac{1}{\lambda_k} = \frac{\sum_{i=1}^{N_k} x_i}{N_k}$$

Просто средние баллы, которые поставил преподаватель!

Выбираем того, у кого это среднее максимально.

Пример



Решив эту задачу, мы тем самым восстановили плотность!

Мы нашли параметр λ , то есть теперь, мы можем посчитать плотность вероятности **в любой точке**

Для классификации для каждого из класса считаем $p(x | y_k, \lambda_k) = \lambda_k e^{-\lambda_k x}$

Потом применяем оптимальное байесовское правило:

$$a^*(x) = \operatorname{argmax}_k p(x | y_k) p(y_k) = \operatorname{argmax}_k \lambda_k e^{-\lambda_k x} p(y_k)$$

ММП для нормального распределения



$$L(\mu, \sigma) = p(X | \mu, \sigma) = \prod_{i=1}^N p(x_i | \mu, \sigma), \text{ где } p(x_i | \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\log L(\mu, \sigma) = \sum_{i=1}^N \log p(x_i | \mu, \sigma) = -N \log \sigma - N \log \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2$$

$$\frac{\partial \log L(\mu, \sigma)}{\partial \mu} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu) = N\mu - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N (x_i) = 0$$

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$\frac{\partial \log L(\mu, \sigma)}{\partial \sigma} = -\frac{N}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 = 0$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(x_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i\right)^2$$

Потом аналогично $a^*(x) = \underset{k}{\operatorname{argmax}} p(y_k) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} \exp\left(-\frac{(x - \mu_k)^2}{2\sigma_k^2}\right)$

Пример



Проводим серию испытаний — подбрасываем **нечестную** монетку.

Случайная величина $y = 1$ — орел, $y = 0$ — решка.



Подбросили N раз. Как оценить вероятность выпадения орла?

Пример



$$L(\theta) = p(Y | \theta) = \prod_{i=1}^N p(y_i | \theta), \text{ где}$$

$$p(y_i | \theta) = \theta, \quad \text{если } y_i = 1$$

$$p(y_i | \theta) = 1 - \theta, \text{ если } y_i = 0$$

Так как $[y_i = 1] \equiv y$ и $[y_i = 0] \equiv 1 - y$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^N \theta^{[y_i=1]} \cdot (1 - \theta)^{[y_i=0]} = \prod_{i=1}^N \theta^{y_i} \cdot (1 - \theta)^{1-y_i}$$

$$\log L(\theta) = \sum_{i=1}^N y_i \log \theta + (1 - y_i) \log(1 - \theta)$$



Ничего не напоминает?



Это же логлосс!

$$\log L(\theta) = \sum_{i=1}^N y_i \log \theta + (1 - y_i) \log(1 - \theta)$$

$$\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{\theta} - \frac{1 - y_i}{1 - \theta} = \sum_{i=1}^N \frac{y_i - \theta y_i - \theta + \theta y_i}{\theta(1 - \theta)} = 0$$

$$\sum_{i=1}^N (y_i - \theta) = \sum_{i=1}^N y_i - N\theta = 0$$

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N}, \text{ то есть просто процент орлов!}$$

Таким образом восстанавливаем плотность для булевых признаков.

$$a^*(x) = \underset{k}{\operatorname{argmax}} p(y_k) \theta^{[k=1]} (1 - \theta)^{[k=0]}$$

А многомерно для всех фичей так можно?



Конечно!

- Просто берем не одномерную плотность, а многомерную и точно так же с помощью ММП находим параметры.
- Или используем предположение алгоритма

наивного байеса
$$p(x | y) = \prod_{j=1}^D p(x_j | y)$$



Будут ли проблемы при параметрическом восстановлении многомерной плотности?

И тут проблема с большим число признаков



Да, будут.

Существуют гарантии на оптимальность метода максимального правдоподобия только для случая, когда $\frac{n}{d} \rightarrow \infty$

Если это не так, он может не сойтись к истинному значению, а в многомерных распределениях параметров больше.

Наивный байесовский классификатор



$$a^*(x) = \operatorname{argmax}_{y \in Y} p(y | x) = \operatorname{argmax}_{y \in Y} p(x | y)p(y)$$

$$p(x | y) = \prod_{j=1}^D p(x_j | y)$$

$$a^*(x) = \operatorname{argmax}_{y \in Y} p(y) \prod_{j=1}^D p(x_j | y)$$

Это все маленькие числа, когда мы перемножим много маленьких, то есть шанс выйти за машинную точность.

Но логарифм монотонная функция, так что прологарифмируем.

$$a^*(x) = \operatorname{argmax}_{y \in Y} [\log p(y) + \sum_{j=1}^D \log p(x_j | y)]$$

Теперь мы складываем отрицательные числа, что для машины сильно проще.

Наивный байесовский классификатор



$$a^*(x) = \operatorname{argmax}_{y \in Y} p(y) \prod_{j=1}^D p(x_j | y)$$
 Делаем классификатор спам / не спам.

Как признаки берем D бинарных признаков «имеется ли это слово в письме»

На обучении для каждой бинарной фичи считаем плотность, как для распределения Бернулли:

$p(x_j | y)$ — процент спамовских (класс S) / нормальных писем со словом x_j

Хотим посчитать предсказание для тестового письма.



Чему будет равно $p(y_{spam}) \prod_{j=1}^D p(x_j | y_{spam})$, если хотя бы одно слово из тестового письма не присутствовала в письмах со спамом?



Какими бы не были спамовскими другими слова, общая вероятность $p(x | y_{spam})$ при гипотезе условной независимости равна нулю!

При восстановлении плотности для категориальных признаков нужно проводить **сглаживание**

$$\theta_j = \frac{\sum_{i=1}^N [y_i \in S][x_{i,j} = 1]}{N_s} \quad \text{— доля спамовских}$$

документов встречалось слово j

$$\theta_j = \frac{\sum_{i=1}^N [y_i \in S][x_{i,j} = 1] + \alpha}{N_s + \alpha + \beta} \quad \text{— сглаживание Лапласа}$$

Считаем, что есть фейковые $\alpha + \beta$ документов, среди которых α спамовские

Почему вообще нужно сглаживание? Если в классе спама не было такого слова, значит вероятность 0 и все!

Потому что переобучение



Вспоминаем исходную задачу. Восстановление закона природы по **конечной** выборке. Задача по своей природе некорректно поставленная.

Ну вот не попалось нам на обучении спамовское письмо со словом «серобуромалиновый», но это не значит, что спамеры сознательно избегают этого слова.

Сглаживание — способ борьбы с переобучением, то есть своеобразная **регуляризация**



Можно ли подобрать α, β на обучающей выборке?

Пожалуйста, не надо



Нет, это **структурные параметры** алгоритма.
Вы уже на обучающей выборке посчитали, что слово «серобуромалиновый» **не встречается** в классе спам, понятное дело, если вы зарегуляризуете это с помощью α, β , то на обучении будет только хуже.

Настраивать только на валидации!

Совмещаем все вместе



Байесовский классификатор, основанный на оценке плотности.

1. Разбили обучающую выборку по классам
2. Оценили $p(y)$, как долю данного класса в обучающей выборке для каждого класса
3. Решили, как будем считать $p(x|y)$
 - A. Непараметрически
 - B. Параметрически
 - В лоб восстанавливаем многомерную плотность
 - Используем предположение условной независимости
4. Посчитали $p(x|y)$ и умножили на $p(y)$ для каждого класса
5. Взяли класс с максимальным значением
$$a^*(x) = \operatorname{argmax}_{y \in Y} p(y|x) = \operatorname{argmax}_{y \in Y} p(x|y)p(y)$$

Резюме второй части



- Научились оценивать компоненты для оптимального байесовского классификатора
 - A. $p(y)$ — априорную вероятность класса
 - B. $p(x | y)$ — правдоподобие объекта в классе
- Вспомнили, что такое метод максимума правдоподобия, научились им оценивать параметры распределений
- Вспомнили, что такое логлосс
- Узнали, что такое сглаживание и как оно помогает с переобучением

Часть 3

Байесовский подход в машинном обучении





- Сейчас одна из самых быстроразвивающихся областей машинного обучения
- Позволяет получить важные практические результаты (например, вариационный дропаут)
- Все параметры модели описываются вероятностными распределениями таким образом
- Использование формулы Байеса для оценки параметров θ нашей модели
- Расчет $p(y | x, \theta)$ для оптимального предсказания

Зачем нужна случайность



Мы хотим открыть закон природы, но мы работаем с эмпирическими данными!

- В данных могут быть аномальные объекты
- Мы не полностью описываем явление, выбирая какие-то признаки.
- В признаках будут ошибки
- Наша модель не полностью описывает данные

Это все объективное незнание! Закон природы есть, но мы не можем записать его точно.

Мы все это можем задать с помощью вероятностных распределений.

Смысл формулы Байеса



Оцениваем параметры модели.

$$p(\theta | X) = \frac{p(X | \theta)p(\theta)}{p(X)}$$

$p(\theta)$ — наши априорные представления о параметрах

Провели эксперименты (собрали выборку), посчитали:

$p(X | \theta)$ — насколько вероятно получить такие результаты экспериментов?

$p(X)$ — насколько вообще наши исходы вероятны?

Обновили наши представления о параметрах $p(\theta | X)$ по формуле Байеса

А если провели еще серию экспериментов?



Если провели еще эксперименты



Возьмите прошлую апостериорную вероятность, как априорную и снова пересчитайте по формуле Байеса!

$$p(\theta | X) = \frac{p(X | \theta)p(\theta)}{p(X)} = \frac{p(X | \theta)p(\theta)}{\int p(X | \theta)p(\theta)d\theta}$$

Таким образом мы вообще не теряем информации, просто итеративно обновляем распределение на параметры по формуле Байеса.

Очень удобно, когда, применив формула Байеса, мы остались в том же классе распределений, какое было априорным. Такие распределения называют **сопряженным**.



Подбрасываем монетку. Хотим посчитать вероятность выпадения орла. ММП дает ответ:

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N}$$

? А если мы подбросили 3 раза, и 3 раза выпала решка, мы считаем, что монета орлом вообще не может выпасть?



Мы провели очень мало испытаний, метод максимума правдоподобия может дать неадекватную оценку

Свойства ММП:

- Состоятельность (оценка сходится по вероятности к истинному значению)
- Асимптотическая нормальность (оценка распределена нормально)
- Асимптотическая эффективность (обладает наименьшей дисперсией среди всех состоятельных асимптотически нормальных оценок)

При $n \rightarrow \infty$



У нас тут BigData. И зачем все это?

У нас много параметров



Современные нейронные сети имеют миллионы параметров. Каждый из них надо оценить!

Тогда нужно, чтобы:

$\frac{n}{d} \rightarrow \infty$, а это даже для BigData неправда.

Но если параметров мало, а данных много, то байесовский подход **переходит в ММП**: апостериорное распределение ведет себе как дельта функция в точке максимума правдоподобия.

Пример



Подбрасываем монетку. Хотим посчитать вероятность выпадения орла. ММП дает ответ:

$$\theta_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N}$$

Хотим посчитать оценку формулой Байеса:

$$p(\theta | Y) = \frac{p(Y | \theta)p(\theta)}{p(Y)}$$

$$\theta_{MAP} = \operatorname{argmax}_{\theta} p(\theta | Y) = \operatorname{argmax}_{\theta} p(Y | \theta)p(\theta)$$

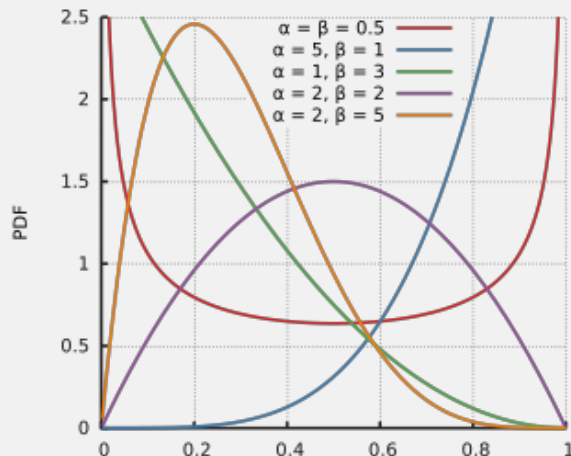
Пример



Выбираем априорное распределение (как мы заранее считаем, как часто она выпадет орлом)

$$p(\theta) = C \cdot \theta^{\alpha-1}(1 - \theta)^{\beta-1} \text{ — Бета распределение}$$

Почему именно это?



Источник: en.wikipedia.org/wiki/Beta_distribution

Пример



Потому что оно сопряжено с Бернулли!

$$\theta_{MAP} = \operatorname{argmax}_{\theta} p(Y|\theta)p(\theta) = \operatorname{argmax}_{\theta} \log p(Y|\theta) + \log p(\theta)$$

$$\log p(Y|\theta) = \sum_{i=1}^N y_i \log \theta + (1 - y_i) \log(1 - \theta)$$

$$\log p(\theta) = \log C + (\alpha - 1) \log \theta + (\beta - 1) \log(1 - \theta)$$

$$\theta_{MAP} = \operatorname{argmax}_{\theta} p(Y|\theta)p(\theta) = \operatorname{argmax}_{\theta} \log p(Y|\theta) + \log p(\theta)$$

$$\sum_{i=1}^N y_i \log \theta + (1 - y_i) \log(1 - \theta) + (\alpha - 1) \log \theta + (\beta - 1) \log(1 - \theta)$$

Производная по θ

$$\sum_{i=1}^N \frac{y_i}{\theta} - \frac{1 - y_i}{1 - \theta} + \frac{\alpha - 1}{\theta} - \frac{\beta - 1}{1 - \theta}$$

$$\theta_{MAP} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i + \alpha - 1}{N + \alpha + \beta - 2}$$

Ничего не напоминает?



Это и есть сглаживание



$$\theta_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N}, \theta_{MAP} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i + \alpha - 1}{N + \alpha + \beta - 2}$$

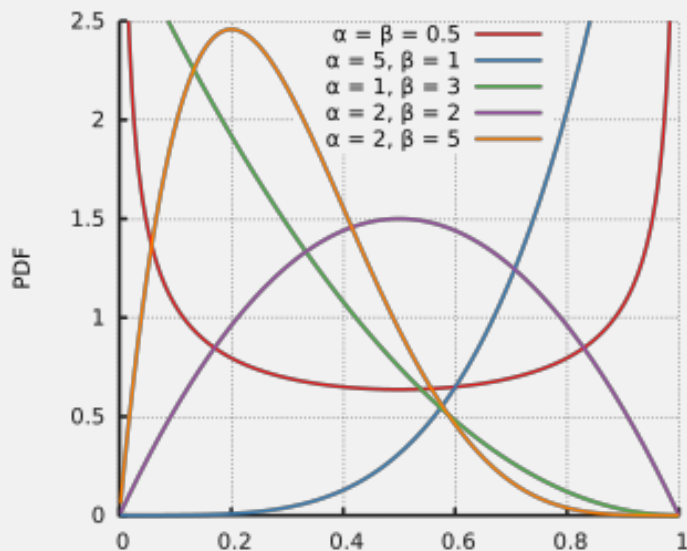
α, β — наши фейковые бросания!

Если взять $\alpha = 2, \beta = 2$

$$\theta_{MAP} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i + 1}{N + 2}$$

Таким образом, Байесовский подход нам позволяет напрямую **влиять на решение**, выбирая prior. Это **уменьшает переобучение**.

Это и есть сглаживание



Чем больше α , тем больше мы доверяем, что монетка падает орлом

Чем больше β , тем больше мы доверяем, что монетка падает решкой

Логистическая регрессия



Подбрасываем монетку, получаем серию из единиц и нулей.
Правдоподобие:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^N p(y_i | x, \theta)$$

Когда моделировали монетку, считали что:

$$p(y_i | x, \theta) = \theta, \quad \text{если } y_i = 1$$

$$p(y_i | x, \theta) = 1 - \theta, \quad \text{если } y_i = 0$$

То есть каждый бросок мы раньше никак не описывали, считали их все равнозначными.

Но мы то знаем, что у броска есть **признаки**, которые описывают бросок. Например, начальная скорость, стартовый угол, угловая скорость и т.д.

Тут то мы и переходим к задаче двухклассовой классификации!

Логистическая регрессия



Двухклассовая классификация.

Понаблюдали **обучающую выборку** из единиц и нулей, правдоподобие выборки:

$$\prod_{i=1}^N p(y | x, \theta)^{[y_i=1]} \cdot (1 - p(y | x, \theta))^{[y_i=0]} =$$

$$\prod_{i=1}^N p(y | x, \theta)^{y_i} \cdot (1 - p(y | x, \theta))^{1-y_i}$$

$$\log L(\theta) = \sum_{i=1}^N y_i \log p(y | x, \theta) + (1 - y_i) \log(1 - p(y | x, \theta))$$

Используем сигмоид, чтобы предки перевести в вероятность:

$$p(y | x, \theta) = \frac{1}{1 + \exp(-a(x, \theta))}$$

Если $a(x, \theta) = x^T \theta$, то получаем логистическую регрессию!

$\theta_{ML} = \operatorname{argmax} \log L(\theta)$, находим оптимум градиентным спуском



Хотим делать не ММП, а MAP, чтобы уменьшить переобучение.

$$\theta_{MAP} = \operatorname{argmax}_{\theta} L(\theta)p(\theta) = \operatorname{argmax}_{\theta} \log L(\theta) + \log p(\theta)$$

Пусть каждая компонента $p(\theta)$ распределена нормально с нулевым средним и все компоненты независимы и имеют одинаковую дисперсию σ^2 :

$$p(\theta) = \prod_{j=1}^D \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\theta_j^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\theta_{MAP} = \operatorname{argmax}_{\theta} \sum_{i=1}^N y_i \log p(y_i | x, \theta) + (1 - y_i) \log(1 - p(y_i | x, \theta)) - \sum_{j=1}^D C \frac{\theta_j^2}{\sigma^2}$$

$$\theta_{MAP} = \operatorname{argmax}_{\theta} \sum_{i=1}^N y_i \log p(y_i | x, \theta) + (1 - y_i) \log(1 - p(y_i | x, \theta)) - \frac{C}{\sigma^2} \cdot ||\theta||^2$$



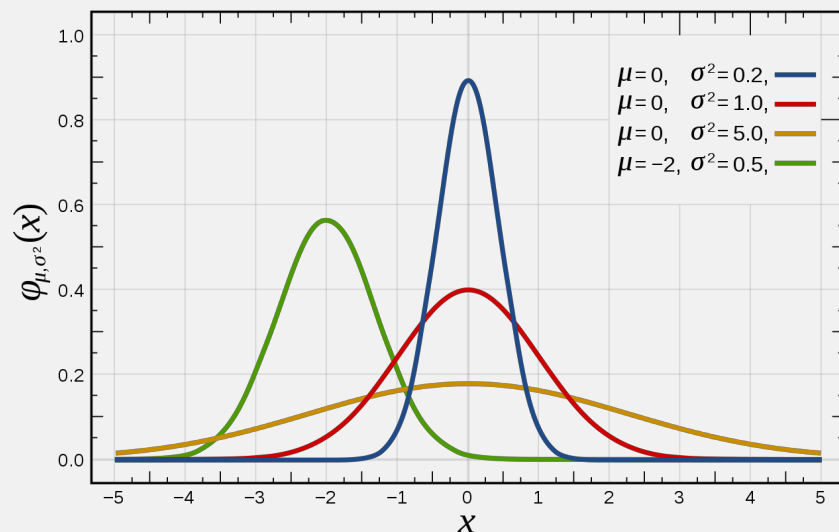
Берем с минусом, получаем logloss с l2 регуляризацией!

Какой смысл у дисперсии σ^2 ?

Регуляризация



Мы хотим, чтобы наши веса были маленькими, потому что большие веса — источник переобучения. Чем меньше сигма, тем уже нормальное распределение, то есть тем сильнее мы регуляризуем



А как тогда получить L1 регуляризацию?

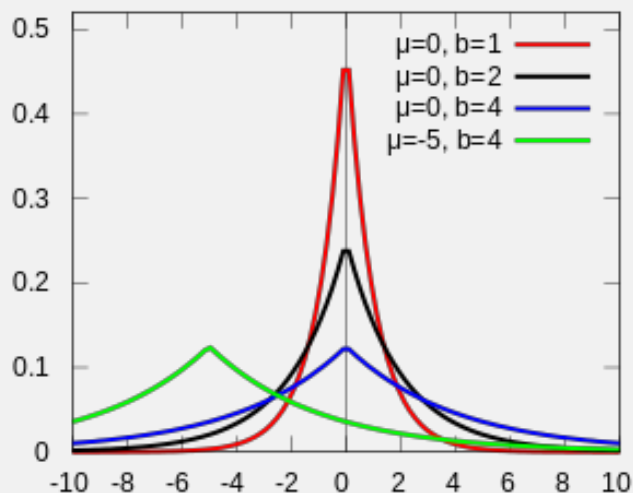
L1 регуляризация



Прodelайте дома аналогичную процедуру для распределения Лапласа

$$p(\theta) = \prod_{j=1}^D \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|\theta|}{b}\right)$$

Чем меньше b , тем уже распределение Лапласа, тем больше регуляризация



Источник: en.wikipedia.org/wiki/Laplace_distribution

Линейная регрессия



Для классификации мы считали правдоподобие распределения Бернулли, потому что наблюдали выборку из единиц и нулей. Для регрессии мы наблюдаем вещественное значение.

Предположим, что мы нашей моделью $a(x, \theta)$ можем восстанавливаем нашу переменную с точностью до нормального шума, то есть **каждый** y

Распределен нормально со средним в точке $a(x, \theta)$ и с какой-то дисперсией σ^2

$$p(y | x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(y - a(x, \theta))^2}{2\sigma^2}\right)$$

Правдоподобие:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^N p(y_i | x_i, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \prod_{i=1}^N \exp\left(-\frac{(y_i - a(x_i, \theta))^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\log L(\theta) = C - \sum_{i=1}^N (y_i - a(x_i, \theta))^2$$

Говорим, что $a(x, \theta) = x^T \theta$ — вот и линейная регрессия

$\theta_{ML} = \operatorname{argmax} \log L(\theta)$, находим оптимум аналитически или градиентным спуском

Как добавить сюда регуляризацию?



Регуляризация аналогично



Добавляем наши априорные знания на веса, переходим оценки ММП к MAP оценке.

$$\theta_{MAP} = \operatorname{argmax} L(\theta)p(\theta) = \operatorname{argmax} \log L(\theta) + \log p(\theta)$$

Если $p(\theta)$ нормально, то будет L2

Если $p(\theta)$ по Лапласу, то будет L1

Дома проведите выкладки!

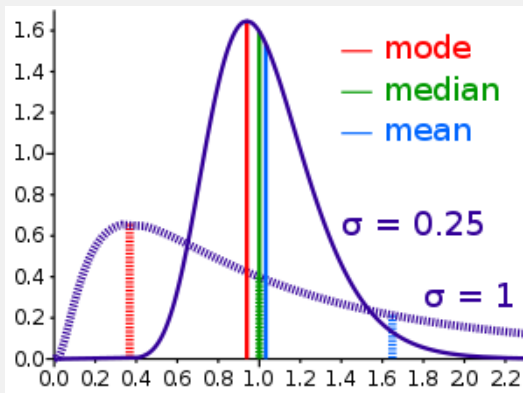


Пусть мы полностью выполнили Байесовскую процедуру:

$$p(\theta | X) = \frac{p(X | \theta)p(\theta)}{p(X)} = \frac{p(X | \theta)p(\theta)}{\int p(X | \theta)p(\theta)d\theta}$$

Как сделать предсказание?

Наивный вариант: взять моду этого распределения θ_{MAP} и подставить в формулу модели $p(y | x, \theta)$. Но мода распределения не всегда лучший вариант!



Источник:

[en.wikipedia.org/wiki/Mode_\(statistics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Mode_(statistics))



Чтобы не терять информацию, мы можем честно посчитать распределение $p(y | x)$ (которое требует оптимальный Байесовский классификатор)

$$p(y | x, X_{train}) = \int p(y | x, \theta) p(\theta | X_{train}) d\theta$$

Для линейной регрессии можно посчитать.

Посмотрите внимательно:

Это просто усреднение предсказаний модели с разными параметрами с весом, который равен вероятности параметров!

Это ансамбль моделей.

Байесовские методы на практике



Байесовский подход позволяет решать многие прикладные задачи:

- Метод релевантных векторов
- Вариационный дропаут
- Байесовский автокодировщик
- Байесовская оптимизация
- etc

Однако, в большинстве задач его применить тяжело:

- Никто не знает, как правильно задавать априорное распределение.
- Если $prior$ и $likelihood$ не сопряжены, то аналитически ничего не посчитается.
- Численные методы вычислительно трудоемкие
- Проще собрать больше данных/больше признаков, чем использовать полный байесовский вывод

Резюме третьей части



- Познакомились с байесовским подходом в машинном обучении
- Сравнили байесовский подход с принципом максимума правдоподобия
- Провели вероятностную интерпретацию для линейных моделей
- Научились делать оптимальное предсказание
- Байесовский подход позволяет решать практические задачи, однако полный байесовский вывод на практике применять очень тяжело



**Спасибо за
внимание!**