Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»
КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа № 2

Дисциплина	Математическая статистика.
Тема	Интервальные оценки.
Студент	Сиденко А.Г.
Группа	ИУ7-63Б
Оценка (баллы)	
Преподаватель	Власов П.А.

Москва, 2020 г.

1 Определение γ-доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины

Дана случайная величина X, закон распределения которой известен с точностью до неизвестного параметра θ.

Интервальной оценкой с коэффициентом доверия γ (γ-доверительной интервальной оценкой) параметра θ называют пару статистик $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$ таких, что

$$P\{\underline{\theta}(\vec{X}) < \theta < \overline{\theta}(\vec{X})\} = \gamma$$

Поскольку границы интервала являются случайными величинами, то для различных реализаций случайной выборки $\vec{X}$ статистики $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$ могут принимать различные значения.

Доверительным интервалом с коэффициентом доверия γ (γ-доверительным интервалом) называют интервал $(\underline{\theta}(\vec{x}), \overline{\theta}(\vec{x}))$, отвечающий выборочным значениям статистик $\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})$.

2 Формулы для вычисления границ γ- доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины

Формулы для вычисления границ γ- доверительного интервала для математического ожидания:

$$\underline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} - \frac{S(\vec{X})t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$$

$$\overline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X})t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$$

$\overline{X}$ – точечная оценка математического ожидания
$S^2(\vec{X})$ – точечная оценка дисперсии
n – объем выборки
γ – уровень доверия
$t_{\frac{1+\gamma}{2}}$ – квантили соответствующих уровней распределения Стьюдента с n - 1
Формулы для вычисления границ γ- доверительного интервала для дисперсии:

$$\underline{\sigma}(\vec{X}_n) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}}$$

$$\overline{\sigma}(\vec{X}_n) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}}$$

$S^2(\vec{X})$ – точечная оценка дисперсии

n – объем выборки

γ – уровень доверия

$h_{\frac{1+\gamma}{2}}$ – квантили соответствующих уровней распределения хи-квадрат с n - 1

3 Текст программы

```
function lab2()
    % Выборка объема n из генеральной совокупности X
    X = [
 -7.50, -6.61, -7.85, -7.72, -8.96, -6.55, -7.82, -6.55, -6.87, -5.95, ...
 -5.05, -4.56, -6.14, -6.83, -6.33, -7.67, -4.65, -6.30, -8.01, -5.88, ...
 -5.38, -7.06, -6.85, -5.53, -7.83, -5.89, -7.57, -6.76, -6.02, -4.62, ...
 -8.55, -6.37, -7.52, -5.78, -6.12, -8.82, -5.14, -7.68, -6.14, -6.48, ...
 -7.14, -6.25, -7.32, -5.51, -6.97, -7.86, -7.04, -6.24, -6.41, -6.00, ...
 -7.46, -6.00, -6.06, -5.94, -5.39, -5.06, -6.91, -8.06, -7.24, -6.42, ...
 -8.73, -6.20, -7.35, -5.90, -5.02, -5.93, -7.56, -7.49, -6.26, -6.06, ...
 -7.35, -5.10, -6.52, -7.97, -5.71, -7.62, -7.33, -5.31, -6.21, -7.28, ...
 -7.99, -4.65, -7.07, -7.31, -7.72, -5.22, -7.00, -7.17, -6.64, -7.00, ...
 -6.12, -6.57, -6.07, -6.65, -7.60, -6.92, -6.78, -6.85, -7.90, -7.40, ...
 -5.32, -6.58, -6.71, -5.07, -5.80, -4.87, -5.90, -7.43, -7.03, -6.67, ...
 -7.72, -5.83, -7.49, -6.68, -6.71, -7.31, -7.83, -7.92, -5.97, -6.34, ...
 ];

    % Уровень доверия
    gamma = 0.9;
    % Объем выборки
    n = length(X);
    % Точечная оценка матожидания
    mu = mean(X);
    % Точечная оценка дисперсии
    s2 = var(X);

    % Нижняя граница доверительного интервала для матожидания
    muLow = findMuLow(n, mu, s2, gamma);
    % Верхняя граница доверительного интервала для матожидания
    muHigh = findMuHigh(n, mu, s2, gamma);
    % Нижняя граница доверительного интервала для дисперсии
    s2Low = findS2Low(n, s2, gamma);
    % Верхняя граница доверительного интервала для дисперсии
    s2High = findS2High(n, s2, gamma);

    % Вывод полученных ранее значений
    fprintf('mu = %.3f\n', mu);
```

```
    fprintf('S2 = %.3f\n', s2);
    fprintf('muLow = %.3f\n', muLow);
    fprintf('muHigh = %.3f\n', muHigh);
    fprintf('s2Low = %.3f\n', s2Low);
    fprintf('s2High = %.3f\n', s2High);

    % Создание массивов точченых оценок
    muArray = zeros(1, n);
    s2Array = zeros(1, n);
    % Создание массивов границ доверительных интервалов
    muLowArray = zeros(1, n);
    muHighArray = zeros(1, n);
    s2LowArray = zeros(1, n);
    s2HighArray = zeros(1, n);

    % Цикл от 1 до n
    for i = 1 : n
        mu = mean(X(1:i));
        s2 = var(X(1:i));
        % Точечная оценка матожидания
        muArray(i) = mu;
        % Точечная оценка дисперсии
        s2Array(i) = s2;
        % Нижняя граница доверительного интервала для матожидания
        muLowArray(i) = findMuLow(i, mu, s2, gamma);
        % Верхняя граница доверительного интервала для матожидания
        muHighArray(i) = findMuHigh(i, mu, s2, gamma);
        % Нижняя граница доверительного интервала для дисперсии
        s2LowArray(i) = findS2Low(i, s2, gamma);
        % Верхняя граница доверительного интервала для дисперсии
        s2HighArray(i) = findS2High(i, s2, gamma);
    end

    % Построение графиков
    plot(1 : n, [(zeros(1, n) + mu)', muArray', muLowArray', muHighArray']);
    xlabel('n');
    ylabel('y');
    legend('$\hat \mu(\vec x_N)$', '$\hat \mu(\vec x_n)$', ...
        '$\underline{\mu}(\vec x_n)$', '$\overline{\mu}(\vec x_n)$', ...
        'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 18);
    figure;
    plot(1 : n, [(zeros(1, n) + s2)', s2Array', s2LowArray', s2HighArray']);
    xlabel('n');
    ylabel('z');
    legend('$\hat S^2(\vec x_N)$', '$\hat S^2(\vec x_n)$', ...
        '$\underline{\sigma}^2(\vec x_n)$', '$\overline{\sigma}^2(\vec x_n)$'
        'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 18);
end

% Функция поиска нижней границы доверительного интервала для матожидания
function muLow = findMuLow(n, mu, s2, gamma)
    muLow = mu - sqrt(s2) * tinv((1 + gamma) / 2, n - 1) / sqrt(n);
```

```
end

% Функция поиска верхней границы доверительного интервала для матожидания
function muHigh = findMuHigh(n, mu, s2, gamma)
    muHigh = mu + sqrt(s2) * tinv((1 + gamma) / 2, n - 1) / sqrt(n);
end

% Функция поиска нижней границы доверительного интервала для дисперсии
function s2Low = findS2Low(n, s2, gamma)
    s2Low = ((n - 1) * s2) / chi2inv((1 + gamma) / 2, n - 1);
end

% Функция поиска верхней границы доверительного интервала для дисперсии
function s2High = findS2High(n, s2, gamma)
    s2High = ((n - 1) * s2) / chi2inv((1 - gamma) / 2, n - 1);
end
```

4 Результаты расчетов и графики для выборки из индивидуального варианта

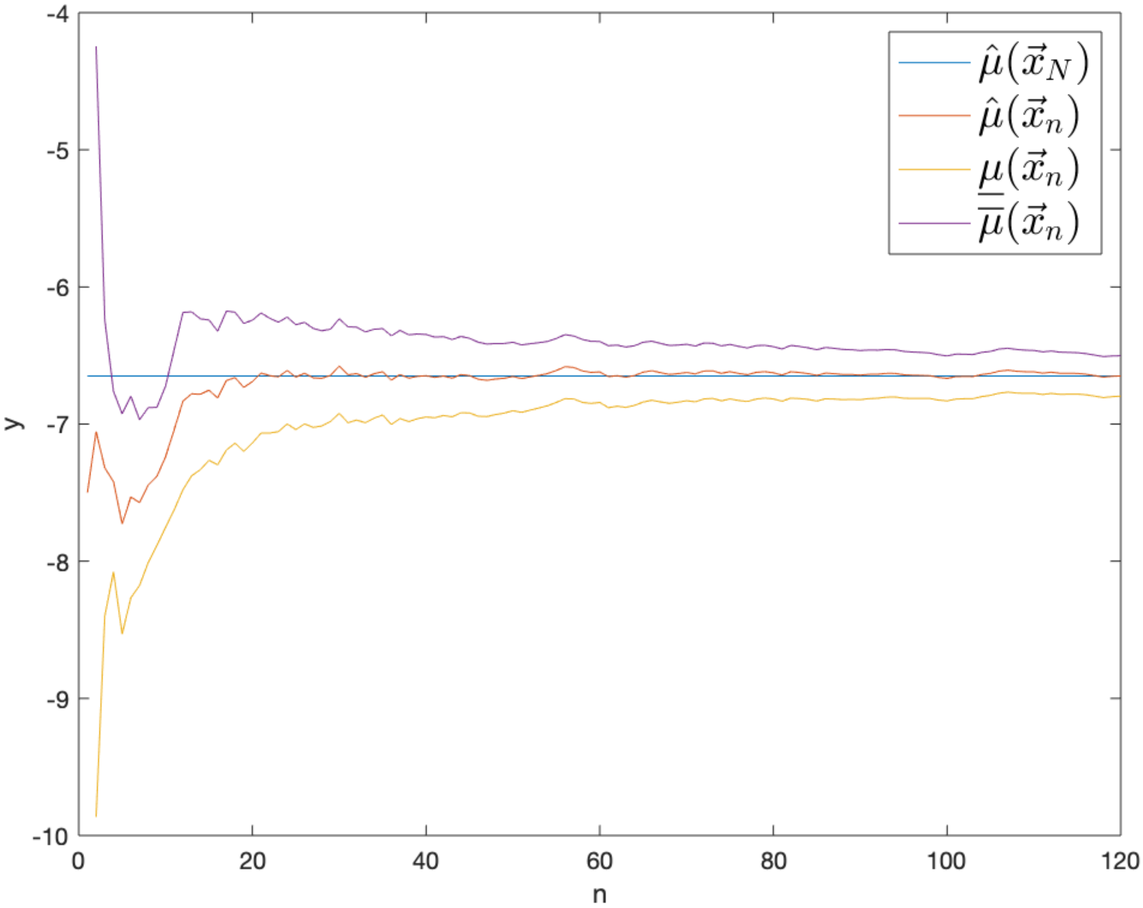
1. Точечные оценки $\hat{\mu}(\vec{x}_N)$ и $S^2(\vec{x}_N)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно.

2. Вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{x}_N)$, $\overline{\mu}(\vec{x}_N)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания DX.

3. Вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}(\vec{x}_N)$, $\overline{\sigma}(\vec{x}_N)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания MX.

```
>> lab2
mu = -6.649
S2 = 0.948
muLow = -6.796
muHigh = -6.502
s2Low = 0.775
s2High = 1.190
```

4. На координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n), y = \underline{\mu}(\vec{x}_n), y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N



$\hat{\mu}(\vec{x}_N)$
$\hat{\mu}(\vec{x}_n)$
$\underline{\mu}(\vec{x}_n)$
$\overline{\mu}(\vec{x}_n)$
y
n

5. На координатной плоскости Ozn построить прямую $z = \hat{S}^2(\vec{x}_N)$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n), z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n), z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N