Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»
КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Домашняя работа № 1

Дисциплина	Математическая статистика.
Студент	Сиденко А.Г.
Группа	ИУ7-63Б
Вариант	22
Оценка (баллы)	
Преподаватель	Власов П.А.

Москва, 2020 г.

1 Задача 1 (Предельные теоремы теории вероятностей)

Условие

Известно, что 80% изготовленных заводом электроламп выдерживают гарантийный срок службы. Найти вероятность того, что в партии из 500 электроламп число выдержавших гарантийный срок службы находится в пределах от 380 до 420. Использовать неравенство Чебышева и интегральную теорему Муавра-Лапласа.

Решение

1. С использованием неравенства Чебышева.

$$A = \{\text{Лампа выдержала гарантийный срок}\}$$

$$P(A) = 0.8$$

Так как отдельные испытания независимы, то значит испытания проводятся по схеме Бернулли $n = 500$, вероятность успеха $p = 0.8$.

Тогда

$$K_n - \text{число успехов в расмотренной серии}$$

$$K_n \sim B(n, p)$$

$$MK_n = n \cdot p = 500 \cdot 0.8 = 400$$

$$DK_n = n \cdot q \cdot p = n \cdot (1-p) \cdot p = 500 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 80$$

$$P\{380 \leq K_n \leq 420\} = P\{380 - 400 \leq K_n - MK_n \leq 420 - 400\} =$$
$$= P\{-20 \leq K_n - MK_n \leq 20\} = P\{|K_n - MK_n| \leq 20\} \geq 1 - \frac{DK_n}{\epsilon^2} =$$
$$= 1 - \frac{80}{20 \cdot 20} = \frac{4}{5} = 0.8$$

2. С использованием теоремы Муавра-Лапласа.

$$P\{K_1 \le K_n \le K_2\} \approx \Phi_0(\frac{K_2 - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}) - \Phi_0(\frac{K_1 - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}) = \Phi_0(\frac{420 - 500\cdot 0.8}{\sqrt{500\cdot 0.8\cdot 0.2}}) -$$
$$- \Phi_0(\frac{380 - 500\cdot 0.8}{\sqrt{500\cdot 0.8\cdot 0.2}}) = 2\cdot\Phi_0(\frac{20}{\sqrt{80}}) = 2\cdot\Phi_0(\frac{20}{4\sqrt{5}}) = 2\cdot\Phi_0(\sqrt{5}) = 2\cdot 0.4861 =$$
$$= 0.9722$$

Ответ:

1. С использованием неравенства Чебышева. $P\{380 \le K_n \le 420\} \ge 0.8$
2. С использованием теоремы Муавра-Лапласа. $P\{380 \le K_n \le 420\} = 0.9722$

2 Задача 2 (метод моментов)

Условие

С использованием метода моментов для случайной выборки $\vec{X} = (X_1, ..., X_n)$ из генеральной совокупности X найти точечные оценки указанных параметров заданного закона распределения.

Закон распределения:

$$f_X(x) = \frac{1}{4^{\Theta}\Gamma(\Theta)} x^{\Theta-1} e^{-\frac{x}{4}}, x > 0$$

Решение

1. Неизвестный параметр: $\Theta \Rightarrow r = 1$

   Следовательно, найдем момент 1-ого порядка.

$$f_X(x) = \frac{1}{4^{\Theta}\Gamma(\Theta)} x^{\Theta-1} e^{-\frac{x}{4}} = \frac{(\frac{1}{4})^{\Theta} x^{\Theta-1} e^{-\frac{1}{4}\cdot x}}{\Gamma(\Theta)}$$

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{x(\frac{1}{4})^\Theta x^{\Theta-1} e^{-\frac{1}{4}\cdot x}}{\Gamma(\Theta)} dx = \left| \begin{matrix} \text{Замена:} \\ t = \frac{x}{4},\ dx = 4dt \\ x = 4t \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{(4t)^\Theta (\frac{1}{4})^\Theta e^{-t}}{\Gamma(\Theta)} 4dt = \frac{4}{\Gamma(\Theta)} \underbrace{\int_0^{+\infty} t^\Theta e^{-t} dt}_{\Gamma(\Theta+1)} = \frac{4\Gamma(\Theta+1)}{\Gamma(\Theta)} =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{По свойству} \\ \text{гамма-распределения} \end{matrix} \right| = \frac{4\Gamma(\Theta)\Theta}{\Gamma(\Theta)} = 4\Theta$$

2. Приравняем теоретические моменты к их выбранным аналогам, найдем неизвестный параметр

$$MX = \overline{x} = 4\Theta \Rightarrow \Theta = \frac{\overline{x}}{4}$$

Ответ: $\Theta = \frac{\overline{x}}{4}$

3 Задача 3 (метод максимального правдоподобия)

Условие

С использованием метода максимального правдоподобия для случайной выборки $\vec{X} = (X_1, ..., X_n)$ из генеральной совокупности X найти точечные оценки указанных параметров заданного закона распределения. Вычислить выборочные значения найденных оценок для выборки $\vec{x}_5 = (x_1, ..., x_5)$.

Закон распределения:

$$f_X(x) = \frac{\Theta^5}{4!} x^4 e^{-\Theta x}, x > 0$$

Выборка $\vec{x}_5 = (7, 4, 11, 5, 3)$

Решение

1.

$$\alpha(x_1, ..x_n, \Theta) = f(x_1, \Theta) \cdot ... \cdot f(x_n, \Theta) = \frac{\Theta^5}{4!} x_1^4 e^{-\Theta x_1} \cdot ... \cdot \frac{\Theta^5}{4!} x_n^4 e^{-\Theta x_n} =$$

$$= \left(\frac{\Theta^5}{4!} \right)^n \cdot e^{-\Theta \sum_{i=1}^n x_i} \cdot (x_1^4 \cdot ... \cdot x_n^4)$$

2.

$$\ln\alpha = n\ln\frac{\Theta^5}{4!} - \Theta\sum_{i=1}^{n} x_i + \ln(x_1^4\cdot ...\cdot x_n^4) =$$

$$= 5n\ln\Theta - n\ln 4! - \Theta\sum_{i=1}^{n} x_i + \ln(x_1^4\cdot ...\cdot x_n^4) \to max$$

3. Необходимое условие экстремума:

$$\frac{\partial\ln\alpha}{\partial\Theta} = -\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{5n}{\Theta}$$

$$\Theta = \frac{5n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{5}{\overline{x}}$$

$$\hat{\Theta} = \frac{5}{\overline{x}}$$

Достаточное условие экстремума:

$$\frac{\partial^2\ln\alpha}{\partial\Theta^2} = -\frac{5n}{\Theta^2}\bigg|_{\Theta=\hat{\Theta}=\frac{5}{\overline{x}}} = -\frac{5n\overline{x}^2}{25} = -\frac{n\overline{x}^2}{5} = \left|\begin{matrix}\overline{x}^2\geq 0\\ n>0\end{matrix}\right| \Rightarrow -\frac{n\overline{x}^2}{5} < 0 \Rightarrow$$

$$\Theta = \hat{\Theta} - \text{Точка максимума}$$

4. Вычислим выборочные значения найденных оценок для выборки $\vec{x}_5 = (7, 4, 11, 5, 3)$.

$$\hat{\Theta} = \frac{5\cdot 5}{x_1 + ... + x_5} = \frac{25}{7+4+11+5+3} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$

Ответ:

1. $\hat{\Theta} = \frac{5}{\overline{x}}$
2. $\hat{\Theta} = \frac{5}{6}$

4 Задача 4 (доверительные интервалы)

Условие

После n = 8 измерений давления в баке с горючим получены следующие результаты: 3.25, 2.82, 3.07, 3.12, 2.93, 2.87, 3.09, 3.17. Считая ошибки измерений подчиненными нормальному закону, построить 90%-ные доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратичного отклонения давления в баке.

Решение

1. Пусть X – случайная величина, принимающая значения давления в баке.

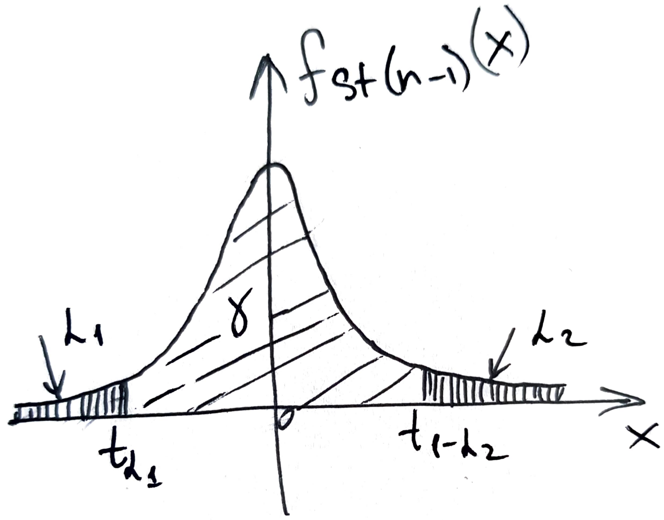
   Необходимо построить доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратичного отклонения давления в баке.

2. Построим доверительный интервал для математического ожидания θ.

   Так как среднеквадратичное отклонение неизвестно используем центральную статистику.

$$T(\vec{X}, \theta) = \frac{\theta - \overline{X}}{S(\vec{X})}\sqrt{n} \sim St(n-1)$$

   На рисунке изображен график функции плотности распределения статистики T.



Следуя общей идее построения доверительных интервалов, выберем $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ такие, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1 - \gamma$. В соответствии со свойствами непрерывных случайных величин можно записать

$$\gamma = P\{t_{\alpha_1} < T(\vec{X}, \theta) < t_{1-\alpha_2}\}$$

где $t_{\alpha_1},\ t_{\alpha_2}$ – квантили соответствующих уровней распределения Стьюдента с $n - 1 = 7$ степенями свободы.

Поскольку размах доверительного интервала обычно стараются минимизировать, то выбирают $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1-\gamma}{2}$, поэтому $t_{1-\alpha_2} = t_{1-\frac{1-\gamma}{2}} = t_{\frac{1+\gamma}{2}}$. В силу симметричности функции плотности стандартного нормального распределения заключаем, что $t_{\alpha_1} = -t_{\alpha_2} = -t_{\frac{1+\gamma}{2}}$

Тогда

$$\gamma = P\left\{ - t_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{\theta - \overline{X}}{S(\vec{X})}\sqrt{n} < t_{\frac{1+\gamma}{2}} \right\}$$

Или

$$\gamma = P\left\{\overline{X} - \frac{t_{\frac{1+\gamma}{2}} S(\vec{X})}{\sqrt{n}} < \theta < \overline{X} + \frac{t_{\frac{1+\gamma}{2}} S(\vec{X})}{\sqrt{n}}\right\}$$

Тогда в качестве верхней и нижней границ γ-доверительного интервала для параметра θ могут быть использованы статистики:

$$\underline{\theta}(\vec{X}) = \overline{X} - \frac{t_{\frac{1+\gamma}{2}} S(\vec{X})}{\sqrt{n}},$$

$$\overline{\theta}(\vec{X}) = \overline{X} + \frac{t_{\frac{1+\gamma}{2}} S(\vec{X})}{\sqrt{n}}$$

Вычислим:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{3.25 + 2.82 + 3.07 + 3.12 + 2.93 + 2.87 + 3.09 + 3.17}{8} = 3.04$$

$$\frac{1+\gamma}{2} = \frac{1+0.9}{2} = 0.95$$

$$t_{\frac{1+\gamma}{2}} = t_{0.95} = 1.8946$$

$$S(\vec{X}) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{(3.25-3.04)^2 + (2.82-3.04)^2 + (3.07-3.04)^2 +}{}$$

$$\frac{+(3.12-3.04)^2 + (2.93-3.04)^2 + (2.87-3.04)^2 + (3.09-3.04)^2 + (3.17-3.04)^2}{7}$$

$$= 0.023$$

$$\underline{\theta}(\vec{X}) = \overline{X} - \frac{t_{\frac{1+\gamma}{2}} S(\vec{X})}{\sqrt{n}} = 3.04 - \frac{1.8946 \cdot 0.023}{\sqrt{8}} = 3.0246$$

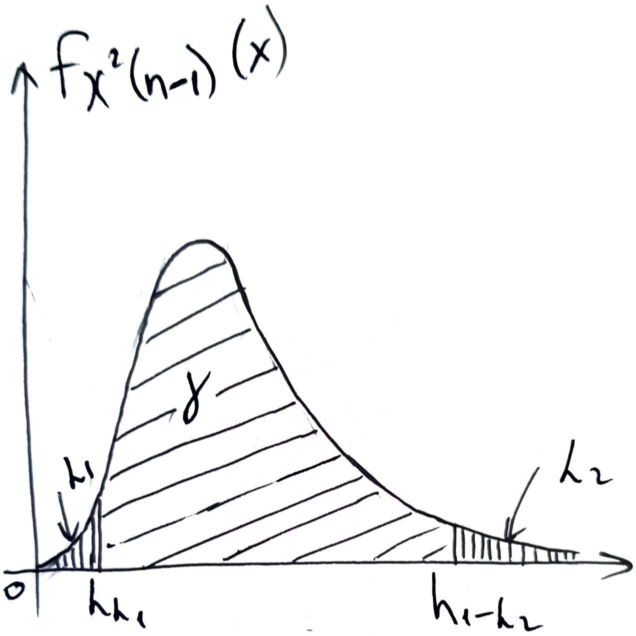
$$\overline{\theta}(\vec{X}) = \overline{X} + \frac{t_{\frac{1+\gamma}{2}} S(\vec{X})}{\sqrt{n}} = 3.04 + \frac{1.8946 \cdot 0.023}{\sqrt{8}} = 3.0554$$

3. Построим доверительный интервал для среднеквадратичного отклонения σ.

   Используем центральную статистику.

$$T(\vec{X}, \sigma^2) = \frac{S^2(\vec{X})}{\sigma^2}(n-1) \sim \chi^2(n-1)$$

   На рисунке изображен график функции плотности распределения статистики T.



   Следуя общей идее построения доверительных интервалов, выберем $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ такие, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1 - \gamma$. В соответствии со свойствами непрерывных случайных величин можно записать

$$\gamma = P\{h_{\alpha_1} < T(\vec{X}, \sigma^2) < h_{1-\alpha_2}\}$$

где $h_{\alpha_1},\ h_{\alpha_2}$ – квантили соответствующих уровней распределения хи-квадрат с $n-1=7$ степенями свободы.

Поскольку размах доверительного интервала обычно стараются минимизировать, то выбирают $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1-\gamma}{2}$, поэтому $h_{1-\alpha_2} = h_{1-\frac{1-\gamma}{2}} = h_{\frac{1+\gamma}{2}}$.

Тогда $h_{\alpha_1} = h_{\frac{1-\gamma}{2}},\ h_{\alpha_2} = h_{\frac{1+\gamma}{2}}$, так как график функции плотности не симметричен.

Тогда

$$\gamma = P\left\{h_{\frac{1-\gamma}{2}} < \frac{S^2(\vec{X})}{\sigma^2}(n-1) < h_{\frac{1+\gamma}{2}}\right\}$$

Или

$$\gamma = P\left\{\frac{1}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}} < \frac{\sigma^2}{S^2(\vec{X})(n-1)} < \frac{1}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}}\right\}$$

$$\gamma = P\left\{\frac{S^2(\vec{X})(n-1)}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}} < \sigma^2 < \frac{S^2(\vec{X})(n-1)}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}}\right\}$$

Тогда в качестве верхней и нижней границ γ-доверительного интервала для параметра σ^2 могут быть использованы статистики:

$$\underline{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{S^2(\vec{X})(n-1)}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}},$$

$$\overline{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{S^2(\vec{X})(n-1)}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}}$$

Вычислим:

$$\frac{1+\gamma}{2} = \frac{1+0.9}{2} = 0.95$$

$$h_{\frac{1+\gamma}{2}} = h_{0.95} = 14$$

$$\frac{1-\gamma}{2} = \frac{1+0.9}{2} = 0.05$$

$$h_{\frac{1-\gamma}{2}} = h_{0.05} = 2.17$$

$$S(\vec{X}) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{(3.25-3.04)^2 + (2.82-3.04)^2 + (3.07-3.04)^2 +}{}$$

$$\frac{+(3.12-3.04)^2 + (2.93-3.04)^2 + (2.87-3.04)^2 + (3.09-3.04)^2 + (3.17-3.04)^2}{7}$$

$$= 0.023$$

$$S^2(\vec{X}) = 0.000529$$

$$\underline{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{S^2(\vec{X})(n-1)}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}} = \frac{0.000529 \cdot 7}{14} = 0.0002645$$

$$\overline{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{S^2(\vec{X})(n-1)}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}} = \frac{0.000529 \cdot 7}{2.17} = 0.0017$$

Ответ:

Доверительные интервалы уровня 0.9 для математического ожидания (3.0246, 3.0554) и среднего квадратичного отклонения (0.0002645, 0.0017) давления в баке.