Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»
КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа № 3

Дисциплина Моделирование.
Тема Программно-алгоритмическая реализация моделей на основе ОДУ второго порядка с краевыми условиями II и III рода.

Студент Сиденко А.Г.
Группа ИУ7-63Б
Оценка (баллы)
Преподаватель Градов В.М.

Москва, 2020 г.

Цель работы: Получение навыков разработки алгоритмов решения краевой задачи при реализации моделей, построенных на ОДУ второго порядка.

1. Дано:

$$K_0 = 0.4$$
$$K_N = 0.1$$
$$\alpha_0 = 0.05$$
$$\alpha_N = 0.01$$
$$l = 10$$
$$T_0 = 300$$
$$R = 0.5$$
$$F_0 = 50$$

2. Уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(K(x)\frac{dT}{dx}\right) - \frac{2}{R}\alpha(x)T + \frac{2T_0}{R}\alpha(x) = 0 \qquad (1)$$

3. Краевые условия

$$\begin{cases} x = 0, \ -k(0)\frac{dT}{dx} = F_0 \\ x = l, \ -k(l)\frac{dT}{dx} = \alpha_N(T(l) - T_0) \end{cases}$$

Функции $k(x), \alpha(x)$ заданы:

$$k(x) = \frac{a}{x - b}$$

, где

$$a = -K_0 b = \frac{K_0 K_N l}{K_0 - K_N}, b = \frac{K_N l}{K_N - K_0}$$

$$\alpha(x) = \frac{c}{x - d}$$

, где

$$c = -\alpha_0 d = \frac{\alpha_0 \alpha_N l}{\alpha_0 - \alpha_N}, d = \frac{\alpha_N l}{\alpha_N - \alpha_0}$$

4. Разностная схема

$$\begin{aligned}
&A_n y_{n-1} - B_n y_n + C_n y_{n+1} = -D_n, 1 \le n \le N-1 \\
&K_0 y_0 + M_0 y_1 = P_0 \\
&K_N y_N + M_N y_{N-1} = P_N
\end{aligned} \tag{2}$$

, где

$$A_n = \frac{x_{n-\frac{1}{2}}}{h},\ B_n = A_n + C_n + p_n h,\ C_n = \frac{x_{n+\frac{1}{2}}}{h},\ D_n = f_n h$$

Способ вычисления (метод средних):

$$x_{n\pm\frac{1}{2}} = \frac{k_n + k_{n\pm1}}{2}$$

Система совместно с краевыми условиями решается методом прогонки.

5. Краевые условия

Обозначим:

$$\begin{aligned}
&F = -k(x)\frac{dT}{dx} \\
&p(x) = \frac{2}{R}\alpha(x) \\
&f(x) = \frac{2T_0}{R}\alpha(x) \\
&p_n = p(x_n),\ f_n = f(x_n)
\end{aligned} \tag{3}$$

Разностные аналоги краевых условий при x=0:

$$y_0 \cdot \left(x_{\frac{1}{2}} + \frac{h^2}{8}p_{\frac{1}{2}} + \frac{h^2}{4}p_0\right) - y_1 \cdot \left(x_{\frac{1}{2}} - \frac{h^2}{8}p_{\frac{1}{2}}\right) = \left(hF_0 + \frac{h^2}{4}(f_{\frac{1}{2}} + f_0)\right) \tag{4}$$

Взято из лекции.

Можно принять простую аппроксимацию

$$p_{\frac{1}{2}} = \frac{p_0 + p_1}{2}$$

$$f_{\frac{1}{2}} = \frac{f_0 + f_1}{2}$$

Разностные аналоги краевых условий при x=l, вывод:

Проинтегрируем уравнение 1 с учетом замен 3 на отрезке $[x_{N-\frac{1}{2}}, x_N]$

$$-\int_{X_{N-\frac{1}{2}}}^{X_N} \frac{dF}{dx}dx - \int_{X_{N-\frac{1}{2}}}^{X_N} p(x)Tdx + \int_{X_{N-\frac{1}{2}}}^{X_N} f(x)dx = 0$$

Второй и третий интегралы вычислим методом трапеций

$$F_{N-\frac{1}{2}} - F_N - \frac{p_{N-\frac{1}{2}}y_{N-\frac{1}{2}} + p_N y_N}{4}h + \frac{f_{N-\frac{1}{2}} + f_N}{4}h = 0$$

Зная

$$F_{N-\frac{1}{2}} = x_{N-\frac{1}{2}}\frac{y_{N-1} - y_N}{h}$$
$$F_N = \alpha_N(y_N - T_0)$$
$$y_{N-\frac{1}{2}} = \frac{y_N + y_{N-1}}{2}$$

$$\frac{x_{N-\frac{1}{2}}y_{N-1}}{h} - \frac{x_{N-\frac{1}{2}}y_N}{h} - \alpha_N y_N + \alpha_N T_0 - \frac{p_{N-\frac{1}{2}}y_{N-1}}{8}h - \frac{p_{N-\frac{1}{2}}y_N}{8}h - \frac{p_N y_N}{4}h + \\ + \frac{f_{N-\frac{1}{2}} + f_N}{4}h = 0$$

$$y_N \cdot \left(-\frac{x_{N-\frac{1}{2}}}{h} - \alpha_N - \frac{p_N}{4}h - \frac{p_{N-\frac{1}{2}}}{8}h \right) + y_{N-1} \cdot \left(\frac{x_{N-\frac{1}{2}}}{h} - \frac{p_{N-\frac{1}{2}}}{8}h \right) = \\ = -\left(\alpha_N T_0 + \frac{f_{N-\frac{1}{2}} + f_N}{4}h \right) \quad (5)$$

Соответственно из этих краевых условий (формулы 4, 5) находим коэффициенты для системы 2: $K_0,\ K_N,\ M_0,\ M_N,\ P_0,\ P_N$.

6. Метод прогонки

   Для решения системы 2 используется метод прогонки.

   Метод состоит из двух этапов прямой ход и обратный ход (прогоночные коэффициенты и нахождение неизвестных).

   1 этап:

   По формуле 6 вычисляются начальные значения прогоночных коэффициентов ε_1, η_1.

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= -\frac{M_0}{K_0} \\
\eta_1 &= \frac{P_0}{K_0}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

По формуле 7 вычисляются массивы прогоночных коэффициентов ε, η.

$$
y_n = \underbrace{\frac{C_n}{B_n - A_n\varepsilon_n}}_{\varepsilon_{n+1}} y_{n+1} + \underbrace{\frac{D_n + A_n\eta_n}{B_n - A_n\varepsilon_n}}_{\eta_{n+1}} \tag{7}
$$

2 этап:

По формуле 8 определяется y_N значение функции в последней точке.

$$
y_N = \frac{P_N - M_N\eta_N}{K_N + M_N\varepsilon_N} \tag{8}
$$

И по основной прогоночной формуле 9 находятся все значения неизвестных y_n.

$$
y_n = \varepsilon_{n+1}y_{n+1} + \eta_{n+1} \tag{9}
$$

Таким образом, массив, полученный после прогонки и есть искомый массив T(x).

Приведем листинг.

Листинг 1: Заданные параметры

```
K0 = 0.4
KN = 0.1
alpha0 = 0.05
alphaN = 0.01
l = 10
T0 = 300
R = 0.5
F0 = 50
h = 0.1
```

Листинг 2: Параметры коэффициентов теплопроводности материала стержня и теплоотдачи при обдуве

```
b = (KN * l) / (KN - K0)
a = - K0 * b
d = (alphaN * l) / (alphaN - alpha0)
c = - alpha0 * d
```

Листинг 3: Коэффициенты теплопроводности материала стержня и теплоотдачи при обдуве

```
def k(x):
    return a / (x - b)

def alpha(x):
    return c / (x - d)
```

Листинг 4: Выполненные замены

```
def p(x):
    return 2 * alpha(x) / R

def f(x):
    return 2 * alpha(x) * T0 / R
```

Листинг 5: Метод средних для вычисления значения X

```
def x_plus_1_2(x):
    return (k(x) + k(x + h)) / 2

def x_minus_1_2(x):
    return (k(x) + k(x - h)) / 2
```

Листинг 6: Параметры разностной схемы

```
def A(x):
    return x_minus_1_2(x) / h

def C(x):
    return x_plus_1_2(x) / h

def B(x):
    return A(x) + C(x) + p(x) * h

def D(x):
    return f(x) * h
```

Листинг 7: Краевые условия

```
K0 = x_plus_1_2(0) + h*h*(p(0) + p(h)) / 16 + h*h*p(0) / 4
M0 = -(x_plus_1_2(0) - h * h * (p(0) + p(h)) / 16)
P0 = h * F0 + h * h / 4 * ((f(0) + f(h)) / 2 + f(0))

KN = -x_minus_1_2(l)/h- alphaN- p(l)*h/4 - (p(l)+p(l-h))*h/16
MN = x_minus_1_2(l) / h - (p(l) + p(l - h)) * h / 16
```

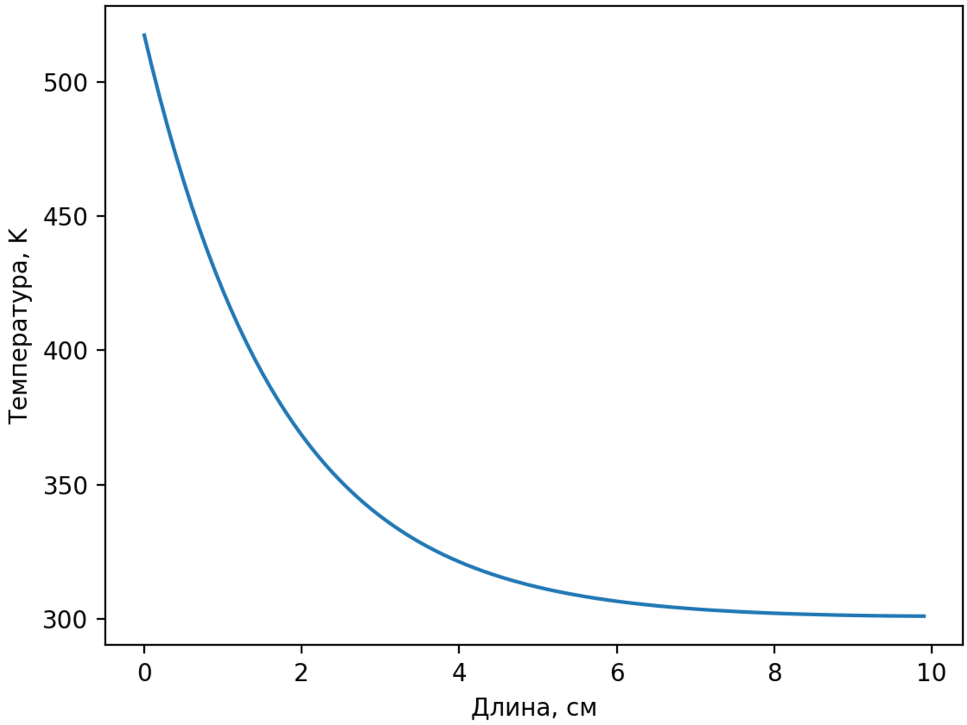
```
PN = -(alphaN * T0 + ((f(l) + f(l - h)) / 2 + f(l)) * h / 4)
```

Листинг 8: Метод прогонки

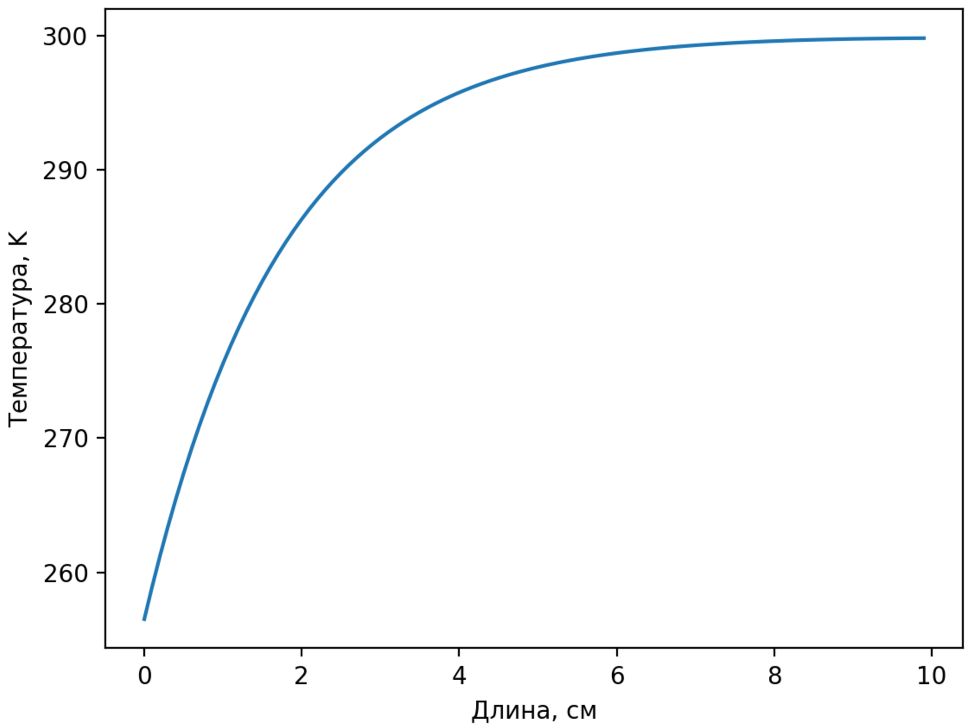
```
def run_through():
    # Прямой ход
    eps = [0, -M0 / K0]
    eta = [0, P0 / K0]

    x = h
    n = 1
    while (x + h < l):
        eps.append(C(x) / (B(x) - A(x) * eps[n]))
        eta.append((D(x) + A(x) * eta[n])/(B(x)-A(x) * eps[n]))
        n += 1
        x += h

    # Обратный ход
    t = [0] * (n + 1)
    t[n] = (PN - MN * eta[n]) / (KN + MN * eps[n])

    for i in range(n - 1, -1, -1):
        t[i] = eps[i + 1] * t[i + 1] + eta[i + 1]

    return t
```

Результаты работы программы.

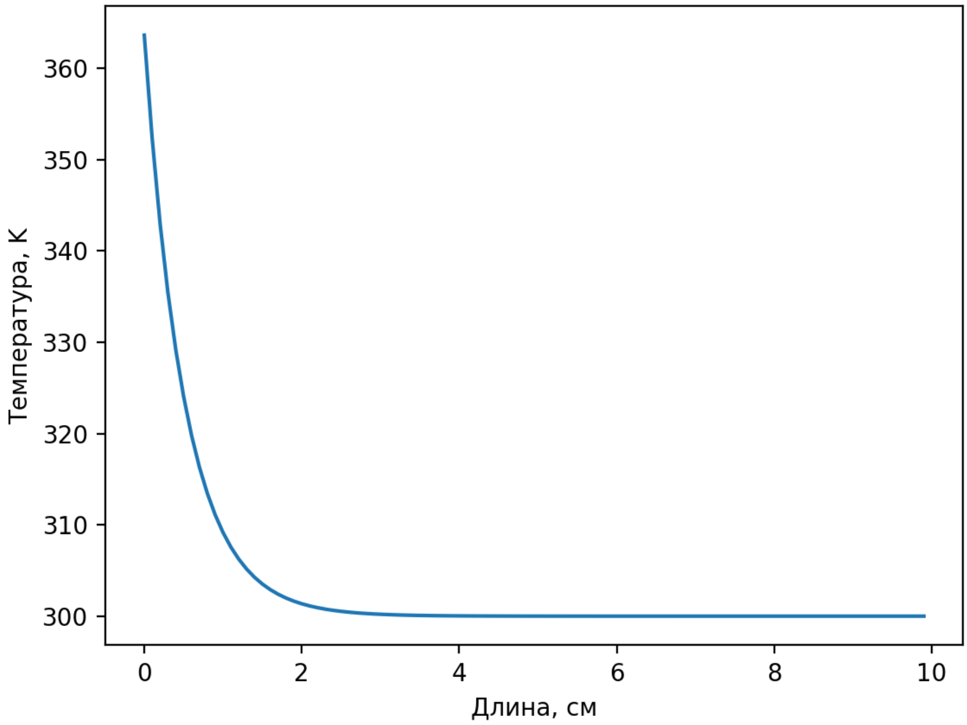
1. График зависимости температуры от координаты при заданных выше параметрах.



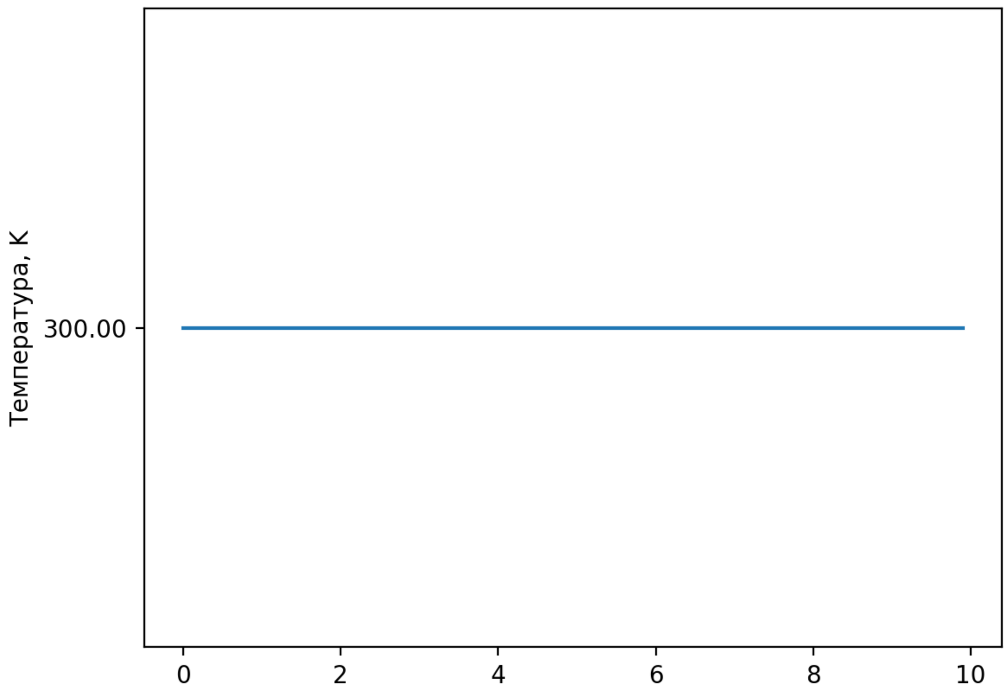
2. График зависимости при F_0 = -10.



3. График зависимости при увеличенных значениях α (например, в 3 раза).



4. График зависимости при $F_0 = 0$.



Ответы на вопросы.

1. Какие способы тестирования программы можно предложить?

   3 способа тестирования:

   (a) Задаем тепловой поток отрицательным, это означает что идет съем тепла с левого торца $x = 0$, а значит температура от 0 до l будет увеличиваться. (производная положительная)

   (b) Увеличиваем коэффициент теплоотдачи (стержень при том же самом тепловом потоке отдает больше тепла). А следовательно температура снижается, а скорость снижения температуры (от длины стержня) увеличивается.

   (c) Тепловой поток устанавливаем в 0. Съема тепла не происходит, причин для нагрева нет. А значит стержень так и останется при температуре окружающей среды.

2. Получите простейший разностный аналог нелинейного краевого условия при $x = l$,

$$-k(l)\frac{dT}{dx} = \alpha_N(T(l) - T_0) + \varphi(T)$$

   , где $\varphi(T)$ заданная функция.

   Производную аппроксимируйте односторонней разностью.

   Построим простейшую разностную схему методом разностной апроксимации на равномерной сетке с шагом h.

   Тогда в любой точке разностный аналог:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T(x+h) - T(x)}{h}$$

   Тогда при $x = l$:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{T_{l+1} - T_l}{h}$$

   И тогда

$$-k_l\frac{T_l - T_{l-1}}{h} = \alpha_N(T_l - T_0) + \varphi(T_l)$$

   , где $T_l = T(l), k_l = k(l)$

$$-k_lT_l + k_lT_{l-1} = \alpha_N hT_l - \alpha_N hT_0 + \varphi(T_l)h$$

$$-(k_l + \alpha_N h)T_l + k_lT_{l-1} = \varphi(T_l)h - \alpha_N hT_0$$

3. Опишите алгоритм применения метода прогонки, если при $x = 0$ краевое условие линейное (как в настоящей работе), а при $x = l$, как в п.2.

$$\begin{cases} x = 0, \ -k(0)\frac{dT}{dx} = F_0 \\ x = l, \ -k(l)\frac{dT}{dx} = \alpha_N(T(l) - T_0) + \varphi(T) \end{cases}$$

Изменим направление прогонки, т.е. прогоночные коэффициенты определять справа налево, а функцию - слева направо. Такая прогонка называется левой. В этом случае основная прогоночная формула записывается в виде

$$y_n = \varepsilon_{n-1}y_{n-1} + \eta_{n-1}$$

Принимая простейшую (первого порядка точности) аппроксимацию краевого условия при $x = 0$, получим его разностный аналог

$$-k_0\frac{T_1 - T_0}{h} = F_0$$

$$-k_0T_1 + k_0T_0 = F_0h$$

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = 1 \\ \eta_0 = -\frac{F_0h}{k_0} \end{cases}$$

Аналогичная разностная аппроксимация правого краевого условия имеет вид:

$$-(k_l + \alpha_N h)T_l + k_lT_{l-1} = \varphi(T_l)h - \alpha_N hT_0$$

$$-(k_l + \alpha_N h)T_l + k_l\frac{T_l - \eta_{l-1}}{\varepsilon_{l-1}} = \varphi(T_l)h - \alpha_N hT_0$$

Откуда получаем уравнение для определения T_0.

$$\varphi(T_l)h - (k_l + \alpha_N h - \frac{k_l}{\varepsilon_{l-1}})T_l = \frac{k_l\eta_{l-1}}{\varepsilon_{l-1}} - \alpha_N hT_0$$

4. Опишите алгоритм определения единственного значения сеточной функции y_p в одной заданной точке p. Использовать встречную прогонку, т.е. комбинацию правой и левой (лекция №8). Краевые условия линейные.

   Комбинируя левую и правую прогонки, получаем метод встречных прогонок.

Пусть $i = p$, где $0 < p < N$.

Тогда в области $0 \leq i \leq p + 1$ прогоночные коэффициенты α_i, β_i (правая прогонка):

$$\alpha_{i+1} = \frac{C_i}{B_i - \alpha_i A_i}$$

$$\beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + D_i}{C_i - \alpha_i A_i}$$

А в области $p \leq i \leq N$ прогоночные коэффициенты ε_i, η_i (левая прогонка):

$$\varepsilon_i = \frac{C_i}{B_i - \varepsilon_{i+1} A_i}$$

$$\eta_i = \frac{A_i \eta_{i+1} + D_i}{B_i - \varepsilon_{i+1} A_i}$$

Тогда при $i = p$:

$$y_p = \alpha_{p+1} y_{p+1} + \beta_{p+1}, \quad y_{p+1} = \varepsilon_{p+1} y_p + \eta_{p+1}$$

И тогда:

$$y_p = \frac{\beta_{p+1} + \alpha_{p+1} \eta_{p+1}}{1 - \alpha_{p+1} \varepsilon_{p+1}}$$