



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»
КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа № 3

Дисциплина	Моделирование.
Тема	Программно-алгоритмическая реализация моделей на основе ОДУ второго порядка с краевыми условиями II и III рода.
Студент	Сиденко А.Г.
Группа	ИУ7-63Б
Оценка (баллы)	
Преподаватель	Градов В.М.

Москва, 2020 г.

Цель работы: Получение навыков разработки алгоритмов решения краевой задачи при реализации моделей, построенных на ОДУ второго порядка.

1. Дано:

$$K_0 = 0.4$$

$$K_N = 0.1$$

$$\alpha_0 = 0.05$$

$$\alpha_N = 0.01$$

$$l = 10$$

$$T_0 = 300$$

$$R = 0.5$$

$$F_0 = 50$$

2. Уравнение

$$\frac{d}{dx} \left(K(x) \frac{dT}{dx} \right) - \frac{2}{R} \alpha(x) T + \frac{2T_0}{R} \alpha(x) = 0 \quad (1)$$

3. Краевые условия

$$\begin{cases} x = 0, & -k(0) \frac{dT}{dx} = F_0 \\ x = l, & -k(l) \frac{dT}{dx} = \alpha_N (T(l) - T_0) \end{cases}$$

Функции $k(x), \alpha(x)$ заданы:

$$k(x) = \frac{a}{x - b}$$

, где

$$a = -K_0 b = \frac{K_0 K_N l}{K_0 - K_N}, b = \frac{K_N l}{K_N - K_0}$$

$$\alpha(x) = \frac{c}{x - d}$$

, где

$$c = -\alpha_0 d = \frac{\alpha_0 \alpha_N l}{\alpha_0 - \alpha_N}, d = \frac{\alpha_N l}{\alpha_N - \alpha_0}$$

4. Разностная схема

$$\begin{aligned}A_n y_{n-1} - B_n y_n + C_n y_{n+1} &= -D_n, 1 \leq n \leq N-1 \\K_0 y_0 + M_0 y_1 &= P_0 \\K_N y_N + M_N y_{(N-1)} &= P_N\end{aligned}\tag{2}$$

, где

$$A_n = \frac{x_{n-\frac{1}{2}}}{h}, \quad B_n = A_n + C_n + p_n h, \quad C_n = \frac{x_{n+\frac{1}{2}}}{h}, \quad D_n = f_n h$$

Способ вычисления (метод средних):

$$x_{n \pm \frac{1}{2}} = \frac{k_n + k_{n \pm 1}}{2}$$

Система совместно с краевыми условиями решается методом прогонки.

5. Краевые условия

Обозначим:

$$\begin{aligned}F &= -k(x) \frac{dT}{dx} \\p(x) &= \frac{2}{R} \alpha(x) \\f(x) &= \frac{2T_0}{R} \alpha(x) \\p_n &= p(x_n), \quad f_n = f(x_n)\end{aligned}\tag{3}$$

Разностные аналоги краевых условий при $x=0$:

$$y_0 \cdot \left(x_{\frac{1}{2}} + \frac{h^2}{8} p_{\frac{1}{2}} + \frac{h^2}{4} p_0 \right) - y_1 \cdot \left(x_{\frac{1}{2}} - \frac{h^2}{8} p_{\frac{1}{2}} \right) = \left(h F_0 + \frac{h^2}{4} (f_{\frac{1}{2}} + f_0) \right) \tag{4}$$

Взято из лекции.

Можно принять простую аппроксимацию

$$p_{\frac{1}{2}} = \frac{p_0 + p_1}{2}$$

$$f_{\frac{1}{2}} = \frac{f_0 + f_1}{2}$$

Разностные аналоги краевых условий при $x=1$, вывод:

Проинтегрируем уравнение 1 с учетом замен 3 на отрезке $[x_{N-\frac{1}{2}}, x_N]$

$$-\int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N} \frac{dF}{dx} dx - \int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N} p(x)T dx + \int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{x_N} f(x) dx = 0$$

Второй и третий интегралы вычислим методом трапеций

$$F_{N-\frac{1}{2}} - F_N - \frac{p_{N-\frac{1}{2}}y_{N-\frac{1}{2}} + p_N y_N}{4} h + \frac{f_{N-\frac{1}{2}} + f_N}{4} h = 0$$

Зная

$$\begin{aligned} F_{N-\frac{1}{2}} &= x_{N-\frac{1}{2}} \frac{y_{N-1} - y_N}{h} \\ F_N &= \alpha_N (y_N - T_0) \\ y_{N-\frac{1}{2}} &= \frac{y_N + y_{N-1}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x_{N-\frac{1}{2}}y_{N-1}}{h} - \frac{x_{N-\frac{1}{2}}y_N}{h} - \alpha_N y_N + \alpha_N T_0 - \frac{p_{N-\frac{1}{2}}y_{N-1}}{8} h - \frac{p_{N-\frac{1}{2}}y_N}{8} h - \frac{p_N y_N}{4} h + \\ + \frac{f_{N-\frac{1}{2}} + f_N}{4} h = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_N \cdot \left(-\frac{x_{N-\frac{1}{2}}}{h} - \alpha_N - \frac{p_N}{4} h - \frac{p_{N-\frac{1}{2}}}{8} h \right) + y_{N-1} \cdot \left(\frac{x_{N-\frac{1}{2}}}{h} - \frac{p_{N-\frac{1}{2}}}{8} h \right) = \\ = -\left(\alpha_N T_0 + \frac{f_{N-\frac{1}{2}} + f_N}{4} h \right) \quad (5) \end{aligned}$$

Соответственно из этих краевых условий (формулы 4, 5) находим коэффициенты для системы 2: K_0 , K_N , M_0 , M_N , P_0 , P_N .

6. Метод прогонки

Для решения системы 2 используется метод прогонки.

Метод состоит из двух этапов прямой ход и обратный ход (прогоночные коэффициенты и нахождение неизвестных).

1 этап:

По формуле 6 вычисляются начальные значения прогоночных коэффициентов ε_1, η_1 .

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= -\frac{M_0}{K_0} \\ \eta_1 &= \frac{P_0}{K_0}\end{aligned}\tag{6}$$

По формуле 7 вычисляются массивы прогоночных коэффициентов ε, η .

$$y_n = \underbrace{\frac{C_n}{B_n - A_n \varepsilon_n}}_{\varepsilon_{n+1}} y_{n+1} + \underbrace{\frac{D_n + A_n \eta_n}{B_n - A_n \varepsilon_n}}_{\eta_{n+1}}\tag{7}$$

2 этап:

По формуле 8 определяется y_N значение функции в последней точке.

$$y_N = \frac{P_N - M_N \eta_N}{K_N + M_N \varepsilon_N}\tag{8}$$

И по основной прогоночной формуле 9 находятся все значения неизвестных y_n .

$$y_n = \varepsilon_{n+1} y_{n+1} + \eta_{n+1}\tag{9}$$

Таким образом, массив, полученный после прогонки и есть искомый массив $T(x)$.

Приведем листинг.

Листинг 1: Заданные параметры

```
1 K0 = 0.4
2 KN = 0.1
3 alpha0 = 0.05
4 alphaN = 0.01
5 l = 10
6 T0 = 300
7 R = 0.5
8 F0 = 50
9 h = 0.1
```

Листинг 2: Параметры коэффициентов теплопроводности материала стержня и теплоотдачи при обдуве

```
1 b = (KN * l) / (KN - K0)
2 a = - K0 * b
3 d = (alphaN * l) / (alphaN - alpha0)
4 c = - alpha0 * d
```

Листинг 3: Коэффициенты теплопроводности материала стержня и теплоотдачи при обдуве

```

1 def k(x):
2     return a / (x - b)
3
4 def alpha(x):
5     return c / (x - d)

```

Листинг 4: Выполненные замены

```

1 def p(x):
2     return 2 * alpha(x) / R
3
4 def f(x):
5     return 2 * alpha(x) * T0 / R

```

Листинг 5: Метод средних для вычисления значения X

```

1 def x_plus_1_2(x):
2     return (k(x) + k(x + h)) / 2
3
4 def x_minus_1_2(x):
5     return (k(x) + k(x - h)) / 2

```

Листинг 6: Параметры разностной схемы

```

1 def A(x):
2     return x_minus_1_2(x) / h
3
4 def C(x):
5     return x_plus_1_2(x) / h
6
7 def B(x):
8     return A(x) + C(x) + p(x) * h
9
10 def D(x):
11     return f(x) * h

```

Листинг 7: Краевые условия

```

1 K0 = x_plus_1_2(0) + h*h*(p(0) + p(h)) / 16 + h*h*p(0) / 4
2 M0 = -(x_plus_1_2(0) - h * h * (p(0) + p(h)) / 16)
3 P0 = h * F0 + h * h / 4 * ((f(0) + f(h)) / 2 + f(0))
4
5 KN = -x_minus_1_2(1)/h- alphaN- p(1)*h/4 - (p(1)+p(1-h))*h/16
6 MN = x_minus_1_2(1) / h - (p(1) + p(1 - h)) * h / 16

```

$$7 \quad \text{PN} = -(\text{alphaN} * \text{T0} + ((f(1) + f(1 - h)) / 2 + f(1)) * h / 4)$$

Листинг 8: Метод прогонки

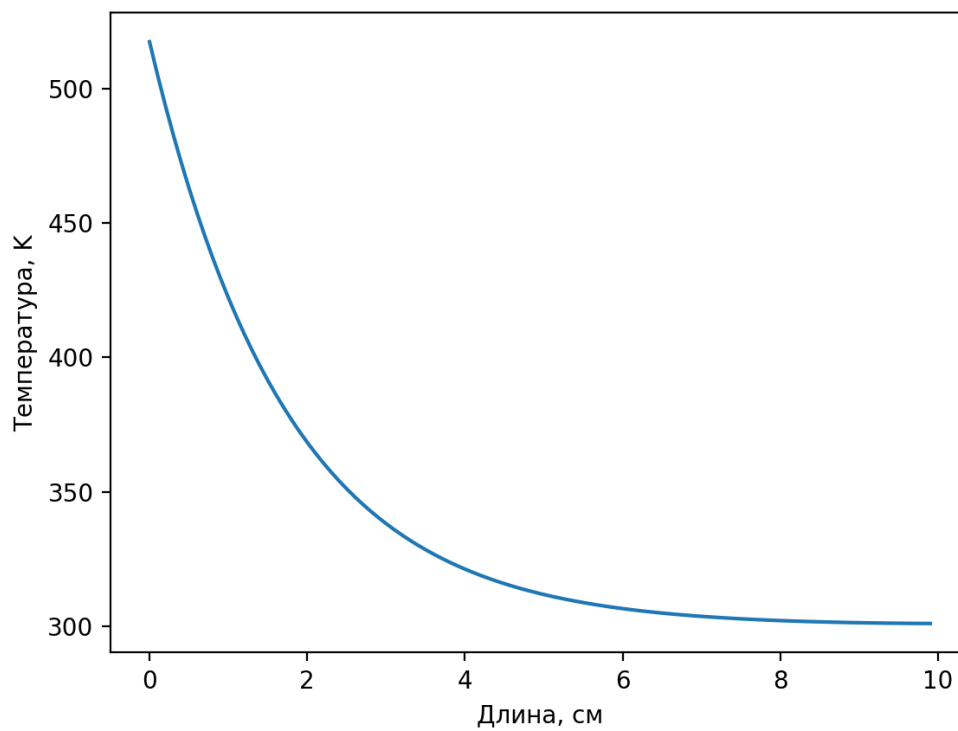
```

1 def run_through():
2     # Прямой ход
3     eps = [0, -M0 / K0]
4     eta = [0, P0 / K0]
5
6     x = h
7     n = 1
8     while (x + h < 1):
9         eps.append((C(x) / (B(x) - A(x) * eps[n])))
10        eta.append((D(x) + A(x) * eta[n]) / (B(x) - A(x) * eps[n]))
11        n += 1
12        x += h
13
14    # Обратный ход
15    t = [0] * (n + 1)
16    t[n] = (PN - MN * eta[n]) / (KN + MN * eps[n])
17
18    for i in range(n - 1, -1, -1):
19        t[i] = eps[i + 1] * t[i + 1] + eta[i + 1]
20
21    return t

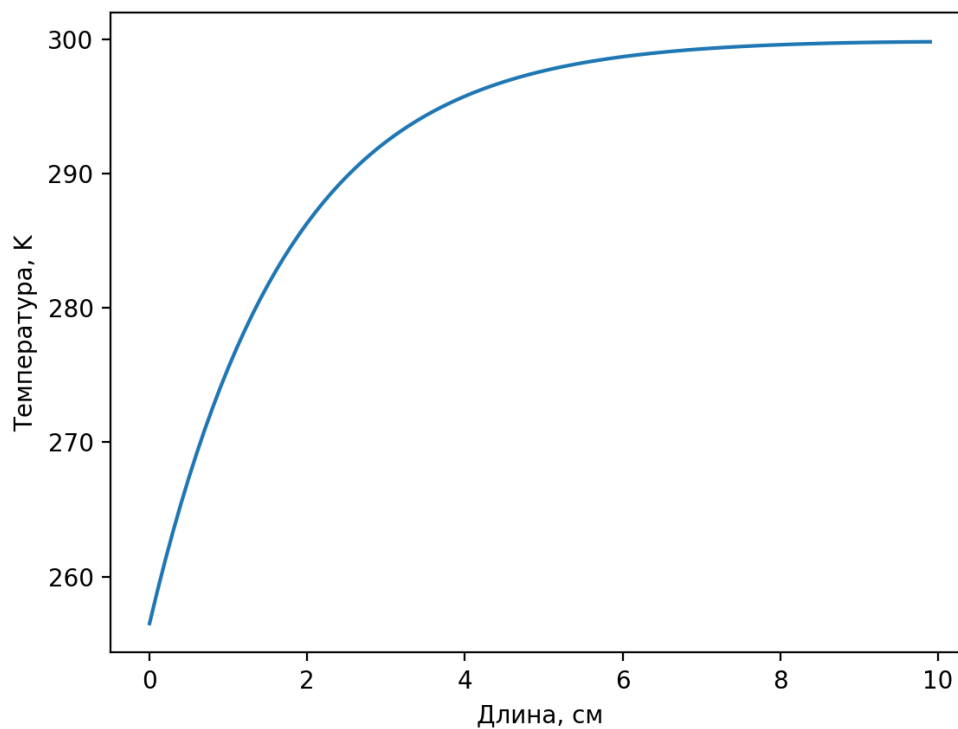
```

Результаты работы программы.

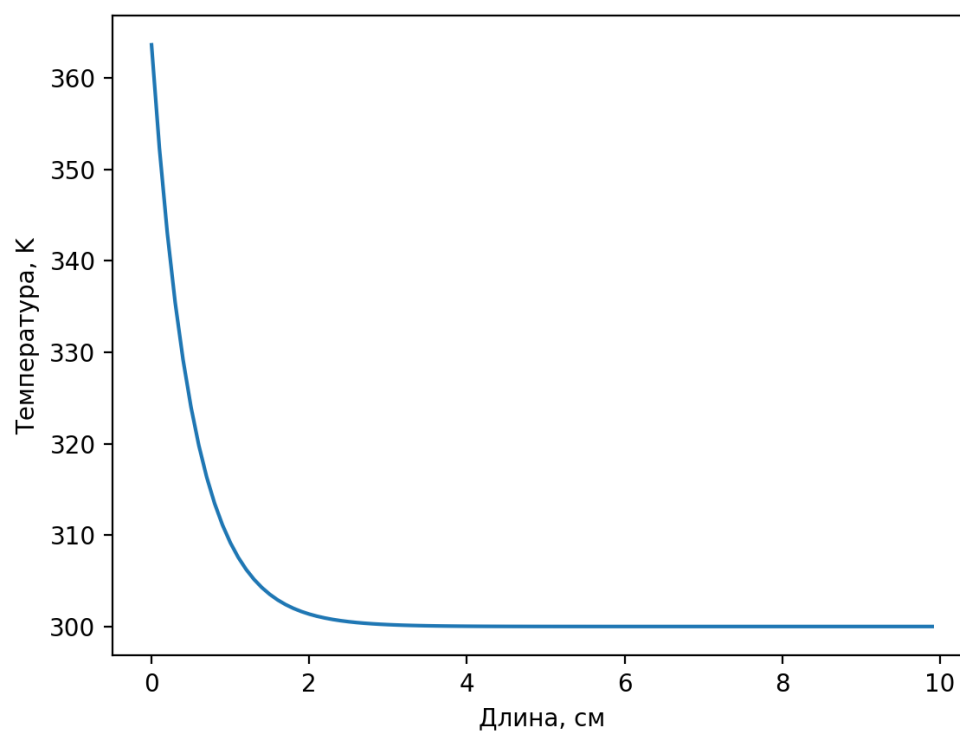
1. График зависимости температуры от координаты при заданных выше параметрах.



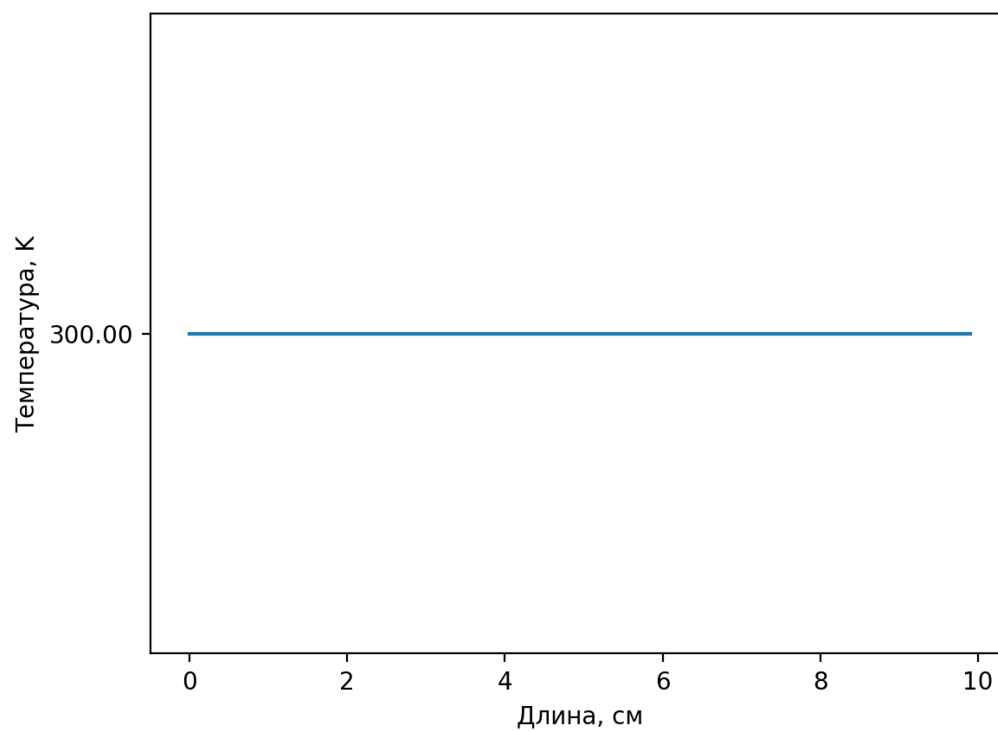
2. График зависимости при $F_0 = -10$.



3. График зависимости при увеличенных значениях α (например, в 3 раза).



4. График зависимости при $F_0 = 0$.



Ответы на вопросы.

1. Какие способы тестирования программы можно предложить?
2. Получите простейший разностный аналог нелинейного краевого условия при $x = l$,

$$-k(l)\frac{dT}{dx} = \alpha_N(T(l) - T_0) + \varphi(T)$$

, где $\varphi(T)$ заданная функция.

Производную аппроксимируйте односторонней разностью.

3. Опишите алгоритм применения метода прогонки, если при $x = 0$ краевое условие линейное (как в настоящей работе), а при $x = l$, как в п.2.
4. Опишите алгоритм определения единственного значения сеточной функции y_p в одной заданной точке p . Использовать встречную прогонку, т.е. комбинацию правой и левой прогонок (лекция №8). Краевые условия линейные.