

Школа Data analyst

Занятие 12

Статистический анализ

Тема 2



Disclaimer

Все формулировки далее нестрогие, за более строгими определениями обращайтесь к специализированной литературе



План занятия

- Оценка распределения по выборке
- Важные характеристики распределений
- Важные статистики
- Доверительные интервалы
- Центральная предельная теорема
- Статистический вывод

Зачем оценивать распределение по выборке?

- Чтобы получить некое представление о мире
- Чтобы делать базовые прогнозы на основе полученных распределений (при этом имея численное, а не качественное выражение)
- Часто нас не интересуют супер точные результаты, да мы и не можем учесть такое кол-во переменных у себя в голове
- Некоторые алгоритмы машинного обучения (например, Байесовские алгоритмы классификации), основываются на знании априорных (предопределенных, доопытных) вероятностях классов



Оценка распределения по выборке

В общем виде задача формулируется так:

“Требуется оценить плотность распределения $p(x)$ по выборке независимых случайных векторов, распределенных по этому закону $p(x)$.”



Оценка распределения по выборке

Выборка случайной величины X :

$X^n = (X_1, \dots, X_n)$, n — объем выборки

X^n - независимы и распределены одинаково (i.i.d.)

$T(X^n)$ - статистика, функция от выборки, возвращающая какое-то число



Оценка распределения по выборке

Воспоминание:

Распределение дискретной случайной величины задается функцией вероятности:

$$X \in \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}, \quad P(X = \omega_k) = p_k$$

$$\bar{p}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [Xi = \omega_k]$$



Оценка распределения по выборке

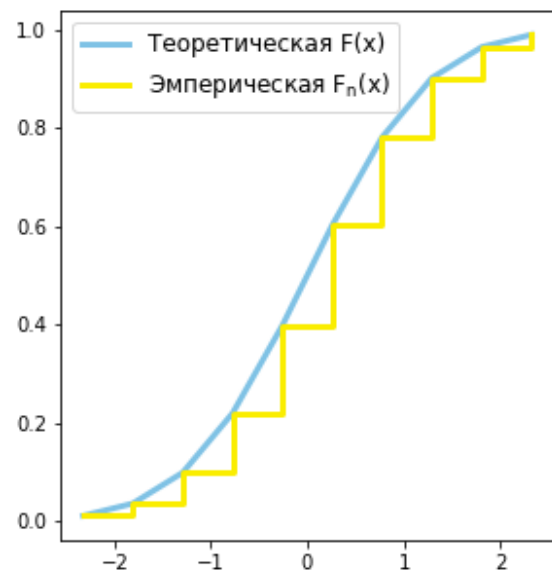
Для дискретной выборки функцию вероятности можно оценить частотами событий

Но что делать для непрерывной случайной величины?

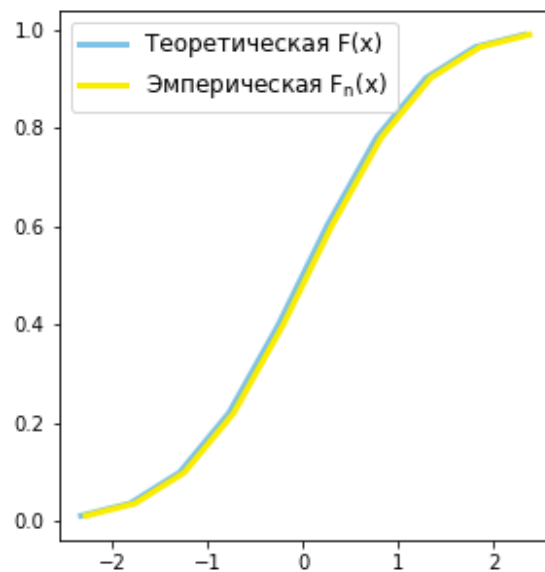
$$X \sim F(x)$$

Оценка распределения по выборке

$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [X_i \leq x]$ - эмпирическая функция распределения



$n \rightarrow \infty$





Оценка распределения по выборке

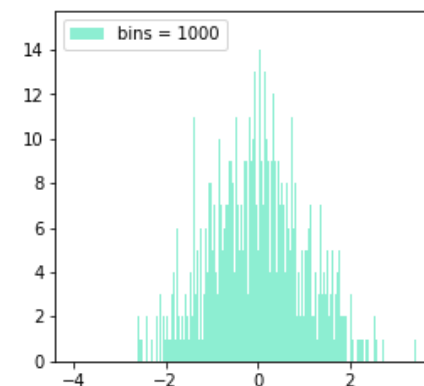
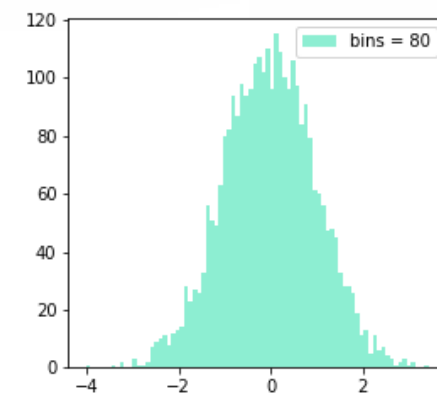
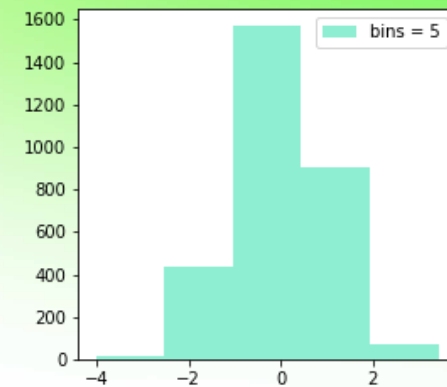
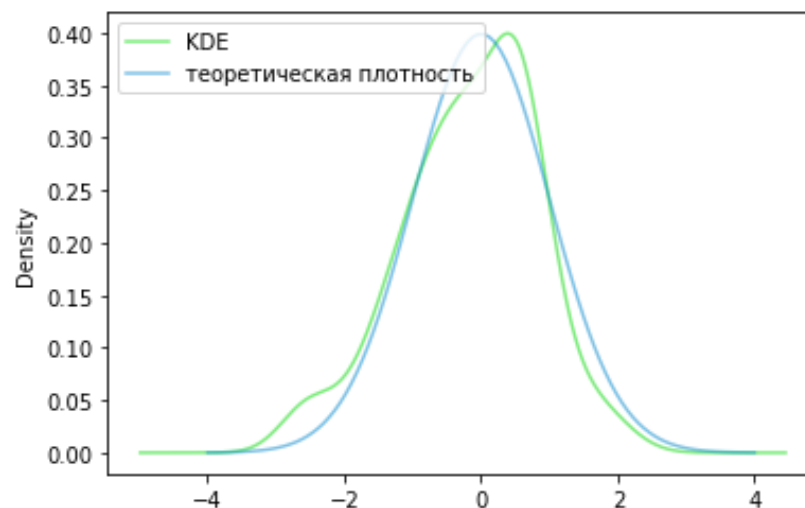
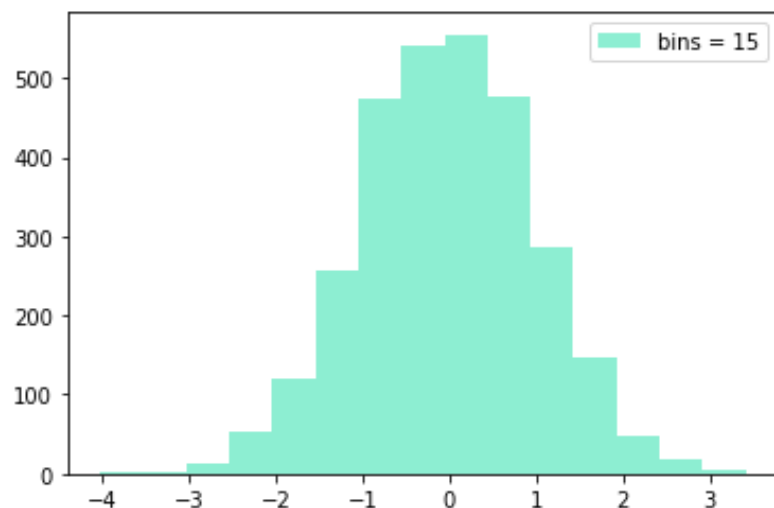
$$X \sim f(x)$$

$$f(x): \int_a^b f(x)dx = P(a \leq x \leq b)$$

Формула Стерджесса

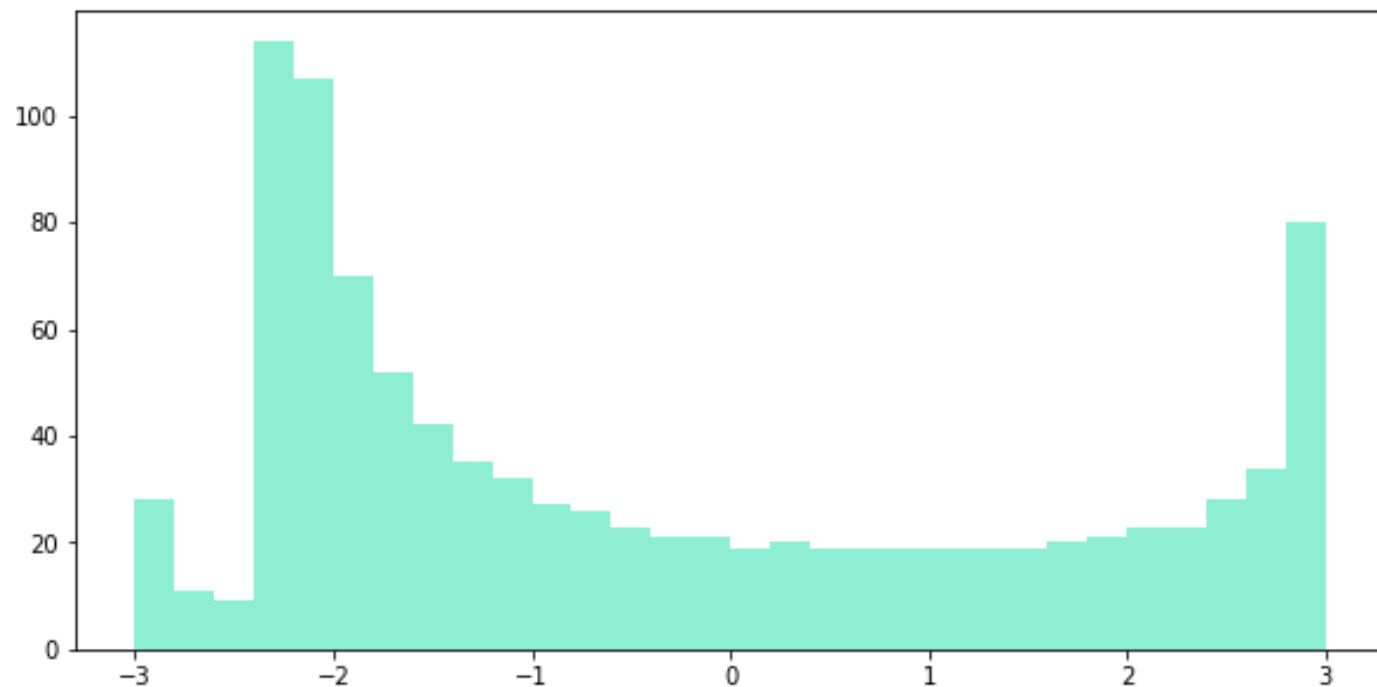
$$\text{bins} = 1 + \lceil \log_2 N \rceil$$

$$\text{bins} = 1 + 3.322 \lg N$$





Оценка распределения по выборке





Практика? Практика!



Характеристики и статистики

Математическое ожидание

$$\mathbb{E}X = \begin{cases} \sum_i \omega_i p_i \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \end{cases}$$

Дискретный случай

Непрерывный случай



Важные характеристики распределений

Дисперсия и среднеквадратическое отклонение

$$\mathbb{D}X = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)^2) \quad \text{Дисперсия}^*$$

$$\sigma = \sqrt{\mathbb{D}X} \quad \text{Стандартное отклонение}$$

$$\text{IQR} = X_{0.75} - X_{0.25} \quad \text{Интерквартильный размах}$$

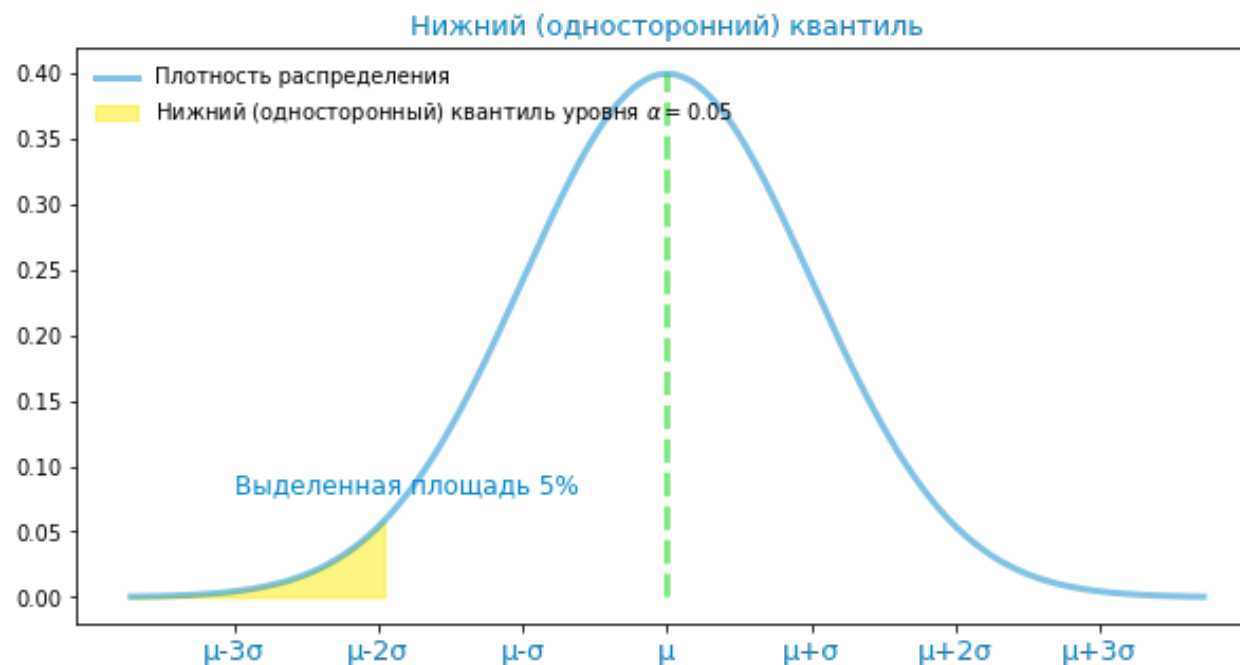
* Средний квадрат отклонения от среднего значения $\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} \quad n \rightarrow \infty$

Важные характеристики распределений

X_α Квантиль порядка $\alpha \in (0, 1)$:

$$\mathbb{P}(X \leq X_\alpha) \geq \alpha$$

$$\mathbb{P}(X \geq X_\alpha) > 1 - \alpha$$

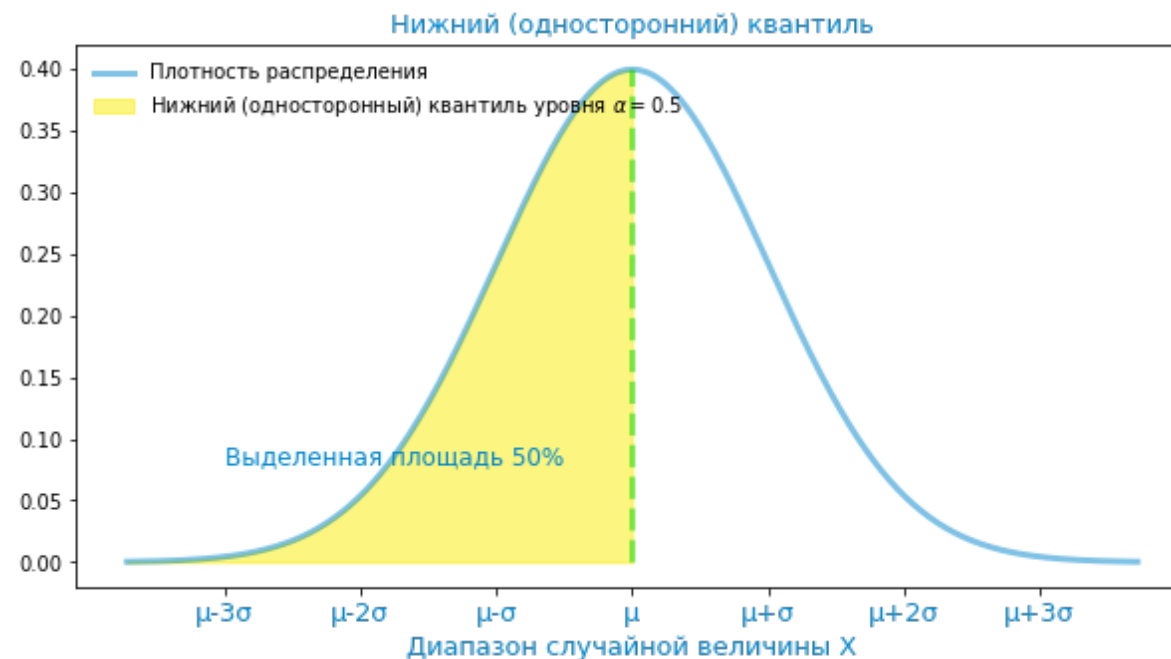


Важные характеристики распределений

Медиана — квантиль с $\alpha = 0.5$. Т.е. элементы выборки с одинаковой вероятностью попадают по обе стороны медианы.

$$\mathbb{P}(X \leq X_\alpha) \geq 0.5$$

$$\mathbb{P}(X \geq X_\alpha) > 0.5$$



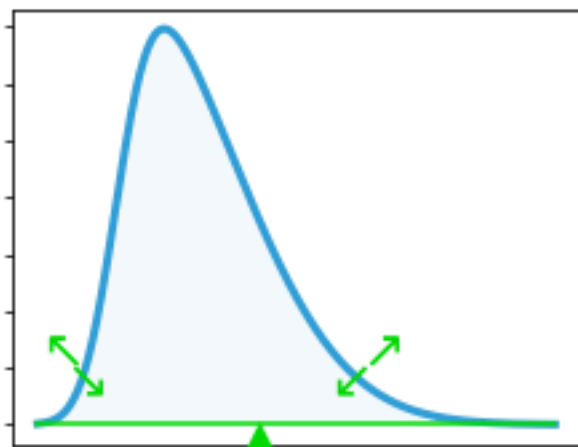


Важные характеристики распределений

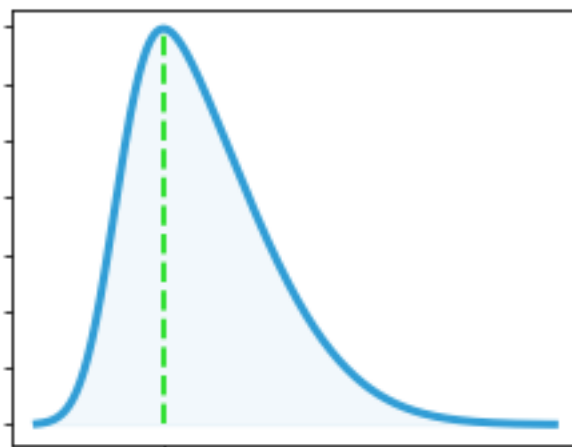
Мода — «наиболее вероятное» (частое) значение случайной величины

$$\text{mode}X = \begin{cases} \underset{i}{\operatorname{argmax}} p_i, & X \text{ — дискретна} \\ \underset{x}{\operatorname{argmax}} f(x), & X \text{ — непрерывна} \end{cases}$$

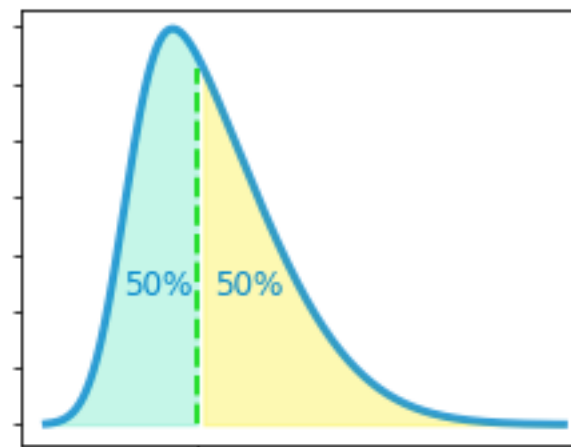
Важные характеристики распределений



Матожидание



Мода



Медиана

Важные характеристики распределений

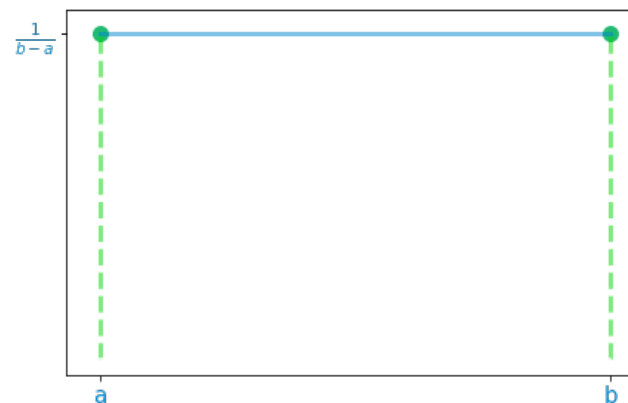
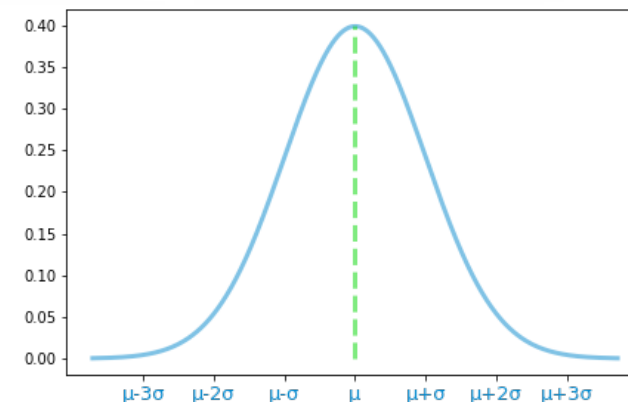
$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \mathbb{E}X = \mu = \text{mode } X = \text{med } X$$

$$\mathbb{D}X = \sigma^2$$

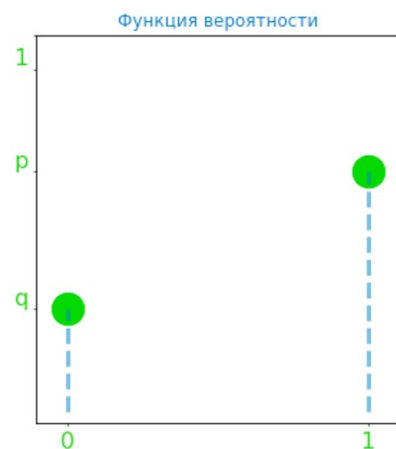
$$X \sim U(a, b) \Rightarrow \mathbb{E}X = \text{med } X = \frac{a + b}{2}$$

$\text{mode } X$ — не определена
(любое число на отрезке $[a, b]$)

$$\mathbb{D}X = \frac{(b-a)^2}{12}$$

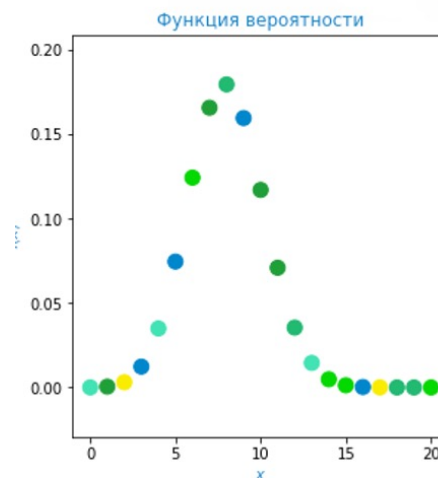


Важные характеристики распределений



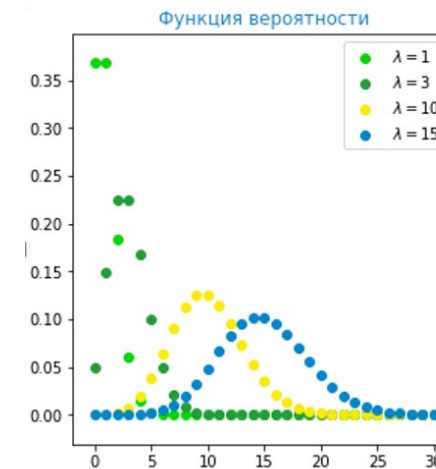
$$X \sim \text{Ber}(p) \Rightarrow \mathbb{E}X = p$$

$$\mathbb{D}X = pq$$



$$X \sim \text{Binom}(n, p) \Rightarrow \mathbb{E}X = np$$

$$\mathbb{D}X = npq$$

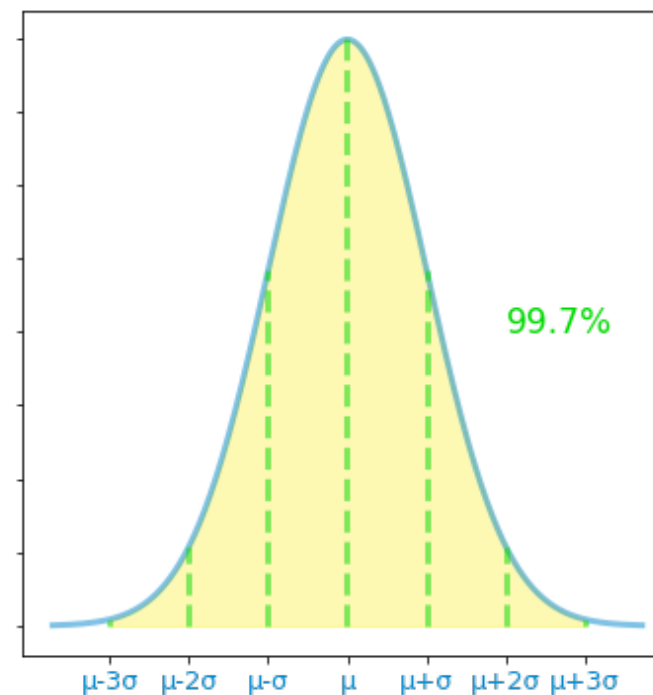
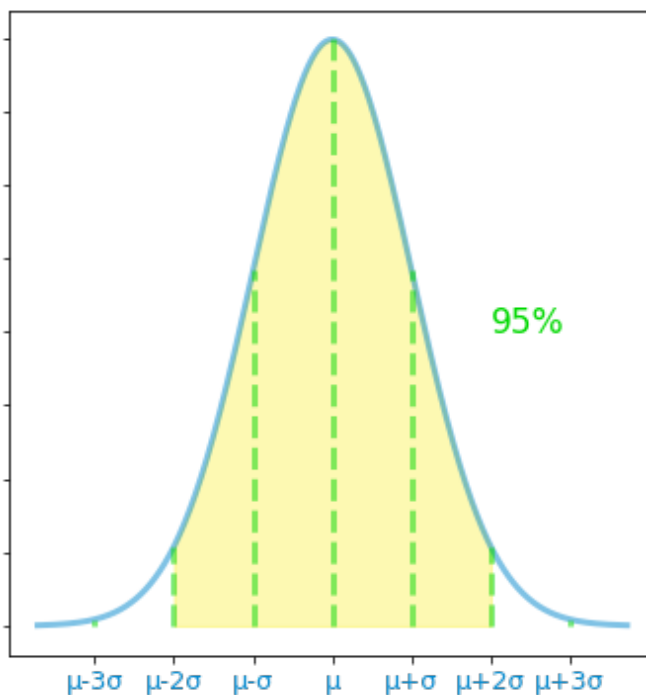
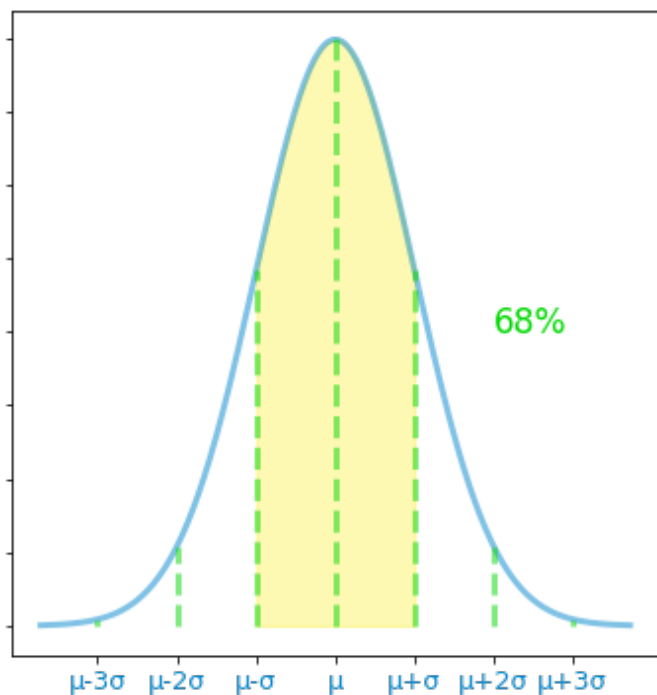


$$X \sim \text{Pois}(\lambda) \Rightarrow \mathbb{E}X = \lambda$$

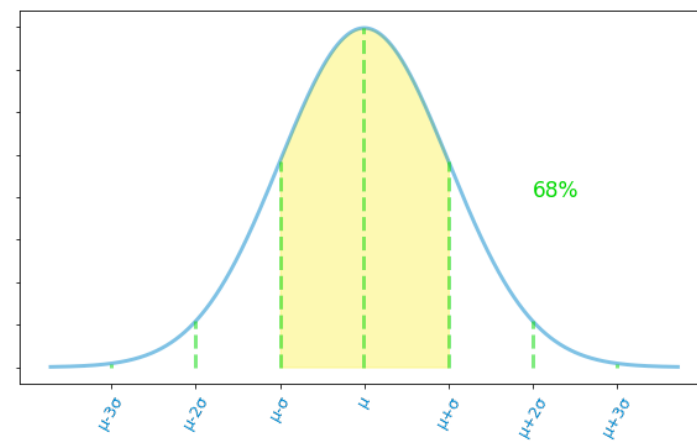
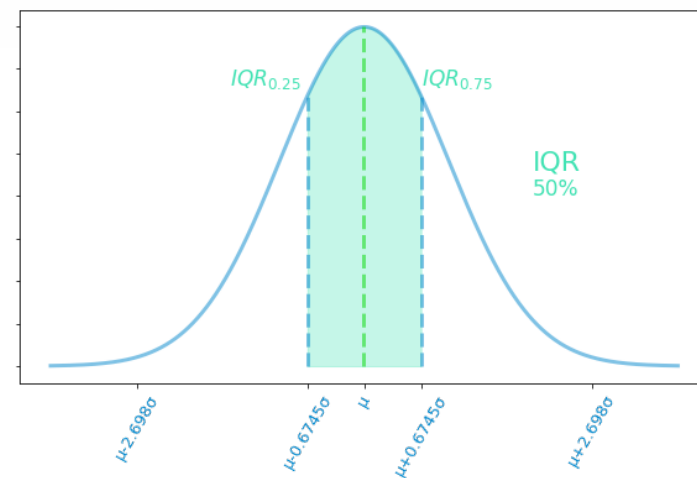
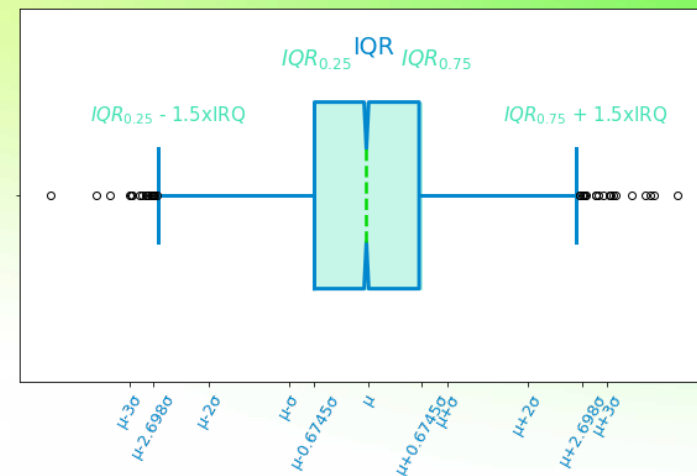
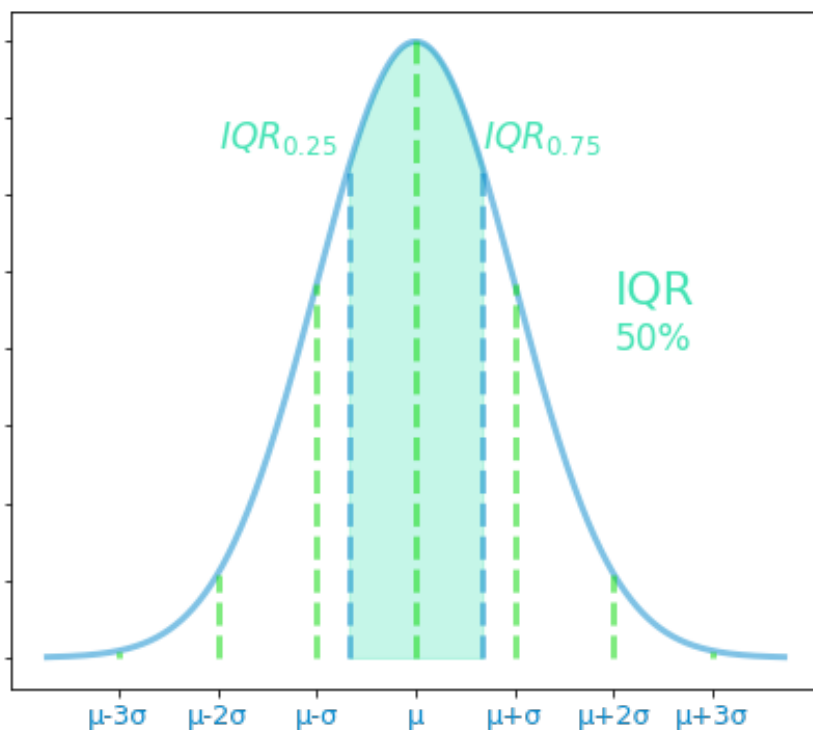
$$\mathbb{D}X = \lambda$$

При больших λ $X \Rightarrow N(\lambda, \lambda)$

Важные характеристики распределений



Важные характеристики распределений



Важные характеристики распределений

[Why not to trust statistics?](#)

pandas.DataFrame.describe ...

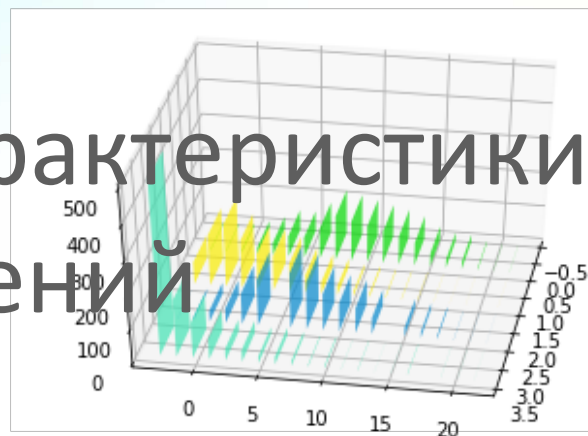
scipy.stats mean/median/var/std/iqr ...

numpy mean/median/var/std/quantile ...

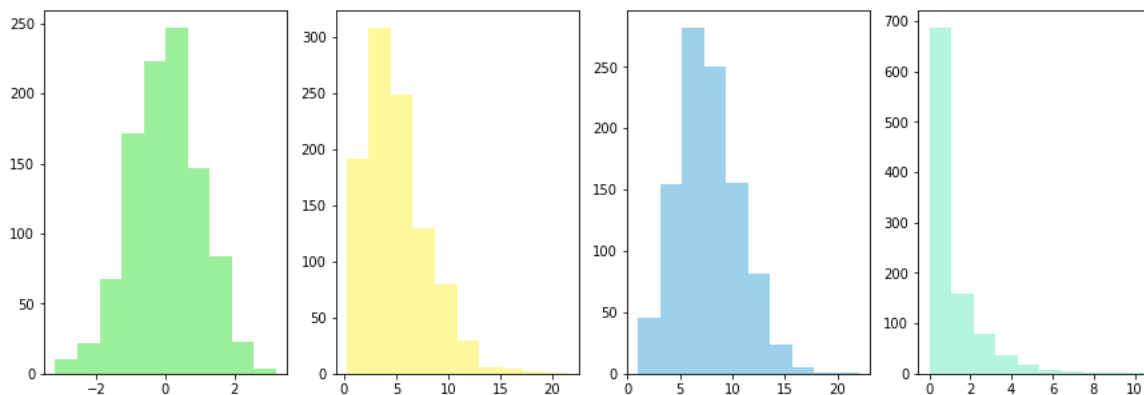
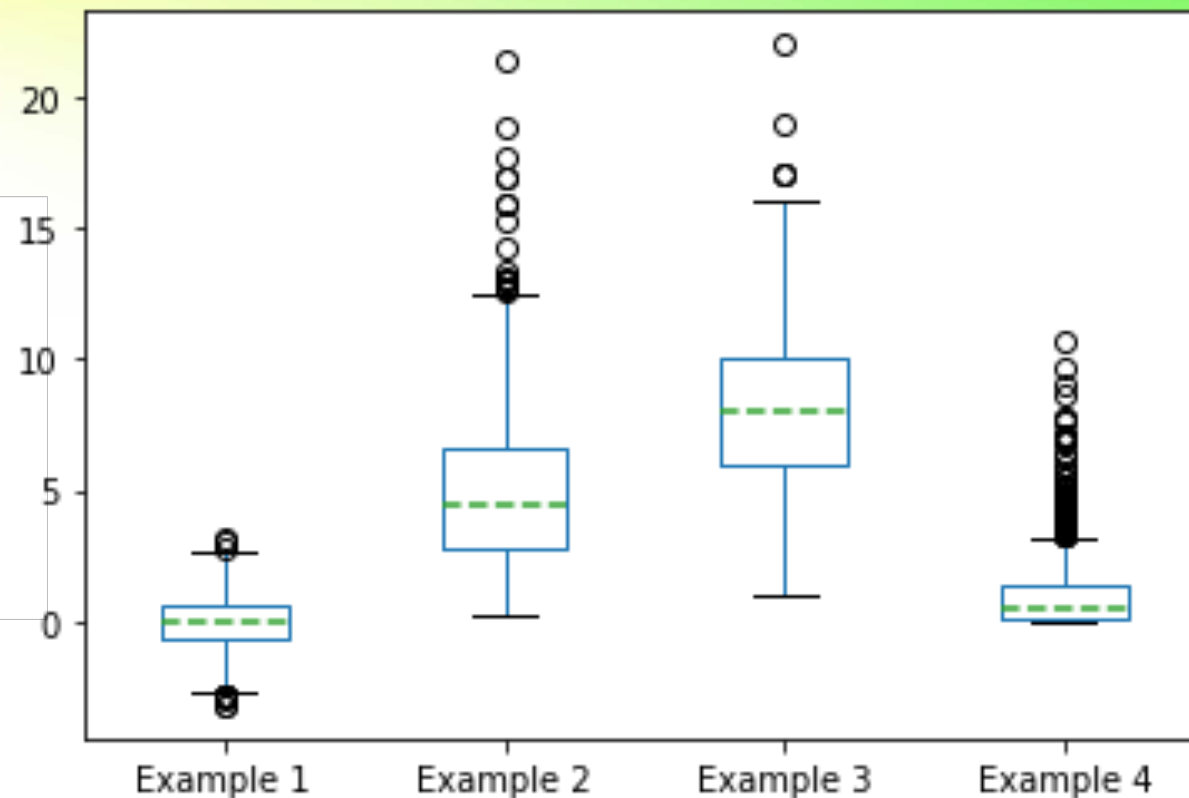
count	5.000000e+03
mean	-0.019447
std	0.983013
min	-3.991560
25%	-0.674213
50%	-0.021726
75%	0.641164
max	3.893373



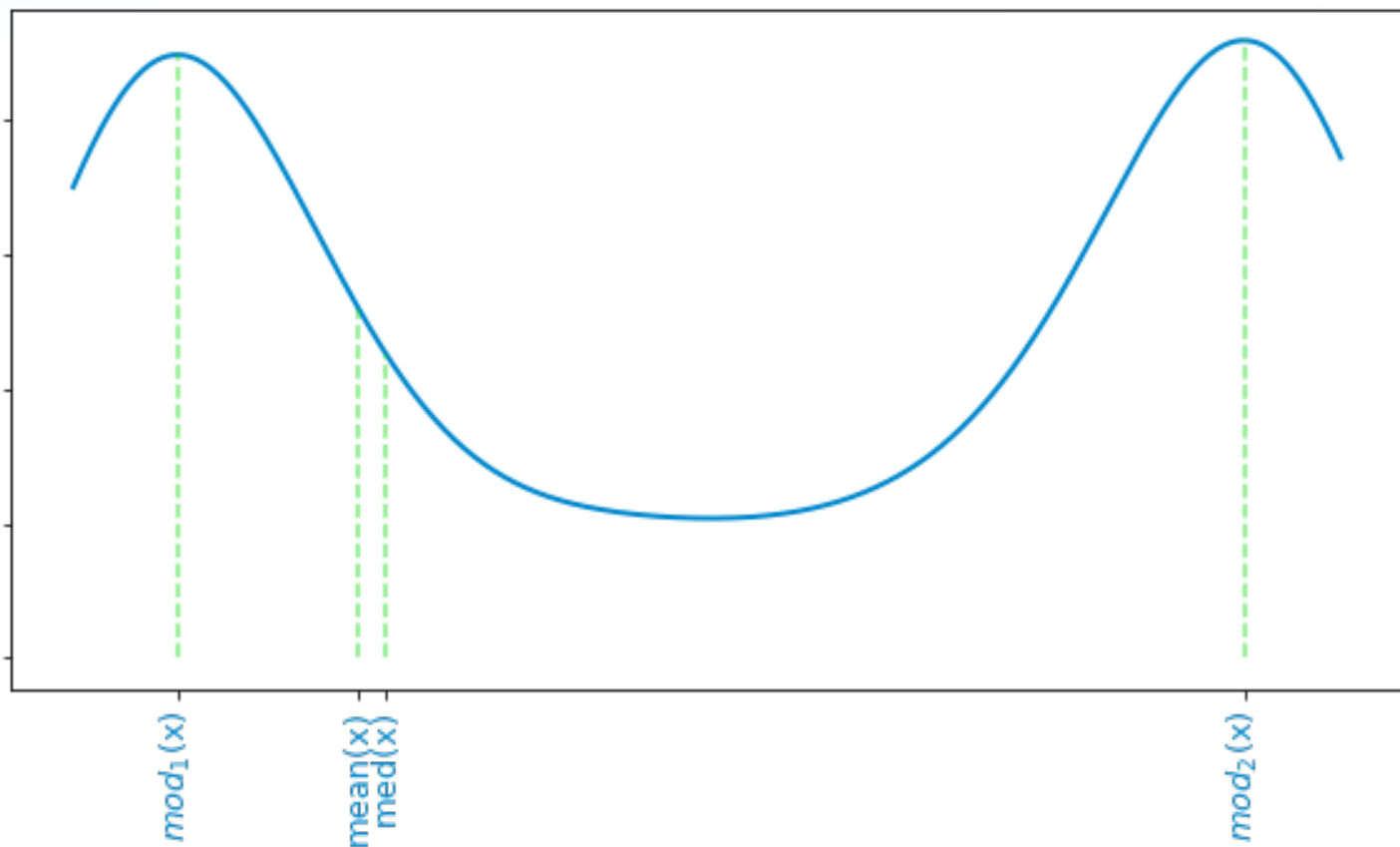
Важные характеристики распределений



	Example 1	Example 2	Example 3	Example 4
count	1000	1000	1000	1000
mean	0.004355	5.011983	7.883000	1.026078
std	1.028369	2.971487	2.849461	1.413119
min	-3.187946	0.245101	1.000000	0.000002
25%	-0.697595	2.743008	6.000000	0.114400
50%	0.030252	4.488515	8.000000	0.493133
75%	0.673652	6.620770	10.000000	1.361201
max	3.209859	21.437900	22.000000	10.732228

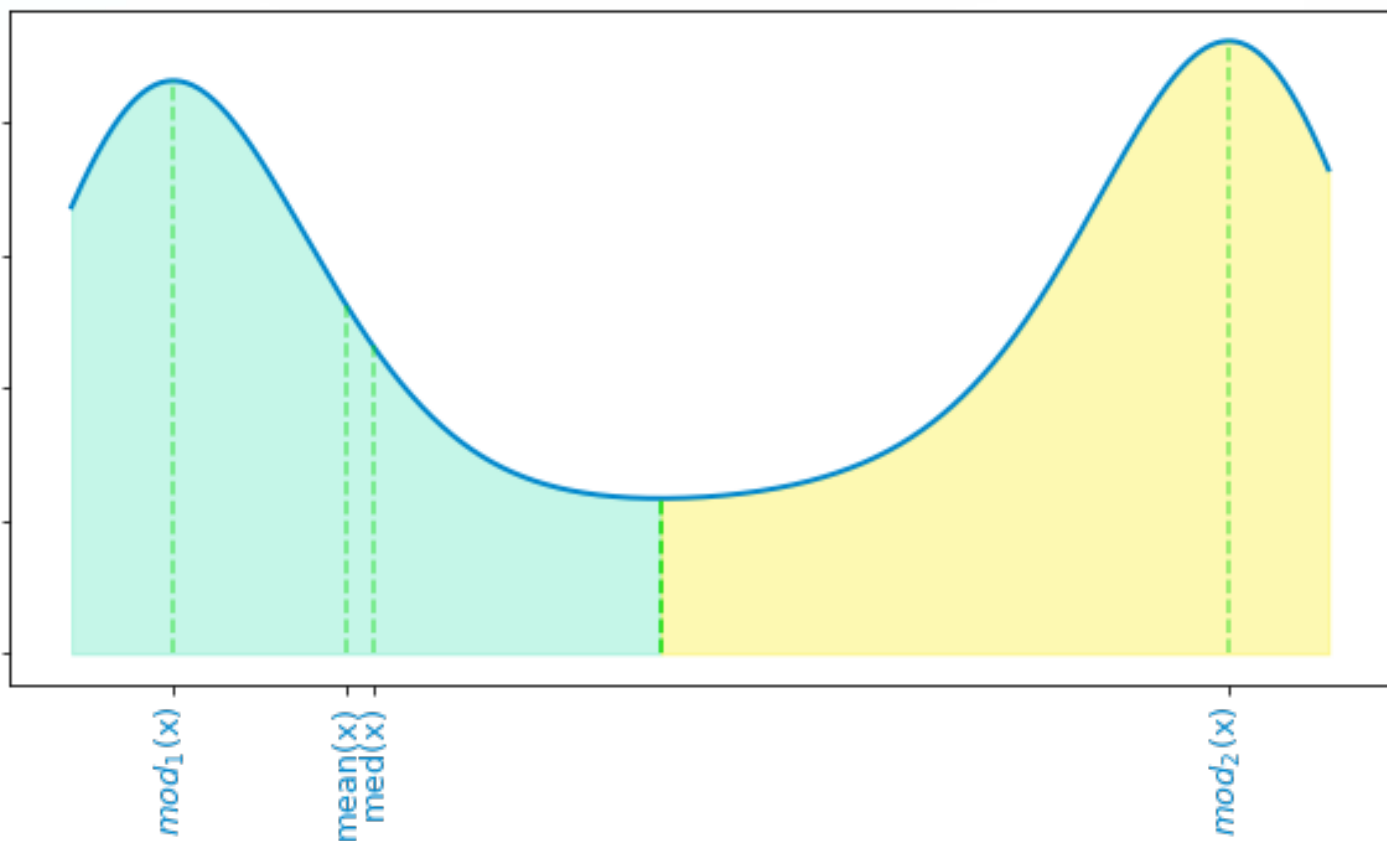


Важные характеристики распределений



Как пользоваться?

Важные характеристики распределений



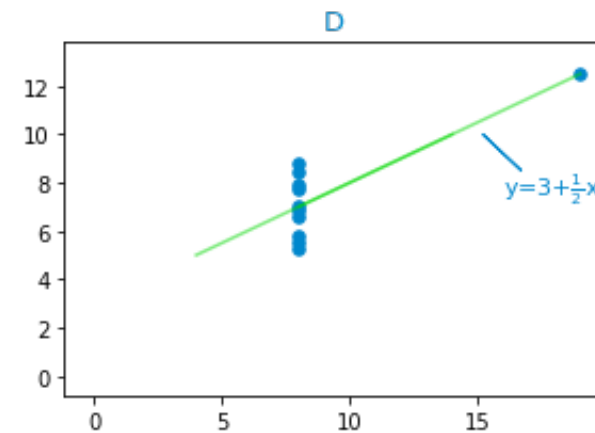
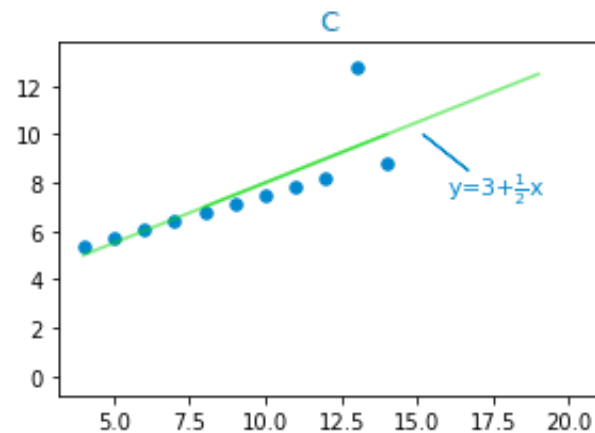
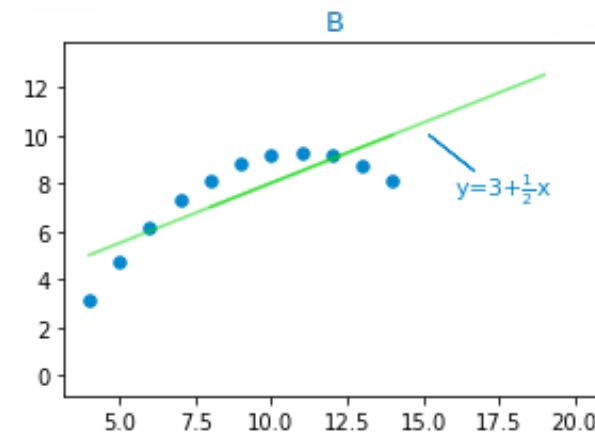
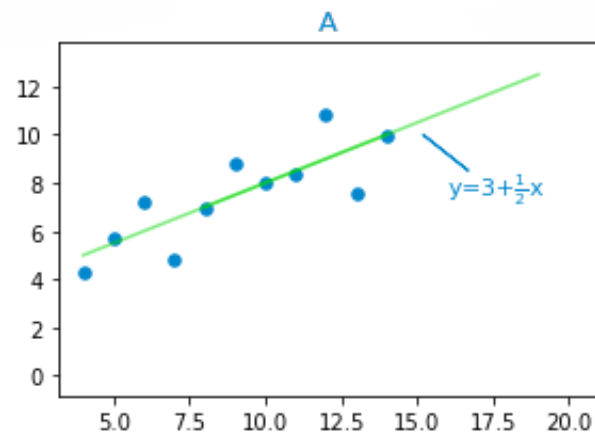
Сегментировать!

Важные характеристики распределений

Квартет Анскомбе	A	B	C	D
Среднее значение x	9.00	9.00	9.00	9.00
Дисперсия x	11.00	11.00	11.00	11.00
Среднее значение y	7.50	7.50	7.50	7.50
Дисперсия y	4.21	4.21	4.21	4.21
R^2	0.67	0.67	0.67	0.67
Прямая линейной регрессии	$y = 3 + 0.5x$	$y = 3 + 0.5x$	$y = 3 + 0.5x$	$y = 3 + 0.5x$

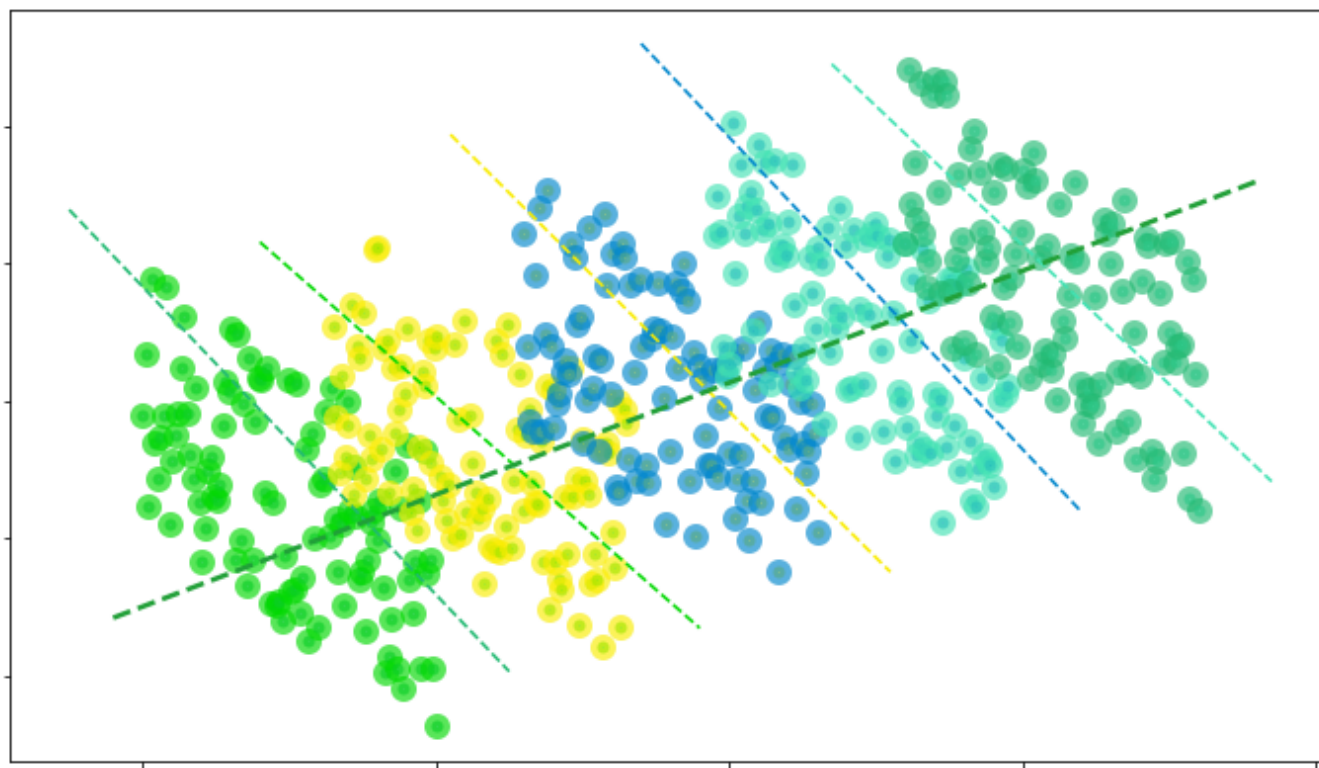
Важные характеристики распределений

Квартет Анскомбе



Важные характеристики распределений

Парадокс Симпсона





Важные характеристики распределений

Всегда смотрите на гистограммы/функции вероятности!

Характеристики могут привести в заблуждение!

Но, если мы работаем в одном и том же пространстве событий, то характеристики помогают сравнивать различные подходы, показатели, препараты, продукты...



Важные характеристики распределений

Выборочное среднее считается по такой формуле

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$



Важные характеристики распределений

Выборочная медиана, необходимо просто отсортировать выборку и выбрать значение в середине

$$X^n = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$$

$$med = \begin{cases} X_{(k+1)}, n = 2k + 1 \\ \frac{X_{(k)} + X_{(k+1)}}{2}, n = 2k \end{cases}$$



Важные характеристики распределений

Выборочная дисперсия считается по такой формуле, деля на $n-1$, а не на n мы получаем так называемую “несмещенную оценку” — это точечная оценка, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру.

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Предсказательный интервал

Зная как распределена случайная величина X , мы можем понять в каком диапазоне она скорее всего окажется

$$\mathbb{P}\left(X_{\frac{\alpha}{2}} \leq X \leq X_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$





Доверительные интервалы

$$\mathbb{P}(C_L \leq \theta \leq C_R) \geq 1 - \alpha$$

Левый
предел

Оцениваемый
параметр

Правый
предел

Уровень доверия



Технология

Зная как распределена статистика, мы, используя алгебраические преобразования можем понять в каком диапазоне будет изменяться неизвестный параметр. Диапазон при этом чаще всего задается квантилями распределений и другими статистиками по выборке



Практика? Практика!

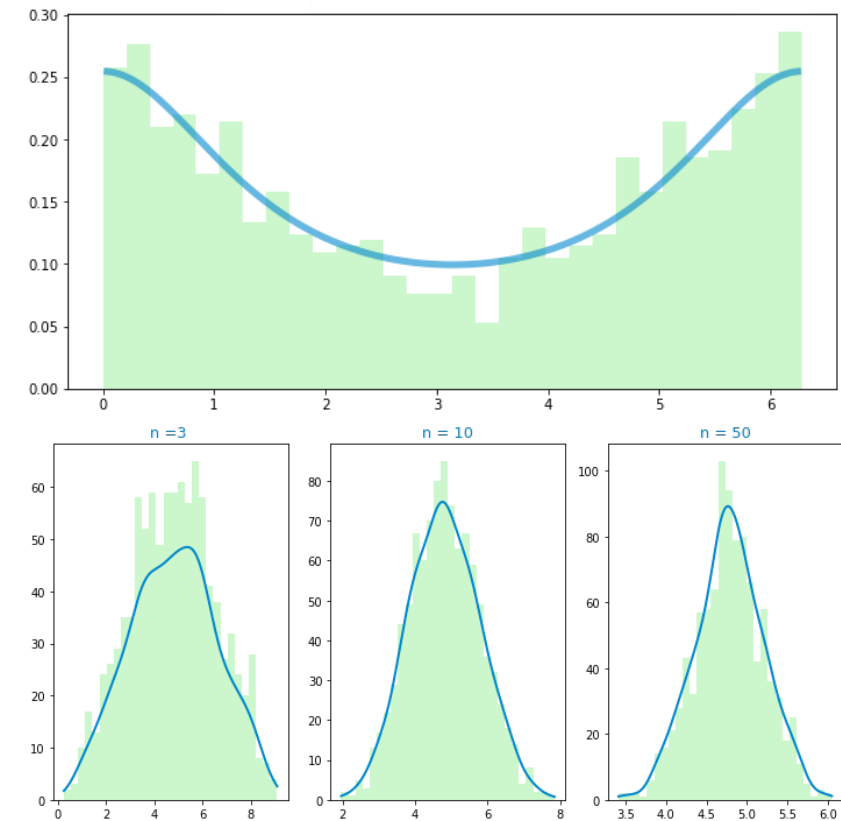


Центральная предельная теорема

<https://habr.com/ru/post/471198/>

<http://datascientist.one/central-limit-theorem/>

<https://www.youtube.com/watch?v=lnXimz8zikc>



Центральная предельная теорема

Распределение выборочного среднего набора независимых одинаково распределенных случайных величин хорошо приближается нормальным распределением:

$$\bar{X}_n \approx \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}X, \frac{\mathbb{D}X}{n})$$



Центральная предельная теорема

Предсказательный интервал для \bar{X}

$$P\left(\mu - z_{1 - \alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X}_n \leq \mu + z_{1 - \alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Доверительный интервал для μ

$$P\left(\bar{X}_n - z_{1 - \alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X}_n + z_{1 - \alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$



Центральная предельная теорема

Доверительный интервал для $\mathbb{E}X$

$$P\left(\overline{X}_n - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\mathbb{D}X}{n}} \leq \mathbb{E}X \leq \overline{X}_n + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\mathbb{D}X}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

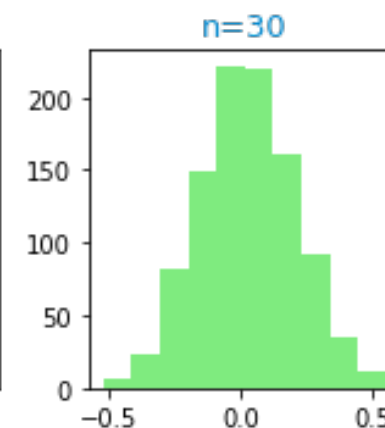
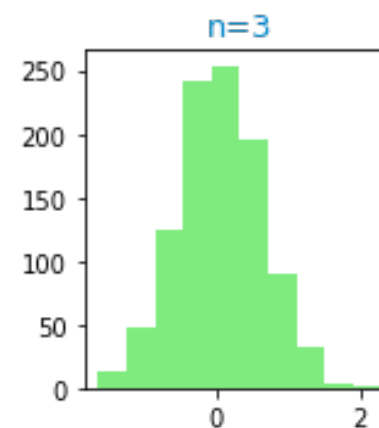
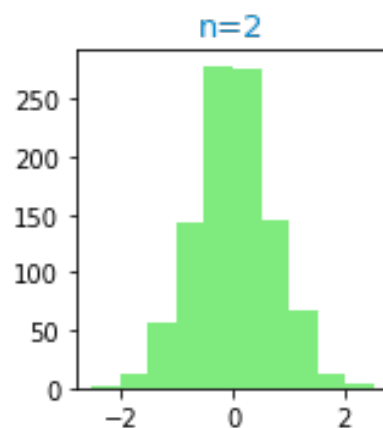
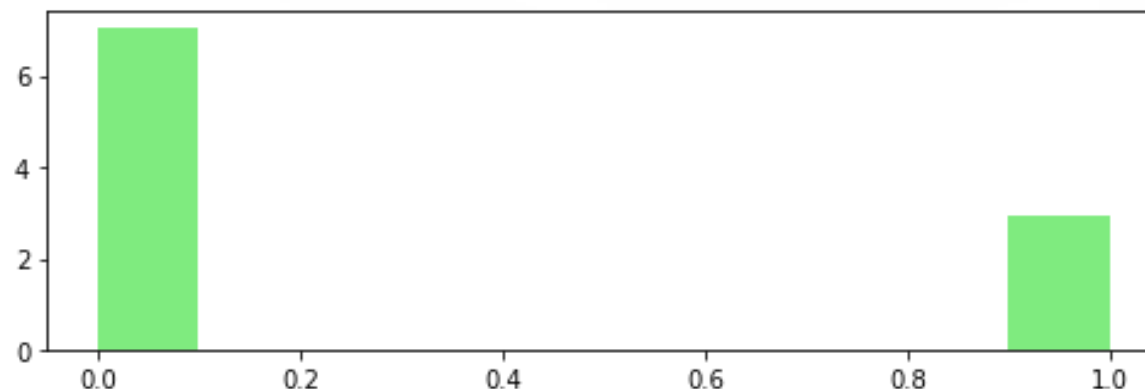
Центральная предельная теорема

Распределение Бернулли

$$X \sim \text{Ber}(p)$$

$$P(X = 1) = p$$

$$P(X = 0) = 1 - p = q$$



Центральная предельная теорема



Распределение Бернулли

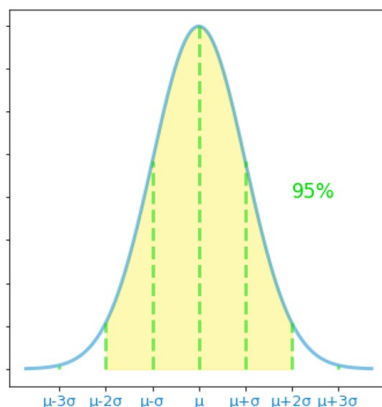
$$\bar{p} \approx \sim N(\mathbb{E}X, \frac{\mathbb{D}X}{n})$$

$$X \sim \text{Ber}(p) \Rightarrow \mathbb{E}X = p, \mathbb{D}X = p(1-p)$$

$$P(\bar{p} - 2\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \leq p \leq \bar{p} + 2\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}) \approx 95\%$$

$$\bar{p} \approx \sim N(p, \frac{p(1-p)}{n})$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$



Пример:

Эксперимент 1: 30 подбрасываний, $\bar{p} = 0.467$

95% доверительный интервал: 0.285...0.649

Эксперимент 2: 700 подбрасываний, $\bar{p} = 0.556$

95% доверительный интервал: 0.519...0.594

Центральная предельная теорема

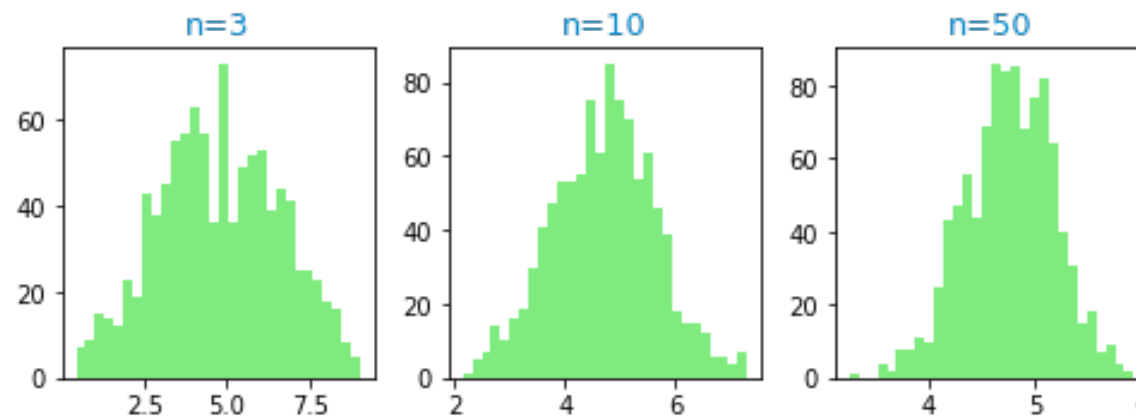
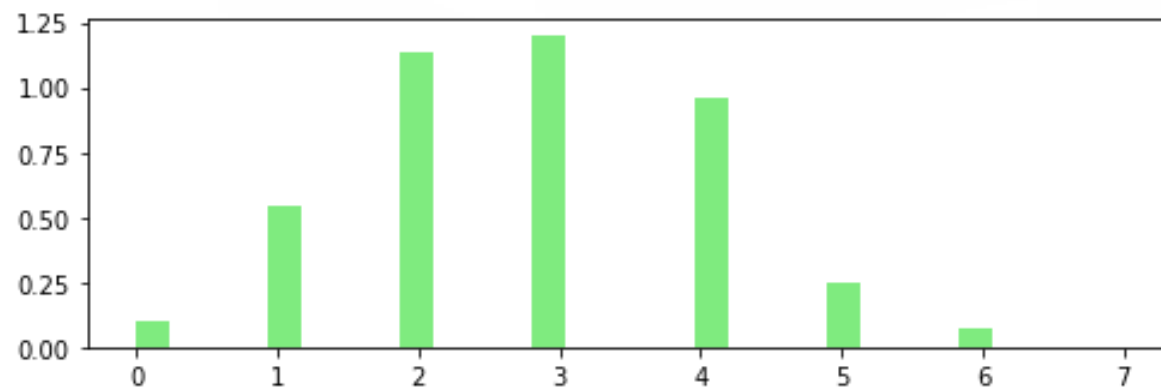
Биномиальное распределение

$$P(X = n) = p^n *$$

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} **$$

* вероятность попасть n-раз

** вероятность попасть k-раз из n





Центральная предельная теорема

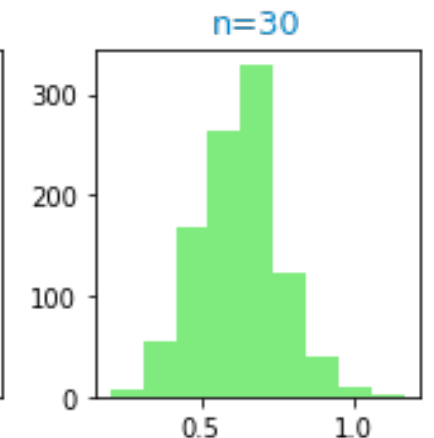
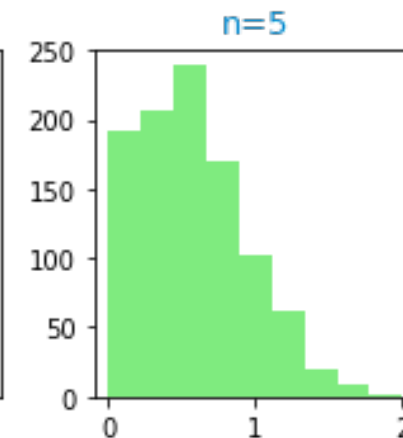
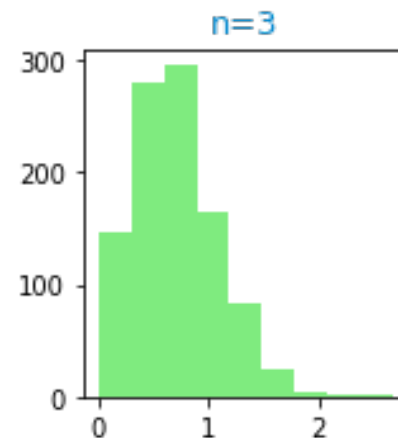
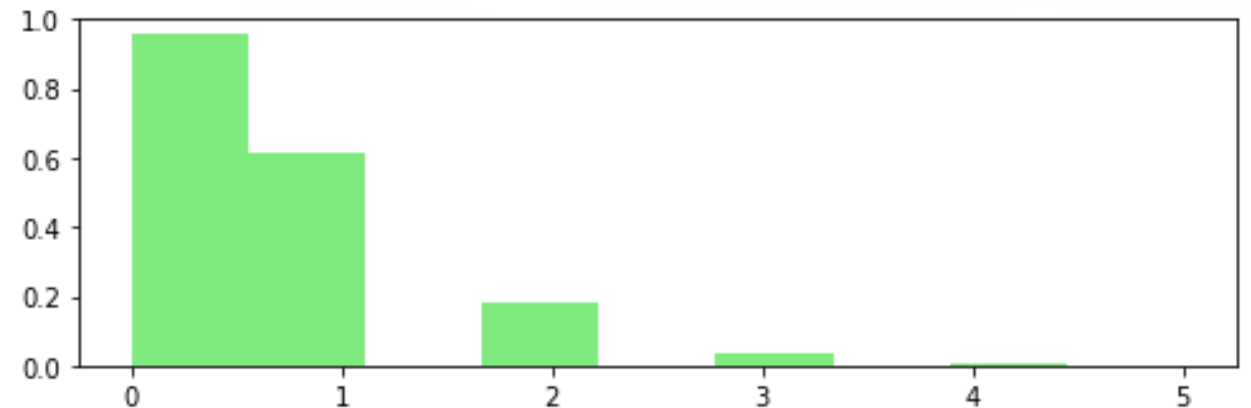
Биноминальное распределение

$$P(X = n) = p^n *$$

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} **$$

* вероятность попасть n-раз

** вероятность попасть k-раз из n



ЦПТ. Машина Гальтона

$$2^0 = 1$$

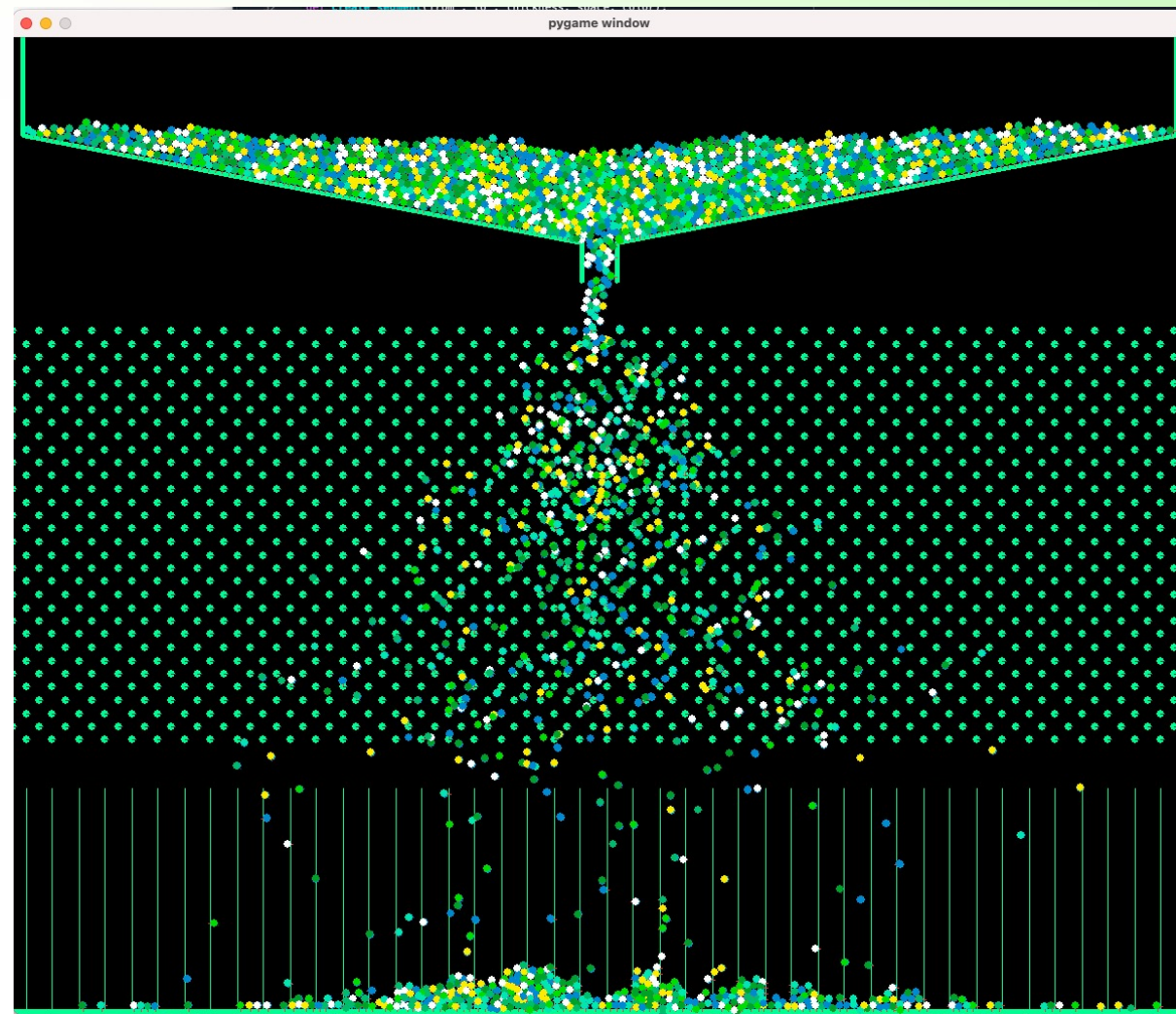
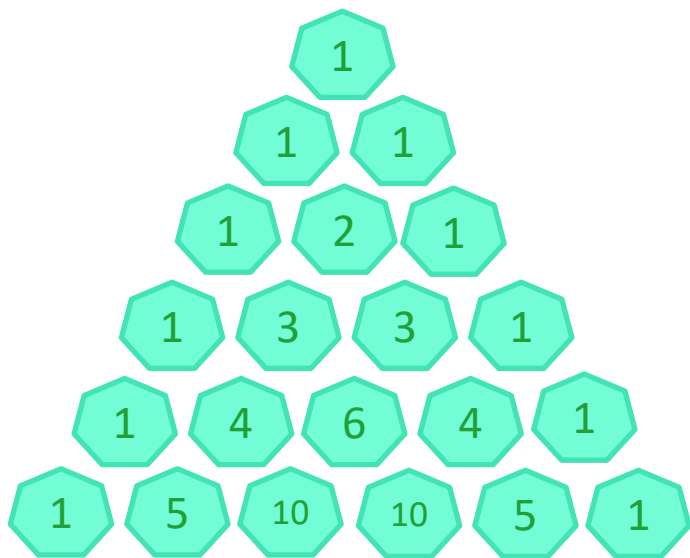
$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 4$$

$$2^3 = 6$$

$$2^4 = 16$$

$$2^5 = 32$$





Практика? Практика!





Практика? Практика!



Резюме

- Узнали как оценивать распределение по выборке
- Рассмотрели важные характеристики распределений
- Посмотрели на важные статистики
- Узнали что такое Центральная предельная теорема и чем она может быть полезна



Обратная связь

?



Спасибо за внимание!