

# ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ В ЗАДАЧАХ

$$A = \left( \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j} \right) \setminus A_0$$

УДК 517.5  
ББК 22.16  
Д 27

**Действительный анализ в задачах** / П. Л. Ульянов, А. Н. Бахвалов, М. И. Дьяченко, К. С. Казарян, П. Сифуэнтес. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 416 с. — ISBN 5-9221-0595-7.

Книга является учебным пособием по действительному анализу. Все основные утверждения курса изложены в виде системы задач, снабженных полными решениями. Основное содержание книги составляет изложение теории меры и интеграла Лебега.

Для студентов и аспирантов физико-математических специальностей, в том числе для самостоятельного изучения курса действительного анализа, а также для преподавателей, ведущих по этому курсу семинарские занятия.

Библиогр. 15 назв.

© ФИЗМАТЛИТ, 2005  
© П. Л. Ульянов, А. Н. Бахвалов,  
М. И. Дьяченко, К. С. Казарян,  
П. Сифуэнтес, 2005  
ISBN 5-9221-0595-7

# ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                          |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Предисловие . . . . .                                                                    | 4   |
| Глава 1. Операции над множествами . . . . .                                              | 7   |
| Глава 2. Мощности множеств . . . . .                                                     | 13  |
| Глава 3. Множества в $\mathbb{R}^n$ и других метрических пространствах . . . . .         | 30  |
| Глава 4. Непрерывные функции на метрических пространствах . . . . .                      | 68  |
| Глава 5. Системы множеств . . . . .                                                      | 85  |
| Глава 6. Меры на системах множеств . . . . .                                             | 97  |
| Глава 7. Продолжение меры . . . . .                                                      | 113 |
| Глава 8. Измеримые функции . . . . .                                                     | 160 |
| Глава 9. Сходимость по мере и почти всюду . . . . .                                      | 180 |
| Глава 10. Интеграл Лебега . . . . .                                                      | 200 |
| Глава 11. Сравнение интегралов Лебега и Римана . . . . .                                 | 241 |
| Глава 12. Теорема Фубини . . . . .                                                       | 261 |
| Глава 13. Пространства $L_p$ и некоторые другие приложения интеграла<br>Лебега . . . . . | 272 |
| Глава 14. Функции ограниченной вариации . . . . .                                        | 315 |
| Глава 15. Абсолютно непрерывные функции . . . . .                                        | 347 |
| Глава 16. Интеграл Римана–Стильеса . . . . .                                             | 384 |
| Список литературы . . . . .                                                              | 414 |
| Предметный указатель . . . . .                                                           | 415 |

## Предисловие

Если в классическом анализе изучались, в основном, функции, имеющие определённую степень гладкости, то со второй половины XIX века возникли новые постановки задач, которые требовали совершенно других способов решения. В это время создавалась теория множеств, на базе которой в начале XX века была построена теория меры и найдено чрезвычайно плодотворное определение интеграла Лебега. Родоначальниками этого направления были французские математики Борель, Лебег, Бэр. Такое развитие событий привело к необходимости по-новому решать различные задачи, связанные с проблемами представления и приближения функций, с понятиями первообразной и интеграла, с вопросами интегрирования и дифференцирования рядов, изучением свойств функций, полученных в результате предельного перехода и др. Исследования в этих областях заложили фундамент метрической теории функций действительного переменного (действительного анализа). Совершенно очевидно, что действительный анализ является продолжением классического анализа.

В Москве действительным анализом занимались различные математики, но наибольшего успеха добился Н. Н. Лузин, который с 1914 г. стал читать в Московском университете факультативный курс по теории функций действительного переменного, а также вести различные исследовательские семинары, где обсуждались актуальные научные вопросы. К исследованиям были привлечены многие студенты. На семинарах происходил широкий обмен идеями, обсуждались новые задачи и подходы к их решению. Тем самым была создана научная школа, оказавшая большое влияние на весь дальнейший ход развития математики.

Эту школу Н. Н. Лузина прошли крупнейшие математики СССР (П. С. Александров, А. Н. Колмогоров, М. А. Лаврентьев, П. С. Новиков, Н. К. Бари, Л. В. Келдыш, Л. А. Люстерник, Д. Е. Меньшов, М. Я. Суслин, А. Я. Хинчин, А. А. Ляпунов, П. С. Урысон, В. С. Фёдоров, Л. Г. Шнирельман, В. В. Немыцкий и др.).

Идеи и методы исследований действительного анализа нашли применение в различных областях математики (комплексный анализ, функциональный анализ, теория вероятностей, дифференциальные уравнения, вариационное исчисление, теория чисел, вычислительная математика и др.).

Основам действительного анализа посвящено много книг, где даются общие понятия меры множества, определение интеграла Лебега и его обобщений. Мы упомянем здесь первые книги на русском языке А. Лебега [1], П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова [2], Н. Н. Лузина [3], а также некоторые из более поздних изданий: С. Сакс [4], П. Халмуш [5], Ф. Рисс и Б. Сёкефальви-Надь [6], И. П. Натансон [7], А. Н. Колмогоров и С. В. Фомин [8], Г. П. Толстов [9]. Отметим также недавно изданную книгу М. И. Дьяченко и П. Л. Ульянова «Мера

и интеграл» [10]. Авторами предпринята попытка создания учебника, содержание которого близко к курсу, читаемому студентам-математикам МГУ по действительному анализу. Книга уже была переиздана в России, а её перевод на испанский язык вышел в издательстве «Аддисон–Весли».

Здесь уместно напомнить, что с начала пятидесятых годов XX века на механико-математическом факультете МГУ стал читаться большой курс «Анализ III», который включал в себя теорию меры, теорию функций, функциональный анализ, интегральные уравнения и вариационное исчисление. Аналогичные курсы вводились и в других университетах страны. Освоение столь большого курса было достаточно трудным, и зачастую студенты плохо овладевали основными понятиями. Так, например, многие не видели различия между интегрируемостью по Риману, по Лебегу и по Риману в несобственном смысле даже для простейших функций, не говоря о более сложных вопросах. Всё это привело к тому, что из курса «Анализ III» были выделены и стали читаться отдельно курсы «Теория функций» и «Функциональный анализ», а более 10 лет назад стал читаться «Действительный анализ» (4-й семестр, со сдачей экзамена) для математиков в МГУ. Практика чтения данного курса показала его несомненную полезность. В то же время выявились и определённые проблемы. Прежде всего к ним можно отнести отсутствие так называемых типовых задач (таких, например, как вычисление интегралов от рациональных функций в математическом анализе или решение линейных уравнений в курсе дифференциальных уравнений). В действительном анализе, как правило, каждая задача носит индивидуальный характер, хотя, разумеется, существуют и общие методы решения. Другая проблема не является специфической для курса действительного анализа, но от этого её острота не снижается. Речь идёт о том, что зачастую студенты не улавливают тесной взаимосвязи между лекционным материалом и задачами, решаемыми на семинарах.

В связи с этим, по мнению авторов, возникла необходимость в написании книги, которая помогла бы хотя бы частично разрешить упомянутые проблемы. Предлагаемая книга «Действительный анализ в задачах» состоит более чем из 900 задач и составлена новым способом по сравнению с традиционными пособиями такого типа. В каждой главе после перечисления основных определений идёт изложение свойств рассматриваемых понятий путём решения системы следующих друг за другом задач и таким образом излагается теория, составляющая курс «Действительный анализ», а также приводятся другие задачи, углубляющие эту теорию. Многие задачи просты, но имеются и достаточно сложные, решение которых требует серьёзных размышлений. В конце каждой главы приведено решение всех задач, и если у использующего этот задачник нет возможности прорешать все задачи, он может познакомится с их решениями.

Большинство из приведённых в книге задач предлагалось студентам и аспирантам-математикам МГУ на протяжении многих лет. Следует отметить, что по рассматриваемой тематике уже написан ряд задачников, пользующихся заслуженной популярностью. Наиболее известными из них являются [11]–[15]. Многие из приведённых там задач вошли и в нашу книгу. Однако мы надеемся, что наш задачник будет более подходящим для студентов, изучающих действительный анализ, по следующим причинам. Задачник А. А. Кириллова и А. Д. Гвишиани [11] ориентирован прежде всего на изучение функционального анализа, задач из действительного анализа там не очень много и они не охватывают всех его разделов. Задачник С. А. Теляковского [12] содержит много интересных задач и весьма близок по набору задач к предлагаемой вниманию читателей книге, но в нём нет решений, что существенно затрудняет его использование в качестве пособия для изучения действительного анализа. Лишь небольшая часть решений приведена и в задачнике [13]. В задачнике Ю. С. Очана [14] очень подробно рассматриваются вопросы теории множеств и меры, но гораздо скучнее представлены задачи по теории интеграла, а задачи по приложению этой теории практически отсутствуют. Авторы задачника [15] стремились охватить широкий круг тем из разных разделов математического анализа, в т.ч. специфические вопросы, мало представленные в учебной литературе (асимптотика, выпуклые функции, мера Хаусдорфа). Поэтому лишь сравнительно небольшая часть этого задачника относится к вопросам, затрагиваемым в нашей книге.

Мы надеемся, что наш задачник будет также полезен студентам, аспирантам и преподавателям тех университетов и институтов, где обучающихся знакомят с понятиями меры множества, измеримых функций, интегралов Римана–Стильтьеса и Лебега, т. е. с основными понятиями действительного анализа. Будущим специалистам в области теории функций, функционального анализа и смежных областей стоит ознакомиться с решениями возможно большего количества задач. Для студентов, далёких от теории функций, наш задачник тоже может служить источником полезной информации по действительному анализу. Эта книга полезна и преподавателям: она содержит богатый набор задач, которые преподаватель по своему выбору может предложить студентам и аспирантам.

Вероятно, при столь большом наборе задач книга не лишена поправок. Авторы будут признательны за указания на неточности и сообщения способов их устранения.

М. И. Дьяченко благодарит Российский гуманитарный научный фонд за финансовую поддержку (грант 05-06-06423а).

*Авторы*

# Г л а в а 1

## ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Мы будем использовать обычные обозначения для операций над множествами. Если  $A$  и  $B$  — произвольные множества, то  $A \cup B$  — объединение этих множеств,  $A \cap B$  — их пересечение,  $A \setminus B$  — их разность, и  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  — их симметрическая разность,  $A \times B$  — их декартово произведение, т. е. множество всех пар  $(a, b)$ , где  $a \in A$  и  $b \in B$ . Декартовым произведением  $n$  множеств называется множество наборов  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , где  $a_j \in A_j$  для  $j = 1, 2, \dots, n$ . Если множества  $A$  и  $B$  не пересекаются, то их объединение называется дизъюнктным и обозначается через  $A \sqcup B$ .

Для конечной или бесконечной последовательности множеств используются обозначения:  $\bigcup_k A_k$  для объединения,  $\bigcup_k A_k$  для дизъюнктного объединения (объединения попарно непересекающихся множеств),  $\bigcap_k A_k$  для пересечения множеств, а также  $\bigotimes_{k=1}^n A_k$  для декартова произведения  $n$  множеств.

Верхним пределом последовательности множеств  $\{A_n\}$  называется множество  $\limsup A_n$ , состоящее из точек, принадлежащих бесконечному числу различных множеств  $\{A_{n_k}\}$ .

Нижним пределом последовательности множеств  $\{A_n\}$  называется множество  $\liminf A_n$ , состоящее из точек, принадлежащих всем множествам  $\{A_n\}$ , кроме, быть может, конечного числа.

### ЗАДАЧИ

Пусть  $A, B, C$  и  $D$  — произвольные множества. Доказать следующие равенства (1.1–1.21).

- 1.1.  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ .
- 1.2.  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ .
- 1.3.  $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ .
- 1.4.  $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ .
- 1.5.  $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$ .
- 1.6.  $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$ .

- 1.7.**  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$
- 1.8.**  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$
- 1.9.**  $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$
- 1.10.**  $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C).$
- 1.11.**  $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D).$
- 1.12.**  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$
- 1.13.**  $A \Delta (A \Delta B) = B.$
- 1.14.**  $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C).$
- 1.15.**  $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C).$
- 1.16.**  $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C).$
- 1.17.**  $(A \Delta B) \setminus C = (A \setminus C) \Delta (B \setminus C).$
- 1.18.**  $(A \cup C) \times B = (A \times B) \cup (C \times B).$
- 1.19.**  $(A \cap C) \times B = (A \times B) \cap (C \times B).$
- 1.20.**  $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$
- 1.21.**  $(A \cup C) \times (B \cup D) = (A \times B) \cup (A \times D) \cup (C \times B) \cup (C \times D).$

Доказать следующие вложения (1.22–1.31). Построить примеры, показывающие, что обратные вложения, вообще говоря, неверны.

- 1.22.**  $A \cup (B \setminus C) \supseteq (A \cup B) \setminus (A \cup C).$
- 1.23.**  $A \cup (B \Delta C) \supseteq (A \cup B) \Delta (A \cup C).$
- 1.24.**  $A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$
- 1.25.**  $A \setminus (B \cap C) \supseteq (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$
- 1.26.**  $A \setminus (B \setminus C) \supseteq (A \setminus B) \setminus (A \setminus C).$
- 1.27.**  $A \Delta (B \cup C) \subseteq (A \Delta B) \cup (A \Delta C).$
- 1.28.**  $A \Delta (B \cap C) \supseteq (A \Delta B) \cap (A \Delta C).$
- 1.29.**  $A \Delta (B \setminus C) \supseteq (A \Delta B) \setminus (A \Delta C).$
- 1.30.**  $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D).$
- 1.31.**  $(A \setminus C) \times (B \setminus D) \subseteq (A \times B) \setminus (C \times D).$

Пусть  $A$  — некоторое множество и  $\{B_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  — некоторая система множеств. Доказать следующие равенства (1.32–1.34).

- 1.32.**

$$A \bigcap \left( \bigcup_{\omega \in \Omega} B_\omega \right) = \bigcup_{\omega \in \Omega} (A \cap B_\omega).$$

- 1.33.**

$$A \bigcup \left( \bigcap_{\omega \in \Omega} B_\omega \right) = \bigcap_{\omega \in \Omega} (A \cup B_\omega).$$

**1.34.**

$$A \setminus \left( \bigcup_{\omega \in \Omega} B_\omega \right) = \bigcap_{\omega \in \Omega} (A \setminus B_\omega).$$

Пусть даны множества  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Выразить следующие множества через  $A$ ,  $B$  и  $C$  при помощи операций  $\cup$ ,  $\cap$ ,  $\setminus$  и  $\Delta$  (1.35–1.42).

**1.35.** Множество элементов, принадлежащих всем трём множествам.

**1.36.** Множество элементов, принадлежащих хотя бы двум из множеств  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

**1.37.** Множество элементов, принадлежащих ровно двум из множеств  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

**1.38.** Множество элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

**1.39.** Множество элементов, принадлежащих ровно одному из множеств  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

**1.40.** Множество элементов, принадлежащих  $A$ ,  $B$ , но не принадлежащих  $C$ .

**1.41.** Множество элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств  $A$ ,  $B$ , но не принадлежащих  $C$ .

**1.42.** Множество элементов, принадлежащих ровно одному из множеств  $A$ ,  $B$ , но не принадлежащих  $C$ .

**1.43.** Выразить множество  $\limsup A_n$  через множества  $A_n$  с помощью операций  $\cup$  и  $\cap$ .

**1.44.** Выразить множество  $\liminf A_n$  через множества  $A_n$  с помощью операций  $\cup$  и  $\cap$ .

## РЕШЕНИЯ

**1.1.**  $x \in (A \cup B) \cap C \iff \{x \in A \text{ или } x \in B\} \text{ и } x \in C \iff \{x \in A \text{ и } x \in C\} \text{ или } \{x \in B \text{ и } x \in C\} \iff x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ .  $\square$

**1.2.**  $x \in (A \cap B) \cup C \iff \{x \in A \text{ и } x \in B\} \text{ или } x \in C \iff \{x \in A \text{ и } x \in C\} \text{ или } \{x \in B \text{ и } x \in C\} \iff x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$ .  $\square$

**1.3.**  $x \in A \cap B \iff x \in A \text{ и } x \in B \iff x \in A \text{ и } x \notin A \setminus B \iff x \in A \setminus (A \setminus B)$ .  $\square$

**1.4.**  $x \in A \setminus (B \setminus C) \iff x \in A \text{ и } x \notin B \setminus C \iff \{x \in A \text{ и } x \notin B\} \text{ или } \{x \in A \text{ и } x \in C\} \iff x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ .  $\square$

**1.5.**  $x \in (A \setminus B) \setminus C \iff x \in A \setminus B \text{ и } x \notin C \iff \{x \in A \text{ и } x \notin B\} \text{ и } x \notin C \iff x \in A \setminus (B \cup C)$ .  $\square$

**1.6.**  $x \in (A \setminus B) \setminus C \iff x \in A \setminus B \text{ и } x \notin C \iff \{x \in A \text{ и } x \notin B\} \text{ и } x \notin C \iff \{x \in A \text{ и } x \notin C\} \text{ и } x \notin B \iff \{x \in A \text{ и } x \notin C\} \text{ и } x \notin (B \setminus C) \iff x \in (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$ .  $\square$

**1.7.**  $x \in A \setminus (B \cup C) \iff x \in A \text{ и } x \notin B \cup C \iff \{x \in A \text{ и } x \notin B\}$  и  $\{x \in A \text{ и } x \notin C\} \iff x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ .  $\square$

**1.8.**  $x \in A \setminus (B \cap C) \iff x \in A \text{ и } x \notin B \cap C \iff \{x \in A \text{ и } x \notin B\}$  или  $\{x \in A \text{ и } x \notin C\} \iff x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ .  $\square$

**1.9.**  $x \in (A \cup B) \setminus C \iff x \in A \cup B \text{ и } x \notin C \iff \{x \in A \text{ и } x \notin C\}$  или  $\{x \in B \text{ и } x \notin C\} \iff x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ .  $\square$

**1.10.**  $x \in (A \cap B) \setminus C \iff x \in A \cap B \text{ и } x \notin C \iff \{x \in A \text{ и } x \notin C\}$  и  $\{x \in B \text{ и } x \notin C\} \iff x \in (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ .  $\square$

**1.11.**  $x \in (A \setminus B) \cap (C \setminus D) \iff \{x \in A \text{ и } x \notin B\} \text{ и } \{x \in C \text{ и } x \notin D\} \iff \{x \in A \text{ и } x \in C\} \text{ и } \{x \notin B \text{ и } x \notin D\} \iff x \in (A \cap C) \setminus (B \cup D)$ .  $\square$

**1.12.**  $x \in A \Delta B \iff \{x \in A \text{ и } x \notin B\} \text{ или } \{x \in B \text{ и } x \notin A\} \iff \{x \in A \text{ или } x \in B\} \text{ и } x \notin A \cap B \iff x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .  $\square$

**1.13.**  $x \in A \Delta (A \Delta B) \iff \{x \in A \text{ и } x \notin A \Delta B\} \text{ или } \{x \in A \Delta B \text{ и } x \notin A\} \iff \{x \in A \text{ и } x \in B\} \text{ или } \{x \in B \text{ и } x \notin A\} \iff x \in B$ .  $\square$

**1.14.**  $x \in (A \Delta B) \Delta C \iff \{x \in A \Delta B \text{ и } x \notin C\} \text{ или } \{x \in C \text{ и } x \notin A \Delta B\} \iff \{x \in A \text{ и } \{x \notin B \text{ и } x \notin C\}\} \text{ или } \{x \in B \text{ и } \{x \notin A \text{ и } x \notin C\}\} \text{ или } \{x \in C \text{ и } \{x \notin A \text{ и } x \in B\}\} \iff \{x \in A \text{ и } x \notin B \Delta C\} \text{ или } \{x \in B \Delta C \text{ и } x \notin A\} \iff x \in A \Delta (B \Delta C)$ .  $\square$

**1.15.**  $x \in (A \setminus B) \cap C \iff x \in A \setminus B \text{ и } x \in C \iff \{x \in A \text{ и } x \notin B\}$  и  $x \in C \iff \{x \in A \text{ и } x \in C\} \text{ и } x \notin B \cap C \iff x \in (A \cap C) \setminus (B \cap C)$ .  $\square$

**1.16.**  $x \in (A \Delta B) \cap C \iff x \in A \Delta B \text{ и } x \in C \iff \{\{x \in A \text{ и } x \in C\} \text{ и } x \notin B\} \text{ или } \{\{x \in B \text{ и } x \in C\} \text{ и } x \notin A\} \iff \{x \in A \cap C \text{ и } x \notin B\}$  или  $\{x \in B \cap C \text{ и } x \notin A\} \iff \{x \in A \cap C \text{ и } x \notin B \cap C\} \text{ или } \{x \in B \cap C \text{ и } x \notin A \cap C\} \iff x \in (A \cap C) \Delta (B \cap C)$ .  $\square$

**1.17.**  $x \in (A \Delta B) \setminus C \iff x \in A \Delta B \text{ и } x \notin C \iff \{\{x \in A \text{ и } x \notin B\} \text{ и } x \notin C\} \text{ или } \{\{x \in B \text{ и } x \notin A\} \text{ и } x \notin C\} \iff \{\{x \in A \text{ и } x \notin C\} \text{ и } x \notin B\}$  или  $\{\{x \in B \text{ и } x \notin A\} \text{ и } x \notin C\} \iff \{x \in A \setminus C \text{ и } x \notin B\} \text{ или } \{x \in B \setminus C \text{ и } x \notin A\} \iff \{x \in A \setminus C \text{ и } x \notin B \setminus C\} \text{ или } \{x \in B \setminus C \text{ и } x \notin A \setminus C\} \iff x \in (A \setminus C) \Delta (B \setminus C)$ .  $\square$

**1.18.**  $(x, y) \in (A \cup C) \times B \iff \{x \in A \text{ или } x \in C\} \text{ и } y \in B \iff \{x \in A \text{ и } y \in B\} \text{ или } \{x \in C \text{ и } y \in B\} \iff (x, y) \in (A \times B) \cup (C \times B)$ .  $\square$

**1.19.**  $(x, y) \in (A \cap C) \times B \iff \{x \in A \text{ и } x \in C\} \text{ и } y \in B \iff \{x \in A \text{ и } y \in B\} \text{ и } \{x \in C \text{ и } y \in B\} \iff (x, y) \in (A \times B) \cap (C \times B)$ .  $\square$

**1.20.**  $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D) \iff \{x \in A \text{ и } y \in B\} \text{ и } \{x \in C \text{ и } y \in D\} \iff \{x \in A \text{ и } x \in C\} \text{ и } \{y \in B \text{ и } y \in D\} \iff (x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$ .  $\square$

**1.21.**  $(x, y) \in (A \cup C) \times (B \cup D) \iff \{x \in A \text{ или } x \in C\} \text{ и } \{y \in B \text{ или } y \in D\} \iff \{x \in A \text{ и } y \in B\} \text{ или } \{x \in A \text{ и } y \in D\} \text{ или } \{x \in C \text{ и } y \in B\} \text{ или } \{x \in C \text{ и } y \in D\} \iff (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times D) \cup (C \times B) \cup (C \times D)$ .  $\square$

**1.22.** Заметим, что  $(A \cup B) \setminus (A \cup C) \subseteq B \setminus C \subseteq A \cup (B \setminus C)$ . Но если, например,  $A = \{1\}$ ,  $B = \{2\}$ ,  $C = \{3\}$ , то  $A \cup (B \setminus C) = \{1, 2\} \neq \{2\} = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$ .  $\square$

**1.23.** Заметим, что  $(A \cup B) \Delta (A \cup C) \subseteq B \Delta C \subseteq A \cup (B \Delta C)$ . Если, например,  $A = \{1\}$ ,  $B = \{2\}$ ,  $C = \{3\}$ , то  $A \cup (B \Delta C) = \{1, 2, 3\} \neq \{2, 3\} = (A \cup B) \Delta (A \cup C)$ .  $\square$

**1.24.** Вложение вытекает из задачи 1.7. Если, например,  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{1\}$ ,  $C = \{2\}$ , то  $A \setminus (B \cup C) = \emptyset \neq \{1, 2\} = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ .  $\square$

**1.25.** Вложение вытекает из задачи 1.8. Если, например,  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{1\}$ ,  $C = \{2\}$ , то  $A \setminus (B \cap C) = \{1, 2\} \neq \emptyset = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ .  $\square$

**1.26.** Вложение вытекает из задачи 1.4. Если  $A = B = C$  — непустое множество, то  $A = A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus (A \setminus C) = \emptyset$ .  $\square$

**1.27.**  $x \in A \Delta (B \cup C) \iff \{x \in A \text{ и } x \notin B \cup C\} \text{ или } \{x \notin A \text{ и } x \in B \cup C\} \iff \{x \in A \text{ и } x \notin B\} \text{ или } \{x \notin A \text{ и } x \in B\} \text{ или } \{x \in A \text{ и } x \notin C\} \text{ или } \{x \notin A \text{ и } x \in C\} \iff x \in (A \Delta B) \text{ или } x \in (A \Delta C) \iff x \in (A \Delta B) \cup (A \Delta C)$ . Если, например,  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{1\}$ ,  $C = \{2\}$ , то  $A \Delta (B \cup C) = \emptyset \neq \{1, 2\} = (A \Delta B) \cup (A \Delta C)$ .  $\square$

**1.28.**  $x \in (A \Delta B) \cap (A \Delta C) \iff x \in A \Delta B \text{ и } x \in A \Delta C \iff \{x \in A \text{ и } x \notin B \text{ и } x \notin C\} \text{ или } \{x \notin A \text{ и } x \in B \text{ и } x \in C\} \iff x \in A \Delta (B \cap C)$ . Если, например,  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{1\}$ ,  $C = \{2\}$ , то  $A \Delta (B \cap C) = \{1, 2\} \neq \emptyset = (A \Delta B) \cap (A \Delta C)$ .  $\square$

**1.29.**  $x \in (A \Delta B) \setminus (A \Delta C) \iff x \in A \Delta B \text{ и } x \notin A \Delta C \iff \{x \in A \text{ и } x \notin B \text{ и } x \in C\} \text{ или } \{x \notin A \text{ и } x \in B \text{ и } x \notin C\} \iff x \in A \Delta (B \setminus C)$ . Пусть  $A = B = C$  — произвольное непустое множество. Тогда  $\emptyset = (A \Delta B) \setminus (A \Delta C) \neq A \Delta (B \setminus C) = A \Delta \emptyset = A$ .  $\square$

**1.30.** Вложение непосредственно вытекает из задачи 1.21. При этом нетрудно видеть, что если  $A$  не пересекается с  $C$ , а  $B$  — с  $D$  и все четыре множества не пусты, то непустое множество  $A \times D$  содержитится в  $(A \cup C) \times (B \cup D)$ , но не пересекается с  $(A \times B) \cup (C \times D)$ .  $\square$

**1.31.**  $(x, y) \in (A \setminus C) \times (B \setminus D) \iff \{x \in A \text{ и } x \notin C\} \text{ и } \{y \in B \text{ и } y \notin D\} \iff \{x \in A \text{ и } y \in B\} \text{ и } \{x \notin C \text{ и } y \notin D\} \Rightarrow \{(x, y) \in A \times B\} \text{ и } \{(x, y) \notin C \times D\} \iff (x, y) \in (A \times B) \setminus (C \times D)$ . Если, на-

пример,  $A = B = \{1, 2\}$ ,  $C = D = \{1\}$ , то  $(A \setminus C) \times (B \setminus D) = \{(2, 2)\} \neq \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\} = (A \times B) \setminus (C \times D)$ .  $\square$

**1.32.**  $x \in A \cap \left( \bigcup_{\omega \in \Omega} B_\omega \right) \iff x \in A$  и существует такое  $\omega \in \Omega$ ,

что  $x \in B_\omega \iff$  существует такое  $\omega \in \Omega$ , что  $x \in A \cap B_\omega \iff x \in \bigcup_{\omega \in \Omega} (A \cap B_\omega)$ .  $\square$

**1.33.**  $x \in A \cup \left( \bigcap_{\omega \in \Omega} B_\omega \right) \iff x \in A$  или для любого  $\omega \in \Omega$

$x \in B_\omega \iff$  для любого  $\omega \in \Omega$   $x \in A \cup B_\omega \iff x \in \bigcap_{\omega \in \Omega} (A \cup B_\omega)$ .  $\square$

**1.34.**  $x \in A \setminus \left( \bigcup_{\omega \in \Omega} B_\omega \right) \iff x \in A$  и для любого  $\omega \in \Omega$

$x \notin B_\omega \iff$  для любого  $\omega \in \Omega$   $x \in A \setminus B_\omega \iff x \in \bigcap_{\omega \in \Omega} (A \setminus B_\omega)$ .  $\square$

Задачи 1.35–1.39 могут быть решены по-разному. Мы приведём только ответы, которые, как и ответы к задачам 1.40–1.42, можно проверить непосредственно.

$$\textbf{1.35. } (A \cap B) \cap C.$$

$$\textbf{1.36. } (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

$$\textbf{1.37. } ((A \cup B) \cup C) \setminus ((A \Delta B) \Delta C).$$

$$\textbf{1.38. } (A \cup B) \cup C.$$

$$\textbf{1.39. } ((A \Delta B) \Delta C) \setminus ((A \cap B) \cap C).$$

$$\textbf{1.40. } (A \cap B) \setminus C.$$

$$\textbf{1.41. } (A \cup B) \setminus C.$$

$$\textbf{1.42. } (A \Delta B) \setminus C.$$

**1.43.** Формализуя определение верхнего предела последовательности множеств, получаем

$$\limsup A_n = \{x : \forall n \exists m \geq n \quad x \in A_m\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m.$$

$\square$

**1.44.** Формализуя определение нижнего предела последовательности множеств, получаем

$$\liminf A_n = \{x : \exists n \forall m \geq n \quad x \in A_m\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m.$$

$\square$

## Г л а в а 2

### МОЩНОСТИ МНОЖЕСТВ

Пусть  $A$  и  $B$  — два множества. Скажем, что  $A$  и  $B$  имеют равные мощности ( $A \sim B$ ), если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие  $A \longleftrightarrow B$ . Ясно, что  $\sim$  есть отношение эквивалентности. В данной главе эквивалентными будут называться множества, имеющие равные мощности. Равенство мощностей записывают также формулой  $\bar{A} = \bar{B}$ . Будем говорить, что *мощность  $A$  меньше или равна мощности  $B$*  ( $\bar{A} \leqslant \bar{B}$ ), если  $A \sim B_1$  для некоторого множества  $B_1 \subseteq B$ . Естественным образом определяются обратное неравенство и строгие неравенства для мощностей.

Можно показать (см., например, [7], гл. 14), что существует шкала мощностей, т. е. такое линейно упорядоченное множество  $\{\alpha\}$  так называемых порядковых чисел, что для любого множества  $A$  существует порядковое число  $\alpha(A)$ , для которого мощность  $A$  равна  $\alpha(A)$ . При этом если  $A \subseteq B$ , то  $\alpha(A) \leqslant \alpha(B)$ .

Если  $A \sim \mathbb{N}$ , где  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  — множество натуральных чисел, то  $A$  называется *счётным*. Если  $A$  конечно (в частности, пусто) или счётно, то говорят, что  $A$  не более чем счётно. Множество называется *несчтным*, если его мощность строго больше, чем мощность счтного множества.

Через  $\mathbb{Q}$ , как обычно, обозначается множество всех рациональных чисел на прямой  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ . Через  $\mathbb{Q}_{[0;1]}$  будет обозначаться множество всех рациональных чисел из отрезка  $[0; 1]$ . Запись  $\mathbb{Q}_{[0;1]} = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$  будет означать, что множество  $\mathbb{Q}_{[0;1]}$  занумеровано некоторым образом.

Если  $A \sim [0, 1]$ , то говорят, что множество  $A$  имеет мощность континуума, и пишут  $\bar{A} = \mathfrak{c}$  (см. также задачу 2.9).

Пусть  $A$  — множество на прямой,  $c \in \mathbb{R}$ . Через  $A + c$  будем обозначать сдвиг множества  $A$  на число  $c$ , т. е.  $\{x : x = a + c, \text{ где } a \in A\}$ . Для множества  $A$  на  $[0; 1]$  через  $A + c \pmod{1}$  обозначим сдвиг множества  $A$  на число  $c$  по модулю 1, т. е.  $\{x : x = a + c \pmod{1}, \text{ где } a \in A\}$ .

Утверждение, что не существует мощности, большей, чем счтная, но меньшей, чем мощность континуума, называется континуум-гипотезой. Долгое время математики пытались доказать или опровергнуть её,

пока не было доказано, что ни континуум-гипотеза, ни её отрицание не противоречат аксиоматике теории множеств. Использование континуум-гипотезы при решении задач не предполагается.

Другое важное утверждение — так называемая *аксиома выбора*: если дана система попарно непересекающихся множеств  $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ , то существует множество  $B = \{a_\omega\}$ , где  $a_\omega \in A_\omega$  для каждого  $\omega \in \Omega$ , т. е. множество, содержащее по одному представителю множеств  $A_\omega$ . Аксиома выбора в данной книге принимается безоговорочно.

Напомним, что функция на промежутке вещественной прямой называется возрастающей (неубывающей, убывающей, невозрастающей), если для любых точек  $x$  и  $y$ , где  $x < y$ , выполнено неравенство  $f(x) < f(y)$  (соответственно,  $f(x) \leq f(y)$ ,  $f(x) > f(y)$ ,  $f(x) \geq f(y)$ ).

*Характеристической функцией* (индикатором) множества  $E$  называется функция  $\chi_E(x)$ , равная 1 на  $E$  и 0 вне  $E$  (её область определения в каждом случае ясна из контекста).

## ЗАДАЧИ

**2.1.** Пусть множества  $A_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , — не более чем счётные. Доказать, что множество

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

не более чем счётно.

**2.2.** Доказать, что множество  $\mathbb{Q}_{[0,1]}$  счётно.

**2.3.** Доказать, что множество  $\mathbb{Q}$  всех рациональных чисел счётно.

**2.4.** Доказать, что любая монотонная на  $\mathbb{R}$  функция непрерывна всюду, кроме не более чем счётного множества, причём в точках этого множества существуют пределы функции слева и справа.

**2.5.** Пусть  $A$  и  $B$  — счётные множества. Доказать, что их декартово произведение счётно.

**2.6.** Пусть  $\{A_j\}_{j=1}^n$  — конечный набор счётных множеств. Доказать, что их декартово произведение счётно. В частности,  $\mathbb{Q}^n$  счётно.

**2.7.** Число  $a \in \mathbb{R}$  называется алгебраическим, если оно является корнем некоторого уравнения вида

$$k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + \dots + k_1 x + k_0 = 0$$

с целыми коэффициентами  $k_n, \dots, k_0$ . Доказать, что множество всех алгебраических чисел счётно.

**2.8.** Пусть множество  $A$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$  таково, что существует постоянная  $C > 0$ :  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq C$  для любых  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ . Доказать, что  $A$  не более чем счётно.

**2.9.** Доказать, что  $[0, 1]$  — несчётное множество.

**2.10.** Доказать, что множества  $[0, 1], (0, 1], (0, 1)$  имеют мощность континуума.

**2.11.** Доказать, что множества  $\mathbb{R}, [0, \infty), (0, \infty), (-\infty, 0), (-\infty, 0]$  имеют мощность  $\mathfrak{c}$ .

**2.12.** Существует ли взаимно однозначное непрерывное отображение отрезка  $[0, 1]$  на полуинтервал  $[0, 1)$ ?

**2.13.** Существует ли взаимно однозначное непрерывное отображение полуинтервала  $[0, 1)$  на отрезок  $[0, 1]$ ?

**2.14.** Доказать, что любой невырожденный промежуток на  $\mathbb{R}$  имеет мощность континуума.

**2.15.** Пусть  $A = [0, 1] \setminus \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ . Доказать, что  $A$  имеет мощность континуума.

**2.16.** Пусть  $A$  — бесконечное множество,  $B$  — не более чем счётное множество. Доказать, что  $A \cup B \sim A$ .

**2.17.** Пусть  $A$  — бесконечное множество. Доказать, что существует множество  $B \subset A, B \neq A$ , мощность которого равна мощности  $A$ .

**2.18.** Пусть  $A$  — множество последовательностей  $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ , где  $a_j = 0$  или  $a_j = 1$  для каждого  $j$ , которые не являются периодическими с периодом (1), т. е. не существует такого  $N$ , что  $a_j = 1$  для всех  $j > N$ . Доказать, что  $A$  имеет мощность  $\mathfrak{c}$ .

**2.19.** Пусть  $B$  — множество последовательностей  $(b_1, b_2, b_3, \dots)$ , где  $b_j = 0$  или  $b_j = 1$  для каждого  $j$ . Доказать, что  $B$  имеет мощность континуума.

**2.20.** Пусть  $C$  — множество последовательностей  $(n_1, n_2, n_3, \dots)$ , где  $n_j$  — натуральные числа. Доказать, что  $C$  имеет мощность  $\mathfrak{c}$ .

**2.21.** Пусть  $A$  — множество всех чисел из полуинтервала  $[0, 1)$ , в десятичном разложении которых нет цифры «8». Доказать, что  $A$  имеет мощность континуума.

**2.22.** Для интервала  $I$  через  $\mu(I)$  будем обозначать его длину. Рассмотрим следующее построение. Пусть  $J_1^0 = [0, 1]$ . На первом шаге выбросим из отрезка  $J_1^0$  такой интервал  $I_1^1$  с тем же центром, что  $\mu(I_1^1) = \frac{1}{3} \mu(J_1^0) = \frac{1}{3}$ , т. е.  $I_1^1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ . Обозначим оставшиеся отрезки через  $J_1^1$  и  $J_2^1$ . Пусть после  $n - 1$  ( $n > 1$ ) шагов мы получили  $2^{n-1}$  отрезков  $J_1^{n-1}, \dots, J_{2^{n-1}}^{n-1}$ . Тогда на  $n$ -м шаге мы выкинем из каждого отрезка  $J_k^{n-1}$ , где  $1 \leq k \leq 2^{n-1}$ , такой интервал  $I_k^n$  с тем же центром, что  $\mu(I_k^n) = \frac{1}{3} \mu(J_k^{n-1})$ . Получим  $2^n$  отрезков  $J_1^n, \dots, J_{2^n}^n$ . Обозначим

теперь

$$G = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_k^n \quad \text{и} \quad P_0 = [0, 1] \setminus G = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{2^n} J_k^n.$$

Ясно, что  $G$  открыто, а  $P_0$  замкнуто. Множество  $P_0$  называется *канторовым замкнутым множеством*, а  $G$  — *канторовым открытым множеством*. Доказать, что  $P_0$  имеет мощность континуума.

**2.23.** Пусть даны попарно непересекающиеся множества  $A_1, A_2, \dots$ , каждое из которых имеет мощность  $\mathfrak{c}$ . Доказать, что множество

$$A = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

имеет мощность  $\mathfrak{c}$ .

**2.24.** Пусть  $\{A_j\}_{j=1}^n$  — набор множеств мощности континуума. Доказать, что их декартово произведение имеет мощность континуума. В частности,  $\mathbb{R}^n$  имеет мощность континуума.

**2.25.** Пусть  $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$  — последовательность множеств мощности  $\mathfrak{c}$ . Доказать, что множество последовательностей  $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ , где  $a_j \in A_j$  при  $j \in \mathbb{N}$ , имеет мощность  $\mathfrak{c}$ .

**2.26.** Пусть  $\{A_{\omega}\}_{\omega \in \Omega}$  — система попарно непересекающихся множеств, где множество индексов  $\Omega$  имеет мощность  $\mathfrak{c}$  и для каждого  $\omega \in \Omega$  множество  $A_{\omega}$  имеет мощность  $\mathfrak{c}$ . Доказать, что множество

$$A = \bigsqcup_{\omega \in \Omega} A_{\omega}$$

имеет мощность  $\mathfrak{c}$ .

**2.27.** Пусть  $A$  — множество всех конечных подмножеств  $\mathbb{N}$ . Доказать, что  $A$  счётно.

**2.28.** Пусть  $B$  — множество всех подмножеств  $\mathbb{N}$ . Доказать, что  $B$  имеет мощность  $\mathfrak{c}$ .

**2.29.** Назовём буквой «Г» фигуру на плоскости, состоящую из двух перпендикулярных отрезков произвольной длины, выходящих из одной точки (вершины буквы). Пусть  $A$  — некоторое множество попарно непересекающихся букв «Г» одинакового размера, расположенных на плоскости. Может ли это множество иметь мощность континуума?

**2.30.** Пусть  $A$  — непустое множество, а  $B$  — множество всех подмножеств  $A$ . Если  $A$  имеет мощность  $\alpha$ , то через  $2^{\alpha}$  будем обозначать мощность  $B$ . Доказать, что  $B \not\sim A$  и, как следствие,  $\alpha < 2^{\alpha}$ .

**2.31.** Пусть  $A_0, A_1$  и  $A_2$  — множества, причём  $A_2 \subseteq A_1 \subseteq A_0$  и  $A_2 \sim A_0$ . Доказать, что  $A_1 \sim A_0$ .

**2.32.** Пусть  $A$  и  $B$  — такие множества, что  $A \setminus B \sim B \setminus A$ . Доказать, что  $A \sim B$ .

**2.33.** Пусть  $A, B$  и  $C$  — множества, причём  $A \subseteq B$  и  $A \sim A \cup C$ . Доказать, что  $B \sim B \cup C$ .

**2.34.** Пусть  $A, B, C$  и  $D$  — множества,  $C \subseteq A, D \subseteq B, C \cup B \sim C$ . Доказать, что  $A \cup D \sim A$ .

**2.35.** Построить такие множества  $A, B, C$  и  $D$ , что  $B \subseteq A, D \subseteq C, A \sim C, B \sim D$ , но  $A \setminus B \not\sim C \setminus D$ .

**2.36.** Построить такие множества  $A, B$  и  $C$ , что  $A \subseteq C, B \subseteq C, A \sim B$ , но  $C \setminus A \not\sim C \setminus B$ .

**2.37.** Построить множества  $A, B$  и  $C$ , для которых  $C \subseteq A, C \subseteq B, A \sim B$ , но  $A \setminus C \not\sim B \setminus C$ .

**2.38.** Пусть  $A \subset [0, 1]$  — счётное множество. Доказать, что при некотором  $a \in [0, 1]$  выполнено условие  $A \cap A + a \pmod{1} = \emptyset$ .

**2.39.** Построить такие множества  $A \in [0, 1]$  и  $B \in [0, 1]$  мощности континуума, что для любых различных точек  $b(1), b(2) \in B$  выполнено условие  $A + b(1) \cap A + b(2) = \emptyset$ .

**2.40. Теорема Кантора–Бернштейна.** Доказать, что если  $A$  и  $B$  — множества,  $A_1 \subseteq A, B_1 \subseteq B, A \sim B_1$  и  $B \sim A_1$ , то  $A \sim B$ . Другими словами, если  $\bar{\bar{A}} \leqslant \bar{\bar{B}}$  и  $\bar{\bar{B}} \leqslant \bar{\bar{A}}$ , то  $\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}}$ .

Замечание. В силу теоремы Кантора–Бернштейна в задаче 2.23 можно отбросить условие пустоты попарных пересечений множеств.

**2.41.** Пусть  $\{A_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  — система множеств, причём  $\Omega$  имеет мощность  $\mathfrak{c}$  и для каждого  $\omega \in \Omega$  множество  $A_\omega$  имеет мощность  $\mathfrak{c}$ . Доказать, что множество

$$A = \bigcup_{\omega \in \Omega} A_\omega$$

имеет мощность  $\mathfrak{c}$ .

**2.42.** Пусть  $C([0, 1])$  — множество всех непрерывных функций на отрезке  $[0, 1]$ . Доказать, что  $C([0, 1])$  имеет мощность  $\mathfrak{c}$ .

**2.43.** Пусть  $A$  — множество всех монотонных функций на отрезке  $[0, 1]$ . Доказать, что  $A$  имеет мощность  $\mathfrak{c}$ .

**2.44.** Пусть  $A$  — множество всех последовательностей непрерывных функций на  $[0, 1]$ . Доказать, что  $A$  имеет мощность континуума.

**2.45.** Пусть  $A$  — множество всех вещественнонезначных функций на  $[0, 1]$ . Доказать, что  $A$  имеет мощность  $2^\mathfrak{c}$  (см. обозначение в задаче 2.30).

**2.46.** Доказать, что на отрезке  $[0, 1]$  существует вещественнонезначная функция  $f(x)$ , которая не может быть представлена как предел всюду сходящейся последовательности непрерывных функций.

Замечание. Такая функция будет построена в явном виде в задаче 4.36.

**2.47.** Пусть множество  $A$  имеет мощность  $\mathfrak{c}$  и  $A = B \cup C$ . Доказать, что по крайней мере одно из множеств  $B, C$  имеет мощность  $\mathfrak{c}$ .

**2.48.** Пусть множество  $A$  представлено в виде

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

и  $A$  имеет мощность  $\mathfrak{c}$ . Доказать, что хотя бы для одного  $n_0$  множество  $A_{n_0}$  имеет мощность  $\mathfrak{c}$ .

**2.49.** Можно ли расположить на плоскости континум попарно непересекающихся букв «О» (окружностей)?

**2.50.** Можно ли расположить на плоскости несчётное множество попарно непересекающихся букв «О» (окружностей) так, чтобы ни одна из них не лежала внутри другой?

**2.51.** Назовём буквой «А» на плоскости фигуру, состоящую из двух боковых сторон равностороннего треугольника и произвольного невырожденного отрезка, соединяющего эти стороны и параллельного основанию, но не совпадающего с ним. Пусть  $F$  — некоторое множество попарно непересекающихся букв «А» (вообще говоря, разного размера) на плоскости. Доказать, что  $F$  не более чем счётно.

**2.52.** Назовём буквой «Т» на плоскости фигуру, состоящую из двух перпендикулярных отрезков произвольного размера, середина первого из которых является одним из концов второго. Пусть  $F$  — некоторое множество попарно непересекающихся букв «Т» (вообще говоря, разного размера) на плоскости. Доказать, что  $F$  не более чем счётно.

**2.53.** Пусть  $f(x)$  — функция на  $(0, 1)$ , и для любого  $x \in (0, 1)$  существует такое  $\delta = \delta(x) > 0$ , что  $f(x) \geq f(t)$  для любого  $t \in (x - \delta, x + \delta)$  (т. е. каждая точка интервала  $(0, 1)$  является точкой нестрогого локального максимума функции  $f$ ). Доказать, что множество значений функции  $f(x)$  не более чем счётно.

**2.54.** Построить функцию  $f(x)$ , которая удовлетворяет условиям задачи 2.53 и имеет счётное множество значений.

## РЕШЕНИЯ

**2.1.** Пусть  $B_1 = A_1$  и

$$B_n = A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j$$

при  $n = 2, 3, \dots$  Ясно, что тогда все  $B_j$  не более чем счётны и

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j.$$

Пусть  $B_j = \{b_{j,i}\}_{i=1}^{i_j}$  при  $j \in \mathbb{N}$ , где  $i_j$  могут быть конечными или бесконечными. Занумеруем элементы множества  $A$  следующим образом. Пусть  $a_1 = b_{1,1}$ ,  $a_2 = b_{1,2}$ ,  $a_3 = b_{2,1}$ ,  $a_4 = b_{1,3}$ ,  $a_5 = b_{2,2}$ ,  $a_6 = b_{3,1}$  и т. д.: в порядке возрастания суммы индексов, а при фиксированной сумме индексов — в порядке возрастания первого. Если очередной элемент  $b_{i,j}$  не существует, т. е.  $i > i_j$ , то мы его пропускаем. Таким образом, мы получаем взаимно однозначное соответствие между множествами  $A$  и  $\mathbb{N}$  (или между  $A$  и некоторым конечным множеством, если  $\sum_j i_j < \infty$ ).  $\square$

**2.2.** Пусть  $A_n = \left\{ \frac{m}{n} : m = 0, 1, \dots, n \right\}$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Очевидно, что  $A_n$  конечно для каждого  $n$  и

$$\mathbb{Q}_{[0;1]} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Так как множество  $\mathbb{Q}_{[0;1]}$  бесконечно, то в силу результата задачи 2.1 оно счётно.  $\square$

**2.3.** Пусть  $Q_{2n}$  — множество всех рациональных чисел из  $[n-1, n]$ , а  $Q_{2n-1}$  — множество всех рациональных чисел из  $[-n, -n+1]$ , где  $n \in \mathbb{N}$ . Так как каждое множество  $Q_n$ , как нетрудно видеть, эквивалентно множеству  $\mathbb{Q}_{[0;1]}$ , то в силу результата задачи 2.2 каждое множество  $Q_n$  счётно, а тогда в силу результата задачи 2.1 счётно и множество

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n.$$

$\square$

**2.4.** Нетрудно видеть, что в каждой точке  $x \in \mathbb{R}$  для монотонной функции  $f$  существуют односторонние пределы  $f(x-0) = \sup_{t < x} f(t)$  и  $f(x+0) = \inf_{t > x} f(t)$ . Рассмотрим множество точек, для которых  $f(x+0) - f(x-0) > 0$ . Каждой такой точке можно поставить в соответствие рациональное число  $q \in (f(x-0), f(x+0))$ . При этом в силу монотонности функции разным точкам разрыва будут соответствовать разные рациональные числа, так как если  $x < y$ , то  $f(x+0) \leq f(y-0)$ . В силу счётности множества  $\mathbb{Q}$  (см. задачу 2.3) множество точек разрыва функции  $f$  не более чем счётно.  $\square$

**2.5.** Пусть  $C = A \times B$ ,  $A = \{a_1, a_2, \dots\}$  и  $B = \{b_1, b_2, \dots\}$ . Определим для  $i \in \mathbb{N}$  множества  $C_i = \{(a_i, b_j) : j \in \mathbb{N}\}$ . Ясно, что каждое множество  $C_i$  счётно, и что

$$C = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i,$$

поэтому в силу результата задачи 2.1 множество  $C$  тоже счётно.  $\square$

**2.6.** Докажем это утверждение индукцией по числу множеств  $n$ . Для  $n = 2$  утверждение доказано в задаче 2.5. Предположим, что мы доказали его для  $n - 1$  множества. Определим для  $j \in \mathbb{N}$  множества

$$C_j = \{(a_{1,j}, b_2, \dots, b_n), \text{ где } b_k \in A_k \text{ при } k = 2, \dots, n\}.$$

Поскольку  $C_j \sim A_2 \times \dots \times A_n$ , то по предположению индукции множество  $C_j$  счётно для каждого  $j$ . Так как

$$A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j,$$

то в силу результата задачи 2.1 множество  $A$  счётно.  $\square$

**2.7.** Пусть  $A_n$  — множество всех алгебраических чисел, являющихся корнями уравнений с целыми коэффициентами, степень которых не превосходит  $n$ . Из задачи 2.6 следует, что множество таких уравнений счётно. Далее, по основной теореме алгебры количество различных корней такого уравнения не превосходит  $n$ . Поэтому  $A_n$  счётно. Так как

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

то  $A$  тоже счётно.  $\square$

**2.8.** Выберем для каждого элемента  $\mathbf{x} \in A$  точку  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{x}) = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{Q}^n$  так, чтобы  $|\mathbf{x} - \mathbf{r}| < \frac{C}{2}$ . Заметим, что если  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ , то  $\mathbf{r}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{r}(\mathbf{y})$  согласно неравенству треугольника. Следовательно, множество  $A$  эквивалентно некоторому подмножеству  $\{\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)\} \subseteq \mathbb{Q}^n$ . В силу результата задачи 2.6  $\mathbb{Q}^n$  счётно. Поэтому  $A$  не более чем счётно.  $\square$

**2.9.** Предположим, что утверждение неверно. Это означает, что все точки отрезка  $[0, 1]$  можно занумеровать, т. е.  $[0, 1] = \{x_1, x_2, \dots\}$ . Выберем отрезок  $I_1 = [a_1, b_1] \subset [0, 1]$  так, чтобы  $x_1 \notin I_1$ . Затем выберем отрезок  $I_2 = [a_2, b_2] \subset I_1$  так, чтобы  $x_2 \notin I_2$ , и т. д. По индукции мы получим такую последовательность отрезков  $I_1 \supset I_2 \supset \dots$ , что  $x_n \notin I_n$ . Согласно принципу вложенных отрезков существует точка

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Но тогда для любого  $n$  выполнено неравенство  $x \neq x_n$ , и мы приходим к противоречию.  $\square$

**2.10.** Определим отображение

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \neq \frac{1}{n}, \text{ где } n \in \mathbb{N}; \\ \frac{1}{n+1}, & \text{если } x = \frac{1}{n}, \text{ где } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Тогда  $f(x)$  есть взаимно однозначное соответствие между  $[0, 1]$  и  $[0, 1]$ . Остальные утверждения проверяются аналогично.  $\square$

**2.11.** Согласно задаче 2.10, множество  $(0, 1)$  имеет мощность  $c$ . Биекция  $(0, 1) \longleftrightarrow \mathbb{R}$  устанавливается отображением  $f(x) = \operatorname{tg}(\pi x - \pi/2)$ . Биекция  $\mathbb{R} \longleftrightarrow (0, \infty)$  устанавливается отображением  $f(x) = \ln x$ . Биекция  $[0, \infty) \longleftrightarrow (0, \infty)$  строится так же, как в задаче 2.10. Равенство мощностей остальных множеств проверяется аналогично.  $\square$

**2.12.** Предположим, что  $f(x)$  есть непрерывное взаимно однозначное отображение отрезка  $[0, 1]$  на полуинтервал  $[0, 1)$ . Тогда  $1 = \sup_{x \in [0, 1]} f(x)$ . Так как  $f(x)$  — непрерывная функция на  $[0, 1]$ , то

существует точка  $x_0 \in [0, 1]$ , в которой достигается точная верхняя грань функции, т. е.  $f(x_0) = 1$ , что противоречит предположению.  $\square$

**2.13.** Предположим, что  $f(x)$  есть непрерывное взаимно однозначное отображение полуинтервала  $[0, 1)$  на отрезок  $[0, 1]$ , причём  $f(a) = 0$  и  $f(b) = 1$ . Хотя бы одна из точек  $a$  и  $b$  не совпадает с нулем. Пусть  $a \neq 0$ . Тогда, поскольку непрерывная функция принимает на отрезке все промежуточные значения, то в произвольной левой окрестности точки  $a$  функция  $f$  принимает все значения из интервала  $(0, \delta_1)$ , а в правой — из интервала  $(0, \delta_2)$ . Таким образом, достаточно малые по модулю значения принимаются дважды, что противоречит взаимной однозначности  $f$ .  $\square$

**2.14.** Если данный промежуток — отрезок, то отображение  $f(x) = a + (b - a)x$  является взаимно однозначным соответствием между  $[0, 1]$  и  $[a, b]$ . Остальные случаи разбираются аналогично с использованием задач 2.10 и 2.11.  $\square$

**2.15.** Определим отображение

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \neq \frac{1}{n\sqrt{2}}, \text{ где } n \in \mathbb{N}; \\ \frac{1}{k}, & \text{если } x = \frac{1}{2k\sqrt{2}}, \text{ где } k \in \mathbb{N}; \\ \frac{1}{\sqrt{2}k}, & \text{если } x = \frac{1}{(2k-1)\sqrt{2}}, \text{ где } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Тогда  $f(x)$  есть взаимно однозначное соответствие между  $A$  и  $[0, 1]$ .  $\square$

**2.16.** Так как множество  $A$  бесконечно, мы можем последовательно выбрать счётное множество  $A_1 = \{a_1, a_2, \dots\} \subseteq A$ . Из задачи 2.1 следует, что  $A_1 \sim A_1 \cup (B \setminus A)$ . Обозначим это соответствие через  $g(x)$ . Определим теперь функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in A \setminus A_1; \\ g(x), & \text{если } x \in A_1. \end{cases}$$

Тогда  $f$  есть биекция множества  $A$  на множество  $A \cup B$ .  $\square$

**2.17.** Выберем счётное подмножество  $P = \{p_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq A$ , и пусть  $C = A \setminus P$ . Положим  $P_1 = \{p_{2j-1}\}_{j=1}^{\infty}$  и  $P_2 = \{p_{2j}\}_{j=1}^{\infty}$ ,  $B = A \setminus P_2$ .

Тогда в силу результата задачи 2.1 выполнено условие  $\bar{P} = \bar{P}_1$ , откуда следует, что  $B \sim (C \sqcup P_1) \sim (C \sqcup P) \sim A$ .  $\square$

**2.18.** Пусть  $x \in [0, 1)$ . Рассмотрим его разложение в двоичную дробь:  $x = (x_1, x_2, \dots) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j 2^{-j}$ , где  $x_j \in \{0, 1\}$  для каждого  $j$ .

Если  $x \in B_2 = \{k/2^n, \text{ где } n \in \mathbb{N} \text{ и } 1 \leq k < 2^n\}$ , то существуют два различных разложения  $x$ :  $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0, 1, 1, \dots)$  и  $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, 1, 0, 0, \dots)$ . Если  $x \notin B_2$ , то разложение единственное. Определим отображение

$$f(x) = \begin{cases} (x_1, x_2, \dots), & \text{если } x \notin B_2; \\ (x_1, \dots, x_{n-1}, 1, 0, 0, \dots), & \text{если } x \in B_2. \end{cases}$$

Тогда  $f(x)$  есть взаимно однозначное соответствие между  $[0, 1)$  и  $A$ . Так как  $[0, 1)$  имеет мощность континуума (см. задачу 2.10), то и  $A$  имеет мощность континуума.  $\square$

**2.19.** Пусть  $A$  — множество из задачи 2.18. Пусть  $B_n = \{(x_1, x_2, \dots) : x_j = 1 \text{ при } j > n\}$  и

$$C = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Так как для каждого  $n$  множество  $B_n$  конечно, то множество  $C$  счётно. Заметим, что  $B = A \cup C$ . Тогда в силу результатов задач 2.16 и 2.18 множество  $A$  имеет мощность  $\mathfrak{c}$ .  $\square$

**2.20.** Пусть  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m, \dots)$  — некоторая последовательность натуральных чисел. Определим последовательность нулей и единиц  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m, \dots) = f(\mathbf{n})$ :

$$k_j = \begin{cases} 1, & \text{если } n_0 + n_1 + \dots + n_{l-1} < j < n_0 + n_1 + \dots + n_l \\ & \text{для некоторого } l \geq 1; \\ 0, & \text{если } j = n_0 + n_1 + \dots + n_l \text{ для некоторого } l \geq 1, \end{cases}$$

где  $n_0 = 0$ , т. е. мы последовательно пишем  $(n_l - 1)$  единиц и один нуль. Тогда  $f$  будет взаимно однозначным соответствием между  $C$  и множеством всех последовательностей из нулей и единиц, которые не заканчиваются единицей в периоде. В силу результата задачи 2.18 множество  $C$  имеет мощность континуума.  $\square$

**2.21.** Заметим, что множество  $A$  эквивалентно множеству всех последовательностей  $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ , где  $a_j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ , которые не имеют 9 в периоде. Для каждой такой последовательности определим последовательность  $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ :  $b_j = a_j$  при  $a_j \leq 7$  и  $b_j = 8$ , если  $a_j = 9$ . Получаем, что  $A$  эквивалентно множеству  $B$  последовательностей  $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ , где  $b_j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ , которые не имеют 8 в периоде. Но множество таких последовательностей задаёт девятивные разложения всех чисел из полуинтервала  $[0, 1)$ , поэтому  $B \sim [0, 1)$ .  $\square$

**2.22.** Если

$$[0, 1) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), \text{ где } x_j \in \{0, 1, 2\} \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 2\},$$

то множество  $G$  содержит только последовательности, для которых  $x_{n_0} = 1$  при некотором  $n_0$ . Отсюда следует, что множество  $P_0$  содержит все такие последовательности  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  с  $x_j \in \{0, 2\}$ , что  $x_n \not\rightarrow 2$  при  $n \rightarrow \infty$ . Поэтому (см. задачу 2.18) множество  $P_0$  имеет мощность континуума.  $\square$

**2.23.** Пусть  $f_j$  — взаимно однозначное соответствие между множеством  $A_j$  и полуинтервалом  $\left[1 - \frac{1}{j}, 1 - \frac{1}{j+1}\right)$  (см. задачу 2.14). Определим функцию  $f : A \rightarrow [0, 1)$  равенствами  $f(x) = f_j(x)$  при  $x \in A_j$  для  $j \in \mathbb{N}$ . Тогда  $f$  есть биекция  $A$  на  $[0, 1)$ .  $\square$

**2.24.** См. ниже решение задачи 2.25.

**2.25.** Можно считать (см. задачу 2.19), что каждое  $A_j$  есть множество последовательностей из 1 и 0, т. е.  $a_j = (a_{j,1}, a_{j,2}, \dots, a_{j,i}, \dots)$  для  $j \in \mathbb{N}$ , где  $a_{j,i} \in \{0, 1\}$ . Занумеруем  $\{a_{i,j}\}_{j=1}^{\infty}$  в одну последовательность  $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ , где  $b_1 = a_{1,1}$ ,  $b_2 = a_{1,2}$ ,  $b_3 = a_{2,1}$ ,  $b_4 = a_{1,3}$ ,  $b_5 = a_{2,2}$  и т. д., как в решении задачи 2.1. Тем самым мы построили взаимно однозначное соответствие между  $A$  и множеством всех последовательностей из 1 и 0. Теперь утверждение следует из задачи 2.19.  $\square$

**2.26.** Пусть  $f$  — биекция  $\Omega$  на  $\mathbb{R}$ , и для каждого  $\omega \in \Omega$  пусть  $g_{\omega}$  — биекция  $A_{\omega}$  на  $\mathbb{R}$ . Определим на множестве  $A$  функцию  $F$  следующим образом: если  $x \in A_{\omega}$ , то  $F(x) = (g_{\omega}(x), f(\omega))$ . Тогда видно, что  $F$  — биекция  $A$  на  $\mathbb{R}^2$ . Так как  $\mathbb{R}^2$  имеет мощность  $\mathfrak{c}$  (см. задачу 2.24), то и  $A$  имеет мощность  $\mathfrak{c}$ .  $\square$

**2.27.** Пусть  $A_n$  — множество всех подмножеств множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Заметим, что  $A_n$  конечно для каждого  $n$  и что

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

В силу результата задачи 2.1 множество  $A$  не более чем счётно, но  $A$  содержит все одноточечные подмножества  $\mathbb{N}$  и потому бесконечно.  $\square$

**2.28.** Определим отображение  $F$  множества  $B$  на множество  $D$  всех последовательностей из 1 и 0 следующим образом. Для произвольного  $C \in B$  положим  $F(C) = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ , где

$$x_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n \in C, \\ 0, & \text{если } n \in \mathbb{N} \setminus C. \end{cases}$$

Заметим, что  $F$  — взаимно однозначное соответствие. Так как  $D$  имеет мощность  $\mathfrak{c}$ , то и  $B$  имеет мощность  $\mathfrak{c}$ .  $\square$

**2.29.** Да. Например, разместим их следующим образом. Каждому вещественному числу  $a$  поставим в соответствие букву «Г», вершина которой лежит в точке  $(0, a)$ , а стороны лежат на лучах  $y = a + x$ ,  $x \geq 0$ , и  $y = a - x$ ,  $x \leq 0$ , соответственно.  $\square$

**2.30.** Предположим, что утверждение неверно, и  $f$  есть биекция  $A$  и  $B$ . Тогда  $A = C \sqcup D$ , где  $C = \{x \in A : x \in f(x)\}$ , а  $D = \{x \in A : x \notin f(x)\} \in B$ . Пусть  $y = f^{-1}(D) \in A$ . Если  $y \in C$ , то по определению множества  $C$  выполнено условие  $y \in f(y) = D$ , и мы получаем противоречие. Если же  $y \in D$ , то по определению множества  $D$  мы получаем, что  $y \notin f(y) = D$ , и вновь приходим к противоречию. Итак,  $\bar{A} \neq \bar{B}$ . Но множество  $A$  биективно отображается на множество своих одноточечных подмножеств, поэтому  $\bar{A} \leqslant \bar{B}$ . С учётом предыдущего неравенства это и означает, что  $\bar{A} < \bar{B}$ .  $\square$

**2.31.** Пусть  $f$  — взаимно однозначное соответствие между множествами  $A_0$  и  $A_2$ , а  $A_3 = f(A_1) \subseteq A_2$ . Тогда  $A_3 \sim A_1$ . Далее, пусть  $A_4 = f(A_2), \dots, A_{2k+2} = f(A_{2k})$  и  $A_{2k+1} = f(A_{2k-1})$  при всех  $k \geq 1$ . Получаем последовательность множеств

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots,$$

где  $A_k \sim A_{k+2}$  при  $k = 0, 1, 2, \dots$  Заметим, что по построению функция  $f$  задаёт при каждом  $k \geq 0$  биекцию

$$A_k \setminus A_{k+1} \sim A_{k+2} \setminus A_{k+3}. \tag{i}$$

Если

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,$$

то мы получаем, что

$$A_0 = B \bigsqcup \left( \bigsqcup_{n=0}^{\infty} (A_{2n} \setminus A_{2n+1}) \right) \bigsqcup \left( \bigsqcup_{n=0}^{\infty} (A_{2n+1} \setminus A_{2n+2}) \right) \equiv B \sqcup C_1 \sqcup C_2$$

и

$$A_1 = B \bigsqcup \left( \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (A_{2n} \setminus A_{2n+1}) \right) \bigsqcup \left( \bigsqcup_{n=0}^{\infty} (A_{2n+1} \setminus A_{2n+2}) \right) \equiv B \sqcup D_1 \sqcup D_2.$$

Заметим, что  $C_2 = D_2$ , и из условия (i) следует, что  $C_1 \sim D_1$ . Поэтому  $A_0 \sim A_1$ .  $\square$

**2.32.** Этот результат немедленно следует из формул  $A = (A \cap B) \sqcup (A \setminus B)$  и  $B = (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$ .  $\square$

**2.33.** Пусть  $D = B \setminus A$ . Тогда  $B = D \sqcup A$  и  $B \cup C = D \sqcup (A \cup (C \setminus B))$ . Таким образом, утверждение будет доказано, если мы покажем, что  $A \sim E = A \cup (C \setminus B)$ . Но эквивалентность этих множеств устанавливается, если применить задачу 2.31 к множествам  $A \subseteq E \subseteq A \cup C$ , где  $A \sim A \cup C$ .  $\square$

**2.34.** Так как  $C \cup B \sim C$  и  $D \setminus A \subseteq B$ , то из задачи 2.31 следует, что  $C \cup (D \setminus A) \sim C$ . Далее,

$$A \cup D = (A \setminus C) \sqcup (C \cup (D \setminus A)) \sim (A \setminus C) \sqcup C = A.$$

$\square$

**2.35.** Возьмём множества  $A = B = C = [0, 1]$  и  $D = [0, 0.5]$ . Тогда (см. задачу 2.14)  $A \sim C$ ,  $B \sim D$ , но  $A \setminus B = \emptyset \not\sim C \setminus D = [0.5, 1]$ .  $\square$

**2.36.** Возьмём множества  $A = C = [0, 1]$  и  $B = [0, 0.5]$ . Тогда  $A \sim B$ , но  $C \setminus B = [0.5, 1] \not\sim C \setminus A = \emptyset$ .  $\square$

**2.37.** Рассмотрим множества  $A = [0, 2]$  и  $B = C = [0, 1]$ . Тогда  $A \sim B$ , но  $B \setminus C = \emptyset \not\sim A \setminus C = [1, 2]$ .  $\square$

**2.38.** Пусть  $A = \{a_1, \dots, a_n, \dots\}$ . Определим множество

$$B = \{z_{n,k,j} = a_n - a_k + j, \text{ где } n, k \in \mathbb{N} \text{ и } j = 0, 1\}.$$

Ясно, что  $B$  счётно, поэтому существует число  $a \in [0, 1] \setminus B$ . Предположим, что существует  $x \in A \cap A + a \pmod{1}$ . Тогда для некоторых  $k$  и  $j$  выполнено либо равенство  $a_k = a_j + a$ , либо равенство  $a_k = a_j + a - 1$ . Это означает, что  $a \in B$ , и мы пришли к противоречию.  $\square$

**2.39.** Пусть  $A = \{(a_1, \dots, a_n, \dots)\}$ , где  $a_{2n-1} = 0$  при всех  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{2n} \in \{0, 1\}$  при всех  $n \in \mathbb{N}$  и последовательность  $\{a_{2n}\}$  не имеет периода (1). Пусть  $B = \{(a_1, \dots, a_n, \dots)\}$ , где  $a_{2n} = 0$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{2n-1} \in \{0, 1\}$  для любого  $n \in \mathbb{N}$  и последовательность  $\{a_{2n-1}\}$  не имеет периода (1). Ясно, что оба множества имеют мощность  $\mathfrak{c}$ . Отождествим множества  $A$  и  $B$  с подмножествами отрезка  $[0, 1]$ ,

поставив в соответствие каждой последовательности точку с соответствующим двоичным разложением. Поскольку ни  $A$ , ни  $B$  не содержат последовательностей с единицей в периоде, то переход от разложения к точке и обратно однозначен. Предположим, что  $b(1)$  и  $b(2)$  — две разные точки из  $B$ . Тогда найдётся такое  $n \geq 1$ , что, например,  $b(1)_{2n-1} = 0$  и  $b(2)_{2n-1} = 1$ . Предположим, что существует точка  $z \in (A + b(1)) \cap (A + b(2))$ . Так как  $z \in A + b(1)$ , то  $z_{2n-1} = 0$ , но так как  $z \in A + b(2)$ , то  $z_{2n-1} = 1$ . Мы получили противоречие, следовательно,  $(A + b(1)) \cap (A + b(2)) = \emptyset$ .  $\square$

**2.40.** Пусть  $f$  — взаимно однозначное соответствие между  $B$  и  $A_1$ . Положим  $A_2 = f(B_1)$ . Тогда  $A \sim A_2$  и  $A_2 \subseteq A_1 \subseteq A$ . В силу результата задачи 2.31 получаем, что  $A \sim A_1 \sim B$ .  $\square$

**2.41.** Пусть  $f$  — биекция  $\Omega$  на  $\mathbb{R}$ , и пусть для каждого  $\omega \in \Omega$   $g_\omega$  — биекция  $A_\omega$  на  $\mathbb{R}$ . Для каждого  $x \in A$ , используя аксиому выбора, найдём  $\omega(x)$ , для которого  $x \in A_{\omega(x)}$ . Определим на  $A$  функцию  $F$  следующим образом:  $F(x) = (g_{\omega(x)}(x), f(\omega(x)))$ . Тогда видно, что  $F$  — биекция  $A$  на некоторое подмножество в  $\mathbb{R}^2$ . Так как  $\mathbb{R}^2$  имеет мощность  $\mathfrak{c}$  (см. задачу 2.24), то  $\bar{A} \leqslant \mathfrak{c}$ . С другой стороны, каждое множество  $A_\omega \subseteq A$  по условию имеет мощность  $\mathfrak{c}$ . По теореме Кантора–Бернштейна (задача 2.40) получаем, что  $\bar{A} = \mathfrak{c}$ .  $\square$

**2.42.** Пусть  $C$  — множество всех постоянных функций на  $[0, 1]$ . Тогда мощность  $C$  равна  $\mathfrak{c}$ . С другой стороны, можно определить на  $C([0, 1])$  отображение  $F(f) = (f(r_1), \dots, f(r_n), \dots)$ , где  $\{r_n\}_{n=1}^\infty$  — последовательность всех рациональных чисел из отрезка  $[0, 1]$ . Так как множество рациональных чисел плотно на отрезке, то  $F(f) \neq F(g)$  при  $f \neq g$ . Таким образом, множество  $C[0, 1]$  эквивалентно некоторому подмножеству множества всех последовательностей вещественных чисел, которое в силу результата задачи 2.25 имеет мощность  $\mathfrak{c}$ . Применение теоремы Кантора–Бернштейна (задача 2.40) завершает доказательство.  $\square$

**2.43.** Пусть  $\{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$  — занумерованное некоторым образом множество  $\mathbb{Q}_{[0;1]}$ , взята функция  $f(x) \in A$ , множество  $X_f = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  — множество всех точек разрыва функции  $f(x)$  на  $[0, 1]$  (оно счётно в силу результата задачи 2.4),  $Y_f = \{f(x_1), \dots, f(x_n), \dots\}$  и  $Q_f = \{f(r_1), \dots, f(r_n), \dots\}$ . Заметим, что если для двух монотонных функций  $f$  и  $g$  выполнены равенства  $X_f = X_g$ ,  $Y_f = Y_g$  и  $Q_f = Q_g$ , то  $f(x) \equiv g(x)$  на  $[0, 1]$ . Далее, из задачи 2.25 следует, что множество троек  $(X_f, Y_f, Q_f)$ , где  $f(x) \in A$ , есть подмножество некоторого множества мощности  $\mathfrak{c}$ . С другой стороны,  $A$  содержит множество всех постоянных на  $[0, 1]$  функций, которое имеет мощность  $\mathfrak{c}$ .

Следовательно, по теореме Кантора–Бернштейна (задача 2.40)  $A$  имеет мощность континуума.  $\square$

**2.44.** Утверждение следует из задач 2.42 и 2.25.

**2.45.** Заметим, что множество  $A$  содержит характеристические функции  $\chi_E(x)$  для всех множеств  $E \subseteq [0, 1]$ , т. е.  $A$  содержит подмножество мощности  $2^c$ . С другой стороны, для каждой  $f(x) \in A$  рассмотрим её график  $P_f$  на плоскости. Ясно, что если графики функций  $f$  и  $g$  совпадают, то и сами функции совпадают. Но  $\{P_f\}_{f \in A}$  есть подмножество множества всех подмножеств плоскости. Так как плоскость имеет мощность  $c$  (см. задачу 2.24), то множество её подмножеств имеет мощность  $2^c$ , а тогда мощность  $A$  не превосходит  $2^c$ . Используя теорему Кантора–Бернштейна (задача 2.40), получаем, что  $A$  имеет мощность  $2^c$ .  $\square$

**2.46.** Утверждение следует из задач 2.45 и 2.44.

**2.47.** Отметим, что так как  $B \subseteq A$  и  $C \subseteq A$ , то с учётом теоремы Кантора–Бернштейна (задача 2.40) достаточно доказать, что мощность хотя бы одного из множеств,  $A$  или  $B$ , не меньше чем  $c$ . Без ограничения общности предположим, что  $B \cap C = \emptyset$ . Пусть  $f(x)$  — взаимно однозначное соответствие между множествами  $[0, 1]^2$  и  $A$ . Возможны два варианта.

1) Существует такое  $x \in [0, 1]$ , что  $f(x, y) \in B$  для каждого  $y \in [0, 1]$ . Тогда  $B$  содержит подмножество мощности  $c$  (отрезок).

2) Для любого  $x \in [0, 1]$  существует такое  $y = y(x) \in [0, 1]$ , что  $f(x, y) \in C$ . Тогда  $C$  содержит подмножество мощности  $c$ , а именно  $\{x, y(x)\}_{x \in [0, 1]}$ .  $\square$

**2.48.** Отметим, что так как  $A_i \subseteq A$ , то с учётом задачи 2.40 достаточно доказать, что мощность некоторого  $A_i$  не меньше чем  $c$ . Без ограничения общности можно считать, что  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , если  $i \neq j$ . Пусть  $f(x)$  — биекция множества  $B$  последовательностей  $\{(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)\}$ , где  $a_j \in [0, 1]$  при  $j \in \mathbb{N}$ , на  $A$  (в задаче 2.25 показано, что  $\bar{B} = c$ ). Возможны два варианта.

1. Для любого  $a_1 \in [0, 1]$  существуют такие  $a_2, a_3, \dots \in [0, 1]$ , что  $f((a_1, a_2, \dots)) \in A_1$ . В этом случае множество  $A_1$  содержит подмножество мощности  $c$ .

2. Существует такое  $a_1^0 \in [0, 1]$ , что для каждого  $a_2, a_3, \dots \in [0, 1]$  выполнено условие  $f((a_1^0, a_2, \dots)) \notin A_1$ . Тогда у нас опять возникают две возможности:

2а) для каждого  $a_2 \in [0, 1]$  найдутся такие  $a_3, a_4, \dots \in [0, 1]$ , что  $f((a_1^0, a_2, a_3, \dots)) \in A_2$ . Тогда  $A_2$  имеет мощность  $c$ ;

2б) существует такое  $a_2^0 \in [0, 1]$ , что для любого  $a_3, a_4, \dots \in [0, 1]$  выполнено условие  $f((a_1^0, a_2^0, a_3, \dots)) \notin A_2$ .

Повторяя этот процесс по индукции, мы получаем один из двух случаев.

I. На некотором шаге нашлось  $A_n$ , имеющее мощность  $\mathfrak{c}$ ;

II. Нашлись такие числа  $a_1^0, a_2^0, \dots \in [0, 1]$ , что  $f(\mathbf{a}_0) \equiv \equiv f((a_1^0, a_2^0, a_3^0, \dots)) \notin A_n$  для любого  $n$ . Но тогда  $f(\mathbf{a}_0) \notin A$ . Это противоречит условию, т. е. данный случай невозможен.  $\square$

**2.49.** Да, можно. Например, рассмотрим окружности с центром в фиксированной точке  $x_0$  и произвольным радиусом  $r \in (0, 1)$ .  $\square$

**2.50.** Нет, нельзя. Если дано некоторое множество таких окружностей, то можно выбрать внутри каждой из них точку с рациональными координатами. Так как ни одна окружность не лежит внутри другой, то разным окружностям будут соответствовать разные точки, т. е. мы получили биекцию взятого множества букв на некоторое множество  $E \subseteq \mathbb{Q}^2$ . Но множество  $\mathbb{Q}^2$  счётно в силу результата задачи 2.6.  $\square$

**2.51.** Нарисуем на плоскости букву «A» и обозначим через  $S_1(A)$  и  $S_2(A)$  открытые множества, изображённые на рис. 2.1.

Тогда мы можем выбрать для каждой буквы «A» пару точек из  $\mathbb{Q}^2$ :  $z_1(A) \in S_1(A)$  и  $z_2(A) \in S_2(A)$ . Предположим теперь, что две буквы  $A_1$  и  $A_2$  не пересекаются. Тогда  $A_2$  либо лежит в области  $S_1(A_1)$ , либо не пересекается с этой областью. В первом случае  $z_2(A_2) \neq z_2(A_1)$ . Во втором случае  $z_1(A_2) \neq z_1(A_1)$ . Так как множество пар точек с рациональными координатами счётно (см. задачу 2.6), то множество букв не более чем счётно.  $\square$

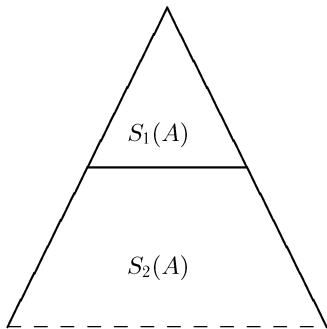


Рис. 2.1

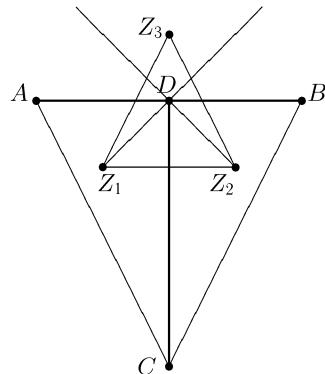


Рис. 2.2

**2.52.** Для буквы «Т» определим точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ , как это сделано на рис. 2.2.

Выберем в треугольнике  $ACD$  точку  $Z_1$  с рациональными координатами и в треугольнике  $BCD$  точку  $Z_2$  с рациональными координатами. Затем выберем точку  $Z_3$  с рациональными координатами, лежащую

в угле, вертикальном с углом  $Z_1DZ_2$ . Заметим, что по построению каждая сторона треугольника  $Z_1Z_2Z_3$  пересекает ровно один из отрезков  $DA$ ,  $DB$  и  $DC$ , а точка  $D$  лежит внутри этого треугольника.

Так как множество шестёрок рациональных чисел счётно (см. задачу 2.6), то нам достаточно доказать, что двум непересекающимся буквам «Т» не может соответствовать один и тот же набор точек  $(Z_1, Z_2, Z_3)$ . Предположим, что для другой буквы «Т», состоящей из отрезков  $A'B'$  и  $C'D'$ , получилась та же тройка точек  $Z_i$ . Тогда точка  $D'$  лежит в одной из трёх частей, на которые треугольник  $Z_1Z_2Z_3$  разбит отрезками  $DA$ ,  $DB$  и  $DC$ . Если она лежит с той же стороны от  $AB$ , что и точка  $Z_3$ , то выходящий из неё отрезок не может пересечь  $Z_1Z_2$  и не пересечь при этом  $AB$ , т.е. буквы  $T$  и  $T'$  пересекаются. Если  $D'$  лежит в треугольнике  $ADC$ , то выходящий из неё отрезок, пересекающий  $Z_2Z_3$ , должен пересечь либо  $AD$ , либо  $DC$ . Аналогично рассматривается и третий случай. Таким образом, непересекающимся буквам соответствуют разные тройки  $(Z_1, Z_2, Z_3)$ .  $\square$

**2.53.** Используя аксиому выбора, выберем для каждого  $y \in f((0, 1))$  такую точку  $x \in (0, 1)$ , что  $f(x) = y$ , и обозначим множество этих точек через  $A$ . Далее, для любого  $x \in A$  выберем пару рациональных чисел  $r_1(x) < x < r_2(x)$  так, чтобы для любого  $t \in (r_1(x), r_2(x))$  было выполнено неравенство  $f(t) \leq f(x)$ . Пусть  $x, z \in A$  — две разные точки. Тогда по построению  $f(x) \neq f(z)$ . Предположим, что  $f(x) > f(z)$ . Тогда если  $r_1(x) = r_1(z)$  и  $r_2(x) = r_2(z)$ , то  $f(x) \leq f(z)$ . Противоречие. Таким образом, различным  $x \in A$  соответствуют разные пары рациональных точек, и так как в силу результата задачи 2.6 множество  $\mathbb{Q}^2$  счётно, то  $A$  не более чем счётно, а значит, и образ  $f$  не более чем счётен.  $\square$

**2.54.** Рассмотрим на интервале  $(0, 1)$  следующую функцию:  $f(x) = \frac{1}{n}$ , если  $\frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n}$  при некотором  $n \in \mathbb{N}$ . Функция  $f$  удовлетворяет условиям задачи.  $\square$

## Г л а в а 3

# МНОЖЕСТВА В $\mathbb{R}^n$ И ДРУГИХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

*Метрическим пространством* называется пара  $(M, \rho)$ , где  $M$  — множество, а функция  $\rho : M \times M \rightarrow [0, \infty)$  (*метрика*) удовлетворяет следующим условиям:

1.  $\rho(x, y) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = y$ ;
2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  для любых  $x, y \in M$ ;
3.  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$  для любых  $x, y, z \in M$  (неравенство треугольника).

Если  $x \in M$  и  $r > 0$ , то *открытым шаром* радиуса  $r$  с центром  $x$  называется множество  $B_r(x) = \{y \in M : \rho(x, y) < r\}$ , а соответствующим *замкнутым шаром* — множество  $\bar{B}_r(x) = \{y \in M : \rho(x, y) \leq r\}$ . Открытый шар с центром в точке  $x$  называют также *окрестностью* точки  $x$ .

Множество  $G \subseteq M$  называется *открытым*, если вместе с каждой своей точкой оно содержит некоторый шар с центром в этой точке. В частности, пустое множество открыто. Множество  $F \subseteq M$  называется *замкнутым*, если  $M \setminus G$  открыто.

Если множество  $A \subseteq M$  представимо в виде

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n,$$

где множества  $G_n$  открыты, то скажем, что  $A$  — *множество типа  $G_\delta$* .

Если множество  $A \subseteq M$  может быть представлено в виде

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

где множества  $F_n$  замкнутые, то будем говорить, что  $A$  — *множество типа  $F_\sigma$* . Аналогично можно определить множества типов  $G_{\delta\sigma}$ ,  $F_{\sigma\delta}$  и т. д.

Последовательность  $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $x_n \in M$ , называется *фундаментальной*, если для каждого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $N$ , что для любых  $n, m > N$  выполнено неравенство  $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ .

Скажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ , где  $x$  и все  $x_n$  из  $M$  ( $x$  — предел последовательности  $\{x_n\}$ ), если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $N$ , что при всех  $n > N$  справедливо неравенство  $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ . Если

каждая фундаментальная последовательность в  $(M, \rho)$  имеет предел, то метрическое пространство  $(M, \rho)$  называется *полным*.

Если  $A$  — подмножество в  $M$ , а точка  $y \in M$  такова, что для любого  $r > 0$  множество  $(B_r(y) \setminus \{y\}) \cap A$  непусто, то  $y$  называется *пределной точкой* множества  $A$ .

Множество всех предельных точек  $A$  обозначается через  $A'$ . *Замыканием* множества  $A$  называется  $\bar{A} = A \cup A'$ . Если  $\bar{A} = M$ , то скажем, что  $A$  — *всюду плотное* в  $M$  множество. Если  $A' = A$ , то  $A$  называется *совершенным*.

Метрическое пространство  $(M, \rho)$  называется *сепарабельным*, если в нём существует не более чем счётное всюду плотное множество.

Если множество  $A$  таково, что для любого шара  $B_r(x)$  с центром  $x \in M$  существует шар  $B_t(y) \subseteq B_r(x)$ , не пересекающийся с  $A$ , то  $A$  называется *нигде не плотным* в  $M$ .

Если множество  $A$  представимо в виде

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

где  $A_n$  — нигде не плотные множества в  $M$ , то  $A$  называется множеством *первой категории* (Бэра) в  $M$ . В противном случае  $A$  называется множеством *второй категории* (Бэра) в  $M$ .

Если точка  $x \in A \subseteq M$  такова, что  $B_r(x) \cap A = \{x\}$  для некоторого  $r > 0$ , то  $x$  называется *изолированной точкой*  $A$ . Если  $x \in A$  такова, что для любого  $r > 0$  множество  $B_r(x) \cap A$  несчётно, то  $x$  называется *точкой конденсации* множества  $A$ .

Точка  $x$  называется *внутренней точкой* множества  $A$ , если  $A$  содержит некоторую окрестность этой точки. Совокупность всех внутренних точек множества  $A$  называется его *внутренностью* и обозначается через  $A^\circ$ .

Скажем, что множество  $A$  ограничено, если существует такая постоянная  $C > 0$ , что  $\rho(x, y) \leq C$  для любых  $x, y \in A$ .

Если  $A, B \subseteq M$  и  $x \in M$ , то расстояние от  $x$  до  $A$  определяется как  $\text{dist}(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y)$ , а расстояние между  $A$  и  $B$  — как  $\text{dist}(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \rho(x, y)$ . Если найдётся такая точка  $y_0 \in A$ , что  $\text{dist}(x, A) = \rho(x, y_0)$ , то мы будем говорить, что *расстояние от точки  $x$  до множества  $A$  достигается* (в точке  $y_0$ ). Аналогично *расстояние между  $A$  и  $B$  достигается*, если найдутся такие точки  $x_0 \in A$  и  $y_0 \in B$ , что  $\text{dist}(A, B) = \rho(x_0, y_0)$ .

Пусть  $L$  — линейное пространство над полем  $K$  (где  $K = \mathbb{R}$  или  $K = \mathbb{C}$ ), а функция  $\|\cdot\| : L \rightarrow [0, \infty)$  удовлетворяет следующим условиям:

1.  $\|x\| = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = 0$ ;
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  для любых  $x \in L$  и  $\lambda \in K$ ;

3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  для любых  $x, y \in L$ .

Тогда пара  $(L, \|\cdot\|)$  называется *нормированным (линейным) пространством*, а функция  $\|\cdot\|$  — *нормой*. Заметим, что любое нормированное линейное пространство порождает метрическое пространство  $(L, \rho)$ , где  $\rho(x, y) = \|x - y\|$  для всех  $x, y \in L$  — метрика, порождённая нормой.

Если  $E$  — линейное пространство,  $A \subset E$ , а  $E_0$  — подпространство, то множество  $A \cap E_0$  называется *сечением* множества  $A$  подпространством  $E_0$ .

*Гильбертовым пространством* называется пара  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , где  $H$  — линейное пространство над полем  $K$  (где  $K = \mathbb{R}$  или  $K = \mathbb{C}$ ), а функция  $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow K$ , называемая *скалярным произведением*, удовлетворяет следующим условиям:

1.  $\langle x, x \rangle \geq 0$  при всех  $x \in H$ , и равенство имеет место лишь при  $x = 0$ ;

2.  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$  при всех  $x, y \in H$  (здесь черта означает комплексное сопряжение);

3.  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$  при всех  $x, y, z \in H$ ;

4.  $H$  полно относительно порождённой нормы  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

Всюду ниже нормированные пространства рассматриваются как частный случай метрических пространств. Если нормированное пространство полно относительно порождённой метрики, оно называется *банаховым*. Приведём наиболее важные примеры банаховых пространств.

1.  $\mathbb{R}^n$ -пространство, где  $n \geq 1$ , обычно с евклидовой нормой

$$\|x\| = \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2}.$$

2. Пространства  $l_p$  последовательностей. Если  $1 \leq p < \infty$ , то

$$l_p = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^\infty : \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty \right\} \text{ с нормой } \|x\|_p = \left( \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p \right)^{1/p}.$$

Пространство  $l_\infty$  (иногда используются другие обозначения) определяется как множество всех ограниченных последовательностей с нормой  $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$ .

3.  $C([a, b])$  — пространства непрерывных функций на  $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$  с обычной нормой  $\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ . Аналогичные пространства можно рассматривать на неограниченных интервалах в  $\mathbb{R}^n$  (конечно, в этом случае следует брать только ограниченные функции и заменить  $\max$  на  $\sup$  в определении нормы).

Ещё один важный пример нормированных пространств — функциональные  $L_p(E)$ -пространства — будет рассмотрен в гл. 13.

Множество  $A \subseteq L$  называется *выпуклым*, если для любых  $x, y \in A$  и для любого числа  $\alpha \in (0, 1)$  точка  $\alpha x + (1 - \alpha)y$  принадлежит  $A$ .

Система множеств  $\{G_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  называется *покрытием* множества  $A$ , если

$$A \subseteq \bigcup_{\omega \in \Omega} G_\omega.$$

Если все  $G_\omega$  открыты, то и покрытие называется *открытым*. Покрытие  $\{G_\omega\}_{\omega \in \Omega'}$ , где  $\Omega' \subseteq \Omega$ , называется *подпокрытием* исходного покрытия.

## ЗАДАЧИ

**3.1.** Доказать, что любая сходящаяся последовательность в метрическом пространстве фундаментальна.

**3.2.** Пусть  $A$  — множество в метрическом пространстве  $(M, \rho)$ . Доказать, что множество  $\bar{A}$  замкнуто.

**3.3.** Пусть  $F$  — замкнутое подмножество метрического пространства  $(M, \rho)$ . Доказать, что  $\bar{F} = F$  (это эквивалентно тому, что  $F' \subseteq F$ ).

**3.4.** Пусть  $A$  — множество в метрическом пространстве  $(M, \rho)$ . Доказать, что  $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ .

**3.5.** Доказать, что если  $(L, \|\cdot\|)$  — нормированное пространство,  $x \in L$  и  $r > 0$ , то  $\bar{B}_r(x) = \overline{B_r(x)}$ .

**3.6.** Доказать, что если  $(M, \rho)$  — метрическое пространство,  $x \in M$  и  $r > 0$ , то множество  $\bar{B}_r(x)$  замкнуто.

**3.7.** Доказать, что если  $(M, \rho)$  — метрическое пространство,  $x \in M$  и  $r > 0$ , то  $\overline{B_r(x)} \subseteq \bar{B}_r(x)$ .

**3.8.** Построить метрическое пространство  $(M, \rho)$  и такой шар  $B_r(x)$  в нём, что  $\overline{B_r(x)} \neq \bar{B}_r(x)$ .

**3.9.** Пусть  $A$  — множество в метрическом пространстве  $(M, \rho)$ . Доказать, что  $A'$  замкнуто.

**3.10.** Пусть  $\{G_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  — система открытых множеств в метрическом пространстве  $(M, \rho)$ . Доказать, что множество

$$G = \bigcup_{\omega \in \Omega} G_\omega$$

также открыто.

**3.11.** Пусть  $G_1, \dots, G_n$  — конечное число открытых множеств в метрическом пространстве  $(M, \rho)$ . Доказать, что

$$G = \bigcap_{k=1}^n G_k$$

— открытое множество.

**3.12.** Построить такую последовательность  $\{G_n\}_{n=1}^\infty$  открытых множеств из интервала  $(0, 1)$ , что множество

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$$

не будет открытым.

**3.13.** Пусть  $\{F_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  — система замкнутых множеств в метрическом пространстве  $(M, \rho)$ . Доказать, что множество

$$F = \bigcap_{\omega \in \Omega} F_\omega$$

замкнуто.

**3.14.** Пусть  $F_1, \dots, F_n$  — конечный набор замкнутых множеств в метрическом пространстве  $(M, \rho)$ . Доказать, что множество

$$F = \bigcup_{k=1}^n F_k$$

замкнуто.

**3.15.** Построить последовательность  $\{F_n\}_{n=1}^\infty$  замкнутых множеств на  $[0, 1]$  такую, что множество

$$C = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$$

не будет замкнутым.

**3.16.** Пусть  $(M, \rho)$  — метрическое пространство,  $G$  — открытое множество в  $M$  и  $F$  — замкнутое множество в  $M$ . Доказать, что  $G \setminus F$  открыто, а  $F \setminus G$  замкнуто.

**3.17.** Пусть дана система множеств  $A_1, \dots, A_n$  в метрическом пространстве  $(M, \rho)$ . Доказать, что

$$\left( \bigcup_{k=1}^n A_k \right)' = \bigcup_{k=1}^n A'_k.$$

**3.18.** Пусть даны множества  $A_1, \dots, A_n$  в метрическом пространстве  $(M, \rho)$ . Доказать, что

$$\overline{\bigcup_{k=1}^n A_k} = \bigcup_{k=1}^n \overline{A_k}.$$

**3.19.** Построить множества  $\{A_k\}_{k=1}^\infty$  на отрезке  $[0, 1]$ , для которых

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A'_k \neq \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right)' \quad \text{и} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A_k} \neq \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}.$$

**3.20. Теорема Больцано–Вейерштрасса.** Пусть  $A$  — бесконечное ограниченное множество в  $\mathbb{R}^n$ . Доказать, что  $A' \neq \emptyset$ .

**3.21.** Построить бесконечное ограниченное множество  $A$  в банаховом пространстве  $l_2$ , не имеющее предельных точек.

**3.22.** Пусть  $A$  — произвольное подмножество  $\mathbb{R}^n$ . Доказать, что  $A \setminus A'$  не более чем счётно.

**3.23.** Пусть  $A$  — произвольное подмножество  $\mathbb{R}^n$ . Доказать, что если  $A'$  не более чем счётно, то  $A$  также не более чем счётно.

**3.24.** Построить в банаховом пространстве  $l_\infty$  множество  $A$  мощности континуума, не имеющее предельных точек.

**3.25.** Пусть  $A$  — множество в метрическом пространстве  $(M, \rho)$ . Доказать, что  $A'' \subseteq A'$ .

**3.26.** Пусть  $A'' = (A')'$ ,  $A^{(3)} = A''' = (A'')'$  и т. д. Построить такое  $A \subset [a, b]$ , что  $A' \neq \emptyset$  и  $A'' = \emptyset$ .

**3.27.** Пусть  $n > 1$ . Построить такое  $A \subset [0, 1]$ , что  $A^{(n)} \neq \emptyset$  и  $A^{(n+1)} = \emptyset$  (см. обозначения в задаче 3.26).

**3.28.** Построить такое  $A \subset [0, 1]$ , что  $A^{(n)} \setminus A^{(n+1)} \neq \emptyset$  для всех  $n \in \mathbb{N}$  (см. обозначения в задаче 3.26).

**3.29.** Построить счётное множество  $A \subset [0, 1]$ , которое имеет континуум предельных точек, но не содержит ни одной из них.

**3.30.** Пусть  $(M, \rho)$  — полное метрическое пространство,  $\bar{B}_{r_1}(x_1) \supseteq \bar{B}_{r_2}(x_2) \supseteq \bar{B}_{r_3}(x_3) \supseteq \dots$  — последовательность вложенных непустых замкнутых шаров с радиусами  $r_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Доказать, что существует единственная общая точка

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{B}_{r_n}(x_n).$$

**3.31.** Построить полное метрическое пространство  $(M, \rho)$  и последовательность  $\bar{B}_{r_1}(x_1) \supseteq \bar{B}_{r_2}(x_2) \supseteq \bar{B}_{r_3}(x_3) \supseteq \dots$  вложенных непустых замкнутых шаров, не имеющих общей точки.

**3.32.** Построить два шара  $B_{r_1}(x_1) \subset B_{r_2}(x_2)$  в некотором метрическом пространстве, для которых  $r_1 > r_2$ .

**3.33.** Доказать, что если  $(L, \|\cdot\|)$  — нормированное пространство и два замкнутых шара вложены друг в друга:  $\bar{B}_{r_1}(x_1) \subseteq \bar{B}_{r_2}(x_2)$ , то  $r_1 \leq r_2 - \|x_1 - x_2\|$ . Доказать аналогичное утверждение для открытых шаров.

**3.34.** Пусть  $(L, \|\cdot\|)$  — банахово пространство,  $\bar{B}_{r_1}(x_1) \supseteq \bar{B}_{r_2}(x_2) \supseteq \bar{B}_{r_3}(x_3) \supseteq \dots$  — последовательность вложенных непустых замкнутых шаров. Доказать, что существует общая точка этих шаров.

**3.35.** Пусть  $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$  — последовательность непустых ограниченных замкнутых множеств в  $\mathbb{R}^n$ . Доказать, что их пересечение  $F$  непусто.

**3.36.** Пусть  $F_1, F_2, F_3, \dots$  — такая последовательность ограниченных замкнутых множеств в  $\mathbb{R}^n$ , что для любого  $N$  выполнено условие

$$\bigcap_{n=1}^N F_n \neq \emptyset.$$

Доказать, что пересечение всех  $F_n$  непусто.

**3.37.** Построить последовательность  $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \dots$  непустых замкнутых ограниченных выпуклых множеств в  $l_1$ , пересечение всех множеств которой пусто.

**3.38.** Пусть  $(M, \rho)$  — полное метрическое пространство и  $B_{r_1}(x_1) \supset B_{r_2}(x_2) \supset B_{r_3}(x_3) \supset \dots$  — последовательность вложенных непустых шаров, причём  $r_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и  $B_{r_n}(x_n) \supset \bar{B}_{r_{n+1}}(x_{n+1})$  для любого  $n \geq 1$ . Доказать, что существует единственная общая точка:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{r_n}(x_n) = \{x\}.$$

**3.39.** Построить такую последовательность непустых интервалов  $(a_1, b_1) \supset (a_2, b_2) \supset \dots$  из  $[0, 1]$ , что  $b_j - a_j \rightarrow 0$  при  $j \rightarrow \infty$ , но

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) = \emptyset.$$

**3.40.** Пусть  $F$  — замкнутое множество в метрическом пространстве  $(M, \rho)$ . Доказать, что  $F$  — множество типа  $G_\delta$ .

**3.41.** Пусть  $G$  — открытое множество в метрическом пространстве  $(M, \rho)$ . Доказать, что  $G$  — множество типа  $F_\sigma$ .

**3.42.** Доказать, что множество  $A$  в метрическом пространстве  $(M, \rho)$  имеет тип  $F_\sigma$  тогда и только тогда, когда множество  $M \setminus A$  имеет тип  $G_\delta$ .

**3.43.** Пусть  $A_1, \dots, A_n$  — конечная система множеств типа  $G_\delta$  в метрическом пространстве  $(M, \rho)$ . Доказать, что

$$A = \bigcup_{k=1}^n A_k$$

— множество типа  $G_\delta$ .

**3.44.** Пусть  $A_1, \dots, A_n$  — конечная система множеств типа  $F_\sigma$  в метрическом пространстве  $(M, \rho)$ . Доказать, что

$$F = \bigcap_{k=1}^n F_k$$

— множество типа  $F_\sigma$ .

**3.45.** Пусть  $G$  — открытое всюду плотное множество в метрическом пространстве  $(M, \rho)$ . Доказать, что для любого непустого шара  $B_r(x)$  существует шар  $\bar{B}_t(y)$  с радиусом  $t > 0$ , вложенный в  $B_r(x) \cap G$ .

**3.46.** Пусть  $G_1, \dots, G_n, \dots$  — последовательность открытых всюду плотных множеств в полном метрическом пространстве  $(M, \rho)$ . Доказать, что множество

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

всюду плотно.

**3.47.** Пусть  $G_1, \dots, G_n, \dots$  — последовательность всюду плотных множеств типа  $G_\delta$  в полном метрическом пространстве  $(M, \rho)$ . Доказать, что множество

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

— всюду плотное множество типа  $G_\delta$ .

**3.48.** Доказать, что множество всех рациональных чисел на  $\mathbb{R}$  не является множеством типа  $G_\delta$ .

**3.49.** Доказать, что произвольное счётное всюду плотное множество на  $\mathbb{R}$  не является множеством типа  $G_\delta$ .

**3.50.** Доказать, что произвольное счётное множество на  $\mathbb{R}$  является множеством типа  $F_\sigma$ .

**3.51.** Доказать, что множество всех иррациональных чисел на  $\mathbb{R}$  не является множеством типа  $F_\sigma$ .

**3.52.** Построить множество на  $\mathbb{R}$ , которое не является ни множеством типа  $F_\sigma$ , ни множеством типа  $G_\delta$ .

**3.53.** Построить множества  $A_1, \dots, A_n, \dots$  типа  $G_\delta$  на  $\mathbb{R}$ , объединение которых не является множеством типа  $G_\delta$ .

**3.54.** Построить множества  $B_1, \dots, B_n, \dots$  типа  $F_\sigma$  на  $\mathbb{R}$ , пересечение которых не является множеством типа  $F_\sigma$ .

**3.55.** Построить последовательность  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  всюду плотных множеств на  $\mathbb{R}$ , пересечение которых пусто.

**3.56.** Пусть  $A$  — всюду плотное множество типа  $G_\delta$  в банаховом пространстве  $(L, \| \cdot \|)$ , где  $L \neq \{0\}$ . Доказать, что  $A$  имеет мощность не меньше, чем мощность континуума.

**3.57.** Пусть  $A$  — нигде не плотное множество в метрическом пространстве  $(M, \rho)$ . Доказать, что множество  $M \setminus A$  всюду плотно в  $(M, \rho)$ .

**3.58.** Построить такое множество  $A$  в  $\mathbb{R}$ , что  $A$  и  $\mathbb{R} \setminus A$  — всюду плотные в  $\mathbb{R}$ .

**3.59.** Пусть  $A$  — открытое всюду плотное множество в метрическом пространстве  $(M, \rho)$ . Доказать, что множество  $M \setminus A$  — нигде не плотно в  $(M, \rho)$ .

**3.60.** Пусть  $A$  — нигде не плотное множество в метрическом пространстве  $(M, \rho)$ . Доказать, что множество  $\bar{A}$  также нигде не плотно в  $(M, \rho)$ .

**3.61.** Пусть  $A$  — множество в метрическом пространстве  $(M, \rho)$  и  $A_I$  — множество всех изолированных точек  $A$ . Доказать, что  $A_I$  — множество типа  $F_\sigma$ .

**3.62.** Привести пример множества  $A \subseteq [0; 1]$ , множество изолированных точек которого незамкнуто.

**3.63.** Пусть  $A$  — такое множество в метрическом пространстве  $(M, \rho)$ , что любая его точка является изолированной. Доказать, что  $A$  — множество типа  $F_\sigma$ .

**3.64.** Пусть  $A$  — множество в метрическом пространстве. Доказать, что

$$\bar{A} = \bigcap_{F \in \Omega} F,$$

где  $\Omega$  — множество всех замкнутых  $F \supseteq A$ .

**3.65.** Пусть  $F$  — замкнутое множество в  $\mathbb{R}^n$ . Доказать, что существует не более чем счётное множество  $A \subseteq F$ , замыкание которого совпадает с  $F$ .

**3.66.** Пусть  $F$  — замкнутое множество в сепарабельном метрическом пространстве  $(M, \rho)$ . Доказать, что существует не более чем счётное множество  $A \subseteq F$ , замыкание которого равно  $F$ .

**3.67.** Пусть  $B_1 = \{x \in l_\infty : \|x\| \leq 1\}$ . Доказать, что  $B_1 \setminus \bar{C} \neq \emptyset$  для любого счётного множества  $C \subset B_1$ .

**3.68.** Пусть  $(M, \rho)$  — сепарабельное метрическое пространство. Доказать, что существует такой счётный набор  $B = \{C_j\}_{j=1}^\infty$  открытых множеств в  $(M, \rho)$ , что любое открытое множество  $G \subseteq M$  может быть представлено в виде

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{n_k}$$

для некоторой последовательности натуральных чисел  $\{n_k\}$ .

**3.69.** Пусть  $A$  — множество в метрическом пространстве  $(M, \rho)$ . Доказать, что  $A^\circ$  открыто.

**3.70.** Пусть  $A$  — множество в метрическом пространстве  $(M, \rho)$ . Доказать, что  $A^\circ$  есть объединение всех открытых  $G \subseteq A$ .

**3.71.** Пусть  $G$  — открытое множество в метрическом пространстве  $(M, \rho)$ . Доказать, что  $(\bar{G})^\circ \supseteq G$ .

**3.72.** Построить такое открытое множество  $G \subset [0, 1]$ , что  $(\bar{G})^\circ \neq G$ .

**3.73.** Пусть  $F$  — замкнутое множество в метрическом пространстве  $(M, \rho)$ . Доказать, что  $\bar{F}^\circ \subseteq F$ .

**3.74.** Построить замкнутое множество  $F \subset [0, 1]$ , для которого  $\bar{F}^\circ \neq F$ .

**3.75.** Пусть  $A$  — множество в метрическом пространстве  $(M, \rho)$ , а  $B$  — замкнутое множество в этом пространстве. Доказать, что  $(A^\circ \cup B)^\circ = (A \cup B)^\circ$ .

**3.76.** Построить такие  $A, B \subset [0, 1]$ , что  $(A^\circ \cup B)^\circ \neq (A \cup B)^\circ$ .

**3.77.** Пусть  $A$  — множество в сепарабельном метрическом пространстве  $(M, \rho)$ , а  $\{G_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  — открытое покрытие  $A$ . Доказать, что из этого покрытия можно выбрать не более чем счётное подпокрытие.

**3.78. Теорема Гейне–Бореля.** Пусть  $F$  — замкнутое ограниченное множество в  $\mathbb{R}^n$ , а  $\{G_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  — открытое покрытие  $A$ . Доказать, что из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

**3.79.** Построить неограниченное замкнутое множество  $F \subset \mathbb{R}$  и его открытое покрытие множествами  $\{G_n\}$ , из которого нельзя выбрать конечное подпокрытие.

**3.80.** Построить множество  $A \subset [0, 1]$  и его открытое покрытие множествами  $\{G_n\}$ , из которого нельзя выбрать конечное подпокрытие.

**3.81.** Построить счётное покрытие отрезка  $[0; 1]$ , из которого нельзя выбрать конечное подпокрытие.

**3.82.** Пусть  $\{F_\omega\}_{\omega \in \Omega}$  — система ограниченных замкнутых множеств в  $\mathbb{R}^n$ , и для любых  $\omega_1, \dots, \omega_n$  выполнено условие

$$\bigcap_{k=1}^n F_{\omega_k} \neq \emptyset$$

(такая система называется *центрированной*). Доказать, что

$$F = \bigcap_{\omega \in \Omega} F_\omega \neq \emptyset.$$

**3.83.** Пусть  $A$  — множество в метрическом пространстве  $(M, \rho)$ . Доказать, что  $\text{dist}(x, A) = \text{dist}(x, \bar{A})$ .

**3.84.** Построить множество  $A \subset \mathbb{R}$  и точку  $x_0 \in \mathbb{R}^1$ , для которых  $\text{dist}(x_0, A) < \text{dist}(x_0, A^\circ)$ .

**3.85.** Пусть  $A$  и  $B$  — множества в метрическом пространстве  $(M, \rho)$ . Доказать, что

$$\text{dist}(A, B) = \inf_{x \in A} \text{dist}(x, B).$$

**3.86.** Пусть  $F_1$  и  $F_2$  — непустые замкнутые множества в метрическом пространстве  $(M, \rho)$ , причём  $\text{dist}(F_1, F_2) > 0$ . Доказать, что существуют открытые множества  $G_1 \supset F_1$  и  $G_2 \supset F_2$ , которые не пересекаются.

**3.87.** Пусть  $F_1$  и  $F_2$  — непустые замкнутые множества в метрическом пространстве  $(M, \rho)$ , причём  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ . Доказать, что существуют открытые множества  $G_1 \supset F_1$  и  $G_2 \supset F_2$ , которые не пересекаются.

**3.88.** Построить два замкнутых множества  $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}$ , для которых  $\text{dist}(F_1, F_2) = 0$ , но  $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ .

**3.89.** Пусть  $A$  и  $B$  — замкнутые множества в  $\mathbb{R}^n$  и  $A$  ограничено. Доказать, что расстояние от  $A$  до  $B$  достигается.

**3.90.** Пусть  $A$  — множество в  $\mathbb{R}^n$ . Доказать, что  $A$  замкнуто тогда и только тогда, когда для любой точки  $y \in \mathbb{R}^n$  расстояние от  $y$  до  $A$  достигается.

**3.91.** Построить пример замкнутого множества  $A$  и точки  $y$  в пространстве  $l_2$ , для которых расстояние от  $y$  до  $A$  не достигается.

**3.92.** Пусть  $H$  — гильбертово пространство,  $x, y \in H$ . Доказать, что справедливо *тождество параллелограмма*:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

**3.93.** Пусть  $H$  — гильбертово пространство,  $H_0$  — его замкнутое подпространство,  $x \in H \setminus H_0$ , а точки  $y_n \in H_0$  таковы, что  $\rho(y_n, x) \rightarrow \text{dist}(x, H_0)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Доказать, что последовательность  $\{y_n\}$  сходится в  $H$ .

**3.94.** Пусть  $H$  — гильбертово пространство,  $H_0$  — его замкнутое подпространство,  $x \in H \setminus H_0$ . Доказать, что существует единственная точка  $y \in H_0$ , на которой достигается расстояние от  $x$  до  $H_0$ .

**3.95.** Пусть  $H$  — вещественное гильбертово пространство,  $H_0$  — его замкнутое подпространство,  $x \in H \setminus H_0$ , и расстояние  $x$  до  $H_0$  достигается на точке  $y_0$ . Доказать, что  $\langle y_0 - x, z \rangle = 0$  для всех  $z \in H_0$ .

**3.96.** Построить пример такого замкнутого подпространства  $E_1$  в банаховом пространстве  $L$ , что для произвольной точки  $x \in L \setminus E_1$  расстояние от  $x$  до  $E_1$  не достигается.

**3.97.** Построить пример такого замкнутого подпространства  $V_1$  в банаевом пространстве  $V$ , что для одних точек  $x \in V \setminus V_1$  расстояние от  $x$  до  $V_1$  достигается, а для других — нет.

**3.98.** Построить пример такого замкнутого подпространства  $V_1$  в банаевом пространстве  $V$ , что для некоторого  $x \in V \setminus V_1$  расстояние от  $x$  до  $V_1$  достигается на бесконечном множестве точек.

**3.99.** Пусть на  $\mathbb{R}^n$  заданы две нормы:  $p_1(x)$  и  $p_2(x)$ . Доказать, что существует такая постоянная  $C > 0$ , что

$$\frac{1}{C} p_1(x) \leq p_2(x) \leq C p_1(x)$$

для любого  $x \in \mathbb{R}^n$ . В частности, понятие сходимости в  $\mathbb{R}^n$  не зависит от выбора нормы.

**3.100.** Пусть  $L$  — банаево пространство,  $E_1$  — его конечномерное подпространство. Доказать, что для любого  $x \in L \setminus E_1$  расстояние от  $x$  до  $E_1$  достигается.

**3.101.** Пусть  $G$  — открытое множество в  $\mathbb{R}^n$ , а  $P$  — подпространство в  $\mathbb{R}^n$ . Доказать, что сечение  $G \cap P$  множества  $G$  открыто в  $P$ .

**3.102.** . Пусть  $F$  — замкнутое множество в  $\mathbb{R}^n$ , а  $P$  — подпространство в  $\mathbb{R}^n$ . Доказать, что сечение  $F \cap P$  множества  $F$  замкнуто в  $P$ .

**3.103.** Построить неоткрытое множество  $A$  в  $\mathbb{R}^2$ , сечение которого любой прямой  $l$  открыто в  $l$ .

**3.104.** Построить незамкнутое множество  $S$  в  $\mathbb{R}^2$ , сечение которого любой прямой  $l$  замкнуто в  $l$ .

**3.105.** Пусть  $A$  — множество в сепарабельном банаевом пространстве  $(L, \| \cdot \|)$  а  $\hat{A}$  — множество всех точек конденсации  $A$ . Доказать, что множество  $A \setminus \hat{A}$  не более чем счётно.

**3.106.** Пусть  $A$  — несчётное множество в сепарабельном банаевом пространстве. Доказать, что множество  $A \cap \hat{A}$  (см. задачу 3.105) непусто.

**3.107.** Пусть  $A$  — непустое совершенное множество в банаевом пространстве  $(L, \| \cdot \|)$ , где  $L \neq \{0\}$ . Доказать, что  $A$  имеет мощность, не меньшую мощности континуума.

**3.108.** Пусть  $\{A_n\}_{n=1}^k$  — набор совершенных множеств в метрическом пространстве  $(M, \rho)$ . Доказать, что множество

$$A = \bigcup_{n=1}^k A_n$$

— также совершенное.

**3.109.** Пусть  $G$  — открытое множество в  $\mathbb{R}$ . Доказать, что его можно представить в виде

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,$$

где  $I_n = (a_n, b_n)$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Здесь одно из  $a_k$  и (или) из  $b_j$  может быть бесконечным, а объединение может быть конечным.

**3.110.** Доказать, что не существует представления отрезка  $[0, 1]$  в виде

$$[0, 1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

где  $F_n$  — замкнутые множества и более чем одно из них непусто.

**3.111.** Пусть  $(L, \| \cdot \|)$  — банахово пространство. Доказать, что  $L$  не может быть представлено как счётное объединение попарно непересекающихся замкнутых множеств, более чем одно из которых непусто.

**3.112.** Пусть  $P$  — совершенное множество на  $\mathbb{R}$ , даны числа  $a$  и  $b$ , причём  $a < b$ , и при некотором  $\delta > 0$  выполнены условия  $(a - \delta, a) \cap P = \emptyset$  и  $(b, b + \delta) \cap P = \emptyset$ . Доказать, что  $P \cap [a; b]$  — совершенное множество.

**3.113.** Пусть  $P$  — совершенное нигде не плотное множество в  $[0, 1]$ , а  $A$  — конечное множество. Доказать, что  $P \setminus A$  можно представить как не более чем счётное объединение совершенных попарно непересекающихся множеств.

**3.114.** Доказать, что  $[0, 1]$  можно представить как объединение континуума попарно непересекающихся непустых совершенных множеств.

**3.115. Теорема Бэра.** Пусть  $(M, \rho)$  — полное метрическое пространство. Доказать, что  $M$  не является множеством 1-й категории Бэра в себе.

**3.116.** Доказать, что множество нигде не дифференцируемых непрерывных функций является множеством 2-й категории Бэра в  $C([0, 1])$ . В частности, существует нигде не дифференцируемая функция из  $C([0, 1])$ .

З а м е ч а н и е. Первые примеры непрерывных, но нигде не дифференцируемых функций на  $[0, 1]$  были построены Б. Больцано и К. Вейерштрассом, а утверждение задачи 3.116 было доказано С. Банахом.

## РЕШЕНИЯ

**3.1.** Пусть в метрическом пространстве  $M$  выполнено условие  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся такое  $N$ , что при  $n > N$

имеет место оценка  $\rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Но тогда по неравенству треугольника при  $n, m > N$  выполняется условие  $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ .  $\square$

**3.2.** Пусть  $x \in G = M \setminus \bar{A}$ . Предположим, что для любого  $r > 0$  существует точка  $y_r \in C_r = B_r(x) \cap \bar{A}$ . Заметим, что  $y_r \neq x$ . Пусть  $R = r - \rho(y_r, x) > 0$ . Тогда или  $y_r \in A$ , или  $y_r \in A'$  и, следовательно, во втором случае существует  $z_r \in (B_R(y_r) \setminus \{y_r\}) \cap A$ . По неравенству треугольника

$$\rho(z_r, x) \leq \rho(z_r, y_r) + \rho(y_r, x) < R + \rho(y_r, x) = r.$$

Итак, в обоих случаях  $(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap A$  непусто для каждого  $r$ , откуда следует, что  $x \in A'$ . Мы получили противоречие, т. е. существует такое  $r_0 > 0$ , что  $B_{r_0}(x) \cap \bar{A}$  пусто, и, таким образом,  $G$  открыто.  $\square$

**3.3.** Множество  $G = M \setminus F$  открыто, поэтому если  $y \in G$ , то  $y \notin F'$  и  $y \notin F \cup F' = \bar{F}$ . Таким образом,  $\bar{F} \subseteq F$ . Обратное вложение тривиально.  $\square$

**3.4.** Утверждение следует из задач 3.2 и 3.3.  $\square$

**3.5.** По определению шара  $B_r(x) = \{z = x + y : \|y\| < r\}$  и  $\bar{B}_r(x) = \{z = x + y : \|y\| \leq r\}$ . Заметим, что если  $\|y\| = r$ , то при  $0 < \varepsilon < 1$  вектор  $x + \varepsilon y$  лежит в открытом шаре и  $\|(x + y) - (x + \varepsilon y)\| = |1 - \varepsilon| \|y\| \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 1 - 0$ . Поэтому  $\overline{B_r(x)} \supseteq \bar{B}_r(x)$ . Поскольку из неравенства треугольника следует, что  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$  при  $x_n \rightarrow x$ , то справедливо обратное вложение.  $\square$

**3.6.** Пусть  $y \notin \bar{B}_r(x)$ . Тогда  $\gamma = \rho(x, y) > r$ , поэтому  $\delta = \gamma - r > 0$ . В силу неравенства треугольника  $B_\delta(y) \cap \bar{B}_r(x) = \emptyset$  и, следовательно, множество  $G = M \setminus \bar{B}_r(x)$  открыто.  $\square$

**3.7.** Так как  $B_r(x) \subseteq \bar{B}_r(x)$ , то (см. задачи 3.6 и 3.3)

$$\overline{B_r(x)} \subseteq \overline{\bar{B}_r(x)} = \bar{B}_r(x).$$

$\square$

**3.8.** Пусть  $M = \{x, y\}$  и  $\rho(x, y) = 1$ ,  $\rho(x, x) = \rho(y, y) = 0$  (такое метрическое пространство называется *дискретным*). Тогда  $\bar{B}_1(x) = M$ , но  $B_1(x) = \{x\}$  и  $(B_1(x))' = \emptyset$ , поэтому  $\overline{B_1(x)} = \{x\}$ .  $\square$

**3.9.** Пусть  $G = M \setminus A'$  и  $x \in G$ . Предположим, что для любого  $r > 0$  существует  $y_r \in A' \cap (B_r(x) \setminus \{x\})$ . Но в этом случае существует также  $z_r \in A \cap (B_r(x) \setminus \{x\})$  при всех  $r > 0$  (см. решение задачи 3.2), поэтому  $x \in A'$ , и мы приходим к противоречию. Отсюда следует, что множество  $G$  открыто, а множество  $A'$  замкнуто.  $\square$

**3.10.** Пусть  $x \in G$ . Тогда  $x$  принадлежит некоторому  $G_{\omega_0}$ ,  $\omega_0 \in \Omega$ . Так как  $G_{\omega_0}$  открыто, то существует такое  $r > 0$ , что  $B_r(x) \subseteq G_{\omega_0} \subseteq G$ .  $\square$

**3.11.** Пусть  $G \neq \emptyset$  и  $x \in G$ . Тогда  $x \in G_k$  при  $k = 1, 2, \dots, n$ . Далее, существуют такие  $r_k = r_k(x) > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , что  $B_{r_k}(x) \subseteq G_k$  для каждого  $k$ . Положим  $r = \min(r_1, r_2, \dots, r_n)$ . Тогда  $B_r(x) \subseteq G_k$  для всех  $k$ , и, следовательно,  $B_r(x) \subseteq G$ . Таким образом, множество  $G$  открыто.  $\square$

**3.12.** Пусть  $G_n = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3n} \right)$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $C = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$  не является открытым.  $\square$

**3.13.** Справедливо равенство

$$G = M \setminus F = \bigcup_{\omega \in \Omega} (M \setminus F_\omega).$$

Так как множество  $M \setminus F_\omega$  открыто, то (см. задачу 3.10) множество  $G$  также открыто. Поэтому множество  $F = M \setminus G$  замкнуто.  $\square$

**3.14.** Результат выводится из задачи 3.11 с использованием тех же рассуждений, что и в решении задачи 3.13.  $\square$

**3.15.** Пусть  $F_n = \left[ \frac{1}{2n}, 1 - \frac{1}{2n} \right]$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $C = (0, 1)$  — незамкнутое множество.  $\square$

**3.16.** Заметим, что  $G_1 = M \setminus F$  открыто, а  $F_1 = M \setminus G$  замкнуто. Так как  $G \setminus F = G \cap G_1$  и  $F \setminus G = F \cap F_1$ , то утверждение вытекает из задач 3.11 и 3.13.

**3.17.** Достаточно доказать утверждение для  $n = 2$ . Заметим, что  $A'_1 \cup A'_2 \subseteq (A_1 \cup A_2)'$ . Докажем обратное вложение. Пусть  $x \in (A_1 \cup A_2)'$ . Тогда для любого  $n$  существует  $y_n \in (B_{1/n}(x) \setminus \{x\}) \cap (A_1 \cup A_2)$ . Пусть  $\{y_n\} = \{z_{n_k}\} \sqcup \{t_{n_m}\}$ , где  $\{z_{n_k}\} \subseteq A_1$  и  $\{t_{n_m}\} \subseteq A_2$ . Хотя бы одна из этих подпоследовательностей бесконечна. Если, для определённости,  $\{z_{n_k}\}$  бесконечна, то  $x \in A'_1 \subseteq A'_1 \cup A'_2$ .  $\square$

**3.18.** Используя задачу 3.17, можно записать цепочку равенств

$$\begin{aligned} \overline{\bigcup_{k=1}^n A_k} &= \left( \bigcup_{k=1}^n A_k \right) \cup \left( \bigcup_{k=1}^n A_k \right)' = \\ &= \left( \bigcup_{k=1}^n A_k \right) \cup \left( \bigcup_{k=1}^n A'_k \right) = \bigcup_{k=1}^n (A_k \cup A'_k) = \bigcup_{k=1}^n \overline{A_k}. \end{aligned}$$

$\square$

**3.19.** Пусть  $\mathbb{Q}_{[0;1]} = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$  — множество всех рациональных чисел отрезка  $[0, 1]$  и  $A_k = \{r_n\}_{n=1}^k$  для  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда  $A'_k = \emptyset$  и  $\overline{A_k} = A_k$  при  $k \in \mathbb{N}$ . Поэтому

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A'_k = \emptyset \quad \text{и} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A_k} = \mathbb{Q}_{[0;1]},$$

но

$$\left( \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right)' = (\mathbb{Q}_{[0;1]})' = [0, 1] = \overline{\left( \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right)}.$$

□

**3.20.** В силу ограниченности множества  $A$  существует куб  $I_{0,1} = [-N, N]^n$ , содержащий  $A$ . Разделим куб  $I_{0,1}$  на  $2^n$  равных кубов  $I_{1,1}, \dots, I_{1,2^n}$  с вдвое меньшим ребром (например,  $I_{1,1} = [-N, 0]^n$ ):

$$I_{0,1} = \bigcup_{k=1}^{2^n} I_{1,k}.$$

По крайней мере один из  $I_{1,1}, \dots, I_{1,2^n}$  содержит бесконечно много точек множества  $A$ . Повторяя этот процесс, получим последовательность вложенных замкнутых кубов  $I_{0,1} \supseteq I_{1,k_1} \supseteq \dots$ , причём ребро  $I_{j,k_j}$  равно  $\frac{N}{2^{j-1}}$ , и каждый куб содержит бесконечно много точек множества  $A$ . Если  $x$  — общая точка этих кубов (существует по принципу вложенных отрезков), то  $x \in A'$ . □

**3.21.** Пусть  $A = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ , где  $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$  (1 стоит на  $n$ -м месте). Тогда  $A$  бесконечно, но  $A' = \emptyset$ . Действительно, всякая точка  $x_n \in A'$  есть предел некоторой последовательности  $\{e_{n_k}\}$  различных точек. Но  $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$  при  $n \neq m$ , и никакая подпоследовательность  $\{e_{n_k}\}$  не фундаментальна и тем более не сходится (см. задачу 3.1). □

**3.22.** Пусть  $x \in C = A \setminus A'$ . Тогда существует такое  $r = r(x)$ , что  $(B_r(x) \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$ . Докажем, что если  $x, y \in C$  — две различные точки, то  $E_{x,y} = B_{\frac{1}{2}r(x)}(x) \cap B_{\frac{1}{2}r(y)}(y) = \emptyset$ . Пусть существует точка  $z \in E_{x,y}$ , и, для определённости,  $r(x) \geq r(y)$ . Тогда  $|x - y| \leq |x - z| + |z - y| < \frac{1}{2}(r(x) + r(y)) \leq r(x)$ , поэтому  $y \in (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap A$ , и мы пришли к противоречию. Выбирая в каждом шаре  $B_{\frac{1}{2}r(x)}(x)$  точку с рациональными координатами, получаем, что множество  $A \setminus A'$  не более чем счётно. □

**3.23.** Утверждение немедленно вытекает из задачи 3.22. □

**3.24.** Пусть  $A$  — множество всех последовательностей из 0 и 1 в  $l_\infty$ . Тогда  $A$  имеет мощность континуума (см. задачу 2.19), но если  $x, y \in A$  и  $x \neq y$ , то  $\|x - y\| = 1$ . Поэтому никакая последовательность различных точек из  $A$  не фундаментальна, и (см. задачу 3.1)  $A' = \emptyset$ .  $\square$

**3.25.** Утверждение следует из задач 3.3 и 3.9.  $\square$

**3.26.** Пусть  $A = \left\{ a + \frac{b-a}{n+1} \right\}_{n=1}^\infty$ . Тогда  $A' = \{a\}$  и  $A'' = \emptyset$ .  $\square$

**3.27.** По индукции докажем, что для любого невырожденного отрезка  $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$  и для любого  $n$  существует такое множество  $A \subset (a, b)$ , что  $A^{(n)} = \{a\}$ , и, следовательно,  $A^{(n+1)} = \emptyset$  (такое множество будет удовлетворять условиям задачи). При  $n = 1$  утверждение доказано в задаче 3.26. Предположим, что утверждение доказано для  $n - 1$ . Определим отрезки  $I_k = \left[ a + \frac{b-a}{2k+1}, a + \frac{b-a}{2k} \right]$  и выберем, используя предположение индукции, такие множества  $A_k \subset I_k$ , что  $A_k^{(n-1)} = \left\{ a + \frac{b-a}{2k+1} \right\}$ . Пусть

$$A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Заметим, что  $A^{(n-1)} = \left\{ a + \frac{b-a}{k+1} \right\}_{k=1}^\infty \cup \{a\}$ . Действительно, если  $x \neq a$ , то в достаточно малой окрестности точки  $x$  содержатся элементы не более чем одного из множеств  $A_k$ , так что  $x$  принадлежит одному из  $A_k^{(n)}$  либо вообще не принадлежит  $A^{(n)}$ . Таким образом,  $A^{(n)} = \{a\}$ , и мы доказали существование указанного множества.  $\square$

**3.28.** Пусть  $I_n = \left[ \frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n} \right]$  для  $n \in \mathbb{N}$ , и пусть (см. задачу 3.27)  $A_n \subset I_n$  такие, что  $A_n^{(n)} = \left\{ \frac{1}{2n+1} \right\}$  и  $A_n^{(n+1)} = \emptyset$ . Если

$$A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

то  $\frac{1}{2n+1} \in A^{(n)} \setminus A^{(n+1)}$ , так как эта точка принадлежит  $A_n^{(n)} \setminus A_n^{(n+1)}$ , но в достаточно малой её окрестности нет точек из  $A \setminus A_n$ .  $\square$

**3.29.** Пусть  $P_0$  — канторово множество на  $[0, 1]$  (см. задачу 2.22) и

$$G = [0, 1] \setminus P_0 = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n).$$

Положим  $A = \left\{ \frac{a_n + b_n}{2} \right\}_{n=1}^{\infty}$ . Ясно, что  $A$  счётно и  $A' = P_0$ . Так как  $P_0 \cap A = \emptyset$  и  $P_0$  имеет мощность континуума, то мы получили искомый результат.  $\square$

**3.30.** Так как  $r_n \rightarrow 0$ , то множество  $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{B}_{r_n}(x_n)$  содержит не

более чем одну точку. Далее, последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  фундаментальна, поскольку  $\rho(x_n, x_{n+k}) \leq r_n$ . Так как пространство  $M$  полно, то существует элемент  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Поскольку (см. задачу 3.6) множе-

ство  $\bar{B}_{r_n}(x_n)$  замкнуто для любого  $n$ , то  $x \in \bar{B}_{r_n}(x_n)$  при каждом  $n$ . Поэтому  $x \in A$ .  $\square$

**3.31.** Пусть  $M = \mathbb{N}$  и

$$\rho(m, n) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{m+n}, & \text{если } m \neq n; \\ 0, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что  $\rho$  — метрика. Пространство  $(M, \rho)$  полно, так как  $\rho(x, y) \notin (0, 1)$  для любой пары элементов, поэтому для любой фундаментальной последовательности  $\{x_n\}$  все элементы начиная с некоторого номера  $N$  совпадают. Последовательность шаров

$$\bar{B}_{1+\frac{1}{2n}}(n) = \{n, n+1, \dots\}$$

удовлетворяет условиям задачи.  $\square$

**3.32.** Пусть  $M = [0, 1]$  с обычной метрикой. Тогда  $B_{3/4}(1) \subsetneq B_{2/3}\left(\frac{1}{2}\right)$ .  $\square$

**3.33.** Если  $x_1 = x_2$ , то утверждение очевидно. Пусть  $x_1 \neq x_2$ . Заметим, что

$$z = x_1 + \frac{r_1(x_1 - x_2)}{\|x_1 - x_2\|} \in \bar{B}_{r_1}(x_1) \subseteq \bar{B}_{r_2}(x_2).$$

Поэтому

$$r_2 \geq \|z - x_2\| = \|x_1 - x_2\| \left( 1 + \frac{r_1}{\|x_1 - x_2\|} \right) = r_1 + \|x_1 - x_2\|$$

и, следовательно, выполнено неравенство  $r_1 \leq r_2 - \|x_1 - x_2\|$ .  $\square$

**3.34.** Из задачи 3.33 следует, что  $r_1 \geq r_2 \geq \dots$  и что  $\|x_n - x_{n+1}\| \leq r_n - r_{n+1}$ . Поэтому последовательность  $\{x_n\}$  фундаментальна, и, в силу полноты пространства, существует  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Заметим, что  $x \in \bar{B}_{r_n}(x_n)$  для любого  $n$ , т. е.  $x$  — общая точка шаров.  $\square$

**3.35.** Выберем для каждого  $n$  точку  $x_n \in F_n \subseteq F_1$ . В силу теоремы Больцано–Вейерштрасса (задача 3.20) существует подпоследовательность  $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \equiv \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ , сходящаяся к некоторой точке  $y = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k$ . Так как  $y_k \in F_n$  при  $k \geq k(n)$  и  $F_n$  замкнуты, то  $y \in F_n$  для каждого  $n$ , т. е.  $y \in F$ .  $\square$

**3.36.** Пусть

$$K_n = \bigcap_{k=1}^n F_k.$$

Тогда к последовательности  $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$  применимо утверждение задачи 3.35, т. е.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset.$$

$\square$

**3.37.** Пусть

$$F_n = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in l_1 : x_i = 0 \text{ при } 1 \leq i \leq n, \right. \\ \left. x_i \geq 0 \text{ при } i > n \text{ и } \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1 \right\}.$$

Нетрудно видеть, что эта последовательность удовлетворяет условиям задачи. Выпукłość множеств  $F_n$  следует из того, что если все компоненты последовательностей  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  неотрицательны и  $a \in (0, 1)$ , то  $\|ax + (1 - a)y\|_1 = a\|x\|_1 + (1 - a)\|y\|_1$ .  $\square$

**3.38.** В силу результата задачи 3.30 существует единственная точка

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{B}_{r_n}(x_n).$$

Поскольку  $x \in \bar{B}_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subset B_{r_n}(x_n)$  для любого  $n$ , то  $x$  — общая точка открытых шаров.  $\square$

**3.39.** Последовательность интервалов  $\left\{ \left( 0, \frac{1}{n} \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$  удовлетворяет условиям задачи.  $\square$

**3.40.** Пусть

$$G_n = \left\{ x \in M : \rho(x, F) \equiv \inf_{y \in F} \rho(x, y) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Очевидно, что все множества  $G_n$  открыты и  $F \subseteq G_n$ . Далее, пусть

$$S = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Заметим, что  $F \subseteq S$ . С другой стороны, если  $x \in S$ , то для любого  $n$  выполнено неравенство  $\rho(x, F) < \frac{1}{n}$ , и, следовательно (см. задачу 3.3),  $x \in F \cup F' = \bar{F} = F$ .  $\square$

**3.41.** Пусть  $F = M \setminus G$ . Тогда  $F$  замкнуто и, в силу результата задачи 3.40,

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n,$$

где множества  $G_n$  открыты. Поэтому, положив  $F_n = M \setminus G_n$ , получим, что

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} (M \setminus G_n) \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

где все  $F_n$  замкнуты. Таким образом,  $G$  — множество типа  $F_\sigma$ .  $\square$

**3.42.** Пусть множество  $A$  представимо в виде

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

где все множества  $F_n$  замкнуты. Тогда

$$M \setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (M \setminus F_n)$$

и множества  $M \setminus F_n$  открыты при всех  $n$ . Поэтому множество  $M \setminus A$  — типа  $G_\delta$ . Обратное утверждение доказывается аналогично.  $\square$

**3.43.** Достаточно доказать утверждение для  $n = 2$ . Пусть

$$A_k = \bigcap_{s=1}^{\infty} G_{k,s} \quad \text{при } k = 1, 2,$$

где все множества  $G_{k,s}$  открыты. Тогда

$$A = \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcap_{r=1}^{\infty} (G_{1,s} \cup G_{2,r}),$$

откуда видно, что  $A$  — множество типа  $G_\delta$ .  $\square$

**3.44.** Утверждение следует из задач 3.42 и 3.43.  $\square$

**3.45.** Так как  $G$  всюду плотно в  $(M, \rho)$ , то существует  $y \in B_r(x) \cap G$ . Поскольку  $G$  открыто, то можно выбрать  $t > 0$  так, чтобы  $\bar{B}_t(y) \subseteq B_r(x) \cap G$ .  $\square$

**3.46.** Пусть  $B_r(x_0)$  — произвольный непустой шар в  $(M, \rho)$ . Используя задачу 3.45, выберем такой непустой шар  $B_{r_1}(x_1)$ , что  $\bar{B}_{r_1}(x_1) \subset B_r(x_0) \cap G_1$  и  $r_1 < 1$ . Вновь используя задачу 3.45, найдём

такой непустой шар  $B_{r_2}(x_2)$ , что  $\bar{B}_{r_2}(x_2) \subset B_{r_1}(x_1) \cap G_2$  и  $r_2 < \frac{1}{2}$ . Продолжая этот процесс, построим по индукции такую последовательность непустых шаров  $B_{r_1}(x_1) \supset B_{r_2}(x_2) \supset \dots \supset B_{r_n}(x_n) \supset \dots$ , что  $\bar{B}_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subset B_{r_n}(x_n) \cap G_n$  и  $r_n < \frac{1}{n}$  для каждого  $n$ . В силу результата задачи 3.38 существует точка

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{r_n}(x_n).$$

Так как  $B_{r_n}(x_n) \subseteq G_n$  при каждом  $n$ , то  $x \in A \cap B_r(x_0)$ , т. е.  $A$  — всюду плотное множество.  $\square$

**3.47.** Для любого  $n$  по определению найдутся открытые множества  $G_{n,k}$ , для которых

$$G_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_{n,k}.$$

Тогда

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} G_{n,k},$$

т. е.  $A$  — множество типа  $G_\delta$ . Заметим, что  $G_{n,k} \supseteq G_n$  при любых  $n$  и  $k$ , поэтому каждое множество  $G_{n,k}$  всюду плотно. Тогда в силу результата задачи 3.46, и множество  $A$  всюду плотно.  $\square$

**3.48.** Пусть  $\mathbb{Q} = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$  — занумерованное некоторым образом множество всех рациональных чисел на  $\mathbb{R}^1$ . Предположим, что  $\mathbb{Q}$  — множество типа  $G_\delta$ . Положим  $Q_k = \{r_n\}_{n=k}^{\infty}$  для  $k = 2, 3, \dots$  Так как

$$Q_k = \mathbb{Q} \cap (\mathbb{R}^1 \setminus \{r_n\}_{n=1}^{k-1}) \equiv \mathbb{Q} \cap S_k,$$

где  $S_k$  открыты, то  $Q_k$  — также множества типа  $G_\delta$  для любого  $k$ . Заметим, что все  $Q_k$  являются всюду плотными. В силу результата задачи 3.47 множество

$$\emptyset = \bigcap_{k=2}^{\infty} Q_k$$

было бы всюду плотно, что неверно.  $\square$

**3.49.** Решение аналогично решению задачи 3.48.  $\square$

**3.50.** Если  $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , то

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_n\},$$

где одноточечное множество, очевидно, замкнуто.  $\square$

**3.51.** Утверждение следует из задач 3.42 и 3.48.  $\square$

**3.52.** Заметим, что для любых чисел  $a$  и  $b$ , где  $a < b$ , множество всех рациональных чисел из интервала  $(a, b)$  не является множеством типа  $G_\delta$ , а множество всех иррациональных чисел из отрезка  $[a, b]$  не является множеством типа  $F_\sigma$  (доказательства такие же, как в решениях задач 3.48 и 3.51 соответственно). Пусть  $A$  — множество всех рациональных чисел из интервала  $(-1, 0)$ , а  $B$  — множество всех иррациональных чисел из  $[0, 1]$ . Положим  $C = A \cup B$ . Если  $C$  — типа  $G_\delta$ , то множество  $A = C \cap (-1, 0)$  — тоже типа  $G_\delta$ , и мы пришли к противоречию. Если  $C$  — множество типа  $F_\sigma$ , то (см. задачу 3.44) множество  $B = C \cap [0, 1]$  — типа  $F_\sigma$ , что тоже приводит нас к противоречию. Поэтому  $C$  — искомое множество.  $\square$

**3.53.** Пусть  $\mathbb{Q} = \{r_n\}_{n=1}^\infty$  — занумерованное некоторым образом множество всех рациональных чисел на  $\mathbb{R}^1$ , а  $A_k = \{r_k\}$  при  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

и каждое множество  $A_k$  является множество типа  $G_\delta$  (см. задачу 3.40), но в силу результата задачи 3.48 множество  $\mathbb{Q}$  не является множеством типа  $G_\delta$ .  $\square$

**3.54.** В силу результата задачи 3.42 условиям задачи удовлетворяют множества  $B_k = \mathbb{R}^1 \setminus A_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , где  $A_k$  были определены в решении задачи 3.53.  $\square$

**3.55.** См. решение задачи 3.48.

**3.56.** Пусть множество  $A$  представимо в виде

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n,$$

где все множества  $G_n$  открыты. Так как  $A$  всюду плотно, то и  $G_n$  всюду плотны. На первом шаге выберем два непустых шара  $B_0 = B_{r_0}(x_0)$  и  $B_1 = B_{r_1}(x_1)$  так, чтобы  $\overline{B_0} \cap \overline{B_1} = \emptyset$ ,  $B_0, B_1 \subset G_1$  и  $r_0, r_1 < 1$ . На втором шаге для  $j \in \{0, 1\}$  выберем два непустых шара  $B_{j,0} = B_{r_{j,0}}(x_{j,0})$  и  $B_{j,1} = B_{r_{j,1}}(x_{j,1})$  так, чтобы  $\overline{B_{j,0}} \cap \overline{B_{j,1}} = \emptyset$ ,  $\overline{B_{j,0}}, \overline{B_{j,1}} \subset G_2 \cap B_j$  и  $r_{j,0}, r_{j,1} < \frac{1}{2}$ .

Продолжая этот процесс по индукции, получим континuum последовательностей  $B_{j_1} \subseteq B_{j_1, j_2} \subseteq B_{j_1, j_2, j_3} \subseteq \dots$  непустых шаров, где  $j_k \in \{0, 1\}$  для каждого  $k$ ,  $\overline{B_{j_1, \dots, j_{k-1}, 0}} \cap \overline{B_{j_1, \dots, j_{k-1}, 1}} = \emptyset$ ,  $\overline{B_{j_1, \dots, j_k}} \subset G_k \cap B_{j_1, \dots, j_{k-1}}$  и  $r(B_{j_1, \dots, j_k}) < \frac{1}{k}$  для всех  $k$ .

В силу результата задачи 3.47 для каждой последовательности  $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \dots)$ ,  $j_k \in \{0, 1\}$ , существует общая точка последовательности

$$x_{\mathbf{j}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{j_1, \dots, j_n}.$$

Заметим, что  $x_{\mathbf{i}} \neq x_{\mathbf{j}}$  при  $\mathbf{i} \neq \mathbf{j}$ . Так как  $B_{j_1, \dots, j_n} \subset G_n$  для каждого  $n$ , то все точки  $x_{\mathbf{j}}$  принадлежат множеству  $A$ . Поэтому  $A$  содержит подмножество мощности континуума, т. е.  $\bar{A} \geq \mathfrak{c}$ .  $\square$

**3.57.** Пусть  $B_0 = B_{r_0}(x_0)$  — произвольный непустой шар в пространстве  $(M, \rho)$ . Тогда существует непустой шар  $B_1 = B_{r_1}(x_1) \subset B_{r_0}(x_0) \setminus A$ . Поэтому  $x_1 \in B_0 \cap (M \setminus A)$ , и, таким образом,  $M \setminus A$  всюду плотно.  $\square$

**3.58.** Условиям задачи удовлетворяет множество  $\mathbb{Q}$  всех рациональных чисел.  $\square$

**3.59.** Пусть  $B_0 = B_{r_0}(x_0)$  — произвольный непустой шар в пространстве  $(M, \rho)$ . Тогда существует точка  $x_1 \in A \cap B_0$ . Так как множество  $A$  открыто, то, согласно задаче 3.45, найдётся такое  $r_1 > 0$ , что  $B_{r_1}(x_1) \subset A \cap B_0$ . Следовательно,  $B_{r_1}(x_1) \cap (M \setminus A) = \emptyset$ , и, таким образом, множество  $M \setminus A$  нигде не плотно.  $\square$

**3.60.** Пусть  $B_0 = B_{r_0}(x_0)$  — произвольный непустой шар в  $(M, \rho)$ . Тогда существует непустой шар  $B_1 = B_{r_1}(x_1) \subseteq B_0 \setminus A$ . Ясно, что  $x_1 \notin \bar{A}$ , поэтому существует такое  $r_2 \in (0, r_1)$ , что  $B_{r_2}(x_1) \cap \bar{A} = \emptyset$ , т. е.  $B_{r_2}(x_1) \subset B_0 \setminus \bar{A}$ .  $\square$

**3.61.** Если  $A' = \emptyset$ , то множество  $A = A_I$  замкнуто, и утверждение верно. Пусть  $A' \neq \emptyset$ . Определим множества

$$C_n = \bigcup_{x \in A'} B_{1/n}(x)$$

и  $A_n = A \setminus C_n = \bar{A} \setminus C_n$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Заметим, что все множества  $C_n$  открыты, а множества  $A_n$  замкнуты. Любая точка  $x \in A_I$  попадёт в некоторое  $A_n$ , а любая точка  $x \in A'$  — в каждое  $C_n$ , т. е.

$$A_I = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Поэтому  $A_I$  — множество типа  $F_\sigma$ .  $\square$

**3.62.** Положим  $A = \{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ . Тогда  $A_I = A$ , но  $A' = \{0\}$ .

**3.63.** Утверждение вытекает из задачи 3.61.  $\square$

**3.64.** Согласно задаче 3.13,

$$B = \bigcap_{F \in \Omega} F$$

замкнуто, и  $B \supseteq A$ , поэтому  $B \supseteq \bar{A}$ . С другой стороны, согласно задаче 3.2,  $\bar{A} \in \Omega$ , поэтому  $B \subseteq \bar{A}$ .  $\square$

**3.65.** Во-первых,

$$\mathbb{R}^n = \bigsqcup_{m \in \mathbb{Z}^n} \prod_{j=1}^n [m_j, m_j + 1) = \bigsqcup_{m \in \mathbb{Z}^n} I_{1,m}.$$

Если  $F \cap I_{1,m} \neq \emptyset$ , то выберем точку  $z_{1,m} \in F \cap I_{1,m}$ . Далее,

$$\mathbb{R}^n = \bigsqcup_{m \in \mathbb{Z}^n} \prod_{j=1}^n \left[ \frac{m_j}{2}, \frac{m_j + 1}{2} \right) = \bigsqcup_{m \in \mathbb{Z}^n} I_{2,m}.$$

Если  $F \cap I_{2,m} \neq \emptyset$ , то возьмём точку  $z_{2,m} \in F \cap I_{2,m}$  и т. д. Наконец, определим не более чем счётное множество

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m: F \cap I_{k,m} \neq \emptyset} \{z_{k,m}\}.$$

По построению  $A \subseteq F$  и  $\bar{A} = F$ .  $\square$

**3.66.** Пусть  $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$  — всюду плотное множество в  $(M, \rho)$ . Определим множество  $\{E_{n,j} = B_{1/n}(y_j)\}_{n=1, j+1}^{\infty, \infty}$ . Если для некоторой пары  $(n, j)$  множество  $F \cap E_{n,j}$  непусто, то выберем точку  $z_{n,j} \in F \cap E_{n,j}$ . Положим

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j: F \cap E_{n,j} \neq \emptyset} \{z_{n,j}\}.$$

Тогда  $A \subseteq F$  и  $\bar{A} = F$ .  $\square$

**3.67.** Пусть  $A$  — замкнутое множество, построенное в решении задачи 3.24. Тогда  $A \subset B_1$ , а шары  $\{B_{1/2}(x)\}_{x \in A}$  расположены так, что  $B_{1/2}(x) \cap B_{1/2}(y) = \emptyset$  при  $x \neq y$ . Так как  $C$  счётно и  $A$  имеет мощность  $\mathfrak{c}$ , то существует такое  $x \in A$ , что  $B_{1/2}(x) \cap C = \emptyset$ . Следовательно,  $x \notin \bar{C}$ .  $\square$

**3.68.** Пусть  $A$  — счётное всюду плотное множество в  $(M, \rho)$  и  $B = \{B_{\frac{1}{m}}(x)\}_{m=1, x \in A}^{\infty}$ . Тогда  $B$  счётно. Пусть  $B = \{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Возьмём открытое множество  $G \subseteq M$  и определим числа

$$\{n_k\}_{k=1}^{\infty} = \{n \in \mathbb{N}: C_n \subseteq G\}.$$

Тогда  $\bigcup_{k=1}^{\infty} C_{n_k} \subseteq G$ . Заметим, что для любой точки  $y \in G$  найдётся шар  $B_{1/n}(y) \subseteq G$ , где  $n$  натуральное. Выберем точку  $z \in A \cap B_{\frac{1}{4n}}(y)$ . Так как  $y \in B_{\frac{1}{2n}}(z) \subseteq B_{1/n}(y) \subseteq G$ , то

$$y \in \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{n_k}, \quad \text{и, следовательно,} \quad G \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{n_k}.$$

Поэтому

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{n_k}.$$

□

**3.69.** Определим множество

$$A_1^\circ = \bigcap_{x \in A^\circ} B_{r(x)}(x),$$

где  $r(x) > 0$  таковы, что  $B_{r(x)}(x) \subseteq A$ . Тогда  $A_1^\circ \supseteq A^\circ$ . С другой стороны,  $B_{r(x)}(x) \subseteq A^\circ$  для каждого  $x \in A^\circ$ . Действительно, если  $y \in B_{r(x)}(x)$ , то  $B_{r(x)-\rho(x,y)}(y) \subseteq B_{r(x)}(x) \subseteq A$ . Поэтому  $A_1^\circ = A^\circ$ . Но в силу результата задачи 3.10 множество  $A_1^\circ$  открыто. □

**3.70.** Пусть  $G_0$  — объединение всех открытых множеств  $G \subseteq A$ . В силу результата задачи 3.69 выполнено вложение  $A^\circ \subseteq G_0$ . С другой стороны, если  $G$  открыто и  $G \subseteq A$ , то  $G \subseteq A^\circ$ , поэтому  $G_0 \subseteq A^\circ$ . □

**3.71.** Если  $G$  открыто, то по определению  $G^\circ = G$ . Но  $(\bar{G})^\circ \supseteq \supseteq G^\circ$ . □

**3.72.** Пусть  $G$  — канторово открытое множество на  $[0, 1]$  (см. задачу 2.22). Тогда  $\bar{G} = [0, 1]$  и  $(\bar{G})^\circ \neq G$ . □

**3.73.** Если множество  $F$  замкнуто, то (см. задачу 3.3)  $\bar{F} = F$ . Но  $\bar{F}^\circ \subseteq \bar{F} = F$ . □

**3.74.** Пусть  $F = P_0$  — канторово замкнутое множество на  $[0, 1]$  (см. задачу 2.22). Тогда  $F^\circ = \emptyset$  и  $\bar{F}^\circ = \emptyset \neq F$ . □

**3.75.** Так как  $A^\circ \cup B \subseteq A \cup B$ , то вложение  $(A^\circ \cup B)^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$  очевидно. Пусть  $x \in (A \cup B)^\circ$ . Тогда существует такое  $r > 0$ , что  $B_r(x) \subset A \cup B$ . Следовательно, множество  $C = B_r(x) \setminus B$  вложено в  $A$  и (см. задачу 3.16) открыто. В силу результата задачи 3.70 множество  $C$  вложено в  $A^\circ$ , откуда получаем, что  $B_r(x) \subseteq A^\circ \cup B$ , т. е.  $x \in (A^\circ \cup B)^\circ$ . □

**3.76.** Пусть  $A = P_0$  — канторово замкнутое множество на  $[0, 1]$  (см. задачу 2.22) и  $B = [0, 1] \setminus A$ . Тогда  $A^\circ = \emptyset$ , поэтому  $(A^\circ \cup B)^\circ = B^\circ = B$ . В то же время  $(A \cup B)^\circ = [0, 1]^\circ \neq B$ .  $\square$

**3.77.** Пусть  $\{C_n\}_{n=1}^\infty$  — счётная последовательность открытых шаров, построенная в решении задачи 3.68. Возьмём точку  $x \in A$ . Тогда существует такое  $\omega = \omega(x) \in \Omega$ , что  $x \in G_\omega$ . Выберем множество  $C_{n(x)}$  так, чтобы (см. задачу 3.68)  $x \in C_{n(x)} \subset G_\omega$ . Так как множество  $\{n(x)\}_{x \in A}$  есть подмножество в  $\mathbb{N}$ , то оно не более чем счётно. Выберем теперь для каждого  $n(x)$  некоторое  $\omega_n \in \Omega$  так, чтобы  $C_{n(x)} \subseteq G_{\omega_n}$ . Так как

$$A \subseteq \bigcup_{x \in A} C_{n(x)} \subseteq \bigcup_{n(x)} G_{\omega_n},$$

то счётная подсистема  $\{G_{\omega_n}\}$  удовлетворяет условиям задачи.  $\square$

**3.78.** В силу результата задачи 3.77 можно считать, что  $\Omega$  — счётное множество, например,  $\Omega = \mathbb{N}$  (если  $\Omega$  конечно, то утверждение тривиально). Пусть

$$F \subseteq \bigcup_{l=1}^\infty G_l.$$

Положим

$$A_n = \bigcup_{l=1}^n G_l$$

и  $F_n = F \setminus A_n$ . Тогда  $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \dots$  и каждое  $F_n$  — замкнутое ограниченное множество. Если для любого  $n$  множество  $F_n$  непусто, то в силу результата задачи 3.35

$$\bigcap_{n=1}^\infty F_n \neq \emptyset,$$

и мы приходим к противоречию. Поэтому для некоторого  $n_0$  множество  $F_{n_0}$  пусто, т. е.

$$F \subset A_n = \bigcup_{l=1}^n G_l.$$

$\square$

**3.79.** Множества  $F = \mathbb{N}$  и  $G_n = \left(n - \frac{1}{3}, n + \frac{1}{3}\right)$  при  $n \in \mathbb{N}$  удовлетворяют условиям задачи.  $\square$

**3.80.** Множества  $A = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=2}^\infty$  и  $G_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2}, \frac{1}{n} + \frac{1}{4n^2}\right)$  при  $n = 2, 3, \dots$  удовлетворяют условиям задачи.  $\square$

**3.81.** Например, множества  $A_1 = \{0\}$  и  $A_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right]$  при  $n = 2, 3, \dots$   $\square$

**3.82.** Выберем параллелепипед  $[a, b] \in \mathbb{R}^n$ , содержащий одно из множеств системы — множество  $F_{\omega_0}$ . Без ограничения общности можно считать, что  $F_\omega \subseteq [a, b]$  для всех  $\omega \in \Omega$ . Пусть  $G_\omega = \mathbb{R}^n \setminus F_\omega$  для всех  $\omega \in \Omega$ . Тогда  $G_\omega$  — открытое множество. Предположим, что

$$\bigcap_{\omega \in \Omega} F_\omega = \emptyset.$$

Тогда

$$[a, b] \subset \bigcup_{\omega \in \Omega} G_\omega.$$

В силу результата задачи 3.78 существуют такие  $\omega_1, \dots, \omega_n$ , что

$$[a, b] \subset \bigcup_{k=1}^n G_{\omega_k},$$

откуда следует, что

$$\bigcap_{k=1}^n F_{\omega_k} = \emptyset.$$

Это противоречит центрированности системы.  $\square$

**3.83.** Так как  $A \subseteq \bar{A}$ , то  $r = \text{dist}(x, \bar{A}) \leq \text{dist}(x, A)$ . Выберем точки  $z_n \in \bar{A}$  и  $y_n \in A$ , где  $n \in \mathbb{N}$ , так, чтобы  $\rho(x, z_n) < r + \frac{1}{n}$ , где  $r = \text{dist}(x, \bar{A})$ , и  $\rho(z_n, y_n) < \frac{1}{n}$ . Тогда  $\rho(x, y_n) < r + \frac{2}{n}$ , и, следовательно,  $\text{dist}(x, A) < r + \frac{2}{n}$  для любого  $n$ . Поэтому  $\text{dist}(x, A) \leq r$ .  $\square$

**3.84.** Пусть  $A$  — канторово множество на  $[0, 1]$  (см. задачу 2.22), объединённое с отрезком  $[-1, 0]$ , а  $x_0 = \frac{1}{3}$ . Тогда  $\text{dist}(x_0, A) = 0$ , но  $A^\circ = (-1, 0)$ , и поэтому  $\text{dist}(x_0, A^\circ) = \frac{1}{3}$ .  $\square$

**3.85.** Пусть  $r_1 = \text{dist}(A, B)$ ,  $r_2 = \inf_{x \in A} \text{dist}(x, B)$  и дано  $\varepsilon > 0$ . Выберем точки  $x_1 \in A$  и  $y_1 \in B$  так, чтобы  $\rho(x_1, y_1) < r_1 + \varepsilon$ . Тогда  $\text{dist}(x_1, B) < r_1 + \varepsilon$ , и, следовательно,  $r_2 \leq r_1 + \varepsilon$ . Так как  $\varepsilon > 0$  произвольно, то  $r_2 \leq r_1$ . С другой стороны, пусть точка  $x_2 \in A$  такова, что  $\text{dist}(x_2, B) < r_2 + \varepsilon$ . Выберем  $y_2 \in B$  так, чтобы  $\rho(x_2, y_2) < r_2 + \varepsilon$ . Тогда  $\text{dist}(A, B) < r_2 + \varepsilon$ , так что  $r_1 \leq r_2$ .  $\square$

**3.86.** Пусть  $r = \text{dist}(F_1, F_2)$ . Определим множества  $G_i = \left\{x \in M : \text{dist}(x, F_i) < \frac{r}{2}\right\}$  для  $i = 1, 2$ . Нетрудно видеть, что множества  $G_1$

и  $G_2$  открытые,  $G_i \supset F_i$  при  $i = 1, 2$  и  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$  в силу неравенства треугольника.  $\square$

**3.87.** Если  $F$  — замкнутое множество в метрическом пространстве  $(M, \rho)$  и  $x \notin F$ , то  $\text{dist}(x, F) > 0$ . Поэтому для любого  $x \in F_1$  существует такое  $r = r(x) > 0$ , что  $B_r(x) \cap F_2 = \emptyset$ , и для любого  $y \in F_2$  существует такое  $r = r(y) > 0$ , что  $B_r(y) \cap F_1 = \emptyset$ . Пусть

$$G_1 = \bigcup_{x \in F_1} B_{\frac{1}{2}r(x)}(x) \quad \text{и} \quad G_2 = \bigcup_{y \in F_2} B_{\frac{1}{2}r(y)}(y).$$

Тогда множества  $G_1$  и  $G_2$  по построению открыты. Предположим, что существует точка  $z \in G_1 \cap G_2$ . Тогда найдутся такие точки  $x \in F_1$  и  $y \in F_2$ , что  $z \in B_{\frac{1}{2}r(x)}(x) \cap B_{\frac{1}{2}r(y)}(y)$ . Без ограничения общности предположим, что  $r(x) \geq r(y)$ . Тогда

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z) < \frac{1}{2}(r(x) + r(y)) \leq r(x).$$

Таким образом,  $y \in B_{r(x)}(x)$ , и мы пришли к противоречию. Поэтому  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ .  $\square$

**3.88.** Например, множества  $F_1 = \mathbb{N}$  и  $F_2 = \left\{ 1 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{3}, \dots, n + \frac{1}{n+1}, \dots \right\}$ .  $\square$

**3.89.** Если  $A \cap B \neq \emptyset$ , то утверждение очевидно. Пусть  $A \cap B = \emptyset$ . Существует такое натуральное  $N$ , что  $A \subset [-N, N]^n$  и  $r = \text{dist}(A, B) < \frac{N}{2}$ . Положим  $B_1 = B \cap [-2N, 2N]^n$ . Тогда  $B_1$  — ограниченное замкнутое множество. Выберем последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq A$  и  $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subseteq B$  так, чтобы  $|x_n - y_n| < N$  для всех  $n$  и  $|x_n - y_n| \rightarrow r$  при  $n \rightarrow \infty$ . Заметим, что  $y_n \in B_1$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . В силу результата задачи 3.20 существуют такие точки  $x$  и  $y$  и подпоследовательность  $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ , что  $x_{n_k} \rightarrow x$  и  $y_{n_k} \rightarrow y$  при  $k \rightarrow \infty$ . Так как множества  $A$  и  $B_1$  замкнуты, то  $x \in A$  и  $y \in B_1$ . При этом

$$|x - y| = \lim_{k \rightarrow \infty} |x_{n_k} - y_{n_k}| = r = \text{dist}(A, B).$$

$\square$

**3.90.** Пусть множество  $A$  замкнуто. Если  $\text{dist}(y, A) = r$ , то существует такая последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  точек из  $A$ , что  $|y - x_n| \rightarrow r$  при  $n \rightarrow \infty$ . Заметим, что  $\{x_n\}$  ограничена, поэтому существуют такие подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  и точка  $x$ , что  $x_{n_k} \rightarrow x$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Так как множество  $A$  замкнуто, то  $x \in A$ . Наконец,

$$|y - x| = \lim_{k \rightarrow \infty} |y - x_{n_k}| = r = \text{dist}(y, A).$$

Обратно, пусть  $x \in \bar{A}$ . Предположим, что  $x \notin A$ , тогда  $x \in A'$ , при этом  $\text{dist}(x, A) = 0$ . По предположению существует такое  $z \in A$ , что  $|z - x| = 0$ , т. е.  $x = z \in A$ . Полученное противоречие доказывает, что множество  $A$  замкнуто.  $\square$

**3.91.** Пусть  $y = 0$  и

$$A = \left\{ \left( 1 + \frac{1}{n} \right) e_n \right\}_{n=1}^{\infty},$$

где элементы  $e_n$  определены в решении задачи 3.21. Множество  $A$  замкнуто (доказывается аналогично решению задачи 3.21) и  $\text{dist}(0, A) = 1$ , но  $\rho(0, (1 + 1/n)e_n) = 1 + 1/n > 1$  при всех  $n$ .  $\square$

**3.92.** Пусть  $x, y \in H$  — произвольные точки. Тогда по определению порождённой нормы выполнены равенства

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle = \\ &= (\langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle) + (\langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle) = \\ &= 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \end{aligned}$$

$\square$

**3.93.** Рассмотрим произвольную последовательность  $\{y_n\}$ ,  $y_n \in H_0$ , для которой  $\rho(y_n, x) \rightarrow d = \text{dist}(x, H_0)$ . Применяя тождество параллограмма (см. задачу 3.92) к элементам  $x - y_n$  и  $x - y_m$ , получим, что

$$\|y_n - y_m\|^2 + 4 \left\| x - \frac{y_m + y_n}{2} \right\|^2 = 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2.$$

Так как подпространство линейно, то  $\frac{y_m + y_n}{2} \in H_0$ , следовательно,  $\left\| x - \frac{y_m + y_n}{2} \right\| \geq d$ . Если теперь задано  $\varepsilon > 0$ , а  $m$  и  $n$  столь велики, что  $\|x - y_n\|^2 \leq d^2 + \varepsilon$  и  $\|x - y_m\|^2 \leq d^2 + \varepsilon$ , то

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2(d^2 + \varepsilon) + 2(d^2 + \varepsilon) - 4d^2 = 4\varepsilon.$$

Тем самым мы доказали, что последовательность  $\{y_n\}$  фундаментальна, и в силу замкнутости  $H_0$  она сходится к некоторой точке  $y_0 \in H_0 \subset H$ .  $\square$

**3.94.** Пусть точки  $y_n \in H_0$  образуют минимизирующую последовательность, т. е.  $\|y_n - x\| \rightarrow d = \text{dist}(x, H_0)$ . Тогда в силу результата задачи 3.93 выполнено условие  $y_n \rightarrow y_0 \in H_0$ , причём по свойствам нормы  $\|x - y_0\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = d$ , т. е. расстояние достигается в точ-

ке  $y_0$ . Если  $y_0$  и  $y'_0$  — две точки, на которых достигается расстояние, то последовательность  $\{y_0, y'_0, y_0, y'_0, \dots\}$  — минимизирующая и в силу результата задачи 3.93 сходится, откуда следует, что  $y_0 = y'_0$ .  $\square$

**3.95.** Пусть  $H$  — вещественное гильбертово пространство,  $H_0$  — его замкнутое подпространство,  $x \in H \setminus H_0$  и расстояние  $x$  до  $H_0$  достигается на точке  $y_0$ . Рассмотрим произвольную точку  $z \in H_0$  и квадратный трёхчлен

$$f_z(t) = \|x - y_0 - tz\|^2 = \|x - y_0\|^2 - 2t\langle x - y_0, z \rangle + t^2\|z\|^2.$$

Так как  $t = 0$  — точка минимума этого трёхчлена, то  $\langle x - y_0, z \rangle = 0$ .  $\square$

**3.96.** Пусть  $L = C([0, 1])$  и

$$E_1 = \left\{ f(x) \in C([0, 1]) : \int_0^1 f(x)(2x - 1) dx = 0 \right\}.$$

Видно, что  $E_1$  — замкнутое подпространство в  $L$ . Рассмотрим функцию  $f(x) \in L \setminus E_1$ . Предположим, что мы нашли такую функцию  $g(x) \in E_1$ , что  $\text{dist}(f, E_1) = \|f - g\| = d > 0$ .

Положим  $h(x) = f(x) - g(x)$ . Предположим, что существует такая точка  $x_0 \in [0, 1]$ , что  $|h(x_0)| < d$ . Тогда, поскольку  $h(x) \in C([0, 1])$ , то существуют такие  $\delta > 0$  и  $\gamma > 0$ , что  $|h(x)| < d - \gamma$  при  $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] = I_\delta \subset (0, 1)$ . Нетрудно выбрать функцию  $t(x) \in E_1$ , для которой  $t(x) = h(x)$  при  $x \in [0, 1] \setminus I_\delta$ . Пусть  $\|t(x)\| = \alpha > 0$ . Положим  $g_1(x) = g(x) + \frac{\gamma}{2(\alpha + 1)}t(x)$ ; тогда  $g_1(x) \in E_1$ . Обозначим  $h_1(x) = f(x) - g_1(x) = h(x) - \frac{\gamma}{2(\alpha + 1)}t(x)$ . Если  $x \in [0, 1] \setminus I_\delta$ , то

$$|h_1(x)| = \left(1 - \frac{\gamma}{2(\alpha + 1)}\right)|h(x)| \leq d \left(1 - \frac{\gamma}{2(\alpha + 1)}\right) < d,$$

а для точек  $x \in I_\delta$  выполнено условие

$$|h_1(x)| \leq |h(x)| + \frac{\gamma}{2(\alpha + 1)}|t(x)| < d - \gamma + \frac{\gamma\alpha}{2(\alpha + 1)} \leq d - \frac{\gamma}{2} < d.$$

Поэтому  $\|f - g_1\| < d = \|f - g\|$ , и мы пришли к противоречию. Таким образом,  $|h(x)| = d$  при всех  $x \in [0, 1]$ . Поскольку функция  $h(x)$  непрерывна, то либо  $h(x) \equiv d$ , либо  $h(x) \equiv -d$  на  $[0, 1]$ . Но обе эти функции лежат в  $E_1$ , следовательно, и  $f(x) \in E_1$ . Полученное противоречие доказывает, что расстояние от  $f$  до  $E_1$  не достигается.  $\square$

**3.97.** Рассмотрим пространство  $V = C([0, 1]) \times H$ , где  $H$  — гильбертово пространство, т. е.  $V$  состоит из пар  $(t, s)$ , где  $t \in C([0, 1])$  и  $s \in H$ , с нормой  $\|(t, s)\| = \|t\|_C + \|s\|_H$ . Пусть  $E_1$  — подпространство в  $C([0, 1])$ , описанное в решении задачи 3.96, а  $H_1$  — произвольное

замкнутое непустое подпространство в  $H$  и  $V_1 = E_1 \times H_1$ . Нетрудно видеть, что  $B$  — банахово пространство, а  $V_1$  — его замкнутое подпространство. Тогда если  $x = (0, s)$ , где  $s \in H \setminus H_1$ , то (см. задачу 3.94) существует такой элемент  $y \in V_1$ , что  $\|x - y\|_V = \text{dist}(x, V_1)$ , но для точек вида  $z = (t, 0)$ , где  $t \in L \setminus E_1$ , такого элемента не существует (см. задачу 3.96).  $\square$

**3.98.** Рассмотрим пространство  $\mathbb{R}^2$  с нормой  $\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}$ , подпространство  $V_1 = \{(0, y)\}_{y \in \mathbb{R}}$  и точку  $e_1 = (1, 0)$ . Тогда  $\text{dist}(e_1, V_1) = 1$  и достигается на всех точках вида  $(0, y)$ , где  $|y| \leq 1$ .  $\square$

**3.99.** Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — произвольный базис в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда для любой точки  $x \in \mathbb{R}^n$  справедливо представление

$$x = \sum_{k=1}^n x_k e_k.$$

Достаточно доказать наше утверждение в случае, когда первая из норм есть стандартная евклидова норма:

$$p_1(x) = \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} p_2(x) &= p_2 \left( \sum_{k=1}^n x_k e_k \right) \leqslant \sum_{k=1}^n |x_k| p_2(e_k) \leqslant \\ &\leqslant \left( \sum_{k=1}^n p_2^2(e_k) \right)^{1/2} \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2} = C_1 p_1(x). \end{aligned}$$

С другой стороны, из этого же неравенства вытекает, что норма  $p_2$  является непрерывной функцией (относительно  $p_1$ ) на  $\mathbb{R}^n$ , поэтому существует такая точка  $x_0 \in S_1 = \{x : p_1(x) = 1\}$ , что  $\min_{x \in S_1} p_2(x) = p_2(x_0) = C_2$ . В силу свойств нормы  $C_2 > 0$ . Тогда для любого  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$  имеем

$$p_2(x) = p_2 \left( \frac{x}{p_1(x)} p_1(x) \right) = p_1(x) p_2 \left( \frac{x}{p_1(x)} \right) > C_2 p_1(x).$$

Взяв  $C = \max(C_1, \frac{1}{C_2})$ , получим утверждение задачи.  $\square$

**3.100.** Пусть  $\text{dist}(x, E_1) = d$ . Тогда существует такая последовательность  $Y = \{y_n\}_{n=1}^\infty \subset E_1$ , что  $\|x - y\| < d + \frac{1}{n}$  для  $n \in \mathbb{N}$ . Заметим, что для любого  $n$  имеет место оценка  $\|y_n\| \leq \|x\| + d + 1$ , поэтому  $Y$  — ограниченное множество. Из всякой ограниченной последовательности

в конечномерном пространстве можно выбрать сходящуюся по стандартной норме подпоследовательность (см. задачу 3.20). Пусть это подпоследовательность  $\{y_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  и  $y_{n_k} \rightarrow y \in E_1$ . Так как  $E_1$  конечно-мерно, то (см. задачу 3.99)  $y$  будет пределом этой последовательности и по норме пространства  $L$ . Наконец,  $\|x - y\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x - y_{n_k}\| = d$ .  $\square$

**3.101.** Пусть  $z \in G \cap P$ . Тогда для некоторого  $r > 0$  шар  $B_r(z)$  вложен в  $G$ . Заметим, что  $B_r(z) \cap P$  — шар радиуса  $r$  в  $G \cap P$  с центром  $z$ . Поэтому  $G \cap P$  открыто в  $P$ .  $\square$

**3.102.** Заметим, что  $G = \mathbb{R}^n \setminus F$  — открытое множество в  $\mathbb{R}^n$  и  $F \cap P = P \setminus (G \cap P)$ . В силу результата задачи 3.101 множество  $G \cap P$  открыто в  $P$ , поэтому  $F \cap P$  замкнуто в  $P$ .  $\square$

**3.103.** Пусть  $A = B_1((0, 0)) \setminus S$ , где

$$S = \left\{ \left( \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2} \right) \right\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}^2.$$

Ясно, что множество  $A$  неоткрыто, потому что  $(0, 0) \in A$  не является внутренней точкой. Однако любое непустое сечение имеет вид  $A \cap l = B_1((0, 0)) \cap l \setminus K_l$ , где  $K_l$  состоит из не более чем из двух точек. Таким образом, сечение  $A \cap l$  открыто.  $\square$

**3.104.** Пусть  $S$  — множество, определённое в решении задачи 3.103. Тогда  $S$  незамкнуто, поскольку  $(0, 0) \in S' \setminus S$ , но любое сечение  $S \cap l$  содержит не более двух точек и, следовательно, замкнуто.  $\square$

**3.105.** Пусть  $Y = \{y_n\}_{n=1}^\infty$  — счётное всюду плотное множество в  $L$ ,  $\{r_j\}_{j=1}^\infty$  — множество всех положительных рациональных чисел, и  $x \in A \setminus \widehat{A}$ . Тогда существует такой шар  $B_{r_j(x)}(y_k(x)) = B_{r_j}(y_k)$ , где  $r_j$  рационально и  $y_k \in Y$ , что  $x \in B_{r_j}(y_k)$  и  $A \cap B_{r_j}(y_k)$  не более чем счётно. Так как множество  $C = \{B_{r_j(x)}(y_k(x))\}_{x \in A \setminus \widehat{A}}$  является подмножеством счётного множества  $\{B_{r_j}(y_k)\}_{k=1, j=1}^{\infty, \infty}$ , то  $C$  не более чем счётно. Поэтому множество

$$A \setminus \widehat{A} \subseteq \bigcup_{x \in A \setminus \widehat{A}} (B_{r_j(x)}(y_k(x)) \cap A)$$

не более чем счётно.  $\square$

**3.106.** Так как множество  $A$  несчётно, а в силу результата задачи 3.105 множество  $A \setminus \widehat{A}$  счётно, то существует точка  $x \in A \cap \widehat{A}$ .  $\square$

**3.107.** Выберем вначале произвольную точку  $x \in A$ . Так как  $A$  совершенно, то для любого  $r > 0$  множество  $A \cap B_r(x)$  бесконечно. Далее, можно выбрать два шара  $B_0 = B_{r_0}(x_0)$  и  $B_1 = B_{r_1}(x_1)$  так, чтобы  $\overline{B_0} \cap \overline{B_1} = \emptyset$ ,  $\overline{B_j} \subset B_r(x)$  и  $A \cap B_j$  бесконечны,  $j = 0, 1$ . За-

тем для каждого  $j = 0$  и для  $j = 1$  выберем два непустых шара  $B_{j,0} = B_{r_{j,0}}(x_{j,0})$  и  $B_{j,1} = B_{r_{j,1}}(x_{j,1})$ , для которых  $\overline{B_{j,0}} \cap \overline{B_{j,1}} = \emptyset$ ,  $\overline{B_{j,0}}, \overline{B_{j,1}} \subset B_j$  и  $B_{j,j_2} \cap A$  бесконечно для  $j_2 \in \{0, 1\}$ .

Продолжая этот процесс по индукции, построим континуум последовательностей  $B_{j_1} \supseteq B_{j_1, j_2} \supseteq B_{j_1, j_2, j_3} \supseteq \dots$  непустых шаров, где  $j_k \in \{0, 1\}$  для каждого  $k$ ,  $\overline{B_{j_1, \dots, j_{k-1}, 0}} \cap \overline{B_{j_1, \dots, j_{k-1}, 1}} = \emptyset$  и  $\overline{B_{j_1, \dots, j_k}} \cap A$  бесконечно.

Для каждой последовательности  $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \dots)$ , где  $j_k \in \{0, 1\}$ , и для каждого  $k$  существует точка

$$x_{\mathbf{j}} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{j_1, \dots, j_n}.$$

Ясно, что  $x_i \neq x_j$ , если  $i \neq j$ . Так как множество  $A$  совершенно (в частности, замкнуто), то  $x_{\mathbf{j}} \in A$ . Поэтому  $A$  имеет подмножество мощности  $c$ , т. е.  $A$  имеет мощность не меньше мощности континуума.  $\square$

**3.108.** Достаточно доказать утверждение для  $k = 2$ . В силу результата задачи 3.14 множество  $A = A_1 \cup A_2$  замкнуто, поэтому  $A' \subseteq A$ . С другой стороны, если  $x \in A$ , то  $x \in A_1$  или  $x \in A_2$ . Пусть, для определённости,  $x \in A_1$ . Поскольку  $A_1$  совершенно, то  $x \in A'_1 \subseteq (A_1 \cup A_2)' = A'$ .  $\square$

**3.109.** Рассмотрим следующее отношение эквивалентности на множестве  $G$ :  $x \sim y$ , если  $[x, y] \subseteq G$ . Тогда  $G$  является объединением попарно непересекающихся классов эквивалентности. Так как любой набор попарно непересекающихся интервалов не более чем счётен (в каждом можно выбрать рациональное число), достаточно доказать, что каждый класс эквивалентности есть интервал (или луч, или прямая). Рассмотрим множество  $K$  — один из этих классов. Положим  $a = \inf_{x \in K} x$  и  $b = \sup_{y \in K} y$ . Предположим, что  $a > -\infty$  и  $b < +\infty$ ; в противном

случае доказательство только упростится. По построению  $K \subseteq [a; b]$ . Если  $c \in (a, b)$ , то найдутся такие  $x \in (a, c) \cap K$  и  $y \in (c, b) \cap K$ , что  $(x, y) \subseteq G$ , поэтому  $c \in K$ . Следовательно,  $(a, b) \subseteq K$ . Предположим, что  $a \in K$ . Тогда, так как  $G$  открыто, то для некоторого  $d \in (0, b - a)$  интервал  $(a - d, a + d)$  содержится в множестве  $G$ . При этом, поскольку  $a \in K$ , то  $a - \frac{d}{2} \in K$ , и мы пришли к противоречию с определением  $a$ . Аналогично показывается, что  $b \notin K$ . Таким образом,  $K = (a, b)$ .  $\square$

**3.110.** Предположим, что такое представление возможно. Без ограничения общности точки 0 и 1 принадлежат  $F_1 \sqcup F_2$ . Множество  $[0, 1] \setminus (F_1 \sqcup F_2)$  открыто и непусто, так что в силу результата задачи 3.109 найдётся интервал  $I_{2,m_0} = (a_1, b_1) \subseteq [0, 1] \setminus (F_1 \sqcup F_2)$ , для

которого  $a_1, b_1 \in F_1 \cup F_2$ . Тогда для любого  $N$  справедливо условие

$$J_1 = (a_1, b_1) \not\subset \bigsqcup_{n=3}^N F_n$$

(здесь в правой части стоит замкнутое множество, и если бы оно содержало интервал, то оно содержало бы и отрезок  $[a_1, b_1]$ , т. е. множества  $F_k$  пересекались бы). Выберем множества  $F_{k_2}$  и  $F_{N_2}$  ( $k_2 < N_2$ ), которые пересекаются с  $J_1$ . Тогда в силу результата задачи 3.109 имеет место равенство

$$J_1 \setminus \bigsqcup_{n=3}^{N_2} F_n = \bigsqcup_{r=1}^{\infty} I_{3,r}$$

и найдётся интервал  $I_{3,r_0} = (a_2, b_2) = J_2$ , для которого  $a_1 < a_2 < b_2 < b_1$ .

Продолжая этот процесс, получим последовательность интервалов  $\{J_q\}_{q=1}^{\infty}$  и возрастающую последовательность чисел  $\{N_i\}_{i=0}^{\infty}$ , для которых  $N_0 = 0$ ,  $N_1 = 2$ ,  $\overline{J_q} \subset J_{q-1}$  при  $q = 2, 3, \dots$  и

$$J_i \bigcap \left( \bigsqcup_{n=1}^{N_i} F_n \right) = \emptyset.$$

Тогда (см. задачу 3.38) существует точка

$$x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} J_i, \quad \text{но} \quad x \notin \bigsqcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Это противоречие доказывает, что разбиение отрезка на непересекающиеся непустые замкнутые множества не существует.  $\square$

**3.111.** Без ограничения общности предположим, что  $0 \in F_1$  и  $F_2$  непусто. Выберем точку  $x \in F_2$ . Заметим, что отрезок  $I = [0, x]$ , т. е. множество  $\{\lambda x\}_{\lambda \in [0,1]}$  представляется в виде

$$I = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (F_k \cap I).$$

Множества  $A_k = F_k \cap I$  замкнуты для каждого  $k$  (см задачу 3.13). Пусть  $R_k = \{t \in [0, 1] : tx \in A_k\}$ . Тогда  $R_k$  — замкнутое множество (на  $[0, 1]$ ), причём  $R_1$  и  $R_2$  непустые. Поэтому получившееся равенство

$$[0, 1] = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} R_k$$

противоречит задаче 3.110.  $\square$

**3.112.** Если  $x \in P \cap (a; b)$ , то  $x$  одновременно является или не является предельной точкой множеств  $P$  и  $P \cap [a; b]$ . Пусть  $a \in P$ . Так

как  $a$  — предельная точка для  $P$ , но в некоторой левой окрестности нет точек из  $P$ , то найдутся  $x_n \in P$ , сходящиеся к  $a$  справа. Тогда, начиная с некоторого номера, они лежат и в  $P \cap [a; b]$ , т. е.  $a \in (P \cap [a; b])'$ . Аналогично разбирается случай  $b \in P$ .  $\square$

**3.113.** Достаточно доказать утверждение в случае, когда  $A = \{a\}$ , т. е. множество  $A$  состоит из одной точки. Утверждение тривиально, если  $a \notin P$ . Пусть  $a \in P$  и

$$[0, 1] \setminus P = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, \beta_n).$$

Рассмотрим сначала случай, когда  $a$  не совпадает с 0, 1 и ни с каким  $\alpha_n$  или  $\beta_n$ . Так как множество  $P$  нигде не плотно, то существует такая подпоследовательность интервалов  $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{\infty} \equiv \{(\alpha_{n_k}, \beta_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ , что  $b_{2m-1} < a < a_{2m}$  при  $m \in \mathbb{N}$  и

$$\lim_{m \rightarrow \infty} b_{2m-1} = a = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m}.$$

Положим  $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$  для всех  $k$ , и пусть  $P_1 = P \cap [0, c_1]$ ,  $P_2 = P \cap [c_2, 1]$ ,  $P_{2k-1} = P \cap [c_{2k-1}, c_{2k+1}]$  и  $P_{2k} = P \cap [c_{2k+2}, c_{2k}]$  при  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда все множества  $P_n$  совершенны в силу результата задачи 3.112 и

$$P \setminus \{a\} = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} P_n.$$

Если, например,  $a = 0$ , то существует такая подпоследовательность интервалов  $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{\infty} \equiv \{(\alpha_{n_k}, \beta_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ , что  $0 < b_{k+1} < a_k$  для  $k \in \mathbb{N}$  и

$$\lim_{m \rightarrow \infty} b_m = a.$$

Положим  $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$  для каждого  $k$ ,  $P_1 = P \cap [c_1, 1]$  и  $P_k = P \cap [c_k, c_{k-1}]$  для  $k = 2, 3, \dots$ . Тогда  $P_n$  — совершенные множества и

$$P \setminus \{0\} = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} P_n.$$

В случаях  $a = 1$ ,  $a = \alpha_n$  или  $a = \beta_n$  доказательство аналогично.  $\square$

**3.114.** Пусть  $A = \{a = (a_1, a_2, \dots)\}$  — множество всех последовательностей из нулей и единиц. Для элемента  $a \in A$  определим множество

$$X_a = \{(x_1, x_2, \dots) : x_{2j-1} \in \{0, 1\} \text{ и } x_{2j} = a_j \text{ для } j \in \mathbb{N}\}.$$

Отобразим  $X_a$  на множество точек отрезка  $[0, 1]$  с соответствующими двоичными разложениями. Очевидно, что  $X_a$  не имеет изолированных точек.

ных точек ни для какого  $a$ . Докажем, что  $X_a$  замкнуто. Рассмотрим фундаментальную последовательность  $Z = \{z(l)\}_{l=1}^\infty \subset X_a$ . Пусть для некоторого нечётного  $r$  при каждом  $N$  существуют такие  $j_1 > N$  и  $j_2 > N$ , что  $z(j_1)_r \neq z(j_2)_r$ . Тогда, поскольку  $z(j_1)_{r+1} = z(j_2)_{r+1}$ , то  $|z(j_1) - z(j_2)| \geq 2^{-r} - 2 \cdot 2^{-r-2} = 2^{-r-1}$ , что противоречит предположению о фундаментальности  $Z$ . Поэтому для любого нечётного  $r$  существует такое  $N$ , что при всех  $j_1 > N$  и  $j_2 > N$  выполнено равенство  $z(j_1)_r = z(j_2)_r$ . Обозначая это значение через  $z_r$ , получаем, что,  $z(l) \rightarrow z = (z_1, a, z_2, a, \dots) \in X_a$  при  $l \rightarrow \infty$ . Таким образом, мы доказали, что  $X_a$  совершенно. Заметим также, что  $X_a$  нигде не плотно. Действительно, любой интервал вида  $(\frac{2k+a_j}{2^{2j}}, \frac{2k+a_j+1}{2^{2j}})$ , где  $j \in \mathbb{N}$  и  $k = 0, 1, \dots, 2^{2j-1}$ , не пересекается с  $X_a$ . Заметим далее, что

$$[0, 1] = \bigcup_{a \in A} X_a,$$

причём  $A$  имеет мощность континуума. Так как множества  $X_a$ , рассматриваемые как множества последовательностей нулей и единиц, попарно не пересекаются, то на отрезке в множество  $X_{a(1)} \cap X_{a(2)}$  могут попасть лишь двоично-рациональные точки. При этом сами последовательности  $a(1)$  и  $a(2)$  должны иметь в периоде 0 или 1. Обозначим множество последовательностей  $a$ , не имеющих таких периодов, через  $A_1$ , и пусть  $A_2 = A \setminus A_1$ .

Рассмотрим более подробно, сколько точек может быть в множестве  $X_{a(1)} \cap X_{a(2)}$ . Предположим, что  $a(1) \neq a(2)$ , но  $X_{a(1)} \cap X_{a(2)} \neq \emptyset$ . Пусть  $j = \min \{i : a(1)_i \neq a(2)_i\}$ . Можно считать, что  $a(1)_j = 1$  и  $a(2)_j = 0$ . Для некоторых последовательностей  $(y_1, y_2, \dots) \in X_{a(1)}$  и  $(z_1, z_2, \dots) \in X_{a(2)}$  имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} y_n 2^{-(2n-1)} + 2^{-2j} + \sum_{r=j+1}^{\infty} a(1)_r 2^{-2r} = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} z_n 2^{-(2n-1)} + \sum_{r=j+1}^{\infty} a(2)_r 2^{-2r}. \quad (\text{i}) \end{aligned}$$

Ясно, что если  $(y_1, y_2, \dots) = (z_1, z_2, \dots)$ , то равенство (i) не выполняется. Пусть  $i = \min \{k : y_k \neq z_k\}$ . В силу (i) возможен лишь случай  $y_i = 0$  и  $z_i = 1$ .

Тогда из (i) получаем, что

$$2^{-2j} + \sum_{n=i+1}^{\infty} (y_n - z_n) 2^{-(2n-1)} = 2^{-2i-1} + \sum_{r=j+1}^{\infty} (a(2)_r - a(1)_r) 2^{-2r}. \quad (\text{ii})$$

Заметим, что если  $i < j - 1$ , то правая часть (ii) больше, чем левая, а если  $i > j$ , то левая часть (ii) больше, чем правая. Если  $i = j - 1$ , то из (ii) следует, что  $a(1)_r = 1$ ,  $a(2)_r = 0$  для всех  $r > j$ ,  $y_n = 1$  и  $z_n = 0$  для всех  $n > i$ . Если  $i = j$ , то  $a(1)_r = 0$ ,  $a(2)_r = 1$  для всех  $r > j$ ,  $y_n = 0$  и  $z_n = 1$  при всех  $n > i$ . Таким образом, при фиксированных  $a(1)$  и  $a(2)$  из  $A_2$  множество  $X_{a(1)} \cap X_{a(2)}$  состоит не более чем из одной точки.

Множество  $A_2$  счётно. Занумеруем его элементы:  $A_2 = \{a(r)\}_{r=1}^\infty$ . В силу предыдущих рассуждений для любого  $a(r) \in A_2$  множество

$$F_r = X_{a(r)} \cap \bigcup_{k < r} X_{a(k)}$$

состоит не более чем из  $r - 1$  точек. Тогда согласно утверждению задачи 3.113 существует представление

$$X_{a(r)} \setminus F_r = \bigsqcup_{l=1}^{\infty} P_{r,l},$$

где все  $P_{r,l}$  — совершенные множества.

Окончательно получаем, что

$$\begin{aligned} [0, 1] = \bigcup_{a \in A} X_a &= \left( \bigsqcup_{a \in A_1} X_a \right) \bigsqcup \left( \bigsqcup_{r=1}^{\infty} (X_{a(r)} \setminus F_r) \right) = \\ &= \left( \bigsqcup_{a \in A_1} X_a \right) \bigsqcup \left( \bigsqcup_{r=1}^{\infty} \bigsqcup_{l=1}^{\infty} P_{r,l} \right). \end{aligned}$$

□

**3.115.** Предположим, что

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

где все множества  $A_n$  нигде не плотны в пространстве  $(M, \rho)$ . Найдём такой непустой замкнутый шар  $\bar{B}_{r_1}(x_1)$ , что  $r_1 < 1$  и  $\bar{B}_{r_1}(x_1) \cap A_1 = \emptyset$ . Выберем такой непустой замкнутый шар  $\bar{B}_{r_2}(x_2) \subset \bar{B}_{r_1}(x_1)$ , что  $r_2 < \frac{1}{2}$  и  $\bar{B}_{r_2}(x_2) \cap A_2 = \emptyset$ . Продолжая этот процесс по индукции, получим такую последовательность замкнутых шаров  $\bar{B}_{r_1}(x_1) \supset \bar{B}_{r_2}(x_2) \supset \dots$ , что  $r_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и  $\bar{B}_{r_n}(x_n) \cap A_n = \emptyset$  для всех  $n$ . В силу результата задачи 3.30 существует точка

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{B}_{r_n}(x_n), \quad \text{но} \quad x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Полученное противоречие доказывает, что  $M$  не представимо в виде счётного объединения нигде не плотных множеств. □

**3.116.** Обозначим через  $F$  множество всех функций из  $C([0, 1])$ , которые имеют конечную производную хотя бы в одной точке из  $[0, 1]$  (если  $x = 0$  или  $x = 1$ , то имеется в виду односторонняя производная). Пусть также

$$F_m = \{f(x) \in C([0, 1]) : \exists x \in [0, 1] : |f(x) - f(y)| \leq m|x - y| \quad \forall y \in [0, 1]\},$$

где  $m \in \mathbb{N}$ . Ясно, что

$$F \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m.$$

Докажем, что каждое множество  $F_m$  нигде не плотно в  $C([0, 1])$ . Для данного  $n \geq 1$  определим вначале непрерывную функцию  $g_n(x)$ . Пусть  $g_n\left(\frac{k}{n}\right) = (-1)^k$  при  $k = 0, 1, \dots, n$  и  $g_n(x)$  линейна на каждом отрезке  $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$  для  $k = 1, 2, \dots, n$ . Видно, что  $g_n(x) \in C([0, 1])$ .

Рассмотрим произвольную функцию  $f(x) \in C([0, 1])$  и число  $r > 0$ . Нам нужно доказать, что существует шар  $B_t(\varphi) \subset B_r(f)$ , для которого  $B_t(\varphi) \cap F_m = \emptyset$ . Так как  $f(x)$  равномерно непрерывна на  $[0, 1]$ , то существует такое  $\delta > 0$ , что для любых  $y, z \in [0, 1]$  при  $|y - z| < \delta$  выполнено неравенство  $|f(y) - f(z)| < \frac{r}{5}$ . Выберем  $n_0$  так, чтобы  $\frac{1}{n_0} < \delta$  и  $r n_0 > 10m$ .

Пусть  $t = \frac{r}{10}$  и  $\varphi(x) = f(x) + \frac{r}{2}g_{n_0}(x)$ . Поскольку  $\|g_{n_0}\|_C = 1$ , то  $B_t(\varphi) \subset B_r(f)$ . Пусть  $h(x) \in B_t(\varphi)$ . Тогда  $h(x) = f(x) + \frac{r}{2}g_{n_0}(x) + \psi(x)$ , где  $\|\psi(x)\|_C < \frac{r}{10}$ . Для любого  $x \in [0, 1]$  существует такое  $y \in [0, 1]$ , что  $|x - y| < \frac{1}{n_0}$  и  $|g_{n_0}(x) - g_{n_0}(y)| \geq 1$ . Для этого  $y$  получаем, что

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| &\geq \frac{r}{2}|g_{n_0}(x) - g_{n_0}(y)| - |f(x) - f(y)| - |\psi(x)| - |\psi(y)| > \\ &> \frac{r}{2} - \frac{r}{5} - \frac{r}{10} - \frac{r}{10} = \frac{r}{10} > \frac{m}{n_0} > m|x - y|, \end{aligned}$$

поэтому  $h(x) \notin F_m$ . Таким образом,  $B_t(\varphi) \cap F_m = \emptyset$  и потому  $F_m$  нигде не плотно в  $C([0, 1])$ . Следовательно, множество  $F$  имеет первую категорию в  $C([0, 1])$ . Но всё множество  $C([0, 1])$  не является множеством 1-й категории (см. задачу 3.115). Таким образом,  $C([0, 1]) \setminus F$  — множество второй категории.

Так как (см. задачу 3.115)  $C([0, 1])$  не является множеством 1-й категории, то  $F$  — множество 2-й категории в  $C([0, 1])$ , в частности, существует нигде не дифференцируемая функция из  $C([0, 1])$ .  $\square$

# Г л а в а 4

## НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть  $(M, \rho)$  — метрическое пространство, множество  $A$  лежит в  $M$  и функция  $f(x)$  отображает  $A$  на  $\mathbb{R}$ . Функция  $f(x)$  называется *непрерывной в точке*  $y$ , если  $y \in A$  и для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $r > 0$ , что для любой точки  $x \in B_r(y) \cap A$  выполнено неравенство  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ . Если  $f(x)$  непрерывна в каждой точке множества  $B \subseteq A$ , то она называется непрерывной на  $B$ . Для краткости будем обозначать метрическое пространство через  $M$  вместо  $(M, \rho)$ , а нормированное пространство — через  $L$  вместо  $(L, \|\cdot\|)$ .

Для данной конечной функции  $f(x)$  на метрическом пространстве  $M$  обозначим через  $A_f$  множество всех точек её непрерывности.

Если  $I = (a, b)$ , а  $c, d$  — некоторые вещественные числа, то через  $l(I; c, d, x)$  будем обозначать линейное отображение отрезка  $[a, b]$  на отрезок  $[\min\{c, d\}, \max\{c, d\}]$ , переводящее  $a$  в  $c$  и  $b$  в  $d$ , т. е.  $l(I; c, d, x) = c + \frac{(x-a)(d-c)}{b-a}$ .

Пусть  $F = \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  — последовательность непрерывных функций на полном метрическом пространстве  $M$ . Определим следующие множества:

$$C_F = \{x \in M : \text{существует конечный } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\}$$

называется *множеством сходимости* последовательности  $F$ ,

$$D_F = \{x \in M : \text{не существует конечного } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\}$$

называется *множеством расходимости*  $F$ , а

$$d_F = \{x \in M : \text{существует } \{n_k\} \rightarrow \infty : \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = \pm\infty\}$$

называется *множеством неограниченной расходимости*  $F$ .

Множество  $K$  в полном метрическом пространстве  $M$  называется *компактом*, если для любой последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  точек из  $K$  существует подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ , сходящаяся к некоторой точке  $x \in K$ .

Колебанием функции  $f$  в точке  $x$  называется величина

$$\omega(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{|f(y) - f(z)| : y, z \in B_{1/n}(x)\}.$$

Скажем, что  $f(x)$  полуценпрерывна сверху в точке  $a \in M$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $r > 0$ , что для любого  $x \in B_r(a)$  выполнено неравенство  $f(x) - f(a) < \varepsilon$ . Если функция полуценпрерывна сверху в каждой точке  $a \in M$ , то она называется полуценпрерывной сверху.

### ЗАДАЧИ

**4.1.** Пусть  $f(x)$  — конечная функция на полном метрическом пространстве  $M$ . Доказать, что  $x_0 \in A_f$  тогда и только тогда, когда  $\omega(x_0) = 0$ .

**4.2.** Пусть  $f(x)$  — конечная функция на метрическом пространстве  $M$ . Доказать, что  $A_f$  — множество типа  $G_\delta$ .

**4.3.** Пусть  $\mathbb{Q}_{[0;1]}$  — множество всех рациональных чисел на  $[0, 1]$ . Построить конечную функцию  $f(x)$  на  $[0, 1]$ , удовлетворяющую условию  $A_f = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}_{[0;1]}$ .

**4.4.** Пусть  $A$  — произвольное множество типа  $G_\delta$  в полном сепарабельном нормированном пространстве  $L$ . Построить такую конечную функцию  $f(x)$  на  $L$ , что  $A_f = A$ .

**4.5.** Пусть  $f(x)$  — непрерывная функция на полном метрическом пространстве  $M$ , а  $N_f = \{x \in M : f(x) = 0\}$ . Доказать, что  $N_f$  — замкнутое множество.

**4.6.** Пусть  $F$  — замкнутое множество в полном метрическом пространстве  $M$ . Построить такую непрерывную функцию  $f(x)$  на  $M$ , что (см. задачу 4.5)  $N_f = F$ .

**4.7.** Пусть  $f(x)$  — непрерывная функция на полном метрическом пространстве  $M$ . Доказать, что для любого  $c \in \mathbb{R}$  множество  $G_c(f) = \{x \in M : f(x) > c\}$  открыто, а множество  $F_c(f) = \{x \in M : f(x) \geq c\}$  замкнуто.

**4.8.** Пусть  $f(x)$  — такая конечная функция на полном метрическом пространстве  $M$ , что для любого  $c \in \mathbb{R}$  множества  $A_c = \{x \in M : f(x) \geq c\}$  и  $D_c = \{x \in M : f(x) \leq c\}$  замкнуты. Доказать, что  $f(x)$  — непрерывная функция на  $M$ .

**4.9.** Построить на  $[0, 1]$  такую разрывную функцию  $f(x)$ , что для любого  $c \in \mathbb{R}$  множества  $\{x \in M : f(x) \geq c\}$  и  $\{x \in M : f(x) = c\}$  замкнуты.

**4.10.** Пусть  $K$  — компакт в полном метрическом пространстве  $M$ , а функция  $f(x)$  непрерывна на  $K$ . Доказать, что  $f(x)$  ограничена на  $K$ .

**4.11.** Пусть  $K$  — компакт в полном метрическом пространстве  $M$ , а функция  $f(x)$  непрерывна на  $K$ . Доказать, что существует точка  $x_0 \in K$ , в которой достигается точная верхняя грань функции, т. е.  $f(x_0) = \max_{x \in K} f(x)$ .

**4.12. Теорема Кантора.** Пусть  $K$  — компакт в полном метрическом пространстве  $M$ , а функция  $f(x)$  непрерывна на  $K$ . Доказать, что  $f(x)$  равномерно непрерывна на  $K$ , т. е. для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что если  $x, y \in K$  и  $\rho(x, y) < \delta$ , то  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

**4.13.** Построить пример ограниченного замкнутого множества  $F$  в банаховом пространстве  $L$  и непрерывной функции  $f(x)$  на  $F$ , неограниченной на  $F$  и не равномерно непрерывной на  $F$ .

**4.14.** Пусть  $A$  — компактное множество в метрическом пространстве  $M$ , а  $f(x)$  — непрерывная функция из  $M$  в метрическое пространство  $N$ . Доказать, что множество  $f(A)$  компактно в  $N$ .

**4.15.** Построить функцию  $f(x) \in C(\mathbb{R})$  и замкнутое множество  $A \subset \mathbb{R}$ , для которых  $f(A)$  незамкнуто.

**4.16.** Построить пример ограниченного замкнутого множества  $A \subset l_2$  и непрерывной функции  $f(x)$  из  $l_2$  в  $\mathbb{R}$ , для которых  $f(A)$  — незамкнутое множество в  $\mathbb{R}$ .

**4.17.** Пусть  $K$  — компакт в полном метрическом пространстве  $M$ , множество  $A$  — всюду плотное в  $K$ , а  $f(x)$  — непрерывная функция на  $K$ . Доказать, что  $f(A)$  — плотное в  $f(K)$  множество.

**4.18.** Пусть функция  $f(x)$  не убывает на  $[a, b]$ ,  $f(a) = c$ ,  $f(b) = d$  и множество  $f([a, b])$  всюду плотно на  $[c, d]$ . Доказать, что  $f$  непрерывна на  $[a; b]$ .

**4.19.** Построить нигде не плотное множество  $A$  на  $[0, 1]$  и такую непрерывную функцию  $f(x) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , что  $f(A)$  всюду плотно на  $[0, 1]$ .

**4.20.** Доказать, что если  $f(x)$  — непрерывная строго возрастающая функция на  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , а  $A$  — нигде не плотное множество на  $[a, b]$ , то  $f(A)$  — нигде не плотное множество на  $[f(a), f(b)]$ .

**4.21.** Пусть  $f(x)$  — непрерывная функция на замкнутом множестве  $F \subset \mathbb{R}$ . Доказать, что существует такая функция  $h(x) \in C(\mathbb{R})$ , что  $h(x) = f(x)$  при  $x \in F$ .

**4.22.** Пусть  $f(x)$  — непрерывная функция на компакте  $F$  в полном метрическом пространстве  $M$ . Доказать, что существует непрерывная на  $M$  функция  $h(x)$ , совпадающая с  $f(x)$  при  $x \in F$ .

**4.23.** Пусть  $F_1$  и  $F_2$  — два замкнутых множества в метрическом пространстве  $M$ , функция  $f(x)$  определена на  $F_1 \cup F_2$  и  $f(x)$  непрерывна на каждом из  $F_j$ . Доказать, что  $f(x)$  непрерывна на  $F_1 \cup F_2$ .

**4.24.** Построить такие множества  $A_1, A_2 \in [0, 1]$ , что  $[0, 1] = A_1 \sqcup A_2$ , и разрывную всюду на  $[0, 1]$  функцию  $f(x)$ , непрерывную на каждом из  $A_j$ .

**4.25.** Пусть  $n > 1$ , а  $f(x)$  — непрерывная функция на замкнутом множестве  $F \subset \mathbb{R}^n$ . Доказать, что существует функция  $h(x) \in C(\mathbb{R}^n)$ , совпадающая с  $f(x)$  на  $F$ .

**4.26.** Пусть  $F = \{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  — последовательность непрерывных функций на полном метрическом пространстве  $M$ . Доказать, что множество её неограниченной расходимости  $d_F$  имеет тип  $G_\delta$ .

**4.27.** Построить такую последовательность  $F = \{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  непрерывных функций на  $\mathbb{R}$ , что множество  $d_F$  совпадает с множеством всех иррациональных чисел из  $\mathbb{R}$ .

**4.28.** Построить такую последовательность  $F = \{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  непрерывных функций на  $\mathbb{R}$ , что  $C_F = \mathbb{Q}$ .

**4.29.** Для заданного множества  $A$  типа  $G_\delta$  в полном метрическом пространстве  $M$  построить последовательность  $F = \{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  непрерывных на  $M$  функций, множество неограниченной расходимости которой равно  $A$ .

**4.30.** Пусть  $F = \{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  — последовательность непрерывных функций на полном метрическом пространстве  $M$ . Доказать, что множество  $C_F$  имеет тип  $F_{\sigma\delta}$ .

**4.31.** Построить такую последовательность  $F = \{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  непрерывных функций на  $\mathbb{R}$ , что  $D_F = \mathbb{Q}$ .

**4.32.** Пусть  $(M, \rho)$  — полное метрическое пространство, а  $f$  — функция  $M \rightarrow \mathbb{R}$ . Доказать, что  $f(x)$  на  $\mathbb{R}$  полуунпрерывна сверху тогда и только тогда, когда для любого  $y \in \mathbb{R}$  множество  $E_y = \{t \in M : f(t) < y\}$  открыто.

**4.33.** Пусть  $(M, \rho)$  — полное метрическое пространство, функция  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  полуунпрерывна сверху и ограничена сверху. Доказать, что существует такая невозрастающая последовательность непрерывных на  $M$  функций  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ , что  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  для каждого  $x \in M$ .

**4.34.** Пусть  $A$  — множество типа  $F_\sigma$  в полном метрическом пространстве  $(M, \rho)$ . Построить равномерно ограниченную последовательность непрерывных на  $M$  функций  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ , которая сходится к нулю на  $A$  и расходится на  $B = M \setminus A$ .

**4.35.** Пусть  $A$  — множество типа  $F_{\sigma\delta}$  в полном метрическом пространстве  $(M, \rho)$ . Построить такую равномерно ограниченную последовательность непрерывных на  $M$  функций  $F = \{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ , что  $C_F = A$ .

**4.36.** Построить функцию на  $[0; 1]$ , которая не может быть представлена как поточечный предел последовательности непрерывных функций.

### РЕШЕНИЯ

**4.1.** Если  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , то для каждого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $n$ , что для любого  $y \in B_{1/n}(x_0)$  выполнено неравенство  $|f(x_0) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Тогда  $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$  для любых  $y, z \in B_{1/n}(x)$ . Следовательно,  $\omega(x_0) = 0$ .

С другой стороны, если  $\omega(x_0) = 0$ , то для каждого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $n$ , что для любого  $y \in B_{1/n}(x_0)$  выполнено неравенство  $|f(x_0) - f(y)| < \varepsilon$ , т. е.  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ .  $\square$

**4.2.** Определим множества  $G_k = \left\{x \in M : \omega(x) < \frac{1}{k}\right\}$ . Нетрудно видеть, что  $G_k$  открыто для каждого  $k$ . Но, согласно задаче 4.1,

$$A_f = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k,$$

поэтому  $A_f$  — множество типа  $G_\delta$ .  $\square$

**4.3.** Пусть  $f(x) = 0$  на множестве  $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ , а для  $x \in \mathbb{Q}_{[0,1]}$ ,  $x = \frac{k}{m}$ , где  $k$  и  $m$  взаимно прости, положим  $f(x) = \frac{1}{m}$  (эта функция обычно называется *функцией Римана*). Тогда  $f(x)$  разрывна на  $\mathbb{Q}_{[0,1]}$  и непрерывна на  $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ .  $\square$

**4.4.** Пусть множество  $A$  имеет вид

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n,$$

где все  $G_n$  — открытые множества. Без ограничения общности можно считать, что  $G_1 \supset G_2 \supset \dots$ . Тогда множества  $F_n = L \setminus G_n$ , где  $n \in \mathbb{N}$ , замкнуты. Выберем для каждого  $n$  не более чем счётное всюду плотное множество  $E_n \subseteq F_n$  и определим функции

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in G_n, \\ 1 & \text{при } x \in E_n, \\ 2 & \text{при } x \in F_n \setminus E_n, \end{cases}$$

а затем — функции

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} f_n(x).$$

Ясно, что ряд сходится в каждой точке множества  $L$ .

Докажем, что функция  $f(x)$  подходящая. Пусть  $x_0 \in A$ . Тогда  $f(x_0) = 0$ . Для заданного  $\varepsilon > 0$  найдём такое  $N$ , что

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{10^n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Заметим, что множество

$$G_N = \bigcap_{n=1}^N G_n$$

открыто, поэтому существует такое  $\delta > 0$ , что при  $x \in B_\delta(x_0)$  и  $k = 1, \dots, N$  выполнено условие  $f_k(x) = 0$ . Но, следовательно, для такого  $x$  имеем:  $0 \leq f(x) = f(x) - f(x_0) < \varepsilon$ , т. е.  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ .

Пусть теперь  $x_0 \in L \setminus A$ . Тогда существует такое  $n_0$ , что  $x_0 \in G_{n_0-1} \setminus G_{n_0}$  (здесь  $G_0 = L$ ). Поэтому  $f(x_0) > 10^{-n_0}$ . Рассмотрим  $\delta > 0$ , для которого  $B_\delta(x_0) \subset G_{n_0-1}$ . Возможны два случая.

1) Существует точка  $y \in B_\delta(x) \cap G_{n_0}$ . Тогда

$$f(y) \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{2}{10^n},$$

и поэтому  $f(x_0) - f(y) > 5 \cdot 10^{-n_0-1}$ .

2) Множество  $B_\delta(x_0) \cap G_{n_0}$  пусто. Тогда, поскольку  $B_\delta(x_0) \setminus G_{n_0}$  имеет мощность континуума (здесь мы пользуемся тем, что пространство линейное, а не просто метрическое), а  $E_{n_0}$  не более чем счётно и плотно, то существуют точки  $y \in B_\delta(x_0) \cap E_{n_0}$  и  $z \in B_\delta(x_0) \cap (F_{n_0} \setminus E_{n_0})$ . Поэтому

$$f(z) - f(y) \geq 10^{-n_0} - \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{2}{10^n} > 10^{-n_0-1}.$$

Таким образом (см. задачу 4.1),  $\omega(x_0) > 10^{-n_0-1}$ , поэтому  $f(x)$  разрывна в точке  $x_0$ .  $\square$

**4.5.** Пусть  $x \in (N_f)'$ . Тогда для любого натурального  $n$  существует точка  $y_n \in N_f \cap B_{1/n}(x)$ . Поскольку функция  $f(x)$  непрерывна, то

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = 0.$$

Поэтому  $x \in N_f$ .  $\square$

**4.6.** Пусть  $f(x) = \text{dist}(x, F)$ . Тогда  $f(x)$  — непрерывная функция, так как  $|f(y) - f(z)| \leq \rho(y, z)$  для любых  $y, z$ , и  $f(x) = 0$  для любой точки  $x \in F$ . Но так как  $F$  замкнуто, то  $f(x) > 0$  при  $x \notin F$ .  $\square$

**4.7.** Пусть  $x \in G_c(f)$ . Так как  $f(x)$  непрерывна, то существует такое  $r > 0$ , что для любого  $y \in B_r(x)$  выполнено неравенство  $|f(x) - f(y)| < f(x) - c$ . Тогда  $f(y) > c$ , т. е.  $B_r(x) \subset G_c(f)$ . Поэтому множество  $G_c(f)$  открыто. Как следствие, множество  $F_c(f) = M \setminus G_{-c}(-f)$  замкнуто.  $\square$

**4.8.** Пусть  $x \in M$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  множество

$$C_\varepsilon = \{y \in M : f(x) - \varepsilon < f(y) < f(x) + \varepsilon\} = (M \setminus A_{f(x)+\varepsilon}) \setminus D_{f(x)-\varepsilon}$$

открыто и  $x \in C_\varepsilon$ . Поэтому для некоторого  $\delta > 0$  имеет место вложение  $B_\delta(x) \subseteq C_\varepsilon$ , т. е. для любого  $y \in B_\delta(x)$  выполнено неравенство  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .  $\square$

**4.9.** Функция

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{при } x = 0, \\ 1 - x & \text{при } x \in (0, 1] \end{cases}$$

удовлетворяет условиям задачи.  $\square$

**4.10.** Предположим, что для каждого  $n$  существует такой элемент  $y_n \in K$ , что  $|f(y_n)| > n$ . Выберем подпоследовательность  $\{y_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ , сходящуюся к  $y_0 \in K$  при  $k \rightarrow \infty$ . Тогда  $f(x)$  разрывна в точке  $y_0$ , что противоречит условиям задачи.  $\square$

**4.11.** Пусть  $C = \sup_{x \in K} f(x)$ . В силу результата задачи 4.10 число  $C$  конечно. Найдём для каждого  $n$  такую точку  $y_n \in K$ , что  $f(y_n) > C - \frac{1}{n}$ . Если выбрать подпоследовательность  $\{y_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ , сходящуюся к некоторой точке  $y_0 \in K$  при  $k \rightarrow \infty$ , то в силу непрерывности функции

$$f(y_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n_k}) = C.$$

$\square$

**4.12.** Предположим, что  $f(x)$  не является равномерно непрерывной на  $K$ . Тогда для некоторого  $\varepsilon > 0$  существуют такие две последовательности  $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset K$  и  $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset K$ , что  $\rho(y_n, z_n) < \frac{1}{n}$ , но  $|f(y_n) - f(z_n)| > \varepsilon$  для всех  $n$ . Дважды применяя определение компакта, найдём такие подпоследовательности  $\{y_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  и  $\{z_{n_{k_l}}\}_{l=1}^\infty$ , что  $y_{n_k} \rightarrow y_0 \in K$  при  $k \rightarrow \infty$  и  $z_{n_{k_l}} \rightarrow z_0 \in K$  при  $l \rightarrow \infty$ . (Сначала выбирается подпоследовательность  $y_{n_k}$ , а затем выбирается подпоследовательность  $z_{n_{k_l}}$ .) По построению  $y_0 = z_0$ . Мы получили, что  $\omega(y_0) \geq \varepsilon$ , т. е. согласно задаче 4.1  $f(x)$  разрывна в точке  $y_0$ , что противоречит условиям.  $\square$

**4.13.** Пусть  $L = l_2$ , и  $e(n) = (e(n)_1, e(n)_2, \dots)$  — последовательность с  $e(n)_k = 0$  при  $k \neq n$  и  $e(n)_n = 1$  для каждого  $n \in \mathbb{N}$ . Определим множество

$$F = \left\{ \left( 1 + \frac{1}{n} \right) e(n) \right\}_{n=1}^{\infty} \cup \left\{ \left( 1 - \frac{1}{n} \right) e(n) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

и функцию  $f$ :  $f \left( \left( 1 + \frac{1}{n} \right) e(n) \right) = n$  и  $f \left( \left( 1 - \frac{1}{n} \right) e(n) \right) = -n$  для всех  $n$ . Заметим, что все точки множества  $F$  изолированные, поэтому  $F$  замкнуто, а любая конечная функция на  $F$  непрерывна. В то же время  $f(x)$  неограничена на  $F$  и не является равномерно непрерывной на  $F$ .  $\square$

**4.14.** Пусть  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  — последовательность элементов из  $f(A)$ . Для любого  $n$  найдём такой элемент  $x_n \in A$ , что  $f(x_n) = y_n$ , и выберем подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ , сходящуюся к некоторой точке  $x_0 \in A$  при  $k \rightarrow \infty$ . Тогда

$$f(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = y_0,$$

т. е.  $\{y_{n_k}\}$  — искомая сходящаяся подпоследовательность.  $\square$

**4.15.** Пусть  $A = \mathbb{R}$  и  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ . Тогда  $f(A) = (0, 1]$ .  $\square$

**4.16.** Пусть  $A = \bar{B}_1(0)$  и

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) x_n^2.$$

По определению  $A$  ограничено и замкнуто в  $l_2$ . Далее, для любых элементов  $x, y \in l_2$  выполнено неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^2 - y_n^2| \leq \|x - y\| \cdot \|x + y\|,$$

откуда следует, что  $f(x)$  непрерывна. Для любого  $x \in A$  имеем  $f(x) < \|\boldsymbol{x}\|^2 \leq 1$ , но если обозначить через  $e(n)$  последовательность из  $A$  с  $e(n)_k = 0$  при  $k \neq n$  и  $e(n)_n = 1$ , то  $f(e(n)) = 1 - \frac{1}{n}$ . Поэтому  $1 \in (f(A))' \setminus f(A)$ , т. е.  $f(A)$  — незамкнутое множество.  $\square$

**4.17.** Пусть задано некоторое  $\varepsilon > 0$ . Так как множество  $K$  компактно, то (см. задачу 4.12) функция  $f$  равномерно непрерывна на нём, т. е. можно выбрать  $\delta > 0$  так, что если  $x, y \in K$  и  $\rho(x, y) < \delta$ , то  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ . Возьмём точку  $a = f(z_0) \in f(K)$  и найдём такое  $x_0 \in A$ , что  $\rho(x_0, z_0) < \delta$ . Тогда  $|f(x_0) - a| < \varepsilon$ .  $\square$

**4.18.** Предположим, что  $f$  разрывна в точке  $x$ . Пусть для определённости  $x \in (a, b)$ . В силу результата задачи 2.4 существуют не

совпадающие пределы  $f(x+)$  и  $f(x-)$ . С учётом монотонности функции это означает, что  $f(t) \leq f(x-)$  при  $t \in [a, x]$  и  $f(t) > f(x+)$  при  $t \in (x, b]$ . Тогда  $f([a, b]) \cap (f(x-), f(x+)) \subseteq \{f(x)\}$ , что противоречит условию плотности образа  $f$ .

**4.19.** Пусть  $A = P_0$  — канторово множество на  $[0, 1]$ , построенное в задаче 2.22.

Построим функцию  $\varphi(x)$ , которую мы будем называть **функцией Кантора**. Мы будем использовать введённые в задаче 2.22 отрезки  $J_k^n$ .

Определим вначале вспомогательную функцию  $\bar{\varphi}(x)$  на множестве  $E$  всех граничных точек отрезков  $J_k^n$ , с  $n = 0, 1, \dots$  и  $1 \leq k \leq 2^n$ . Проведём построение по индукции. На нулевом шаге определим функцию  $\bar{\varphi}(x)$  на концевых точках  $J_1^0 = [0, 1]$ . Пусть  $\bar{\varphi}(0) = 0$  и  $\bar{\varphi}(1) = 1$ . Пусть после  $(r-1)$ -го шага, где  $r \geq 1$ , функция  $\bar{\varphi}(x)$  определена на множестве  $E_{r-1}$  граничных точек отрезков  $J_k^n$  при  $n = 0, 1, \dots, r-1$  и  $1 \leq k \leq 2^n$  и монотонна на этом множестве. Тогда на  $r$ -м шаге определим функцию  $\bar{\varphi}(x)$  на концевых точках отрезков  $J_1^r, \dots, J_{2^r}^r$ , которые не входят в  $E_{r-1}$ . Точнее, если  $J_k^{r-1} = [a, b]$ ,  $J_{2k-1}^r = [a, c]$  и  $J_{2k}^r = [d, b]$  с  $a < c < d < b$ , то положим

$$\bar{\varphi}(c) = \bar{\varphi}(d) = \frac{1}{2} (\bar{\varphi}(a) + \bar{\varphi}(b)).$$

Заметим, что функция  $\bar{\varphi}(x)$  монотонно не убывает на  $E_r$ . По индукции получим функцию  $\bar{\varphi}(x)$ , монотонную на  $E$ . По построению множество  $\bar{\varphi}(E)$  содержит все точки вида  $\frac{k}{2^n}$ , где  $n = 0, 1, \dots$  и  $1 \leq k \leq 2^n$ . Определим теперь функцию

$$\varphi(x) = \sup_{\{y \in E : y \leq x\}} \bar{\varphi}(y).$$

По определению функция  $\varphi(x)$  не убывает на  $[0, 1]$ . Так как  $\bar{\varphi}(x)$  монотонна на  $E$ , то  $\varphi(x) = \bar{\varphi}(x)$  для  $x \in E$ . Следовательно, множество значений функции  $\varphi(x)$  плотно на отрезке  $[0, 1]$ . Так как  $\varphi(x)$  монотонна, то в силу результата задачи 4.18  $\varphi(x) \in C([0, 1])$ .

Возвращаясь к нашей задаче, заметим, что  $P_0$  нигде не плотно, но  $f(P_0) = [0, 1]$ .  $\square$

**4.20.** Рассмотрим интервал  $(\alpha, \beta) \subset [f(a), f(b)]$ . Тогда существуют такие  $c, d \in [a, b]$ , что  $\alpha = f(c)$  и  $\beta = f(d)$ . Так как  $A$  нигде не плотно на  $[a, b]$ , то существует такой интервал  $(u, v) \subset (c, d)$ , что  $(u, v) \cap A = \emptyset$ . Тогда  $(f(u), f(v)) \subset (\alpha, \beta)$  и  $(f(u), f(v)) \cap f(A) = \emptyset$ .  $\square$

**4.21.** Множество  $G = \mathbb{R} \setminus F$  открыто на  $\mathbb{R}$ , поэтому (см. задачу 3.109) его можно представить в виде

$$G = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n).$$

Пусть  $I_n = (a_n, b_n)$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Положим  $h(x) = f(x)$  на  $F$ . На множестве  $G$  определим функцию  $h(x)$  следующим образом. Если  $n$  таково, что величины  $a_n$  и  $b_n$  обе конечны, то пусть  $h(x) = l(I_n, f(a_n), f(b_n), x)$  при  $x \in I_n$ . Если  $a_{n_0} = -\infty$ , то положим  $h(x) = f(b_{n_0})$  на  $I_{n_0}$ . Если  $b_{n_1} = \infty$ , то положим  $h(x) = f(a_{n_1})$  на  $I_{n_1}$ .

Функция  $h(x)$  непрерывна всюду на  $G$  как линейная на каждом интервале  $(a_n, b_n)$ . Пусть  $y \in F$ , а последовательность  $Y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  такова, что  $y_n \rightarrow y$  при  $n \rightarrow \infty$ . Предположим, что  $f(y_n) \not\rightarrow h(y)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда для некоторых  $\varepsilon > 0$  и подпоследовательности  $Z = \{z_k = y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  имеем  $|h(z_k) - h(y)| > \varepsilon$  при всех  $k$ . Следовательно, только конечное число членов последовательности  $Z$  принадлежит  $F$  или некоторому фиксированному  $I_n$ . Поэтому существуют подпоследовательность различных интервалов  $\{J_m = I_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$  и такие точки  $t_m = z_{k_m} \in J_m$ , что  $t_m \rightarrow y$  при  $m \rightarrow \infty$ , но  $|h(t_m) - h(y)| > \varepsilon$  при всех  $m$ . С другой стороны,  $a_{n_m}, b_{n_m} \rightarrow y$  при  $m \rightarrow \infty$  и  $f(a_{n_m}), f(b_{n_m}) \rightarrow f(y)$  при  $m \rightarrow \infty$ . Так как  $h(x)$  линейна на каждом  $I_n$ , то для любого  $m$  выполнено

$$\begin{aligned} |h(t_m) - h(y)| &= |h(t_m) - f(y)| \leq \max(|f(a_{n_m}) - f(y)|, |f(b_{n_m}) - f(y)|) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $m \rightarrow \infty$ . Полученное противоречие доказывает, что  $h(x)$  непрерывна на  $F$ .  $\square$

**4.22.** Докажем вначале, что существует всюду плотное счётное подмножество в  $F$ . Заметим, что для любого натурального  $k$  существует только конечные наборы точек  $\{y_j\} \in F$ , для которых  $\rho(y_i, y_m) \geq \frac{1}{k}$  при  $i \neq m$ , иначе мы придём к противоречию с определением компакта. Обозначим через  $Y_k$  некоторую максимальную систему таких точек, и пусть  $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k$ . Тогда множество  $X$  счётно и всюду плотно в  $F$ .

Для каждого  $y \in M$  определим функцию  $r(y) = \text{dist}(y, F)$ . Тогда, так как  $f(x)$  ограничена на  $F$  (см. задачу 4.10), то мы можем опреде-

лиять функцию

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in F, \\ \frac{\sum_{n:x_n \in B_{2r}(x)} 2^{-n} f(x_n)}{\sum_{n:x_n \in B_{2r}(x)} 2^{-n}} & \text{при } x \notin F. \end{cases}$$

По построению  $h(x) = f(x)$  на  $F$ . Докажем, что  $h(x)$  непрерывна на  $M$ . Пусть вначале  $y \in G = M \setminus F$ . Положим  $E(y) = \{n: x_n \in B_{2r}(y)\}$ . Если для некоторой последовательности  $y_k \rightarrow y$  при  $k \rightarrow \infty$ , то без ограничения общности можно считать, что все  $y_k$  принадлежат открытому множеству  $G$ . Если  $n_0 \in E(x)$ , то  $n_0 \in E(y_k)$  при достаточно больших  $k$ , и наоборот. При  $k \rightarrow \infty$  получаем, что

$$\sum_{n \in E(y_k)} 2^{-n} \rightarrow \sum_{n \in E(x)} 2^{-n}$$

и

$$\sum_{n \in E(y_k)} 2^{-n} f(x_n) \rightarrow \sum_{n \in E(x)} 2^{-n} f(x_n).$$

Поэтому  $h(x)$  непрерывна на  $G$ .

Пусть теперь  $y \in F$ ,  $y_k \rightarrow y$  при  $k \rightarrow \infty$ . Так как  $f(x)$  непрерывна на  $F$ , достаточно рассмотреть случай, когда  $y_k \in G$  для всех  $k$ . Получаем, что

$$\begin{aligned} |h(y) - h(y_k)| &= \left| \frac{\sum_{n \in E(y_k)} 2^{-n} f(y)}{\sum_{n \in E(y_k)} 2^{-n}} - \frac{\sum_{n \in E(y_k)} 2^{-n} f(x_n)}{\sum_{n \in E(y_k)} 2^{-n}} \right| \leqslant \\ &\leqslant \sup_{n \in E(y_k)} |f(y) - f(x_n)|, \end{aligned}$$

но для каждого  $n \in E(y_k)$  выполнено

$$\rho(x_n, y) \leqslant \rho(x_n, y_k) + \rho(y_k, y) \leqslant 3\rho(y_k, y) \rightarrow 0$$

при  $k \rightarrow \infty$ . Следовательно, в силу непрерывности  $f$  на множестве  $F$  и выписанной выше оценки  $h(y_k) \rightarrow h(y)$  при  $k \rightarrow \infty$ , и потому функция  $h(x)$  непрерывна на  $F$ .

Заметим, что предложенный метод позволяет продолжить любую непрерывную ограниченную функцию с замкнутого множества в сепарабельном банаевом пространстве на всё пространство.  $\square$

**4.23.** Пусть  $y \in F = F_1 \cup F_2$ . Предположим, что  $f(x)$  разрывна в точке  $y$ . Тогда существуют  $\varepsilon > 0$  и последовательность  $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset F$

такие, что  $y_k \rightarrow y$  при  $k \rightarrow \infty$ , но  $|f(y_k) - f(y)| > \varepsilon$  для всех  $k$ . Ясно, что это невозможно при  $y \in F_1 \cap F_2$ . Если же, например,  $y \in F_1 \setminus F_2$ , то  $y_k \in F_1$  при  $k \geq k_0$  в силу замкнутости  $F_2$ , и функция разрывна на  $F_1$  вопреки условию задачи. Поэтому  $f(x)$  непрерывна на  $F$ .  $\square$

**4.24.** Пусть  $A_1 = \mathbb{Q}_{[0;1]}$ ,  $A_2$  — множество всех иррациональных чисел из  $[0, 1]$ , а  $f(x) = D(x)$ , т. е.  $f(x) = 1$  на  $\mathbb{Q}_{[0;1]}$  и  $f(x) = 0$  на  $A_2$  (функция Дирихле).  $\square$

**4.25.** Пусть  $T_N = [-N, N]^n$  и  $F_N = F \cap T_N$  для  $N \in \mathbb{N}$ . Тогда каждое  $F_N$  — компакт в  $T_N$ . Используя задачу 4.22, построим такую функцию  $h_1(x) \in C(T_1)$ , что  $h_1(x) = f(x)$  на  $F_1$ . Заметим (см. задачу 4.23), что функция

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in F_2, \\ h_1(x) & \text{при } x \in T_1 \end{cases}$$

непрерывна на  $T_1 \cup F_2$ . Поэтому её можно продолжить до непрерывной функции  $h_2(x)$  на  $T_2$ . Функция

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in F_3, \\ h_2(x) & \text{при } x \in T_2 \end{cases}$$

непрерывна на  $T_2 \cup F_3$  и т. д. Наконец, пусть  $h(x) = h_N(x)$  на  $T_N$ . Тогда  $h(x) \in C(\mathbb{R}^n)$  и  $h(x) = f(x)$  на  $F$ .  $\square$

**4.26.** Пусть

$$G_{k,n} = \{x \in M : |f_k(x)| > n\}$$

для  $k, n \geq 1$ . Заметим, что все множества  $G_{k,n}$  открыты. Так как

$$d_F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} G_{k,n},$$

то множество  $d_F$  имеет тип  $G_\delta$ .  $\square$

**4.27.** Пусть

$$f_n(x) = n! \sin(\pi n! x)$$

при  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $f_n(x) \in C(\mathbb{R})$  для каждого  $n$ , и последовательность  $F = \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  сходится (к нулю) в каждой рациональной точке. Докажем, что она неограниченно расходится в каждой иррациональной точке.

Пусть  $x$  иррационально. Тогда для каждого  $k \geq 1$  имеем  $\pi k! x = l_k \pi + t_k$ , где  $l_k$  — целое и  $0 < |t_k| < \frac{\pi}{2}$ . Для любого заданного  $N \geq 2$  обозначим  $s(N) = \min \{s > N : |t_s| > \frac{1}{s(s+1)}\}$ . Заметим, что если для

некоторого  $s > N$  выполнено неравенство  $|t_s| \leq \frac{1}{s(s+1)}$ , то

$$|t_{s+1}| = (s+1)|t_s| \leq \frac{1}{s} < \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, невозможно, чтобы  $|t_s| < \frac{1}{s(s+1)}$  для всех  $s > N$ .

Поэтому конечное число  $s(N)$  существует для каждого  $N$ . Наконец,

$$|f_{s(N)}(x)| = s(N)! |\sin(\pi l_{s(N)} + t_{s(N)})| \geq$$

$$\geq s(N)! \cdot \frac{1}{2s(N)(s(N)+1)} \geq \frac{1}{6} (s(N)-2)! \rightarrow \infty$$

при  $N \rightarrow \infty$ .  $\square$

**4.28.** Пример тот же, что и в задаче 4.27.  $\square$

**4.29.** Пусть множество  $A$  имеет вид

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n,$$

где все  $G_n$  открыты. Без ограничения общности будем считать, что  $G_1 \supset G_2 \supset \dots$  Вначале построим для каждого  $n$  следующую последовательность функций на  $M$ . Пусть

$$f_{n,k}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin G_n, \\ k \cdot \text{dist}(x, M \setminus G_n), & \text{если } 0 < \text{dist}(x, M \setminus G_n) \leq \frac{1}{k}, \\ 1 & \text{— иначе.} \end{cases}$$

Очевидно, что функции  $f_{n,k}(x)$  непрерывны на  $M$  при всех  $n$  и  $k$ , и  $f_{n,k}(x) \rightarrow 1$  на  $G_n$  при  $k \rightarrow \infty$ . Рассмотрим функции  $\{f_r(x)\}$ , где

$$f_r(x) = \sum_{n=1}^r f_{n,r}(x)$$

для  $r \in \mathbb{N}$ . Тогда каждая функция  $f_r(x)$  непрерывна на  $M$ . Заметим, что если  $x \notin A$ , то существует такое  $N$ , что  $x \notin G_n$  при  $n > N$ . При этом  $|f_r(x)| \leq N$  для любого  $r$ , поэтому  $x \notin d_F$ .

Если  $x \in A$ , то  $x \in G_n$  для любого  $n$ . Зафиксируем некоторое натуральное  $M$ . Так как  $f_{n,r}(x) \rightarrow 1$  при  $r \rightarrow \infty$  для каждого  $n$ , то существует такое  $R$ , что для любого  $r > \max(R, M)$  выполнены неравенства  $f_{1,r}(x) > \frac{1}{2}, \dots, f_{M,r}(x) > \frac{1}{2}$ . Отсюда следует, что при таких  $r$  выполнены неравенства

$$f_r(x) \geq \sum_{n=1}^M f_{n,r}(x) > \frac{M}{2},$$

поэтому  $x \in d_F$ .  $\square$

**4.30.** Пусть  $E_{k,l,n} = \{x \in M : |f_k(x) - f_l(x)| \leq \frac{1}{n}\}$  при  $k, l, n \geq 1$ . Заметим, что все множества  $E_{k,l,n}$  замкнуты. Далее, в силу критерия Коши

$$C_F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k,l \geq m} E_{k,l,n},$$

откуда следует, что  $C_F$  — множество типа  $F_{\sigma\delta}$ .  $\square$

**4.31.** Пусть  $\mathbb{Q} = \{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ . Сначала для каждого  $k$  построим последовательность функций  $\{f_{k,n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ . Пусть  $I(k, n, 1) = (r_k - \frac{1}{n}, r_k)$ ,  $I(k, n, 2) = (r_k, r_k + \frac{1}{n})$  при  $n \geq 1$ . Определим функции

$$f_{k,2n-1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \notin (r_k - \frac{1}{n}, r_k + \frac{1}{n}), \\ 1 & \text{при } x = r_k, \\ l(I(k, n, 1), 0, 1, x) & \text{при } x \in l(k, n, 1), \\ l(I(k, n, 2), 1, 0, x) & \text{при } x \in l(k, n, 2) \end{cases}$$

и функции  $f_{k,2n}(x) = -f_{k,2n-1}(x)$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Затем определим функции

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k} f_{k,n}(x)$$

для  $n \in \mathbb{N}$ . Нетрудно видеть, что  $f_n(x) \in C(\mathbb{R})$ , и они ограничены в совокупности, т. е.  $d_F = \emptyset$ .

Докажем, что последовательность  $F = \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  сходится в каждой иррациональной точке. Для заданного  $\varepsilon > 0$  найдём такое  $K$ , что

$$\left| \sum_{k=K+1}^{\infty} 10^{-k} f_{k,n}(x) \right| \leq 10^{-K} < \varepsilon.$$

Так как  $f_{k,n}(x) = 0$  для каждого фиксированного  $k$  при  $n > n_0(k)$ , то можно найти такое  $N$ , что при  $n > N$  выполнено равенство

$$\sum_{k=1}^K 10^{-k} f_{k,n}(x) = 0.$$

Поэтому  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ .

Пусть теперь  $x = r_{k_0}$ . Заметим, что

$$\left| \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 10^{-k} f_{k,n}(x) \right| \leq \frac{1}{4} 10^{-k_0}.$$

В то же время для достаточно больших  $N$  для любого  $n > N$  выполнено равенство

$$\sum_{k=1}^{k_0-1} 10^{-k} f_{k,n}(x) = 0.$$

Поэтому при  $n > N$  получаем, что

$$|f_{2n}(x) - f_{2n-1}(x)| \geq 10^{-k_0} |f_{k_0,2n}(x) - f_{k_0,2n-1}(x)| - \frac{1}{2} 10^{-k_0} > 10^{-k_0}.$$

Таким образом,  $x \in D_F$ .  $\square$

**4.32.** Пусть вначале множество  $E_y$  открыто для любого  $y \in \mathbb{R}$ ,  $a \in E$  и задано  $\varepsilon > 0$ . Тогда множество  $E^0 = E_{f(a)+\varepsilon}$  открыто, и  $a \in E^0$ . Поэтому для некоторого  $r > 0$  шар  $B_r(a)$  вложен в  $E^0$ , т. е.  $f(x)$  полунепрерывна сверху в точке  $a$ . Обратно, пусть  $f(x)$  полунепрерывна сверху и задано  $y \in \mathbb{R}$ . Если  $t \in E_y$ , то для некоторого  $r = r(t) > 0$  шар  $B_r(t)$  вложен в  $E_y$ . Поэтому множество

$$E_y = \bigcup_{t \in E_y} B_{r(t)}(t)$$

открыто.  $\square$

**4.33.** Без ограничения общности предположим, что  $f(x) \leq 0$ . Для каждого  $t > 0$  определим функцию

$$g_t(x) = \sup_{z \in M} (f(z) - t\rho(x, z)).$$

Ясно, что  $0 \geq g_t(x) \geq f(x) - t\rho(x, x) = f(x)$ . Для любого  $x, y, z \in M$  в силу неравенства треугольника

$$f(z) - t\rho(x, z) \geq f(z) - t\rho(x, y) - t\rho(y, z),$$

откуда  $g_t(x) \geq g_t(y) - t\rho(x, y)$ . Меняя ролями  $x$  и  $y$ , получаем, что  $|g_t(x) - g_t(y)| \leq |t|\rho(x, y)$  для любых  $x, y \in M$ , откуда следует, что функции  $g_t(x)$  непрерывны на  $M$ . Пусть теперь  $t = n \in \mathbb{N}$ . Рассмотрим  $\{g_n(x)\}_{n=1}^\infty$  — невозрастающую последовательность непрерывных на  $M$  функций. Тогда  $f(x) \leq g_n(x) \leq 0$  для любого натурального  $n$  и для любого  $x \in M$ . Поэтому функция  $h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$  определена для каждого  $x \in M$  и  $0 \geq h(x) \geq f(x)$ . Далее, для любых натурального  $n$ ,  $x \in M$  и  $\varepsilon > 0$  найдётся такое  $z_n \in M$ , что

$$g_n(x) < f(z_n) - n\rho(x, z_n) + \varepsilon.$$

Так как  $g_n(x) \geq f(x)$  и  $f(z) \leq 0$  для любого  $z \in M$ , то  $f(x) < -n\rho(x, z_n) + \varepsilon$ . Отсюда следует, что  $\rho(x, z_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  для

каждого фиксированного  $x \in M$ . Поскольку  $f(t)$  полуунепрерывна сверху в точке  $x$ , то  $f(z_n) < f(x) + \varepsilon$  для достаточно больших  $n$ . Поэтому

$$g_n(x) < f(x) + \varepsilon - n\rho(x, z_n) + \varepsilon < f(x) + 2\varepsilon,$$

откуда вытекает, что  $h(x) \leq f(x)$ . Следовательно,  $h(x) = f(x)$ .  $\square$

**4.34.** Пусть множество  $A$  представлено в виде

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i,$$

где  $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots$  и все  $F_i$  замкнуты. Пусть  $h(x) = 1$  при  $x \in F_1$ ,  $h(x) = \frac{1}{i}$  при  $x \in F_i \setminus F_{i-1}$ , где  $i = 2, 3, \dots$ , и  $h(x) = 0$  при  $x \in B$ .

Тогда для любого  $y \in \mathbb{R}$  множество  $E_y$  (см. задачу 4.32) открыто. Следовательно (см. задачу 4.32),  $h(x)$  полуунепрерывна сверху. Применяя задачу 4.33, получаем, что существует невозрастающая последовательность непрерывных на  $M$  функций  $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ , сходящаяся к  $h(x)$  для любого  $x \in M$ . Заметим, что  $\psi'_n(x) = \min(\psi_n(x), 1)$  и  $\psi''_n(x) = \max(\psi'_n(x), \frac{1}{n})$  при  $n \in \mathbb{N}$  — также непрерывные на  $M$  функции, и невозрастающие последовательности  $\{\psi'_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  и  $\{\psi''_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  сходятся к  $h(x)$ . Поэтому можно считать, что  $\frac{1}{n} \leq \psi_n(x) \leq 1$  для всех

натуральных  $n$  и всех  $x \in M$ . Пусть теперь  $\varphi_n(x) = \frac{1}{\psi_n(x)}$  для  $n \in \mathbb{N}$ .

Тогда  $\varphi_n(x) \rightarrow \frac{1}{h(x)}$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ ,  $\varphi_n(x) \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $B$ ,  $1 \leq \varphi_n(x) \leq n$  и, следовательно,  $0 \leq \varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x) \leq n$  для любого натурального  $n$  и для любого  $x \in M$ . Определим теперь функцию

$$\varphi_{n+\frac{p}{2n}}(x) = \varphi_n(x) + \frac{p}{2n} (\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x))$$

для  $p = 1, 2, \dots, 2n - 1$  и занумеруем двойную последовательность  $\{\varphi_{n+\frac{p}{2n}}(x)\}_{n=1, p=1}^{\infty, 2n-1}$  в естественном порядке. Обозначим полученную последовательность через  $\{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ . Тогда  $1 \equiv g_1(x) \leq g_2(x) \leq \dots$ ,  $g_{k+1}(x) - g_k(x) \leq \frac{1}{2}$  для любого натурального  $k$  и для любого  $x \in M$ , последовательность  $\{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  сходится к некоторому натуральному числу в каждой точке  $x \in A$  и расходится к  $\infty$  в каждой точке  $x \in B$ .

Наконец, пусть  $f_k(x) = \sin(\pi g_k(x))$  при  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда  $f_k(x) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  для каждого  $x \in A$ . Если  $x \in B$ , то для любого натурального  $l$  существует такое  $k = k(l)$ , что  $g_k(x) \in [l + \frac{1}{4}, l + \frac{3}{4}]$ . Отсюда следует, что бесконечно много членов последовательности  $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  больше

чем  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  и бесконечно много членов последовательности  $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  меньше чем  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Поэтому последовательность расходится на  $B$ .  $\square$

**4.35.** Пусть множество  $A$  представлено в виде

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} S_i,$$

где все  $S_i$  — множества типа  $F_{\sigma}$ , и  $T_i = M \setminus S_i$ . Тогда (см. решение задачи 4.34) определим для каждого натурального  $i$  такую последовательность непрерывных функций  $\{f_{i,n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ , что  $|f_{i,n}| \leq \frac{1}{i}$  на  $M$  для всех  $n$ ,  $f_{i,n}(x) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  для  $x \in S_i$ , и  $\{f_{i,n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$  расходится на  $T_i$ . Занумеруем двойную последовательность  $\{f_{i,n}(x)\}_{i,n=1}^{\infty}$  в некотором порядке и обозначим полученную последовательность через  $\{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ . Заметим, что если  $x \in A$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  только при конечном числе значений  $k$  выполнено условие  $|g_k(x)| > \varepsilon$ , поэтому последовательность сходится к 0 в точке  $x$ . С другой стороны, если  $x_0 \in B$ , то  $x \in T_{i_0}$  для некоторого  $i_0$ . Поэтому последовательность  $\{f_{i_0,n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$  расходится в точке  $x_0$ , т. е.  $\{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  тоже расходится в точке  $x_0$ .  $\square$

**4.36.** Докажем, что никакая последовательность  $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  непрерывных на  $[0, 1]$  функций не может сходиться всюду на  $[0, 1]$  к функции Дирихле  $D(x)$  (см. решение задачи 4.24). Заметим, что если такая сходимость имеет место, то

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_{[0;1]} &= \left\{ x \in [0, 1] : D(x) > \frac{1}{2} \right\} \subseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ x \in [0, 1] : g_n(x) > \frac{1}{2} \right\} \subseteq \\ &\subseteq \left\{ x \in [0, 1] : D(x) \geq \frac{1}{2} \right\} = \mathbb{Q}_{[0;1]}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\mathbb{Q}_{[0;1]} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \left\{ x \in [0, 1] : g_n(x) > \frac{1}{2} \right\},$$

и так как  $g_n(x) \in C([0, 1])$ , то множества  $\left\{ x \in [0, 1] : g_n(x) > \frac{1}{2} \right\}$  — открыты, а тогда  $\mathbb{Q}_{[0;1]}$  имеет тип  $G_{\delta}$ . Это противоречит результату задачи 3.48.  $\square$

## Г л а в а 5

# СИСТЕМЫ МНОЖЕСТВ

Система множеств  $S$  называется *полукольцом*, если выполнены следующие условия:

- 1)  $\emptyset \in S$ ;
- 2) если  $A$  и  $B$  из  $S$ , то  $A \cap B \in S$ ;
- 3) если  $A$  и  $A_1$  из  $S$  и  $A_1 \subset A$ , то существует такой конечный набор множеств  $A_2, \dots, A_n$  из  $S$ , что  $A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n = A$ .

Множество  $X$  называется *единицей системы множеств*  $S$ , если  $X \in S$  и для любого множества  $A \in S$  выполнено условие  $A \subseteq X$ . Если в полукольце имеется единица, то оно называется *полукольцом с единицей*.

Непустая система множеств  $R$  называется *кольцом*, если для любых  $A, B \in R$  выполнены условия  $A \Delta B \in R$  и  $A \cap B \in R$ . Кольцо с единицей называется *алгеброй*.

Система множеств  $R$  называется  *$\sigma$ -кольцом* ( $\delta$ -кольцом), если  $R$  — кольцо и для любых множеств  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$  из  $R$  выполнено условие  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in R$  (соответственно,  $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in R$ );  $\sigma$ -кольцо с единицей называется  *$\sigma$ -алгеброй*, а  $\delta$ -кольцо с единицей называется  *$\delta$ -алгеброй*.

Запись  $[a, b]$  будет означать, что мы рассматриваем один из четырёх промежутков:  $[a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$  или  $(a, b)$ .

## ЗАДАЧИ

**5.1.** Доказать, что система всех подмножеств произвольного фиксированного множества является  $\sigma$ -алгеброй.

**5.2.** Доказать, что система  $B$  всех конечных подмножеств заданного множества  $A$  является кольцом.

**5.3.** Найти в задаче 5.2 условие на множество  $A$ , необходимое и достаточное для того, чтобы кольцо  $B$  являлось алгеброй.

**5.4.** Пусть  $A$  — бесконечное множество, а  $B$  — система всех не более чем счётных подмножеств  $A$ . Доказать, что  $B$  является  $\sigma$ -кольцом.

**5.5.** Найти в задаче 5.4 условие на  $A$ , необходимое и достаточное для того, чтобы  $B$  являлось  $\sigma$ -алгеброй.

**5.6.** Пусть  $A$  — множество,  $B$  — система всех таких множеств  $C \subseteq A$ , что либо  $C$ , либо  $A \setminus C$  не более чем счётно. Доказать, что  $B$  является  $\sigma$ -алгеброй.

**5.7.** Пусть  $A$  — множество,  $B$  — система всех таких множеств  $C \subseteq A$ , что либо  $C$ , либо  $A \setminus C$  конечно. Доказать, что  $B$  является алгеброй.

**5.8.** Пусть  $a$  и  $b$  фиксированы. Доказать, что система всех полуинтервалов  $\{[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]\}$ , включая пустой полуинтервал  $[a; a)$ , является полукольцом с единицей  $X = [a, b]$ .

**5.9.** Доказать, что система всех интервалов, отрезков и полуинтервалов  $\{[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]\}$  образует полукольцо с единицей  $[a, b]$ .

**5.10.** Доказать, что системы в  $\mathbb{R}^n$ , аналогичные определённым в задачах 5.8 и 5.9, где

$$[\alpha, \beta] = [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2] \times \dots \times [\alpha_n, \beta_n],$$

также являются полукольцами с соответствующими единицами.

**5.11.** Доказать, что система всех интервалов (включая пустой) и система всех отрезков (с добавлением пустого множества) в  $\mathbb{R}$  не являются полукольцами.

**5.12.** Доказать, что система всех открытых множеств в  $\mathbb{R}$  не является полукольцом.

**5.13.** Пусть  $R$  — полукольцо (кольцо),  $A \in R$ . Доказать, что система  $R_1 = \{A \cap B : B \in R\}$  — полукольцо (алгебра) с единицей  $A$  (этую систему мы будем обозначать через  $R \cap A$ ).

**5.14.** Доказать, что если  $R$  — кольцо, множества  $A$  и  $B$  из  $R$ , то  $A \cup B \in R$  и  $A \setminus B \in R$ .

**5.15.** Доказать, что если  $R$  — кольцо, то оно является полукольцом.

**5.16.** Построить систему множеств, которая замкнута относительно операций  $\cap$  и  $\cup$ , но не является даже полукольцом.

**5.17.** Пусть  $S$  — полукольцо и для любых  $A$  и  $B$  из  $S$  выполнено условие  $A \cup B \in S$ . Доказать, что  $S$  — кольцо.

**5.18.** Пусть  $S$  — полукольцо, множества  $A, A_1, A_2, \dots, A_n$  из  $S$ ; множества  $A_1, A_2, \dots, A_n$  вложены в  $A$  и  $A_1, A_2, \dots, A_n$  попарно не пересекаются. Доказать, что существуют множества  $A_{n+1}, \dots, A_m$  из  $S$ , для которых  $A = \bigsqcup_{i=1}^m A_i$ .

**5.19.** Пусть  $S$  — полукольцо и  $A_1, A_2, \dots, A_n$  — множества из  $S$ . Доказать, что существуют такие попарно непересекающиеся множества  $B_1, B_2, \dots, B_k$  из  $S$ , что каждое  $A_i$  является объединением некоторых из  $B_j$ .

**5.20.** Пусть  $R$  — кольцо. Доказать, что если мы возьмём  $\Delta$  за сложение и  $\cap$  за умножение, то  $R$  будет коммутативным кольцом в алгебраическом смысле с  $0 \equiv \emptyset$ .

**5.21.** Пусть  $S$  — полукольцо. Доказать, что система  $R = \left\{ \bigcup_{i=1}^n A_i : A_i \in S, i = 1, 2, \dots, n \right\}$  является кольцом.

**5.22.** Пусть  $S$  — полукольцо. Доказать, что система  $R_1 = \left\{ \bigcup_{i=1}^n A_i : A_i \in S, i = 1, 2, \dots, n \right\}$  совпадает с кольцом  $R$ , определённым в задаче 5.21.

**5.23.** Доказать, что пересечение произвольной непустой системы колец является кольцом (возможно, кольцом  $\{\emptyset\}$ )

**5.24.** Доказать, что пересечение произвольной непустой системы  $\sigma$ -кольец является  $\sigma$ -кольцом.

**5.25.** Доказать, что пересечение произвольной системы алгебр с одной и той же единицей является алгеброй.

**5.26.** Привести пример двух  $\sigma$ -алгебр, пересечение которых не является алгеброй.

**5.27.** Пусть  $X$  — система множеств. Доказать, что существует такое кольцо  $R(X)$ , что  $X \subseteq R(X)$  и для любого кольца  $R_1 \supseteq X$  выполнено  $R(X) \subseteq R_1$ . Это кольцо называется *минимальным кольцом, содержащим систему  $X$* .

**5.28.** Доказать, что если система  $X$  содержит единицу  $E$ , то (см. задачу 5.27)  $R(X)$  является алгеброй.

**5.29.** Пусть  $X$  — система множеств. Доказать, что существует такое  $\sigma$ -кольцо  $L(X)$ , что  $X \subseteq L(X)$  и для любого  $\sigma$ -кольца  $L_1 \supseteq X$  выполнено  $L(X) \subseteq L_1$ . Это  $\sigma$ -кольцо называется *минимальным  $\sigma$ -кольцом, содержащим систему множеств  $X$* .

**5.30.** Доказать, что если система множеств  $X$  обладает единицей, то (см. задачу 5.29)  $L(X)$  является  $\sigma$ -алгеброй.

**5.31.** Пусть  $S$  — полукольцо. Доказать, что  $R(S)$  — минимальное кольцо, содержащее  $S$ , совпадает с кольцом, описанным в задачах 5.21 и 5.22.

**5.32.** Доказать, что любое  $\sigma$ -кольцо  $R$  является  $\delta$ -кольцом.

**5.33.** Доказать, что если  $R$  —  $\delta$ -алгебра, то  $R$  — и  $\sigma$ -алгебра.

**5.34.** Построить пример  $\delta$ -кольца, которое не является  $\sigma$ -кольцом.

**5.35.** Определим *борелевскую алгебру*  $\mathcal{B}^n$  в  $\mathbb{R}^n$  как минимальную  $\sigma$ -алгебру, содержащую все открытые множества в  $\mathbb{R}^n$ . Доказать, что  $\mathcal{B}^n$  совпадает с минимальной  $\sigma$ -алгеброй, содержащей все замкнутые множества в  $\mathbb{R}^n$ .

**Замечание.** Можно доказать (см., например, [5], гл. 1), что  $\overline{\mathcal{B}^n} = \mathbb{C}$  для любого  $n$ . Так как система всех подмножеств  $\mathbb{R}^n$  имеет мощность  $2^\mathbb{C}$ , то существует неборелевское множество в  $\mathbb{R}^n$ . Такое множество будет построено в явном виде в задаче 8.38.

**5.36.** Пусть  $R$  —  $\sigma$ -алгебра,  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  — множества из  $R$ ,  $L_1 = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ , и  $L_2 = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$  (см. определения в гл. 1). Доказать, что  $L_1 \supseteq L_2$ .

**5.37.** Построить пример такой последовательности множеств, что (см. задачу 5.36)  $L_1 \neq L_2$ .

**5.38.** Пусть  $R$  —  $\sigma$ -алгебра,  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in R$  и  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$  Доказать, что (см. задачу 5.36)  $L_1 = L_2$ . Доказать это равенство в случае  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$

**5.39.** Привести пример такой последовательности множеств  $\{A_k\}$ , что (см. задачу 5.36)  $L_1 = L_2$ , но ни для каких  $k \neq j$  не выполнено вложение  $A_k \subseteq A_j$ .

**5.40.** Для любого натурального  $n$  построить полукольцо, содержащее ровно  $n$  различных множеств.

**5.41.** Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_n$  — конечная система непустых множеств. Найти минимально и максимально возможное количество множеств в минимальном кольце, содержащем эту систему (см. задачу 5.27).

**5.42.** Доказать, что не существует кольца, содержащего ровно 3 различных множества (включая пустое).

**5.43.** Пусть  $S_1$  и  $S_2$  — полукольца, а  $S = S_1 \times S_2 = \{A \times B : A \in S_1, B \in S_2\}$ . Доказать, что  $S$  — полукольцо.

**5.44.** Построить пример  $\sigma$ -алгебр  $R_1$  и  $R_2$  таких, что  $R = R_1 \times R_2$  (см. задачу 5.43) не является кольцом.

**5.45.** Доказать, что произведение  $R = R_1 \times R_2$   $\sigma$ -алгебр  $R_1$  и  $R_2$  с единицами  $X_1$  и  $X_2$  (см. задачу 5.43) является кольцом тогда и только тогда, когда хотя бы одна из этих  $\sigma$ -алгебр содержит не более двух множеств.

**5.46.** Пусть даны множества  $X$  и  $Y$ , функция  $f : X \rightarrow Y$ , а  $T$  — система множеств в  $Y$ . Положим  $f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}$  для  $A \subseteq Y$  и  $f^{-1}(T) = \{f^{-1}(A) : A \in T\}$ . Доказать, что если  $T$  — полукольцо, то  $f^{-1}(T)$  — полукольцо.

**5.47.** В условиях задачи 5.46 доказать, что если  $T$  — кольцо, то  $f^{-1}(T)$  — тоже кольцо.

**5.48.** В условиях задачи 5.46 доказать, что если  $T$  —  $\sigma$ -алгебра, то  $f^{-1}(T)$  — тоже  $\sigma$ -алгебра.

**5.49.** Построить множества  $X, Y$ , функцию  $f : X \rightarrow Y$  и кольцо  $R$  подмножеств  $X$  такие, что  $f(R) = \{f(A) : A \in R\}$  не является полу-кольцом.

### РЕШЕНИЯ

**5.1, 5.2.** Утверждения проверяются непосредственно.  $\square$

**5.3.** Докажем, что система  $B$  является алгеброй тогда и только тогда, когда множество  $A$  конечно. Если  $A$  конечно, то  $B$  совпадает с алгеброй всех подмножеств  $A$  с единицей  $A$ . Пусть теперь  $B$  — алгебра с единицей  $E$ . По определению  $E$  конечно. Если  $A$  бесконечно, то существует точка  $a \in A \setminus E$ . Тогда множество  $E_1 = E \cup \{a\}$  конечно и вложено в  $A$ , поэтому  $E_1 \in B$ . Но  $E_1$  не вложено в  $E$ , и мы пришли к противоречию. Поэтому  $A$  конечно.  $\square$

**5.4.** Результат вытекает из утверждения задачи 2.1 (о том, что не более чем счётное объединение не более чем счётных множеств не более чем счётно).  $\square$

**5.5.** Система  $B$  является алгеброй тогда и только тогда, когда множество  $A$  счётно. Доказательство аналогично решению задачи 5.3.

**5.6.** В случае не более чем счётного множества  $A$  утверждение вытекает из решения задач 5.4 и 5.5. Пусть  $A$  несчётно. Заметим, что  $A$  является единицей в  $B$ . Пусть  $B_1 = \{C \in B : C \text{ не более чем счётно}\}$  и  $B_2 = \{C \in B : A \setminus C \text{ не более чем счётно}\}$ . Если  $C_1, C_2 \in B_1$ , то  $C_1 \cap C_2 \in B_1$  и  $C_1 \Delta C_2 \in B_1$ . Аналогично, если  $C_1, C_2 \in B_2$ , то  $C_1 \cap C_2 \in B_2$  и  $C_1 \Delta C_2 \in B_1$ .

Наконец, если  $C_1 \in B_1$  и  $C_2 \in B_2$ , то  $C_1 \cap C_2 \subseteq C_1$ , поэтому  $C_1 \cap C_2$  не более чем счётно. К тому же

$$C_1 \Delta C_2 \supseteq C_2 \setminus C_1 \in B_2,$$

поэтому  $C_1 \Delta C_2 \in B_2$ . Пусть теперь  $C_i \in B$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Если  $C_{i_0} \in B_2$  для некоторого  $i_0$ , то

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \in B_2 \subset B.$$

Если  $C_i \in B_1$  для всех  $i$ , то в силу результата задачи 2.1

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \in B_1 \subset B.$$

$\square$

**5.7.** Доказательство аналогично решению задачи 5.6.

**5.8, 5.9, 5.10.** Определение полукольца непосредственно проверяется.  $\square$

**5.11.** Например,  $(0, 1) \setminus \left(0, \frac{1}{2}\right) = \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ , и поскольку это неоткрытое множество, то оно не может быть представлено как конеч-

ное объединение интервалов (тем более попарно непересекающихся). Во втором случае,  $[0, 1] \setminus \left[0, \frac{1}{2}\right] = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ , и так как это незамкнутое множество, то оно не может быть представлено как конечное объединение отрезков.  $\square$

**5.12.** См. решение задачи 5.11.  $\square$

**5.13.** Утверждение проверяется непосредственно.  $\square$

**5.14.** Если  $A, B \in R$ , то  $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B) \in R$  и  $A \setminus B = (A \Delta B) \cap A \in R$ .  $\square$

**5.15.** Имеем:  $\emptyset = A \Delta A \in R$ . По определению кольца второе условие в определении полуокольца выполнено. Далее, если  $A, A_1 \in R$  и  $A_1 \subset A$ , то  $A = A_1 \sqcup A_2$ , где  $A_2 = A \setminus A_1 \in R$  согласно задаче 5.14.  $\square$

**5.16.** Например, система всех открытых подмножеств интервала  $(0, 1)$  (см. задачу 5.11).  $\square$

**5.17.** Достаточно проверить, что для любых  $A, B \in S$  выполнено  $A \Delta B \in S$ . Но  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ . Далее, так как  $A \cap B \in S$  и  $A \cap B \subset A$ , то

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = \bigsqcup_{i=2}^n A_i,$$

где все  $A_i$  из  $S$ . Из предположений по индукции следует, что  $A \setminus B \in S$ . Аналогично  $B \setminus A \in S$ , откуда  $A \Delta B \in S$ .  $\square$

**5.18.** Проведём доказательство по индукции. При  $n = 1$  утверждение входит в определение полуокольца. Пусть  $n > 1$  и утверждение справедливо для  $n - 1$  множеств. Тогда

$$A = \left( \bigsqcup_{i=1}^{n-1} A_i \right) \sqcup \left( \bigsqcup_{j=1}^s B_j \right).$$

Положим  $D_j = A_n \cap B_j \in S$  при  $j = 1, \dots, s$ . По определению полуокольца для любого  $j = 1, \dots, s$  можно найти такие множества  $\{C_{j,l}\}_{l=1}^{l_j}$  из  $S$ , что

$$B_j = D_j \sqcup \left( \bigsqcup_{l=1}^{l_j} C_{j,l} \right).$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} A &= \left( \bigsqcup_{i=1}^{n-1} A_i \right) \sqcup \left( \bigsqcup_{j=1}^s \left( D_j \sqcup \left( \bigsqcup_{l=1}^{l_j} C_{j,l} \right) \right) \right) = \\ &= \left( \bigsqcup_{i=1}^{n-1} A_i \right) \sqcup \left( \bigsqcup_{j=1}^s D_j \right) \sqcup \left( \bigsqcup_{j=1}^s \bigsqcup_{l=1}^{l_j} C_{j,l} \right). \end{aligned}$$

Для завершения доказательства заметим, что так как

$$A_n \cap \left( \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right) = \emptyset$$

и  $A_n \subset A$ , то  $A_n \subseteq \bigcup_{j=1}^s B_j$ , откуда следует, что  $A_n = \bigcup_{j=1}^s D_j$ .  $\square$

**5.19.** Проведём доказательство по индукции. При  $n = 1$  утверждение тривиально. Предположим, что оно выполнено для любого набора из  $n - 1$  множества, где  $n > 1$ , и  $B_1, \dots, B_q$  — система множеств, которая удовлетворяет условиям задачи для  $A_1, \dots, A_{n-1}$ . Обозначим  $C_s = B_s \cap A_n$  при  $s = 1, 2, \dots, q$ . В силу результата задачи 5.18 существует представление

$$A_n = \left( \bigcup_{s=1}^q C_s \right) \sqcup \left( \bigcup_{p=1}^m D_p \right),$$

где  $D_p \in S$  для каждого  $p$ . По определению полукольца получаем, что

$$B_s = C_s \sqcup \left( \bigcup_{r=1}^{r_s} B_{s,r} \right)$$

при  $s = 1, \dots, q$ , где  $B_{s,r} \in S$  для всех  $r, s$ . Тогда множества

$$\{C_s\}_{s=1}^q, \quad \{B_{s,r}\}_{s=1, r=1}^{q, r_s}, \quad \{D_p\}_{p=1}^m$$

попарно не пересекаются, лежат в полукольце и при  $1 \leq i \leq n$  мы можем представить каждое множество  $A_i$  как объединение некоторых элементов этой системы.  $\square$

**5.20.** Заметим, что  $A \cap B = B \cap A$  и  $A \Delta B = B \Delta A$  для любых  $A$  и  $B$  из  $R$ . Далее,  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ,  $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$  и  $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$  для любых  $A, B, C \in R$  (см. задачи 1.14, 1.16). Наконец, для любого  $A$  выполнено  $A \Delta A = \emptyset$ , т. е.  $A^{-1} = A$ .  $\square$

**5.21.** Докажем вначале, что  $R$  — полукольцо. По построению  $\emptyset \in R$ . Пусть  $A$  и  $B$  из  $R$ . Тогда  $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$  и  $B = \bigcup_{j=1}^k B_j$ , где  $A_i, B_j \in S$ . Положим  $C_{i,j} = A_i \cap B_j$  для  $i = 1, \dots, n$  и  $j = i, \dots, k$ . Тогда  $C_{i,j} \in S$  и

$$A \cap B = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^k C_{i,j} \in R.$$

Пусть теперь  $B \subset A$ . В силу результата задачи 5.19 существуют такие попарно не пересекающиеся множества  $D_1, \dots, D_s \in S$ , что для любого  $i \in [1, n]$  и для любого  $j \in [1, m]$  выполнены условия

$$A_i = \bigsqcup_{l \in T_i} D_l \quad \text{и} \quad B_j = \bigsqcup_{l \in Q_j} D_l,$$

где  $T_i, Q_j \subseteq \{1, 2, \dots, s\}$  для всех  $i, j$ . Так как  $B \subset A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ , то можно считать, что

$$A = \bigsqcup_{l=1}^s D_l \quad \text{и} \quad B = \bigsqcup_{l \in F} D_l,$$

где  $F \subseteq \{1, 2, \dots, s\}$ . Поэтому

$$A = B \sqcup \left( \bigsqcup_{l \notin F} D_l \right)$$

и, следовательно,  $R$  является полукольцом. Но если  $A, B \in R$ , то  $A \cup B \in R$ , откуда в силу результата задачи 5.17 следует, что  $R$  — кольцо.  $\square$

**5.22.** По построению  $R_1 \subseteq R$ . Пусть  $A \in R$ , т. е. существует представление  $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ , где  $A_i \in S$ . Согласно задаче 5.19 существуют такие  $D_1, D_2, \dots, D_r \in S$ , что для каждого  $i$  выполнено равенство  $A_i = \bigsqcup_{l \in T_i} D_l$ , где  $T_i \subseteq \{1, 2, \dots, r\}$ . Тогда  $A = \bigsqcup_{l=1}^r D_l \in R_1$ .  $\square$

**5.23.** Пусть  $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$  — система колец, и

$$R = \bigcap_{\alpha \in \Omega} R_\alpha.$$

Тогда для каждого  $\alpha \in \Omega$  выполнено  $\emptyset \in R_\alpha$ , т. е.  $\emptyset \in R$ , следовательно, система  $R$  не пуста. Пусть  $A, B \in R$ . Тогда  $A, B \in R_\alpha$  для каждого  $\alpha \in \Omega$ . Так как  $R_\alpha$  — кольца, то  $A \Delta B \in R_\alpha$  и  $A \cap B \in R_\alpha$ . Поскольку это верно для каждого  $\alpha \in \Omega$ , то  $A \Delta B \in R$  и  $A \cap B \in R$ .  $\square$

**5.24.** Пусть  $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$  — система  $\sigma$ -колец и  $R = \bigcap_{\alpha \in \Omega} R_\alpha$ . Как показано в задаче 5.23,  $R$  — кольцо. Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in R$ . Тогда все  $A_n \in R_\alpha$  для каждого  $\alpha \in \Omega$ . Поскольку  $R_\alpha$  являются  $\sigma$ -алгебрами, то

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in R_\alpha.$$

Поскольку это верно для каждого  $\alpha \in \Omega$ , то

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in R,$$

т. е.  $R$  является  $\sigma$ -кольцом.  $\square$

**5.25.** Утверждение очевидно, поскольку если  $E$  — единица каждого  $R_\alpha$ , то  $E$  — единица  $R$ .  $\square$

**5.26.** Пусть  $S_1$  —  $\sigma$ -алгебра всех множеств  $A \subseteq [0, 2]$ , для которых либо  $A$ , либо  $[0, 2] \setminus A$  не более чем счётно (см. задачу 5.6), а  $S_2$  — аналогичная  $\sigma$ -алгебра для отрезка  $[1, 3]$ . Тогда  $S_1 \cap S_2$  —  $\sigma$ -кольцо всех не более чем счётных подмножеств отрезка  $[1, 2]$ , которое не является алгеброй (доказательство аналогично решениям задач 5.3 и 5.5).

**5.27.** Пусть  $X = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ . Введём обозначение  $B = \bigcup_{\alpha \in \Omega} A_\alpha$ , и пусть  $M(X)$  — множество всех подмножеств  $B$ . Тогда  $M(X)$  — кольцо и  $X \subseteq M(X)$ . Пусть  $P = \{P_\beta\}_{\beta \in \Gamma}$  — система всех колец, которые содержатся в  $M(X)$  и содержат  $X$ . Положим  $R(X) = \bigcap_{\beta \in \Gamma} P_\beta$ . В силу результата задачи 5.23  $R(X)$  — кольцо. Ясно, что  $X \subseteq R(X)$ . Если  $R_1$  — кольцо, содержащее  $X$ , то согласно задаче 5.23,  $R_2 = R_1 \cap M(X)$  — также кольцо. Но  $R_2 \in P$ , и поэтому  $R(X) \subseteq R_2 \subseteq R_1$ .  $\square$

**5.28.** В этом случае (см. задачу 5.27)  $B = E$ , поэтому для любого  $\beta \in \Gamma$  кольцо  $P_\beta$  имеет единицу  $E$ . Тогда (см. задачу 5.25)  $E$  является и единицей  $R(X)$ .  $\square$

**5.29.** Доказательство повторяет решение задачи 5.27 с использованием задачи 5.23 вместо 5.24.  $\square$

**5.30.** Доказательство такое же, как в решении задачи 5.28.  $\square$

**5.31.** В задаче 5.22 доказано, что  $R_1$  — кольцо. Но любое кольцо  $R$ , содержащее  $S$ , должно содержать (см. задачу 5.14) множества вида  $\bigsqcup_{i=1}^n A_i$ , где  $A_i \in S$  при  $i = 1, 2, \dots, n$ . Поэтому  $R_1 \subseteq R$ , т. е.  $R(S) = R_1$ .  $\square$

**5.32.** Пусть  $R$  —  $\sigma$ -кольцо и  $A_i \in R$  для  $i = 1, 2, \dots$ . Тогда

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \setminus \bigcup_{i=2}^{\infty} (A_1 \setminus A_i) \in R.$$

Поэтому  $R$  является  $\delta$ -кольцом.  $\square$

**5.33.** Пусть  $R$  —  $\delta$ -алгебра с единицей  $E$  и  $A_i \in R$  для  $i = 1, 2, \dots$ . Тогда

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = E \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} (E \setminus A_i) \in R,$$

т. е.  $R$  является  $\sigma$ -алгеброй.  $\square$

**5.34.** Рассмотрим систему  $T$  всех ограниченных подмножеств  $\mathbb{R}$ . Тогда  $T$  является  $\delta$ -кольцом, но так как  $A_n = [n, n+1] \in T$  при  $n \geq 0$  и  $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = [0, \infty) \notin T$ , то  $T$  не является  $\sigma$ -кольцом.  $\square$

**5.35.** Всякое замкнутое множество имеет вид  $F = \mathbb{R}^n \setminus G$ , где  $G$  открыто, поэтому  $F \in \mathcal{B}^n$ . Если некоторая  $\sigma$ -алгебра  $D$  содержит все замкнутые множества из  $\mathbb{R}^n$ , то по тем же соображениям она содержит все открытые множества, и, следовательно, содержит  $\mathcal{B}^n$ .  $\square$

**5.36.** Пусть  $x \in L_2$ . Тогда существует такое  $N$ , что для любого  $n \geq N$  точка  $x$  принадлежит  $A_n$ . Поэтому  $x \in \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$  для каждого  $k$  и, следовательно,  $x \in L_1$ .  $\square$

**5.37.** Пусть  $A_{2n-1} = \left[0, \frac{1}{2}\right)$  и  $A_{2n} = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $L_1 = [0, 1]$  и  $L_2 = \emptyset$ .  $\square$

**5.38.** В первом случае  $L_1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = L_2$ . Во втором случае  $L_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = L_1$ .  $\square$

**5.39.** Рассмотрим множества  $A_k = \{k\}$ . Тогда  $L_1 = L_2 = \emptyset$ .  $\square$

**5.40.** Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_n$  — такие множества, что  $A_i \cap A_j = \emptyset$  при  $i \neq j$ . Тогда  $\{\emptyset, A_1, \dots, A_n\}$  — полукольцо.  $\square$

**5.41.** Минимально возможное число множеств равно 2 в случае, если  $A_1 = A_2 = \dots = A_n$ . Тогда  $R = \{A_1, \emptyset\}$ . Максимально возможное число множеств равно  $2^{2^n-1}$ . Действительно, пусть

$$D_{i_1} = A_{i_1} \setminus \bigcup_{k \neq i_1} A_k \quad \text{при } i_1 = 1, \dots, n,$$

$$D_{i_1, i_2} = (A_{i_1} \cap A_{i_2}) \setminus \bigcup_{k \neq i_1, i_2} A_k \quad \text{при } i_1 \neq i_2$$

и т. д. Число таких множеств равно  $C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n - 1$ . Пусть  $\Omega$  — система всех  $D_{i_1, \dots, i_k}$ , где  $1 \leq k \leq n$  и

$$R = \left\{ \bigsqcup_{l=1}^i E_l : E_l \in \Omega \right\}$$

(включая пустое множество). Так как  $E_i \cap E_j = \emptyset$  при  $i \neq j$ , то  $R$  — кольцо (действительно,  $R$  — минимальное кольцо, содержащее полукольцо, построенное в решении задачи 5.40). Ясно, что  $R \supset \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  и  $\overline{R} \leq 2^{2^n-1}$ . В случае, когда  $D_{i_1, \dots, i_k} \neq \emptyset$  для

всех  $k$  и всех  $i_1, \dots, i_k$ , выполнено равенство  $\overline{R} = 2^{2^n - 1}$ . Этот случай реализуется, например, если

$$A_i = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i = 1 \text{ и } x_k \in \{0, 1\} \text{ при } k \neq i\}$$

при  $i = 1, 2, \dots, n$ . Наконец, любое кольцо  $R_1$ , содержащее  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , должно содержать множества  $E_l$ , и поэтому  $R_1 \supseteq R$ , т. е.  $R$  — минимальное кольцо.  $\square$

**5.42.** Предположим, что существует кольцо  $R = \{\emptyset, A_1, A_2\}$ , где все множества различны. Если  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ , то  $A_1 \cup A_2 \in R$ , и мы пришли к противоречию. Если  $C = A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$  то  $C \subset A_1$  и  $C \subset A_2$ , и так как  $A_1 \neq A_2$ , то хотя бы одно вложение строгое. Пусть, например,  $D = A_1 \setminus C \neq \emptyset$ . Тогда  $D \in R$ , но  $D \notin \{\emptyset, A_1, A_2\}$ . Мы вновь пришли к противоречию.  $\square$

**5.43.** Нетрудно видеть, что  $\emptyset = \emptyset \times \emptyset \in S$ . Пусть  $A = A_1 \times A_2$  и  $B = B_1 \times B_2$ , где  $A_1, B_1 \in S_1$  и  $A_2, B_2 \in S_2$ . Тогда  $A \cap B = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \in S$  (см. задачу 1.20). Наконец, если  $B \subseteq A$ , то  $B_1 \subseteq A_1$  и  $B_2 \subseteq A_2$ . Следовательно, существуют такие  $C_1, \dots, C_k \in S_1$  и  $D_1, \dots, D_n \in S_2$ , что

$$A_1 = B_1 \bigsqcup \left( \bigsqcup_{i=1}^k C_i \right); \quad A_2 = B_2 \bigsqcup \left( \bigsqcup_{j=1}^n D_j \right).$$

Отсюда следует, что (см. задачу 1.21)

$$\begin{aligned} A &= \left( B_1 \sqcup \left( \bigsqcup_{i=1}^k C_i \right) \right) \times \left( B_2 \sqcup \left( \bigsqcup_{j=1}^n D_j \right) \right) = \\ &= B \sqcup \left( \bigsqcup_{i=1}^k (C_i \times B_2) \right) \sqcup \left( \bigsqcup_{j=1}^n (B_1 \times D_j) \right) \sqcup \left( \bigsqcup_{i=1}^k \bigsqcup_{j=1}^n (C_i \times D_j) \right). \end{aligned}$$

$\square$

**5.44.** Пусть  $R_1 = R_2$  —  $\sigma$ -алгебры всех подмножеств  $[0, 1]$ . Тогда  $[0, 1]^2, [0, \frac{1}{2}]^2 \in R$ , но  $[0, 1]^2 \setminus [0, \frac{1}{2}]^2$  не может быть представлено как  $A \times B$  ни для каких  $A \in R_1$  и  $B \in R_2$ .  $\square$

**5.45.** Если  $R_1 = \{\emptyset\}$  или  $R_2 = \{\emptyset\}$ , то и  $R_1 \times R_2 = \{\emptyset\}$  —  $\sigma$ -алгебра. Пусть  $R_1$  и  $R_2$  содержат непустые множества, в частности свои единицы  $X_1$  и  $X_2$  соответственно. Если  $R_2 = \{\emptyset, X_2\}$ , то

$$R = R_1 \times R_2 = \{A \times X_2\}_{A \in R_1}.$$

Эта система множеств естественным образом отождествляется с  $R_1$ , и потому тоже является  $\sigma$ -алгеброй. Случай, когда выполнено условие на  $R_1$ , аналогичен.

Пусть нашлись множества  $A_k \in R_k \setminus \{\emptyset, X_k\}$ , где  $X_k$  — единицы  $\sigma$ -алгебр  $R_k$ ,  $k = 1, 2$ . Тогда  $B_k = X_k \setminus A_k \in R_k \setminus \{\emptyset, X_k\}$ , и  $A_k \cap B_k = \emptyset$ . Теперь нетрудно видеть, что  $(A_1 \times A_2) \sqcup (B_1 \times B_2) \notin R_1 \times R_2$ .  $\square$

**5.46.** Заметим, что  $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in f^{-1}(T)$ . Если  $C, D \in f^{-1}(T)$ , то существуют такие множества  $A, B \in T$ , что  $f^{-1}(A) = C$  и  $f^{-1}(B) = D$ . Тогда

$$C \cap D = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B) \in f^{-1}(T).$$

Пусть теперь  $C, C_1 \in f^{-1}(T)$  и  $C_1 \subset C$ . Тогда существуют такие множества  $A, A_1 \in T$ , что  $C = f^{-1}(A)$  и  $C_1 = f^{-1}(A_1)$ . Так как  $C_1 \subset C$ , то мы получаем, что  $A_1 \subset A$ . Поэтому

$$A = A_1 \sqcup \left( \bigsqcup_{i=2}^n A_i \right),$$

где  $A_2, \dots, A_n \in T$ , откуда следует, что

$$C = C_1 \sqcup \left( \bigsqcup_{i=2}^n f^{-1}(A_i) \right).$$

$\square$

**5.47.** В силу результата задачи 5.46 система множеств  $f^{-1}(T)$  — полуокольцо. Если  $C, D \in f^{-1}(T)$ , то существуют такие  $A, B \in T$ , что  $f^{-1}(A) = C$  и  $f^{-1}(B) = D$ . Тогда

$$C \triangle D = f^{-1}(A) \triangle f^{-1}(B) = f^{-1}(A \triangle B) \in f^{-1}(T).$$

$\square$

**5.48.** В силу результата задачи 5.47 система множеств  $f^{-1}(T)$  — кольцо. Очевидно, что если  $E$  — единица  $T$ , то  $f^{-1}(E)$  — единица  $f^{-1}(T)$ . Если  $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots \in f^{-1}(T)$ , то существуют такие  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in T$ , что  $f^{-1}(A_n) = C_n$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \in f^{-1}(T).$$

$\square$

**5.49.** Пусть  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $Y = \{y_1, y_2\}$  и  $R = \{\emptyset, \{x_1\}, \{x_2, x_3\}, X\}$ . Пусть  $f(x_1) = f(x_2) = y_1$  и  $f(x_3) = y_2$ . Тогда  $R$  — кольцо, и  $f(R) = \{\emptyset, \{y_1\}, Y\}$ . Заметим, что  $Y \setminus \{y_1\} = \{y_2\}$  не может быть представлено в виде  $\bigsqcup_{i=2}^n B_i$ , где  $B_i \in f(R)$ . Поэтому  $f(R)$  — не полуокольцо.  $\square$

## Г л а в а 6

### МЕРЫ НА СИСТЕМАХ МНОЖЕСТВ

Пусть  $S$  — полукольцо множеств, а  $m$  — функция, отображающая  $S$  в  $[0, +\infty] \cup \{+\infty\}$  и не равная тождественно  $+\infty$ . Скажем, что  $m$  — *мера*, если для любого представления

$$A = \bigsqcup_{i=1}^k A_i,$$

где  $A, A_1, \dots, A_k$  — множества из  $S$ , выполнено равенство

$$m(A) = \sum_{i=1}^k m(A_i).$$

При этом сумма считается равной  $+\infty$ , если хотя бы одно из слагаемых бесконечно. Если к тому же для любых таких множеств  $A, A_1, \dots, A_k, \dots$  из  $S$ , что

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

выполнено равенство

$$m(A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i),$$

то мера  $m$  называется  *$\sigma$ -аддитивной*. Сумма ряда из мер считается бесконечной, если хотя бы одно из слагаемых бесконечно либо если ряд расходится.

Мера  $m$  на полукольце  $S$  с единицей  $X$  называется конечной, если  $m(X) < +\infty$ .

Мера  $m$  на полукольце  $S$  называется  *$\sigma$ -конечной*, если существует такое множество  $X$ , что  $A \subseteq X$  для каждого  $A \in S$  (вообще говоря,  $X \notin S$ , т. е.  $X$  — не единица  $S$ ), причём  $X$  может быть представлено в виде

$$X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

где  $A_n \in S$  и  $m(A_n) < +\infty$  при всех  $n$ . Нетрудно видеть, что конечная мера является частным случаем  *$\sigma$ -конечной*.

## ЗАДАЧИ

**6.1.** Построить пример полуокольца  $S$  и такой функции  $\varphi : S \rightarrow [0, +\infty)$ , что для любых  $A, B \in S$  с  $A \cap B = \emptyset$  и  $C = A \cup B \in S$  выполнено равенство  $\varphi(C) = \varphi(A) + \varphi(B)$ , но  $\varphi$  — не мера на  $S$ .

**6.2.** Пусть  $m$  — мера на полуокольце  $S$ , множества  $A$  и  $B$  принадлежат  $S$  и  $B \subseteq A$ . Доказать, что  $m(B) \leq m(A)$ .

**6.3.** Пусть  $m$  — мера на полуокольце  $S$ . Доказать, что  $m(\emptyset) = 0$ .

**6.4.** Пусть  $m$  — мера на полуокольце  $S$ , множества  $A, B$  и  $A \cup B$  принадлежат  $S$ , причём  $m(A \cap B) < +\infty$ . Доказать, что  $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$ .

**6.5.** Пусть  $m$  — мера на полуокольце  $S$ , множества  $A, B$  и  $A \Delta B$  принадлежат  $S$  и  $m(A \Delta B) = 0$ . Доказать, что  $m(A) = m(B)$ .

**6.6.** Пусть  $S$  — полуокольцо с мерой  $m$ , а  $S_1 = \{A \in S : m(A) = 0\}$ . Доказать, что  $S_1$  — полуокольцо.

**6.7.** Пусть  $R$  — кольцо с мерой  $m$  и  $R_1 = \{A \in R : m(A) = 0\}$ . Доказать, что  $R_1$  — кольцо.

**6.8.** Пусть  $m$  — мера на полуокольце  $S$ , множества  $A, A_1, \dots, A_n$  принадлежат  $S$  и

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

Доказать, что

$$m(A) \leq \sum_{i=1}^n m(A_i).$$

**6.9.** Пусть  $m$  — мера на полуокольце  $S$ , множества  $A, A_1, \dots, A_n$  принадлежат  $S$  и

$$\bigsqcup_{i=1}^n A_i \subseteq A.$$

Доказать, что

$$\sum_{i=1}^n m(A_i) \leq m(A).$$

**6.10.** Пусть  $m$  — мера на полуокольце  $S$ , множества  $A$  и  $A_n$  из  $S$  и

$$\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq A.$$

Доказать, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) \leq m(A).$$

**6.11.** Пусть  $m$  — мера на полукольце  $S$ . Доказать, что  $m$  является  $\sigma$ -аддитивной тогда и только тогда, когда для любых таких множеств  $A, A_1, \dots, A_n$  из  $S$ , что

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

выполнено неравенство

$$m(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

**6.12.** Пусть  $[A, B] \subset \mathbb{R}$  и  $S$  — полукольцо всех отрезков, интервалов и полуинтервалов  $[a, b] \subseteq [A, B]$  (включая пустой). Доказать, что функция  $m : S \rightarrow [0, \infty)$ , где  $m([a, b]) = b - a$ , является  $\sigma$ -аддитивной мерой на  $S$ . Ниже мы будем называть её *классической мерой* на  $[A, B]$ .

**6.13.** Пусть  $m$  —  $\sigma$ -аддитивная мера на полукольце  $S$ , принимающая только конечные значения, множества  $A, A_1, \dots, A_i, \dots$  принадлежат  $S$ , причём  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$  и

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Доказать, что

$$m(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i).$$

Это свойство меры называется *непрерывностью*.

**6.14.** Пусть  $m$  — мера на кольце  $R$  и для любых таких множеств  $A, A_1, \dots, A_i, \dots$  из  $R$ , что  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$  и

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i,$$

выполнено равенство

$$m(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i).$$

Доказать, что  $m$  является  $\sigma$ -аддитивной мерой на  $R$ .

**6.15.** Построить пример меры на полукольце, которая не является  $\sigma$ -аддитивной.

**6.16.** Показать, что утверждение задачи 6.14 может не быть справедливым для меры на полукольце.

**6.17.** Пусть  $m$  —  $\sigma$ -аддитивная мера на полукольце  $S$ , множества  $A, A_1, \dots, A_i, \dots$  из  $S$ , причём  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$  и

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Доказать, что

$$m(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i).$$

**6.18.** Пусть  $m$  — мера на кольце  $R$  и для любых таких множеств  $A, A_1, \dots, A_i, \dots$  из  $R$ , что  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$  и

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

выполнено равенство

$$m(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i).$$

Доказать, что  $m$  —  $\sigma$ -аддитивная мера на  $R$ .

**6.19.** Показать, что утверждение задачи 6.18 может не выполнятся для меры на полукольце.

**6.20.** Пусть  $A$  — счётное множество, а  $M$  —  $\sigma$ -алгебра всех подмножеств  $A$ . Привести пример конечной  $\sigma$ -аддитивной меры на  $M$ , не равной нулю ни на каком непустом подмножестве в  $A$ .

**6.21.** Пусть дано полукольцо  $S = \{[a, b] : -\infty < a < b < \infty\} \cup \{\emptyset\}$ ,  $g(x)$  — неубывающая непрерывная слева функция на  $\mathbb{R}$ , а функция  $m_g : S \rightarrow [0, \infty]$  определена формулой  $m_g([a, b]) = g(b) - g(a)$ . Доказать, что  $m_g$  является  $\sigma$ -аддитивной мерой на  $S$ .

**6.22.** Пусть  $m$  —  $\sigma$ -аддитивная мера с конечными значениями на полукольце  $S = \{[a, b] : -\infty < a \leq b < \infty\} \cup \{\emptyset\}$ . Доказать, что существует такая неубывающая непрерывная слева функция  $g(x)$  на  $\mathbb{R}$ , что  $m([a, b]) = g(b) - g(a)$  для каждого полуинтервала  $[a, b] \in S$ .

**6.23.** Пусть  $n \geq 1$  и  $S$  — полукольцо всех промежутков (замкнутых, открытых, полуоткрытых)

$$[a, b] = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq A,$$

где  $A = [\alpha, \beta] = [\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_n, \beta_n]$  — замкнутый промежуток в  $\mathbb{R}^n$ . Пусть также

$$m([a, b]) = m_n([a, b]) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Доказать, что  $m_n$  является мерой на  $S$ . Построенная мера  $m$  называется *классической мерой* на  $A$ .

**З а м е ч а н и е.** Мера, определённая в задаче 6.12, является частным случаем этой меры при  $n = 1$ .

**6.24.** Доказать, что мера  $m$  из задачи 6.23 является  $\sigma$ -аддитивной.

**6.25.** Пусть  $m_1$  и  $m_2$  — меры на полукольце  $S$ , а числа  $a$  и  $b$  неотрицательны. Доказать, что функция  $am_1 + bm_2$  является мерой на  $S$ . В случае, когда обе меры,  $m_1$  и  $m_2$ ,  $\sigma$ -аддитивны, эта мера тоже будет  $\sigma$ -аддитивной.

**6.26.** Пусть  $m$  — мера на полукольце  $S$ ,  $R(S)$  — минимальное кольцо, содержащее  $S$  (см. задачи 5.22, 5.31) и функция  $\nu : S \rightarrow [0, \infty) \cap \{+\infty\}$  определена на множестве  $A = \bigcup_{j=1}^k A_j$ , где  $A_j \in S$ ,

формулой

$$\nu\left(\bigsqcup_{j=1}^k A_j\right) = \sum_{j=1}^k m(A_j).$$

Доказать, что функция  $\nu$  корректно определена на  $S$ .

**6.27.** Доказать, что функция  $\nu$  из задачи 6.26 является мерой на  $R(S)$ .

**6.28.** Построить пример такой алгебры  $R$  с мерой  $m$ , что система  $R_1 = \{A \in R : m(A) = 0\}$  — не алгебра.

**6.29.** Доказать, что если мера  $m$  на полукольце  $S$   $\sigma$ -аддитивна, то мера  $\nu$  (см. задачи 6.26–6.27), определённая на минимальном кольце  $R(S)$ , также  $\sigma$ -аддитивна.

**6.30.** Доказать, что для любой меры  $m$  на полукольце  $S$  существует единственная мера  $\varphi$  на минимальном кольце  $R(S)$ , удовлетворяющая условиям  $\varphi(A) = m(A)$  для всех  $A \in S$ .

## РЕШЕНИЯ

**6.1.** Пусть  $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ,

$$S = \{\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_4\}, \{a_1, a_2\}, X\},$$

$\varphi(\emptyset) = 0$ ,  $\varphi(\{a_i\}) = 1$  для  $i = 1, 2, 3, 4$ ,  $\varphi(\{a_1, a_2\}) = 2$  и  $\varphi(X) = 5$ . Нетрудно видеть, что  $S$  — полукольцо и  $\varphi$  удовлетворяет условиям задачи. В то же время

$$X = \bigsqcup_{i=1}^4 \{a_i\} \quad \text{и} \quad \varphi(X) = 5 \neq 4 = \sum_{i=1}^4 \varphi(\{a_i\}),$$

поэтому  $\varphi$  — не мера.  $\square$

**6.2.** Так как  $S$  — полукольцо, то

$$A = B \sqcup \left( \bigsqcup_{j=2}^n A_j \right),$$

где все множества  $A_j$  принадлежат  $S$ . Отсюда следует, что

$$m(A) = m(B) + \sum_{j=2}^n m(A_j) \geq m(B).$$

$\square$

**6.3.** Так как по определению меры найдётся множество  $A \in S$  с  $m(A) < +\infty$ , то в силу результата задачи 6.2 выполнено неравенство  $m(\emptyset) < +\infty$ . Далее,  $m(\emptyset) = m(\emptyset \sqcup \emptyset) = 2m(\emptyset)$ , поэтому  $m(\emptyset) = 0$ .  $\square$

**6.4.** Так как  $S$  — полукольцо, то

$$B = (A \cap B) \sqcup \left( \bigsqcup_{j=2}^n B_j \right),$$

где  $B_j \in S$  при  $j = 2, 3, \dots, n$ . Тогда

$$A \cup B = A \sqcup \left( \bigsqcup_{j=2}^n B_j \right).$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} m(A \cup B) &= m(A) + \sum_{j=2}^n m(B_j) = m(A) + m(A \cap B) + \\ &+ \sum_{j=2}^n m(B_j) - m(A \cap B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B). \end{aligned}$$

□

**6.5.** Если  $A \Delta B \in S$ , то  $A \setminus B = (A \Delta B) \cap A \in S$  и  $A = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B)$ . Далее, в силу результата задачи 6.2 выполнено условие  $m(A \setminus B) \leq m(A \Delta B) = 0$ . Отсюда следует, что  $m(A) = m(A \cap B)$ . Аналогично получаем, что  $m(B) = m(A \cap B) = m(A)$ . □

**6.6.** В силу результата задачи 6.3 пустое множество принадлежит  $S_1$ . Если множества  $A$  и  $B$  из  $S_1$ , то в силу результата задачи 6.2 имеет место оценка  $m(A \cap B) \leq m(A) = 0$ , поэтому  $A \cap B \in S_1$ . Наконец, пусть  $A$  и  $A_1$  из  $S$  и  $A_1 \subset A$ . Тогда

$$A = A_1 \sqcup \left( \bigsqcup_{j=2}^n A_j \right),$$

где  $A_j \in S$  для  $j = 2, 3, \dots, n$ . Согласно задаче 6.2 получаем, что  $m(A_j) \leq m(A) = 0$  для каждого  $j$ , поэтому все множества  $A_j$  принадлежат  $S_1$ . □

**6.7.** В силу результата задачи 6.6 система  $R$  — полукольцо. Если  $A, B \in R_1$ , то  $A \cup B \in R$  и  $A \Delta B \in R$ . Используя задачу 6.4, получаем, что  $m(A \cup B) = 0$ . Так как  $A \Delta B \subseteq A \cup B$ , то в силу результата задачи 6.2 мера множества  $(A \Delta B)$  равна нулю, поэтому  $A \Delta B \in R_1$ . □

**6.8.** Существуют (см. задачу 5.19) такие попарно не пересекающиеся множества  $B_1, \dots, B_s \in S$ , что каждое из множеств  $A_1, \dots, A_n, A$

может быть представлено как объединение некоторых из  $B_j$ . Пусть

$$A = \bigsqcup_{j \in \Omega_0} B_j$$

и

$$A_i = \bigsqcup_{j \in \Omega_i} B_j$$

при  $i = 1, 2, \dots, n$ , где  $\Omega_i \subseteq \{1, 2, \dots, s\}$  при  $i = 0, 1, \dots, n$ . Так как

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i,$$

то можно считать, что

$$\{1, 2, \dots, s\} = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^n m(A_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \Omega_i} m(B_j) \geq \sum_{j=1}^s m(B_j) \geq \sum_{j \in \Omega_0} m(B_j) = m(A).$$

□

**6.9.** Как было доказано в задаче 5.18, существуют такие множества  $A_{n+1}, \dots, A_k \in S$ , что

$$A = \bigsqcup_{i=1}^k A_i.$$

Поэтому получаем, что

$$m(A) = \sum_{i=1}^k m(A_i) \geq \sum_{i=1}^n m(A_i).$$

□

**6.10.** Для любого  $N$  выполнено условие

$$\bigsqcup_{i=1}^N A_i \subseteq A,$$

поэтому в силу результата задачи 6.9 имеет место неравенство

$$m(A) \geq \sum_{i=1}^N m(A_i).$$

Так как  $N$  произвольно, то неравенство верно и для бесконечной суммы. □

**6.11.** Достаточность данного условия для  $\sigma$ -аддитивности меры  $m$  следует из задачи 6.10. Докажем его необходимость. Пусть  $m$  —  $\sigma$ -аддитивная мера на  $S$ , множества  $A, A_1, \dots, A_n, \dots$  принадлежат  $S$  и

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

В силу результата задачи 5.19 существует представление

$$A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j = \bigsqcup_{k=1}^{k_i} B_{i,k}$$

при  $i = 2, 3, \dots$ , где все  $B_{i,k} \in S$ . Положим формально  $k_1 = 1$  и  $B_{1,1} = A_1$ . Тогда

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap A) = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{k_i} (B_{i,k} \cap A),$$

и мы получаем (см. задачу 6.9), что

$$mA = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_i} m(B_{i,k} \cap A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_i} m(B_{i,k}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

□

**6.12.** Ясно, что  $m(A) \geq 0$  для любого  $A \in S$ . Если

$$[a, b] = \bigsqcup_{k=1}^r [a_k, b_k],$$

то можно считать, что промежутки  $\{[a_k, b_k]\}_{k=1}^r$  удовлетворяют условиям  $a = a_1 \leq b_1 = a_2 \leq \dots \leq b_r = b$ . Отсюда следует, что

$$m([a, b]) = b - a = \sum_{k=1}^r (b_k - a_k) = \sum_{k=1}^r m([a_k, b_k]),$$

поэтому  $m$  — мера. Докажем её  $\sigma$ -аддитивность. Пусть

$$[a, b] = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i].$$

Зафиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$  и выберем такой отрезок  $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$ , что  $m([\alpha, \beta]) > m([a, b]) - \frac{\varepsilon}{2}$ , и такие интервалы  $(\alpha_i, \beta_i) \supseteq [a_i, b_i]$ , что  $m((\alpha_i, \beta_i)) < m([a_i, b_i]) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$  для  $i \in \mathbb{N}$ . Так как

$$[\alpha, \beta] \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, \beta_i),$$

то по лемме Гейне–Бореля можно выбрать конечное число  $N$  интервалов  $(\alpha_i, \beta_i)$ , которые покрывают отрезок  $[\alpha, \beta]$ . Применяя задачу 6.8, получим, что

$$\begin{aligned} m([a, b]) &< m([\alpha, \beta]) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^N m((\alpha_i, \beta_i)) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} m((\alpha_i, \beta_i)) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \left( m([a_i, b_i]) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \right) \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} m([a_i, b_i]), \end{aligned}$$

и, так как  $\varepsilon > 0$  произвольно, то

$$m([a, b]) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m([a_i, b_i]).$$

Следовательно, в силу результата задачи 6.11 мера  $m$   $\sigma$ -аддитивна.  $\square$

**6.13.** Заметим, что

$$A_i \setminus A_{i+1} = \bigsqcup_{j=1}^{j_i} B_{i,j}$$

для  $i \in \mathbb{N}$ , где все  $B_{i,j}$  принадлежат  $S$ . Имеем

$$A_i = A_{i+1} \sqcup \left( \bigsqcup_{j=1}^{j_i} B_{i,j} \right)$$

для любого  $i$  и

$$A_1 = A \sqcup \left( \bigsqcup_{i=1}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{j_i} B_{i,j} \right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} m(A_1) &= m(A) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{j_i} m(B_{i,j}) = m(A) + \sum_{i=1}^{\infty} (m(A_i) - m(A_{i+1})) = \\ &= m(A) + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N-1} (m(A_i) - m(A_{i+1})) = \\ &= m(A) + m(A_1) - \lim_{N \rightarrow \infty} m(A_N), \end{aligned}$$

откуда следует утверждение задачи.  $\square$

**6.14.** Пусть множества  $B, B_1, \dots, B_j, \dots$  принадлежат  $R$  и

$$B = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} B_j.$$

Определим множества

$$C_l = \bigsqcup_{j=l}^{\infty} B_j = B \setminus \left( \bigsqcup_{j=1}^{l-1} B_j \right) \in R$$

при  $l = 2, 3, \dots$ . Так как  $C_2 \supseteq C_3 \supseteq \dots$  и

$$\bigcap_{l=2}^{\infty} C_l = \emptyset,$$

то мы получаем, что  $\lim_{l \rightarrow \infty} m(C_l) = 0$ . Если нашлось такое  $n$ , что  $m(B_n) = +\infty$ , то заведомо  $m(B) = \sum_{j=1}^{\infty} m(B_j)$ . В противном случае

$$m(C_l) = m(B) - m\left(\bigsqcup_{j=1}^{l-1} B_j\right) \text{ и}$$

$$0 = m(B) - \lim_{l \rightarrow \infty} m\left(\bigsqcup_{j=1}^{l-1} B_j\right) = m(B) - \sum_{j=1}^{\infty} m(B_j).$$

□

**6.15.** Рассмотрим множество  $\mathbb{Q}_{[0;1]}$  всех рациональных чисел из отрезка  $[0, 1]$ , полуокольцо  $S = \{[a, b] \cap \mathbb{Q}_{[0;1]} : 0 \leq a \leq b \leq 1\} \cup \{\emptyset\}$  (т. е. полуокольцо пересечений промежутков с множеством рациональных точек) и функцию  $m([a, b] \cap \mathbb{Q}_{[0;1]}) = b - a$ . Ясно, что  $S$  — полуокольцо. Докажем, что  $m$  — мера на  $S$ . Действительно, из плотности  $\mathbb{Q}_{[0;1]}$  на  $[0, 1]$  следует, что если

$$[a, b] \cap \mathbb{Q}_{[0;1]} = \bigsqcup_{k=1}^n ([a_k, b_k] \cap \mathbb{Q}_{[0;1]}),$$

то

$$[a, b] = \bigcup_{k=1}^n [a_k, b_k],$$

и в силу результата задачи 6.12 функция  $m$  — мера.

Множество  $\mathbb{Q}_{[0;1]}$  счётно, пусть  $\mathbb{Q}_{[0;1]} = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Заметим, что  $m([r_n, r_n]) = 0$  для любого  $n$ . Поэтому

$$1 = m(\mathbb{Q}_{[0;1]}) = m\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} [r_n, r_n]\right) \neq \sum_{n=1}^{\infty} m([r_n, r_n]) = 0,$$

и  $m$  не является  $\sigma$ -аддитивной мерой. □

**6.16.** Пусть  $S$  и  $m$  — полукольцо и мера на нём, построенные в решении задачи 6.15. Пусть  $A, A_1, \dots, A_i, \dots \in S$  и

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Если  $A = [a, b] \cap \mathbb{Q}_{[0,1]}$  и  $A_i = [a_i, b_i] \cap \mathbb{Q}_{[0,1]}$  для  $i \in \mathbb{N}$ , то  $a_i \uparrow a$  и  $b_i \downarrow b$  при  $i \rightarrow \infty$ . Следовательно,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} m(A_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} (b_i - a_i) = b - a = m(A).$$

Но в решении задачи 6.15 показано, что мера  $m$  не  $\sigma$ -аддитивна.  $\square$

**6.17.** Если  $m(A_n) = +\infty$  при некотором  $n$ , то утверждение верно. В противном случае рассмотрим разложение

$$A_{i+1} \setminus A_i = \bigsqcup_{j=1}^{j_i} B_{i,j}$$

для  $i \in \mathbb{N}$ , где все множества  $B_{i,j}$  принадлежат  $S$ . Тогда

$$A_{i+1} = A_i \bigsqcup \left( \bigsqcup_{j=1}^{j_i} B_{i,j} \right)$$

для каждого  $i$ , а

$$A = A_1 \bigsqcup \left( \bigsqcup_{i=1}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{j_i} B_{i,j} \right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} m(A) &= m(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{j_i} m(B_{i,j}) = m(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty} (m(A_{i+1}) - m(A_i)) = \\ &= m(A_1) + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N-1} (m(A_{i+1}) - m(A_i)) = \\ &= m(A_1) + \lim_{N \rightarrow \infty} m(A_N) - m(A_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} m(A_N). \end{aligned}$$

$\square$

**6.18.** Пусть множества  $B, B_1, \dots, B_j, \dots$  принадлежат  $R$  и

$$B = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} B_j.$$

Определим множества

$$C_l = \bigcup_{j=1}^l B_j \in R$$

для  $m \in \mathbb{N}$ . Так как  $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots$  и

$$\bigcup_{l=1}^{\infty} C_l = B,$$

то мы получаем, что

$$m(B) = \lim_{l \rightarrow \infty} m(C_l) = \lim_{l \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{j=1}^l B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m(B_j).$$

□

**6.19.** Пример тот же, что и в решении задачи 6.16. Доказательство аналогично. □

**6.20.** Пусть  $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ . Для любого  $T \subseteq A$  положим

$$m(T) = \sum_{i: a_i \in T} 2^{-i}.$$

Поскольку сумма абсолютно сходящегося ряда не зависит от порядка суммирования и способа группировки его членов, то  $m$  является корректно определённой конечной  $\sigma$ -аддитивной мерой на  $M$ . □

**6.21.** То, что  $m_g$  — мера, проверяется так же, как и в задаче 6.12. Докажем её  $\sigma$ -аддитивность. Пусть

$$[a, b) = \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i).$$

Зафиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$  и выберем положительные числа  $\delta, \delta_1, \dots, \delta_i, \dots$  так, чтобы  $|g(b) - g(b - \delta)| < \frac{\varepsilon}{2}$  и  $|g(a_n) - g(a_n - \delta_i)| < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$  для  $i \in \mathbb{N}$ . Так как

$$[a, b - \delta] \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i - \delta_i, b_i),$$

то по лемме Гейне–Бореля можно найти конечное число  $N$  таких интервалов  $(a_i - \delta_i, b_i)$ , что

$$[a, b - \delta] \subset [a, b - \delta] \subseteq \bigcup_{i=1}^N (a_i - \delta_i, b_i) \subset \bigcup_{i=1}^N [a_i - \delta_i, b_i).$$

Применяя задачу 6.8, получаем, что

$$\begin{aligned} m([a, b)) &= g(b) - g(a) < g(b - \delta) - g(a) + \frac{\varepsilon}{2} = m([a, b - \delta)) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^N m([a_i - \delta_i, b_i)) = \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^N (g(b_i) - g(a_i - \delta_i)) \leqslant \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^N \left( m([a_i, b_i)) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \right) \leqslant \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} m([a_i, b_i)), \end{aligned}$$

и, так как  $\varepsilon > 0$  произвольно, то

$$m([a, b)) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m([a_i, b_i)).$$

Теперь  $\sigma$ -аддитивность меры  $m_g$  следует из задачи 6.11.  $\square$

**6.22.** Пусть  $g(x) = m([0, x))$  для  $x > 0$ ,  $g(0) = 0$  и  $g(x) = -m([-x, 0))$  для  $x < 0$ . Ясно, что  $g(x)$  — неубывающая на вещественной прямой функция и что для любого полуинтервала  $[a, b)$  выполнено:  $m([a, b)) = g(b) - g(a)$ . Докажем непрерывность слева функции  $g(x)$ . Пусть для определённости  $x > 0$  и дана последовательность  $x_i \uparrow x$  при  $i \rightarrow \infty$ . Тогда

$$[0, x) = \bigcup_{i=1}^{\infty} [0, x_i).$$

В силу результата задачи 6.17 получаем, что

$$g(x) = m([0, x)) = \lim_{i \rightarrow \infty} m([0, x_i)) = \lim_{i \rightarrow \infty} g(x_i).$$

$\square$

**6.23.** Проведём доказательство по индукции по  $n$ . При  $n = 1$  утверждение было доказано в задаче 6.12. Предположим, что утверждение уже доказано для размерности  $n - 1$ , где  $n > 1$ . Пусть

$$[a, b] = [a(1), b(1)] \sqcup \dots \sqcup [a(k), b(k)] \subseteq A \subset \mathbb{R}^n.$$

Рассмотрим точки  $a_n(1), b_n(1), a_n(2), b_n(2), \dots, a_n(k), b_n(k) \in [a_n, b_n]$ . Расставляя их в неубывающем порядке, получим разбиение отрезка  $[a_n, b_n]$ :  $a_n = c(0) < c(1) < \dots < c(l) = b_n$ . Пусть теперь

$$A(1) = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{n-1}, b_{n-1}] \times (a_n, c(1)),$$

$$A(2) = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{n-1}, b_{n-1}] \times (c(1), c(2)),$$

$\dots$

$$A(l) = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{n-1}, b_{n-1}] \times (c(l-1), b_n)$$

и  $E(j, s) = [a(j), b(j)] \cap A(s)$  при  $j = 1, \dots, k$ ,  $s = 1, \dots, l$ . Обозначим через  $F_n$  проекцию множества  $F$  на  $(n - 1)$ -мерное пространство, порождённое первыми  $n - 1$  координатами. Получаем, что

$$E(j, s)_n = \begin{cases} [a(j)_1, b(j)_1] \times \dots \times [a(j)_{n-1}, b(j)_{n-1}], & \text{если } (c(s-1), c(s)) \subseteq [a(j)_n, b(j)_n] \\ \emptyset & \text{— иначе.} \end{cases}$$

Для каждого  $s$  имеем

$$A(s)_n = \bigsqcup_{j=1}^k E(j, s)_n.$$

По предположению индукции получаем, что

$$\begin{aligned} m([a, b]) &= \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) = \sum_{s=1}^l \left( \prod_{i=1}^{n-1} (b_i - a_i) \right) (c(s) - c(s-1)) = \\ &= \sum_{s=1}^l m_{n-1}(A(s)_n)(c(s) - c(s-1)) = \\ &= \sum_{s=1}^l \sum_{j=1}^k m_{n-1}(E(j, s)_n)(c(s) - c(s-1)) = \\ &= \sum_{s=1}^l \sum_{j: [a(j)_n, b(j)_n] \supseteq (c(s-1), c(s))} \prod_{i=1}^{n-1} (b(j)_i - a(j)_i) (c(s) - c(s-1)) = \\ &= \sum_{j=1}^k \left( \prod_{i=1}^{n-1} (b(j)_i - a(j)_i) \sum_{s: (c(s-1), c(s)) \subseteq [a(j)_n, b(j)_n]} (c(s) - c(s-1)) \right) = \\ &= \sum_{j=1}^k \left( \prod_{i=1}^{n-1} (b(j)_i - a(j)_i) \right) (b(j)_n - a(j)_n) = \sum_{j=1}^k m([a(j), b(j)]). \end{aligned}$$

□

**6.24.** Доказательство практически такое же, как в задаче 6.12. □

**6.25.** Утверждение проверяется непосредственно. □

**6.26.** Пусть множество  $A$  принадлежит  $R(S)$  и имеются два его разложения:

$$A = \bigsqcup_{j=1}^k A_j = \bigsqcup_{r=1}^s B_r$$

где все  $A_j$  и все  $B_r$  из  $S$ . Тогда  $D_{j,r} = A_j \cap B_r \in S$  для всех  $j$  и  $r$ , причём

$$A_j = \bigsqcup_{r=1}^s D_{j,r} \text{ и } B_r = \bigsqcup_{j=1}^k D_{j,r}$$

для всех  $j$  и  $r$ . Следовательно,

$$m(A_j) = \sum_{r=1}^s m(D_{j,r}) \text{ и } m(B_r) = \sum_{j=1}^k m(D_{j,r}).$$

Поэтому

$$\sum_{j=1}^k m(A_j) = \sum_{j=1}^k \sum_{r=1}^s m(D_{j,r}) = \sum_{r=1}^s \sum_{j=1}^k m(D_{j,r}) = \sum_{r=1}^s m(B_r),$$

откуда следует, что функция  $\nu$  корректно определена.

**6.27.** Неотрицательность функции  $\nu$  очевидна. Пусть  $A, A_1, \dots, A_n$  из  $R$  и

$$A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i.$$

Тогда для каждого  $i$  выполнено

$$A_i = \bigsqcup_{j=1}^{j_i} A_{j,i},$$

где  $A_{j,i} \in S$ . Поэтому

$$A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i = \bigsqcup_{i=1}^n \bigsqcup_{j=1}^{j_i} A_{j,i} \in R(S),$$

и, так как это есть одно из возможных представлений множества  $A$  в виде дизъюнктного объединения элементов  $S$ , то в силу результата задачи 6.26

$$\nu(A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{j_i} m(A_{j,i}) = \sum_{i=1}^n \nu(A_i).$$

□

**6.28.** Пусть  $S$  — полукольцо всех промежутков (открытых, замкнутых и полуоткрытых)  $\{a, b\} \subseteq [0, 1]$ , включая пустой, и

$$R = R(S) = \left\{ A = \bigsqcup_{i=1}^n I_i : I_i = [a_i, b_i] \in S \right\}$$

— минимальное кольцо, содержащее  $S$ , с мерой (см. задачи 6.12, 6.26 и 6.27)

$$m(A) = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Тогда для любого  $a \in [0, 1]$  отрезок  $[a, a]$  принадлежит  $R_1$ . Следовательно, если мы предположим, что  $R_1$  имеет единицу  $E$ , то  $E = [0, 1]$ . Но  $m([0, 1]) = 1$ , поэтому  $[0, 1] \notin R_1$ , и мы пришли к противоречию.  $\square$

**6.29.** Пусть

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

где множества  $A, A_1, \dots, A_i, \dots$  принадлежат  $R(S)$ . Тогда

$$A = \bigsqcup_{j=1}^k B_j \quad \text{и} \quad A_i = \bigsqcup_{l=1}^{l_i} B_{i,l}$$

для  $i = 1, 2, \dots$ , где все  $B_j$  и  $B_{i,l}$  из  $S$ . Если обозначить  $C_{j,i,l} = B_j \cap B_{i,l}$  для всех  $j, i$  и  $l$ , то

$$B_j = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} \bigsqcup_{l=1}^{l_i} C_{j,i,l} \quad \text{и} \quad B_{i,l} = \bigsqcup_{j=1}^k C_{j,i,l},$$

для  $j = 1, \dots, k; i = 1, 2, \dots$  и  $l = 1, \dots, l_i$ . Так как мера  $m$   $\sigma$ -аддитивна, то

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \sum_{j=1}^k m(B_j) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{l_i} m(C_{j,i,l}) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{l_i} \left( \sum_{j=1}^k m(C_{j,i,l}) \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{l_i} m(B_{i,l}) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i). \end{aligned}$$

$\square$

**6.30.** Так как каждый элемент  $A \in R(S)$  можно представить в виде

$$A = \bigsqcup_{j=1}^k A_j,$$

где все множества  $A_j$  принадлежат  $S$ , то мы получаем, что

$$\varphi(A) = \sum_{j=1}^k \varphi(A_j) = \sum_{j=1}^k m(A_j) = \nu(A)$$

для любого множества  $A \in R(S)$ , где мера  $\nu$  была определена в задаче 6.26.  $\square$

## Г л а в а 7

### ПРОДОЛЖЕНИЕ МЕРЫ

Пусть  $S$  — полукольцо с единицей  $X$ , а  $m$  — конечная  $\sigma$ -аддитивная мера на  $S$ . Пусть  $\nu$  — продолжение меры  $m$  на минимальное кольцо  $R(S)$  (см. задачи 5.31, 6.26, 6.27). Для произвольного  $A \subseteq X$  определим *верхнюю меру Жордана, порождённую мерой  $m$* , формулой

$$\mu_J^*(A) = \inf_{A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i} \sum_{i=1}^n m(A_i),$$

где точная верхняя грань берётся по всем конечным покрытиям множества  $A$  множествами  $A_n$  из  $S$ . *Верхнюю меру Лебега, порождённую мерой  $m$* , определим формулой

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty A_i} \sum_{i=1}^\infty m(A_i),$$

где точная верхняя грань берётся по всем не более чем счётным покрытиям множества  $A$  множествами  $A_n$  из  $S$ .

Скажем, что множество  $A \subseteq X$  измеримо по Лебегу (по Жордану), если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое множество  $A_\varepsilon \in R(S)$ , что  $\mu^*(A \triangle A_\varepsilon) < \varepsilon$  (соответственно,  $\mu_J^*(A \triangle A_\varepsilon) < \varepsilon$ ). Обозначим через  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{M}_J$  системы всех множеств  $A \subseteq X$ , измеримых по Лебегу (по Жордану). Для множества  $A \in \mathfrak{M}$  ( $A \in \mathfrak{M}_J$ ) его мерой Лебега (мерой Жордана) называется величина  $\mu(A) = \mu^*(A)$  (соответственно,  $\mu_J(A) = \mu_J^*(A)$ ).

В случае, когда  $S$  — полукольцо промежутков из замкнутого параллелепипеда  $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$ , а мера  $m$  — классическая (см. задачу 6.23), мы будем и соответствующие меры и верхние меры называть классическими.

Пусть теперь  $m$  —  $\sigma$ -конечная  $\sigma$ -аддитивная мера на полукольце  $S$ , т. е. существует такое множество  $X$ , что  $A \subseteq X$  для каждого  $A \in S$  и

$$X = \bigcup_{n=1}^\infty A_n,$$

где все  $A_n \in S$ . В этом случае можно ввести  $\sigma$ -конечную меру Лебега на классе подмножеств  $X$ . Пусть  $A \subseteq X$ . Скажем, что  $A \in \mathfrak{M}$ , если  $A \cap A_n \in \mathfrak{M}_n$  для  $n \in \mathbb{N}$ , где  $\mathfrak{M}_n$  — класс измеримых множеств относительно меры  $\mu_n$  — меры Лебега, порождённой  $m$  на полукольце  $S \cap A_n$  с единицей  $A_n$ . Если  $A \in \mathfrak{M}$ , то за его меру Лебега берётся по определению

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A \cap A_n).$$

Корректность определения доказана в задаче 7.46. В случае, когда  $S$  — полукольцо всех промежутков из  $\mathbb{R}^n$  с классической мерой  $m$ , то соответствующую  $\sigma$ -конечную меру  $\mu$  называют классической мерой Лебега на  $\mathbb{R}^n$ .

### ЗАДАЧИ

В задачах 7.1–7.27, 7.30–7.33 предполагается, что  $m$  — некоторая конечная  $\sigma$ -аддитивная мера на полукольце  $S$  с единицей  $X$ .

**7.1.** Доказать, что для любого множества  $A \subseteq X$  выполнено неравенство  $\mu_J^*(A) \geq \mu^*(A)$ .

**7.2.** Доказать, что для множества  $A \in R(S)$  имеют место равенства  $\mu_J^*(A) = \mu^*(A) = \nu(A)$ .

**7.3.** Доказать, что если, вопреки определению верхней меры, мера  $m$  не  $\sigma$ -аддитивна, то найдётся множество  $A \in S$ , для которого  $\mu^*(A) < m(A)$ .

**7.4.** Доказать, что если

$$\bar{\mu}^*(A) = \inf_{\{A_i\} : A_i \in S, A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i),$$

то  $\bar{\mu}^*(A) = \mu^*(A)$  для любого  $A \subseteq X$ .

**7.5.** Доказать утверждение, аналогичное задаче 7.4, для меры Жордана.

**7.6.** Пусть  $A \subseteq X$  и  $B \subseteq X$ . Доказать, что  $\mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$ .

**7.7.** Пусть  $A \subseteq X$  и  $B \subseteq X$ . Доказать, что  $\mu_J^*(A \cup B) \leq \mu_J^*(A) + \mu_J^*(B)$ .

**7.8.** Пусть  $B \subseteq X$  и  $B_i \subseteq X$ , причём

$$B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Доказать, что

$$\mu^*(B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(B_i).$$

**7.9.** Пусть  $\mu_J^*$  — классическая верхняя мера Жордана на  $[0, 1]$ . Построить такие множества  $A_i \subset [0, 1]$ , что

$$\mu_J^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) > \sum_{i=1}^{\infty} \mu_J^*(A_i).$$

**7.10.** Пусть  $\mu_J^*$  — классическая верхняя мера Жордана  $[0, 1]$ . Построить такие множества  $A \subset [0, 1]$  и  $B \subset [0, 1]$ , что  $A \cap B = \emptyset$ , но  $\mu_J^*(A \cup B) \neq \mu_J^*(A) + \mu_J^*(B)$ .

**7.11.** Пусть  $A_1 \subseteq X$ ,  $A_2 \subseteq X$  и задано  $\varepsilon > 0$ . Доказать, что существует последовательность  $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$  элементов  $S$  и такие множества  $T_1, T_2 \subseteq \mathbb{N}$ , что  $C_i \cap C_l = \emptyset$  при  $i \neq l$ ,

$$A_j \subseteq \bigcup_{i \in T_j} C_i \text{ и } \mu^*(A_j) \geq \sum_{i \in T_j} m(C_i) - \varepsilon$$

для  $j = 1, 2$ .

**7.12.** Пусть  $A_1 \subseteq X$ ,  $A_2 \subseteq X$  и задано  $\varepsilon > 0$ . Доказать, что существуют набор  $\{C_i\}_{i=1}^N$  элементов  $S$  и такие множества  $T_1, T_2 \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$ , что  $C_i \cap C_l = \emptyset$  для  $i \neq l$ ,

$$A_j \subseteq \bigcup_{i \in T_j} C_i \quad \text{и} \quad \mu_J^*(A_j) \geq \sum_{i \in T_j} m(C_i) - \varepsilon$$

при  $j = 1, 2$ .

**7.13.** Пусть  $A \subseteq X$  и  $B \subseteq X$ . Доказать, что  $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \triangle B)$ .

**7.14.** Доказать, что утверждение задачи 7.13 остаётся справедливым, если заменить верхнюю меру Лебега на верхнюю меру Жордана.

**7.15.** Пусть  $A \subseteq X$  и  $B \subseteq X$ . Доказать, что

$$\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

**7.16.** Доказать, что утверждение задачи 7.15 остаётся справедливым, если заменить верхнюю меру Лебега на верхнюю меру Жордана.

**7.17.** Доказать, что если  $\mu^*(A) = 0$ , то  $A \in \mathfrak{M}$ , а если  $\mu_J^*(A) = 0$ , то  $A \in \mathfrak{M}_J$ .

**7.18.** Пусть  $A \subseteq X$ . Доказать, что  $A \in \mathfrak{M}$  тогда и только тогда, когда  $X \setminus A \in \mathfrak{M}$ .

**7.19.** Пусть  $A \subseteq X$ . Доказать, что  $A \in \mathfrak{M}_J$  тогда и только тогда, когда  $X \setminus A \in \mathfrak{M}_J$ .

- 7.20.** Доказать, что  $\mathfrak{M}_J \subseteq \mathfrak{M}$ .
- 7.21.** Доказать, что  $R(S) \subseteq \mathfrak{M}_J$  и, если  $A \in R(S)$ , то  $\nu(A) = \mu_J(A) = \mu(A)$ .
- 7.22.** Пусть  $A \in \mathfrak{M}_J$ . Доказать, что  $\mu_J(A) = \mu(A)$ .
- 7.23.** Доказать, что  $\mathfrak{M}$  — алгебра.
- 7.24.** Доказать, что  $\mathfrak{M}_J$  — алгебра.
- 7.25.** Пусть  $B, C \in \mathfrak{M}$ ,  $B \cap C = \emptyset$  и  $A = B \sqcup C$ . Доказать, что  $\mu(A) = \mu(B) + \mu(C)$ .
- 7.26.** Пусть  $B, C \in \mathfrak{M}_J$ ,  $B \cap C = \emptyset$  и  $A = B \sqcup C$ . Доказать, что  $\mu_J(A) = \mu_J(B) + \mu_J(C)$ .
- 7.27.** Доказать, что  $\mathfrak{M}$  является  $\sigma$ -алгеброй.
- 7.28.** Доказать, что в случае классической меры Жордана на  $[0, 1]$  система  $\mathfrak{M}_J$  не является  $\sigma$ -алгеброй.
- 7.29.** Привести пример меры  $m$ , для которой система  $\mathfrak{M}_J$  является  $\sigma$ -алгеброй.
- 7.30.** Доказать, что  $\mu$  является  $\sigma$ -аддитивной мерой на  $\mathfrak{M}$ .
- 7.31.** Доказать, что  $\mu_J$  является  $\sigma$ -аддитивной мерой на  $\mathfrak{M}_J$ .
- 7.32.** Пусть  $B, C \in \mathfrak{M}$ ,  $B \cap C = \emptyset$ ,  $D \subseteq X$  и  $A = B \sqcup C$ . Доказать, что  $\mu^*(A \cap D) = \mu^*(B \cap D) + \mu^*(C \cap D)$ .
- 7.33.** Пусть  $B, C \in \mathfrak{M}_J$ ,  $B \cap C = \emptyset$ ,  $D \subseteq X$  и  $A = B \sqcup C$ . Доказать, что  $\mu_J^*(A \cap D) = \mu_J^*(B \cap D) + \mu_J^*(C \cap D)$ .
- 7.34.** Пусть  $G$  — открытое множество на  $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$ . Доказать, что  $G$  измеримо относительно классической меры Лебега на  $[a, b]$ .
- 7.35.** Пусть  $A \in \mathfrak{M}$ ,  $\mu(A) = 0$  и  $B \subset A$ . Доказать, что  $B \in \mathfrak{M}$  и  $\mu(B) = 0$ . (Это свойство меры называется *полнотой*.)
- 7.36.** Доказать, что утверждение задачи 7.35 выполнено для меры Жордана.
- 7.37.** Пусть  $F$  — замкнутое множество на  $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$ . Доказать, что  $F$  измеримо относительно классической меры Лебега на  $[a, b]$ .
- 7.38.** Пусть  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$ ,  $F$  — замкнутое множество на  $[a, b]$  и  $\mu(F) = 0$ . Доказать, что  $F \in \mathfrak{M}_J$  и  $\mu_J(F) = 0$ .
- 7.39.** Пусть  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^n$  и  $A \subseteq [a, b] \subset (\alpha, \beta)$ . Положим  $\mu_1^*(A) = \inf \{\mu(G) : \text{открытое } G \supseteq A, G \subseteq [\alpha, \beta]\}$ . Доказать, что  $\mu_1^*(A) = \mu^*(A)$ .
- 7.40.** Пусть  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^n$  и  $A \subseteq [a, b] \subset (\alpha, \beta)$ . Положим  $\mu_{1,*}(A) = \sup \{\mu(F) : \text{замкнутое } F \subseteq A\}$ . Доказать, что  $\mu_{1,*}(A) \leq \mu^*(A)$ .

**7.41.** Пусть  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^n$  и  $A \subseteq [a, b] \subset (\alpha, \beta)$ . Доказать, что (см. обозначения в задачах 7.39, 7.40)  $\mu_1^*(A) = \mu([a, b]) - \mu_{1,*}([a, b] \setminus A)$ .

**7.42.** Пусть  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^n$  и  $A \subseteq [a, b] \subset (\alpha, \beta)$ . Доказать, что  $A \in \mathfrak{M}$  тогда и только тогда, когда  $\mu_1^*(A) = \mu_{1,*}(A)$ .

**7.43.** Пусть  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$  и  $A \subseteq [a, b]$ . Доказать, что  $A \in \mathfrak{M}$  тогда и только тогда, когда для любого множества  $B \subseteq [a, b]$  выполнено равенство  $\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)$ .

В задачах 7.44 и 7.45 предполагается, что  $m$  — некоторая  $\sigma$ -аддитивная мера на полукольце  $S$  с единицей  $X$ .

**7.44.** Пусть  $A_i \subseteq X$  для всех  $i \in \mathbb{N}$ , имеют место вложения  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$  и

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Доказать, что

$$\mu^*(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu^*(A_i).$$

**7.45.** Пусть  $A \in \mathfrak{M}$ . Доказать, что  $A$  может быть представлено в виде

$$A = \left( \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j} \right) \setminus A_0,$$

где множества  $A_{i,j} \in R(S)$  для  $i, j \in \mathbb{N}$ , а  $A_0 \in \mathfrak{M}$ ,  $\mu(A_0) = 0$  и для каждого  $i$  выполнено  $A_{i,1} \subseteq A_{i,2} \subseteq \dots$  Более того,  $A_{i,j}$  можно выбрать так, что если  $B_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j}$  при  $i \in \mathbb{N}$ , то  $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$

В задачах 7.46–7.55, 7.57, 7.60 рассматривается  $\sigma$ -конечная  $\sigma$ -аддитивная мера  $m$  на полукольце  $S$  и её продолжение по Лебегу. Через  $X$  обозначается объединение всех множеств из  $S$  (см. подробности в теоретических сведениях, приведённых в начале этой главы).

**7.46.** Доказать, что класс измеримых множеств и значение  $\sigma$ -коначной меры не зависят от представления

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

где  $A_n \in S$  для всех  $n$ .

**7.47.** Пусть  $\mu$  —  $\sigma$ -конечная мера, а  $\mathfrak{M}$  — соответствующая система измеримых множеств. Доказать, что  $\mathfrak{M}$  является  $\sigma$ -алгеброй.

**7.48.** Пусть  $\mu$  —  $\sigma$ -конечная мера Лебега. Доказать, что  $\mu$   $\sigma$ -аддитивна.

**7.49.** Пусть  $\mu$  — классическая  $\sigma$ -конечная мера Лебега на  $\mathbb{R}$ . Построить неограниченное измеримое множество  $A \in \mathfrak{M}$  конечной меры.

**7.50.** Пусть  $\mu$  —  $\sigma$ -конечная мера,  $A \in \mathfrak{M}$  и  $\mu(A) < \infty$ . Доказать, что  $A$  может быть представлено в виде

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j} \setminus A_0,$$

где  $A_{i,j} \in R(S)$  для  $i, j \in \mathbb{N}$ ,  $A_0 \in \mathfrak{M}$ , причём  $\mu(A_0) = 0$ , и для любого  $i$  выполнено  $A_{i,1} \subseteq A_{i,2} \subseteq \dots$ . Более того,  $A_{i,j}$  можно выбрать так, что если  $B_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j}$  при  $i \in \mathbb{N}$ , то  $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$  и  $\mu(B_1) < \infty$ .

**7.51.** Пусть  $\mu$  —  $\sigma$ -конечная мера Лебега на  $\sigma$ -алгебре  $\mathfrak{M}$ ,  $A_i \in \mathfrak{M}$  при всех  $i$ , причём  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$  и

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Доказать, что

$$\mu(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$$

(возможно, с обеих сторон равенства стоят бесконечные значения).

**7.52.** Пусть  $\mu$  —  $\sigma$ -конечная мера Лебега на  $\sigma$ -алгебре  $\mathfrak{M}$ ,  $A_i \in \mathfrak{M}$  при всех  $i$ , причём  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ ,  $\mu(A_1) < \infty$  и

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Доказать, что

$$\mu(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i).$$

**7.53.** Пусть  $\mu$  — классическая  $\sigma$ -конечная мера Лебега на  $\mathbb{R}$ . Построить такую последовательность  $\{A_i\}$  множеств из  $\mathfrak{M}$ , что  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$  и для множества  $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$  выполнено неравенство

$$\mu(A) \neq \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i).$$

**7.54.** Пусть  $\mu$  —  $\sigma$ -конечная мера Лебега, не являющаяся конечной (т. е.  $\mu(X) = \infty$ .) Построить такую последовательность  $\{B_i\}$  множеств

из  $\mathfrak{M}$ , что  $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$  и для множества  $B = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$  выполнено неравенство

$$\mu(B) \neq \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(B_i).$$

**7.55.** Пусть  $\mu$  —  $\sigma$ -конечная мера Лебега на  $\sigma$ -алгебре  $\mathfrak{M}$  и  $\{A_i\}$  — последовательность множеств из  $\mathfrak{M}$ . Доказать, что (см. обозначения в гл. 1)

$$\mu(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i).$$

**7.56.** Пусть  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $[0, 1]$ . Построить такую последовательность  $\{A_i\}$  множеств из  $\mathfrak{M}$ , что

$$\mu(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n) < \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i).$$

**7.57.** Пусть  $\mu$  — конечная мера Лебега на  $\sigma$ -алгебре  $\mathfrak{M}$  и  $\{A_i\}$  — последовательность множеств из  $\mathfrak{M}$ . Доказать, что

$$\mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) \geq \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i).$$

**7.58.** Пусть  $\mu$  — классическая  $\sigma$ -конечная мера Лебега на  $\mathbb{R}$ . Построить такую последовательность  $\{A_i\}$  множеств из  $\mathfrak{M}$ , что  $\mu(A_n) < \infty$  для каждого  $n$

$$\mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) < \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i).$$

**7.59.** Пусть  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $[0, 1]$ . Построить такую последовательность  $\{A_i\}$  множеств из  $\mathfrak{M}$ , что

$$\mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) > \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i).$$

**7.60.** Пусть  $\mu$  —  $\sigma$ -конечная мера Лебега на  $\sigma$ -алгебре  $\mathfrak{M}$  и  $\{A_i\}$  — последовательность множеств из  $\mathfrak{M}$ , причём

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty.$$

Доказать, что

$$\mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0.$$

**7.61.** Пусть  $m$  — полная  $\sigma$ -аддитивная мера на  $\sigma$ -алгебре  $S$ . Доказать, что  $\mathfrak{M} = S$ , т. е. что продолжение по Лебегу меры  $m$  совпадает с ней самой.

**7.62.** Пусть  $n \geq 1$ . Доказать, что любое открытое и любое замкнутое множество в  $\mathbb{R}^n$  измеримо относительно классической меры Лебега.

**7.63.** Пусть  $n \geq 1$ . Доказать, что любое борелевское множество в  $\mathbb{R}^n$  измеримо относительно классической меры Лебега.

**7.64.** Доказать, что любое счётное множество  $E \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ) измеримо относительно классической меры Лебега  $\mu$  и  $\mu(E) = 0$ .

**7.65.** Пусть  $A$  — измеримое множество относительно классической меры Лебега  $\mu$  на  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ . Доказать, что его можно представить в виде  $A = A_1 \sqcup A_2$ , где  $A_1$  — множество типа  $F_\sigma$  и  $\mu(A_2) = 0$ .

**7.66.** Пусть  $A$  — измеримое множество относительно классической меры Лебега  $\mu$  на  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ . Доказать, что его можно представить в виде  $A = A_1 \setminus A_2$ , где  $A_1$  — множество типа  $G_\delta$  и  $\mu(A_2) = 0$ .

**7.67.** Пусть  $P_0$  — канторово замкнутое множество (см. задачу 2.22), а  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $[0, 1]$ . Доказать, что  $\mu(P_0) = 0$ .

**7.68.** Доказать, что канторово замкнутое множество  $P_0$  нигде не плотно на  $[0, 1]$ .

**7.69.** Пусть  $\alpha > 0$  и множество  $P(\alpha)$  построено тем же способом, что и канторово замкнутое множество, но

$$\mu(I_k^n(\alpha)) = \frac{1}{(n + \alpha)^2} \mu(J_k^{n-1}(\alpha))$$

при  $n \in \mathbb{N}$  и  $k = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$ . Найти  $\mu(P(\alpha))$ .

**7.70.** Пусть  $\alpha \in (0, 1)$ . Построить такое нигде не плотное множество  $P_\alpha$  на  $[0, 1]$ , что  $\mu(P_\alpha) = \alpha$ .

**7.71.** Пусть  $A$  — нигде не плотное множество на  $[0, 1]$ , которое измеримо относительно классической меры Лебега на  $[0, 1]$ , причём  $\mu(A) > 0$ . Доказать, что  $A$  неизмеримо по Жордану относительно стандартной меры на  $[0, 1]$ .

**7.72.** Поставим в соответствие каждому числу  $x \in [0, 1)$  его двоичное представление  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  без 1 в периоде. Пусть  $\{n_k\}_{k=1}^\infty$  — некоторая строго возрастающая последовательность натуральных чисел,  $\{a_k\}_{k=1}^\infty$  — некоторая последовательность из 0 и 1, а  $A = \{x \in [0, 1) : x_{n_k} = a_k \text{ при } k \in \mathbb{N}\}$ . Доказать, что  $\mu(A) = 0$ .

**7.73.** Пусть  $P$  — замкнутое канторово множество на  $[0, 1]$ , а

$$A = \left( \bigcup_{x \in P} (x - 0.05; x + 0.05) \right) \cap (0, 1).$$

Доказать, что  $A$  измеримо относительно классической меры Лебега  $\mu$ , и найти  $\mu(A)$ .

**7.74.** Пусть  $A$  — множество таких точек из  $[0, 1]$ , что их десятичное разложение без 9 в периоде не содержит цифры 6. Доказать, что  $A$  измеримо относительно классической меры Лебега  $\mu$ , и найти  $\mu(A)$ .

**7.75.** Пусть  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ ,  $F$  — замкнутое множество на  $\mathbb{R}^n$  и  $\mu(F) = 0$ . Доказать, что  $F$  нигде не плотно на  $\mathbb{R}^n$ .

**7.76.** Построить такое нигде не плотное множество  $A \subset [0, 1]$ , что  $\mu(A) = 0$ , но  $\mu(\bar{A}) > 0$ .

**7.77.** Пусть  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $[0, 1]$  и  $A \in \mathfrak{M}$ . Доказать, что функция  $f(x) = \mu(A \cap [0, x])$  непрерывна на  $[0, 1]$ .

**7.78.** Пусть  $0 < \alpha < 1$ . Построить множество  $A \subset [0, 1]$ , которое измеримо относительно классической меры Лебега, причём  $\mu(A) = \alpha$ , но для любых  $a < b$ , для которых  $[a, b] \subseteq [0, 1]$ , выполнено неравенство  $0 < \mu(A \cap [a, b]) < b - a$ .

**7.79.** Пусть  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $[0, 1]$ . Построить на  $[0, 1]$  такую последовательность измеримых множеств  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ , что  $A_n \cap A_k = \emptyset$  при  $n \neq k$  и для любых числа  $n$  и невырожденного отрезка  $[a, b] \subseteq [0, 1]$  выполнено неравенство  $\mu(A_n \cap [a, b]) > 0$ .

**7.80.** Пусть  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $[0, 1]$ . Построить на  $[0, 1]$  такую последовательность измеримых нигде не плотных множеств  $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ , что  $A_n \cap A_k = \emptyset$  при  $n \neq k$  и

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1.$$

**7.81.** Пусть  $n \geq 1$  и  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $\mathbb{R}^n$ ,  $F$  — замкнутое множество в  $\mathbb{R}^n$  и  $\mu(F) > 0$ . Доказать, что  $F$  имеет мощность континуума.

**7.82.** Пусть  $n \geq 1$  и  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $\mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathfrak{M}$  и  $\mu(A) > 0$ . Доказать, что  $A$  имеет мощность континуума.

**7.83.** Пусть  $n \geq 1$  и  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $\mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathfrak{M}$  и  $\mu(A) = a > 0$ . Доказать, что для любого  $b \in (0, a)$  существует измеримое множество  $A_b \subset A$ , для которого  $\mu(A_b) = b$ .

**7.84.** Пусть  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $[0, 1]$ . Для данного  $\alpha \in (0, 1)$  построить такое измеримое множество  $A \subset [0, 1]$ , что

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\mu(A \cap [0, x])}{x} = \alpha.$$

**7.85.** Пусть  $n \geq 1$ ,  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $\mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathfrak{M}$  — ограниченное множество и  $a \in \mathbb{R}^n$ . Доказать, что  $A + a = \{x + a : x \in A\} \in \mathfrak{M}$  и  $\mu(A + a) = \mu(A)$ .

**7.86.** Пусть  $n \geq 1$ ,  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $\mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathfrak{M}$  и  $a \in \mathbb{R}^n$ . Доказать, что  $A + a \in \mathfrak{M}$  и  $\mu(A + a) = \mu(A)$  (здесь оба значения могут быть бесконечны).

**7.87.** Пусть  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $[0, 1]$ , а множество  $A \in \mathfrak{M}$  таково, что  $\mu(A) > 0$ . Доказать, что существуют  $x$  и  $y$  из  $A$ , для которых  $x - y$  — рациональное число.

**7.88.** Пусть  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $[0, 1]$ , дано множество  $A \in \mathfrak{M}$ , причём  $\mu(A) > 0$ . Доказать, что существуют точки  $x$  и  $y$  из  $A$ , для которых  $x - y$  — иррациональное число.

**7.89.** Пусть  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $[0, 1]$ . Доказать, что существует неизмеримое множество  $E \subset [0, 1]$ .

**7.90.** Пусть  $n \geq 1$  и  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $\mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathfrak{M}$  и  $\mu(A) > 0$ . Доказать, что существует неизмеримое множество  $B \subset A$ .

**7.91.** Пусть  $n \geq 1$ . Построить такую конечную  $\sigma$ -аддитивную меру на  $\mathbb{R}^n$ , что любое подмножество в  $\mathbb{R}^n$  измеримо.

**7.92.** Построить такие неизмеримые относительно классической меры Лебега на  $[0, 1]$  множества  $A_1$  и  $A_2$ , что  $A_1 \cup A_2$  измеримо.

**7.93.** Построить такие неизмеримые относительно классической меры Лебега на  $[0, 1]$  множества  $A_1$  и  $A_2$ , что  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  и  $\mu^*(A_1 \sqcup A_2) < \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$ .

**7.94.** Построить множество  $A \subset [0, 1]^2$ , измеримое относительно классической меры Лебега на  $[0, 1]^2$ , обе проекции которого на координатные оси неизмеримы относительно классической меры Лебега на  $[0, 1]$ .

**7.95.** Построить множество  $A \subset [0, 1]^2$ , неизмеримое относительно классической меры Лебега на  $[0, 1]^2$ , обе проекции которого на координатные оси измеримы относительно классической меры Лебега на  $[0, 1]$ .

**7.96.** Пусть  $a$  и  $b$  — вещественные числа, а множества  $A \subseteq [a, b]$  и  $B \subseteq [a, b]$  измеримы относительно классической меры Лебега  $\mu_1$  на  $[a, b]$ . Доказать, что множество  $A \times B$  измеримо относительно классической меры Лебега  $\mu_2$  на  $[a, b]^2$ .

**7.97.** Пусть множества  $A \subseteq \mathbb{R}$  и  $B \subseteq \mathbb{R}$  измеримы относительно классической меры Лебега  $\mu_1$  на  $\mathbb{R}$ . Доказать, что множество  $A \times B$  измеримо относительно классической меры Лебега  $\mu_2$  на  $\mathbb{R}^2$ .

**7.98.** Привести пример измеримого множества  $A$  и неизмеримого множества  $B$  относительно классической меры Лебега на  $\mathbb{R}$ , декартово произведение которых измеримо относительно классической меры Лебега на  $\mathbb{R}^2$ .

**7.99.** Пусть  $\mathbb{Q}_{[0,1]}$  — множество всех рациональных чисел из  $[0, 1]$  и

$$A = \left\{ (x, y) \in [0, 1]^2 : x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}_{[0,1]} \quad \text{и} \quad \sin y < \frac{1}{2} \right\}.$$

Найти  $\mu(A)$ , где  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $[0, 1]^2$ .

**7.100.** Пусть  $n > 1$ ,  $\mu$  —  $\sigma$ -аддитивная мера на  $\sigma$ -алгебре  $\mathfrak{M}$ ,  $A \in \mathfrak{M}$  и  $\mu(A) = 1$ . Пусть также  $A_1, A_2, \dots, A_n$  — множества из  $\mathfrak{M}$ , вложенные в  $A$ , и

$$\sum_{k=1}^n \mu(A_k) > n - 1.$$

Доказать, что

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) > 0.$$

**7.101.** Для заданного  $n > 1$  построить такие подмножества  $A_1, A_2, \dots, A_n$  отрезка  $[0, 1]$ , измеримые относительно классической меры Лебега на  $[0, 1]$ , что

$$\sum_{k=1}^n \mu(A_k) = n - 1,$$

но

$$\bigcap_{k=1}^n A_k = \emptyset.$$

**7.102.** Пусть множество  $A$  измеримо относительно классической меры Лебега на  $[0, 1]$ , взято число  $a > 0$  и  $aA = \{ax : x \in A\}$ . Доказать, что  $aA$  измеримо относительно классической меры Лебега на  $\mathbb{R}$  и  $\mu(aA) = a \cdot \mu(A)$ .

**7.103.** Пусть  $A = \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ и } 0 \leq y \leq f(x)\}$ , где  $f(x)$  — положительная непрерывная функция на  $[a, b]$ . Доказать, что  $A$  измеримо относительно классической меры Лебега на  $\mathbb{R}^2$  и

$$\mu(A) = \int_a^b f(x) dx$$

(интеграл понимается в смысле Римана).

**7.104. Теорема Витали.** Пусть  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $\mathbb{R}$ , дано множество  $E \subset \mathbb{R}$  и  $\mu^*(E) < \infty$ . Пусть также дана такая система невырожденных отрезков  $T_0 = \{I(x) = [x, x + t(x)]\}_{x \in E}$ , что  $t(x) > 0$  для каждого  $x \in E$ . Доказать, что существует такая конечная

система попарно непересекающихся отрезков  $\{I_k = [x_k, x_k + t_k]\}_{k=1}^N \subseteq T_0$ , для которой

$$\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^N I_k\right) = \sum_{k=1}^N t_k > \frac{1}{6} \mu^*(E).$$

**7.105. Теорема Витали.** Пусть  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $\mathbb{R}$  и дано ограниченное множество  $E \subset \mathbb{R}$ . Пусть  $T_0$  — такая система невырожденных отрезков, что для каждой точки  $x \in E$  и для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой отрезок  $I = I(x, \varepsilon) \in T_0$ , что  $\mu(I) < \varepsilon$  и  $x \in I$  (скажем в таком случае, что  $E$  покрыто системой  $T_0$  в смысле Витали). Доказать, что существует такая не более чем счётная система отрезков  $\{I_k\}_{k=1}^\infty \subseteq T_0$ , что  $I_k \cap I_l = \emptyset$  при  $k \neq l$  и

$$\mu^*\left(E \setminus \bigsqcup_{k=1}^\infty I_k\right) = 0.$$

**7.106.** Доказать, что в условиях задачи 7.105 для любого  $\varepsilon > 0$  существует такая конечная система отрезков  $\{I_k\}_{k=1}^N \subseteq T_0$ , что  $I_k \cap I_l = \emptyset$  при  $k \neq l$  и

$$\mu^*\left(E \setminus \bigsqcup_{k=1}^N I_k\right) < \varepsilon.$$

**7.107.** Привести пример открытых всюду плотных множеств  $\{A_n\}$  на  $[0; 1]$ , пересечение которых не является открытым множеством (ср. с задачей 3.46).

## РЕШЕНИЯ

**7.1.** Утверждение немедленно следует из определений этих верхних мер, так как для внешней меры Лебега класс соответствующих покрытий шире, чем для внешней меры Жордана.  $\square$

**7.2.** В силу результата задачи 7.1 выполнены неравенства:  $\mu^*(A) \leq \mu_J^*(A) \leq \nu(A)$  (второе неравенство следует из того, что  $A \subseteq A$  — одно из допустимых покрытий). Пусть  $A \in R(S)$  и

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty B_i,$$

где все множества  $B_i$  из  $S$ . Тогда (см. задачу 6.11)

$$\nu(A) \leq \sum_{i=1}^\infty \nu(B_i) = \sum_{i=1}^\infty m(B_i).$$

Переходя к точной верхней грани, получим, что  $\nu(A) \leq \mu^*(A)$ .  $\square$

**7.3.** Если мера  $m$  не  $\sigma$ -аддитивна, то для некоторых множеств  $A \in S$  и  $A_n \in S$  одновременно выполнены условия

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{и} \quad m(A) \neq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k).$$

Тогда в силу результата задачи 6.9 возможно неравенство только в одну сторону, а именно

$$\mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) < m(A).$$

□

**7.4.** Из определений ясно, что  $\mu^*(A) \leq \bar{\mu}^*(A)$  для каждого множества  $A \subseteq X$ . Докажем обратное неравенство. Пусть  $A \subseteq X$ ,  $A_i$  — множества из  $S$  и  $\{A_i\}$  — покрытие множества  $A$ . Обозначим  $B_1 = A_1$  и

$$B_i = A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j$$

при  $i = 2, 3, \dots$  Тогда

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

и  $B_i \in R(S)$  для каждого  $i$ . Поэтому при каждом  $i \in \mathbb{N}$  существует представление

$$B_i = \bigcup_{j=1}^{j_i} C_{i,j},$$

где все  $C_{i,j} \in S$ . Отсюда следует, что

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{j_i} C_{i,j}$$

и

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{j_i} m(C_{i,j}) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

Таким образом,

$$\bar{\mu}^*(A) = \inf_{\substack{\{C_i\}, C_i \in S: \\ A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i}} \sum_{i=1}^{\infty} m(C_i) \leq \inf_{\substack{\{A_i\}, A_i \in S: \\ A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}} \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) = \mu^*(A).$$

□

**7.5.** Доказательство повторяет решение задачи 7.4 с заменой счётных покрытий  $\{A_i\}$  на конечные.  $\square$

**7.6.** Пусть дано некоторое  $\varepsilon > 0$ . Тогда существуют такие множества  $A_i$  и  $B_i$  из  $S$ , что

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \text{и} \quad B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i,$$

причём

$$\mu^*(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad \mu^*(B) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$A \cup B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cup B_i),$$

откуда следует, что

$$\mu^*(A \cup B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) + \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B) + \varepsilon.$$

Так как  $\varepsilon > 0$  произвольно, то верна и оценка  $\mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$ .  $\square$

**7.7.** Доказательство аналогично решению задачи 7.6.  $\square$

**7.8.** Пусть  $\varepsilon > 0$ . Тогда для любого  $i$  существуют такие множества  $A_{i,j}$  из  $S$ , что

$$B_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j} \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{\infty} m(A_{i,j}) < \mu^*(B_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Следовательно,

$$B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{i,j},$$

откуда по определению внешней меры следует, что

$$\mu^*(B) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} m(A_{i,j}) < \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(B_i) + \varepsilon.$$

Но  $\varepsilon > 0$  было выбрано произвольно.  $\square$

**7.9.** Пусть  $\mathbb{Q}_{[0;1]} = \{r_i\}_{i=1}^{\infty}$  — множество всех рациональных чисел из  $[0, 1]$  и  $A_i = \{r_i\}$  для  $i \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$\mathbb{Q}_{[0;1]} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

и  $\mu_J^*(A_i) = 0$  для каждого  $i$ . В то же время, если предположить, что

$$\mathbb{Q}_{[0;1]} \subseteq \bigsqcup_{j=1}^N B_j,$$

где  $B_j = [a_j, b_j]$  при  $j = 1, 2, \dots, N$ , то можно занумеровать  $B_j$  так, что  $0 \leq a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq \dots \leq b_N \leq 1$ . Поскольку  $\mathbb{Q}_{[0;1]}$  всюду плотно на  $[0;1]$ , то предыдущее вложение возможно лишь при  $a_1 = 0$ ,  $b_k = a_{k+1}$  и  $b_N = 1$ , откуда вытекает, что

$$\sum_{j=1}^N m(B_j) = 1.$$

Поэтому  $\mu_J^*(\mathbb{Q}_{[0;1]}) = 1$ .  $\square$

**7.10.** Рассмотрим множества  $A = \mathbb{Q}_{[0;1]}$  и  $B = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}_{[0;1]}$ . Тогда (см. решение задачи 7.9)  $\mu_J^*(A) = 1$  и, аналогично,  $\mu_J^*(B) = 1$ . Поэтому

$$1 = \mu_J^*([0, 1]) = \mu_J^*(A \cup B) \neq \mu_J^*(A) + \mu_J^*(B) = 2.$$

$\square$

**7.11.** Из задачи 7.4 следует, что существуют две последовательности таких множеств  $\{D_{j,i}\}_{i=1}^\infty \subset S$  ( $j = 1, 2$ ), что  $D_{j,i} \cap D_{j,l} = \emptyset$  при  $j = 1, 2$  и  $i \neq l$ ,

$$A_j \subseteq \bigsqcup_{i=1}^\infty D_{j,i} \quad \text{и} \quad \mu^*(A_j) \geq \sum_{i=1}^\infty m(D_{j,i}) - \varepsilon$$

для  $j = 1, 2$ . Пусть  $E_{2l} = D_{1,l}$  и  $E_{2l-1} = D_{2,l}$  при  $l \in \mathbb{N}$ . Заметим, что (см. задачу 5.19) найдутся такие множества  $F_{q,s} \in S$ , что

$$E_{2r} \setminus \left( \bigsqcup_{p=1}^{2r-1} E_p \right) = E_{2r} \setminus \left( \bigsqcup_{t=1}^r (E_{2t-1} \cap E_{2r}) \right) = \bigsqcup_{s=1}^{s_{2r}} F_{2r,s}$$

при  $r \in \mathbb{N}$  и, аналогично,

$$E_{2r+1} \setminus \left( \bigsqcup_{p=1}^{2r} E_p \right) = E_{2r+1} \setminus \left( \bigsqcup_{t=1}^r (E_{2t} \cap E_{2r+1}) \right) = \bigsqcup_{s=1}^{s_{2r+1}} F_{2r+1,s}$$

при  $r \in \mathbb{N}$ . Теперь нетрудно видеть, что множества  $E_1, \{E_{2r} \cap E_{2l-1}\}_{r,l=1}^\infty$  и  $\{F_{q,s}\}_{q=2,s=1}^{\infty, s_q}$  образуют искомую последовательность  $\{C_i\}_{i=1}^\infty$ . Существование множеств  $T_j$ ,  $j = 1, 2$ , следует из построения.  $\square$

**7.12.** Доказательство повторяет решение задачи 7.11, лишь последовательность  $\{C_i\}$  в данном случае конечна.  $\square$

**7.13.** Так как  $A \subseteq (A \Delta B) \cup B$ , то (см. задачу 7.6) мы получаем, что  $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \Delta B) + \mu^*(B)$ . Следовательно,  $\mu^*(A) - \mu^*(B) \leq \mu^*(A \Delta B)$ . Аналогично,  $\mu^*(B) - \mu^*(A) \leq \mu^*(A \Delta B)$ .  $\square$

**7.14.** Доказательство то же, что и в задаче 7.13, с использованием задачи 7.7 вместо задачи 7.6.  $\square$

**7.15.** Пусть  $\varepsilon > 0$ , а  $\{C_i\}_{i=1}^\infty$  и  $T_1, T_2$  — последовательность и множества, построенные в задаче 7.11. Заметим, что

$$A \cup B \subseteq \bigcup_{i \in T_1 \cup T_2} C_i \quad \text{и} \quad A \cap B \subseteq \bigcup_{i \in T_1 \cap T_2} C_i.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) &\leq \sum_{i \in T_1 \cup T_2} m(C_i) + \sum_{i \in T_1 \cap T_2} m(C_i) = \\ &= \sum_{i \in T_1} m(C_i) + \sum_{i \in T_2} m(C_i) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

В силу произвольности  $\varepsilon > 0$  отсюда вытекает утверждение задачи.  $\square$

**7.16.** Доказательство то же, что и в задаче 7.15, с использованием задачи 7.12 вместо задачи 7.11.  $\square$

**7.17.** Для любого  $\varepsilon > 0$  можно взять в определении измеримости множество  $A_\varepsilon = \emptyset$ .  $\square$

**7.18.** Заметим, что  $A \Delta B = (X \setminus A) \Delta (X \setminus B)$  для любых множеств  $A \subseteq X$  и  $B \subseteq X$ . Далее, если  $C \in R(S)$ , то  $X \setminus C \in R(S)$ . Поэтому если  $\varepsilon > 0$ ,  $A \subseteq X$ ,  $A_\varepsilon \in R(S)$  и  $\mu^*(A \Delta A_\varepsilon) < \varepsilon$ , то  $X \setminus A_\varepsilon \in R(S)$  и  $\mu^*((X \setminus A) \Delta (X \setminus A_\varepsilon)) < \varepsilon$ .  $\square$

**7.19.** Доказательство такое же, как в задаче 7.18.  $\square$

**7.20.** Утверждение немедленно следует из определений систем  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{M}_J$  и задачи 7.1.  $\square$

**7.21.** Измеримость следует из того, что при  $A_\varepsilon = A \in R(S)$  выполнено равенство  $\mu_J^*(A \Delta A_\varepsilon) = \mu_J^*(\emptyset) = 0$ , а равенство мер — из задачи 7.2.  $\square$

**7.22.** Согласно задаче 7.20 множество  $A$  принадлежит  $\mathfrak{M}$ , и в силу результата задачи 7.1 выполнено неравенство  $\mu(A) \leq \mu_J(A)$ . С другой стороны, для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое множество  $B \in R(S)$ , что  $\mu_J^*(A \Delta B) < \varepsilon$ . Следовательно (см. задачи 7.14, 7.21 и 7.13),

$$\begin{aligned} \mu_J(A) = \mu_J^*(A) &\leq \mu_J^*(B) + \mu_J^*(A \Delta B) < \mu_J(B) + \varepsilon = \\ &= \mu^*(B) + \varepsilon \leq \mu^*(A) + \mu^*(A \Delta B) + \varepsilon \leq \mu(A) + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

поэтому  $\mu_J(A) \leq \mu(A)$ .  $\square$

**7.23.** Заметим, что  $\emptyset, X \in \mathfrak{M}$  в силу результата задачи 7.21. Пусть множества  $A$  и  $B$  из  $\mathfrak{M}$ . Для данного  $\varepsilon > 0$  найдём такие  $A_\varepsilon$  и  $B_\varepsilon$  из

$R(S)$ , что  $\mu^*(A \Delta A_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$  и  $\mu^*(B \Delta B_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Тогда  $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon$  и  $A_\varepsilon \Delta B_\varepsilon$  из  $R(S)$ ,

$$(A \cap B) \Delta (A_\varepsilon \cap B_\varepsilon) \subseteq (A \Delta A_\varepsilon) \cup (B \Delta B_\varepsilon),$$

и

$$(A \Delta B) \Delta (A_\varepsilon \Delta B_\varepsilon) \subseteq (A \Delta A_\varepsilon) \cup (B \Delta B_\varepsilon).$$

Следовательно (см. задачу 7.6),

$$\mu^*((A \cap B) \Delta (A_\varepsilon \cap B_\varepsilon)) < \varepsilon$$

и

$$\mu^*((A \Delta B) \Delta (A_\varepsilon \Delta B_\varepsilon)) < \varepsilon.$$

Так как  $\varepsilon > 0$  произвольно, то отсюда следует, что  $A \cap B \in \mathfrak{M}$  и  $A \Delta B \in \mathfrak{M}$ .  $\square$

**7.24.** Доказательство практически такое же, как в задаче 7.23.  $\square$

**7.25.** Заметим, что в силу результата задачи 7.23 множество  $B \sqcup C$  принадлежит  $\mathfrak{M}$ . Из задачи 7.6 следует, что  $\mu(A) \leq \mu(B) + \mu(C)$ . Зафиксируем  $\varepsilon > 0$  и найдём такие множества  $B_\varepsilon, C_\varepsilon \in R(S)$ , что  $\mu(B \Delta B_\varepsilon) \leq \varepsilon$  и  $\mu(C \Delta C_\varepsilon) \leq \varepsilon$ . Так как

$$A \Delta (B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) \subseteq (B \Delta B_\varepsilon) \cup (C \Delta C_\varepsilon),$$

то согласно задаче 7.6 получаем, что

$$\mu(A \Delta (B_\varepsilon \cup C_\varepsilon)) < 2\varepsilon.$$

Далее, так как  $B$  и  $C$  — непересекающиеся множества, то

$$B_\varepsilon \cap C_\varepsilon \subseteq (C_\varepsilon \setminus C) \cup (B_\varepsilon \setminus B) \subseteq (C_\varepsilon \Delta C) \cup (B_\varepsilon \Delta B),$$

откуда вытекает, что  $\mu(B_\varepsilon \cap C_\varepsilon) < 2\varepsilon$ . Поскольку (см. задачу 7.21) на  $R(S)$  функция  $\mu$  совпадает с аддитивной функцией  $\nu$ , то с учётом задачи 7.13 и равенства

$$B_\varepsilon \cup C_\varepsilon = B_\varepsilon \sqcup (C_\varepsilon \setminus (B_\varepsilon \cap C_\varepsilon))$$

получаем оценку

$$\begin{aligned} \mu(B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) &= \mu(B_\varepsilon) + \mu(C_\varepsilon) - \mu(B_\varepsilon \cap C_\varepsilon) \geq \\ &\geq \mu(B) + \mu(C) - 2\varepsilon - \mu(B_\varepsilon \cap C_\varepsilon) \geq \mu(B) + \mu(C) - 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что (см. задачу 7.13)

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(B_\varepsilon \cup C_\varepsilon) - \mu^*(A \Delta (B_\varepsilon \cup C_\varepsilon)) \geq \mu^*(B) + \mu^*(C) - 6\varepsilon.$$

Так как  $\varepsilon > 0$  произвольно, то мы получаем, что  $\mu(A) \geq \mu(B) + \mu(C)$ .  $\square$

**7.26.** Доказательство практически такое же, как в задаче 7.25.  $\square$

**7.27.** Пусть множества  $A_i$  из  $\mathfrak{M}$  и

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Положим  $B_1 = A_1$ ,  $B_i = A_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k$  для  $i = 2, 3, \dots$ . Тогда  $B_i \in \mathfrak{M}$  и

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Заметим, что

$$\bigcup_{i=1}^n B_i \subseteq A$$

для любого  $n$ , поэтому, согласно задаче 7.25,

$$\sum_{i=1}^n \mu(B_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) = \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) \leq \mu^*(A).$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) < \infty.$$

Теперь для любого  $\varepsilon > 0$  найдём такое число  $N$ , что

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \mu(B_i) < \varepsilon.$$

Далее, существует такое множество  $C \in R(S)$ , что

$$\mu\left(C \triangle \bigcup_{i=1}^N B_i\right) < \varepsilon.$$

Так как

$$A \triangle C \subseteq \left(C \triangle \bigcup_{i=1}^N B_i\right) \bigcup \left(\bigcup_{i=N+1}^{\infty} B_i\right),$$

то (см. задачи 7.6 и 7.8)

$$\mu^*(A \triangle C) \leq \varepsilon + \mu^*\left(\bigcup_{i=N+1}^{\infty} B_i\right) \leq \varepsilon + \sum_{i=N+1}^{\infty} \mu(B_i) < 2\varepsilon.$$

Это и означает, что  $A \in \mathfrak{M}$ .  $\square$

**7.28.** Пусть  $\mathbb{Q}_{[0,1]} = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$  — множество всех рациональных точек из  $[0, 1]$ . Если мы предположим, что  $\mathbb{Q}_{[0,1]} \in \mathfrak{M}_J$ , то в силу резуль-

тата задачи 7.19 множество  $P = ([0, 1] \setminus \mathbb{Q}_{[0,1]})$  измеримо по Жордану, но тогда (см. задачи 7.26, 7.9 и 7.10)

$$1 = \mu_J([0, 1]) = \mu_J(\mathbb{Q}_{[0,1]}) + \mu_J(P) = \mu_J^*(\mathbb{Q}_{[0,1]}) + \mu_J^*(P) = 1 + 1 = 2.$$

Из этого противоречия вытекает, что  $\mathbb{Q}_{[0,1]} \notin \mathfrak{M}_J$ . В то же время

$$\mathbb{Q}_{[0,1]} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{r_n\},$$

где  $\{r_n\} \in S \subset \mathfrak{M}_J$  для каждого  $n$ .  $\square$

**7.29.** Рассмотрим на  $\sigma$ -алгебре  $S$  всех подмножеств пространства  $\mathbb{R}^n$  меру

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \in A; \\ 0, & \text{если } 0 \notin A. \end{cases}$$

Тогда  $S = \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_J$ .  $\square$

**7.30.** Если  $\{A_i\}$  — последовательность попарно непересекающихся измеримых по Лебегу множеств и

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

то (см. задачу 7.27)  $A \in \mathfrak{M}$ , и в силу результата задачи 7.8 мы получаем, что

$$\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Поэтому, согласно задаче 6.11, мера  $\mu$   $\sigma$ -аддитивна.  $\square$

**7.31.** Утверждение вытекает из задач 7.30, 7.22 и 7.20.  $\square$

**7.32.** В силу результата задачи 7.6  $\mu^*(A \cap D) \leq \mu^*(B \cap D) + \mu^*(C \cap D)$ . Зафиксируем  $\varepsilon > 0$  и найдём такие множества  $B_\varepsilon, C_\varepsilon \in R(S)$ , что  $\mu(B \Delta B_\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{20}$  и  $\mu(C \Delta C_\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{20}$ . Тогда (см. решение задачи 7.25)  $\mu(B_\varepsilon \cap C_\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{10}$ . Рассмотрим теперь множества  $B_1 = B_\varepsilon \setminus C_\varepsilon \in R(S)$  и  $C_1 = C_\varepsilon \setminus B_\varepsilon \in R(S)$ . Так как

$$B_1 \Delta B_\varepsilon = B_\varepsilon \cap C_\varepsilon \subseteq (B \cap C) \cup (B_\varepsilon \setminus B) \cup (C_\varepsilon \setminus C),$$

то  $\mu(B_1 \Delta B_\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{10}$  и, аналогично,  $\mu(C_1 \Delta C_\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{10}$ . Более того,  $B_1 \cap C_1 = \emptyset$ , из вложения

$$B \Delta B_1 \subseteq (B \Delta B_\varepsilon) \cup (B_1 \Delta B_\varepsilon)$$

следует, что  $\mu(B \Delta B_1) \leq \frac{\varepsilon}{5}$ , и, аналогично,  $\mu(C \Delta C_1) \leq \frac{\varepsilon}{5}$ . Обозначим  $A_1 = B_1 \sqcup C_1$ . Так как

$$\mu(A \Delta A_1) \leq \mu(B \Delta B_1) + \mu(C \Delta C_1) < \frac{\varepsilon}{2},$$

то мы получаем (см. задачу 7.13), что

$$\mu^*(A \cap D) \geq \mu^*(A_1 \cap D) - \mu^*((A \Delta A_1) \cap D) \geq \mu^*(A_1 \cap D) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Оценим теперь снизу внешнюю меру множества  $(A_1 \cap D)$ . Пусть

$$B_1 = \bigsqcup_{i=1}^N E_i \quad \text{и} \quad C_1 = \bigsqcup_{j=1}^K F_j,$$

где все множества  $E_i$  и  $F_j$  из  $S$ , а множества  $\{G_l\}_{l=1}^\infty$ ,  $G_l \in S$  таковы, что

$$A_1 \cap D \subseteq \bigcup_{l=1}^\infty G_l$$

и

$$\mu^*(A_1 \cap D) \geq \sum_{l=1}^\infty m(G_l) - \frac{\varepsilon}{10}.$$

Рассмотрим системы элементов из  $S$ :

$$\{H_p\}_{p=1}^\infty \equiv \{G_l \cap E_i\}_{l=1, i=1}^{\infty, N} \quad \text{и} \quad \{T_q\}_{q=1}^\infty \equiv \{G_l \cap F_j\}_{l=1, j=1}^{\infty, K}.$$

Заметим, что

$$B_1 \cap D \subseteq \bigcup_{p=1}^\infty H_p \quad \text{и} \quad C_1 \cap D \subseteq \bigcup_{q=1}^\infty T_q.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mu^*(A_1 \cap D) &\geq \sum_{l=1}^\infty m(G_l) - \frac{\varepsilon}{10} \geq \\ &\geq \sum_{p=1}^\infty m(H_p) + \sum_{q=1}^\infty m(T_q) - \frac{\varepsilon}{10} \geq \mu^*(B_1 \cap D) + \mu^*(C_1 \cap D) - \frac{\varepsilon}{10} \geq \\ &\geq \mu^*(B \cap D) + \mu^*(C \cap D) - \mu^*(B \Delta B_1) - \mu^*(C \Delta C_1) - \frac{\varepsilon}{10} \geq \\ &\geq \mu^*(B \cap D) + \mu^*(C \cap D) - \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Поскольку  $\varepsilon > 0$  произвольно, то  $\mu^*(A \cap D) \geq \mu^*(B \cap D) + \mu^*(C \cap D)$ .  $\square$

**7.33.** Доказательство практически такое же, как в задаче 7.32.  $\square$

**7.34.** Пусть  $\{z(k)\}_{k=1}^\infty$  — множество таких точек из  $G$ , что все их координаты рациональны, а  $r_k = \text{dist}(z(k), \mathbb{R}^n \setminus G)$  и  $t_k = \frac{r_k}{2n}$  при  $k \in \mathbb{N}$ . Заметим, что если

$$I_k = \bigotimes_{j=1}^n (z(k)_j - t_k, z(k)_j + t_k)$$

для всех  $k$ , то

$$G = \bigcup_{k=1}^\infty I_k.$$

Действительно,  $I_k \subseteq G$  в силу выбора  $t_k$ . Рассмотрим точку  $x \in G$ . Положим  $d = \text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus G)$ . Найдётся такое  $k$ , что  $|z(k)_j - x_j| < \frac{d}{10n}$ .

Тогда  $\rho(z(k), x) < \frac{d}{10}$ , а значит, по неравенству треугольника  $r_k > \frac{9d}{10}$ .

Следовательно,  $|z(k)_j - x_j| < \frac{1}{2n} \frac{9d}{10} < \frac{r_k}{2n}$ , т. е.  $x \in I_k$ . Так как все параллелепипеды  $I_k$  принадлежат  $S$ , а тем более  $\mathfrak{M}$  (см. задачи 7.21 и 7.20), а система  $\mathfrak{M}$  согласно задаче 7.27 является  $\sigma$ -алгеброй, то множество  $G$  измеримо.  $\square$

**7.35.** Так как  $\mu^*(B) \leq \mu^*(A) = \mu(A) = 0$ , то утверждение следует из задачи 7.17.  $\square$

**7.36.** См. решение задачи 7.35.  $\square$

**7.37.** Заметим, что  $(a, b) \setminus F$  — открытое множество. Из задачи 7.34 следует, что  $(a, b) \setminus F \in \mathfrak{M}$ . Нетрудно видеть, что граница параллелепипеда имеет классическую меру 0. Поэтому  $[a, b] \setminus F \in \mathfrak{M}$ , а тогда в силу результата задачи 7.18 и  $F \in \mathfrak{M}$ .  $\square$

**7.38.** Пусть  $\mu(F) = 0$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует последовательность таких  $n$ -мерных промежутков  $\{I_k = \{a(k), b(k)\}\}_{k=1}^\infty$ , что

$$F \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty I_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^\infty m(I_k) < \varepsilon.$$

Для каждого  $k$  выберем такой открытый интервал  $G_k \supseteq I_k$ , что  $m(G_k) \leq m(I_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$ . Тогда

$$F \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty G_k$$

и, используя лемму Гейне–Бореля (задача 3.78), мы найдём такое  $N$ , что

$$F \subseteq \bigcup_{k=1}^N G_k.$$

Отсюда следует, что

$$\mu_J^*(F) \leq \sum_{k=1}^N m(G_k) \leq \sum_{k=1}^N m(I_k) + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Так как  $\varepsilon > 0$  произвольно, то  $\mu_J^*(F) = 0$ , а тогда в силу результата задачи 7.17 множество  $F$  измеримо по Жордану и  $\mu_J(F) = 0$ .  $\square$

**7.39.** Для любого заданного  $\varepsilon > 0$  найдём такую последовательность  $n$ -мерных промежутков  $I_k = \{[a(k), b(k)]\}_{k=1}^\infty$ , что

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty I_k \quad \text{и} \quad \mu^*(A) \geq \sum_{k=1}^\infty m(I_k) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для каждого  $k$  выберем открытый промежуток  $G_k \supseteq I_k$ ,  $G_k \subseteq (\alpha, \beta)$  так, чтобы  $m(G_k) \leq m(I_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$ . Тогда

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty G_k = G$$

и, так как  $G$  открыто, то

$$\mu^*(A) \geq \sum_{k=1}^\infty m(G_k) - \varepsilon \geq \mu(G) - \varepsilon \geq \mu_1^*(A) - \varepsilon.$$

Поскольку  $\varepsilon > 0$  произвольно, мы получаем, что  $\mu^*(A) \geq \mu_1^*(A)$ . С другой стороны, пусть открытое множество  $E \subseteq (\alpha, \beta)$  таково, что  $A \subseteq E$  и  $\mu_1^*(A) \geq \mu(E) - \varepsilon$ . Далее (см. решение задачи 7.34), мы можем представить  $E$  в виде

$$E = \bigcup_{k=1}^\infty I_k,$$

где все  $I_k$  суть открытые промежутки и поэтому  $I_k \in S$ . Пусть теперь

$$L_k = I_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} I_i = \bigsqcup_{l=1}^{l_k} D_{k,l}$$

для  $k = 2, 3, \dots$ , где все  $D_{k,l}$  из  $S$  и  $L_1 = I_1$ . Мы получаем, что

$$E = \bigsqcup_{k=1}^\infty \bigsqcup_{l=1}^{l_k} D_{k,l}.$$

Тогда

$$A \subseteq \bigsqcup_{k=1}^\infty \bigsqcup_{l=1}^{l_k} D_{k,l}$$

и, следовательно,

$$\mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{l_k} m(D_{k,l}) = \mu(E) \leq \mu_1^*(A) + \varepsilon.$$

Поскольку  $\varepsilon > 0$  произвольно, то мы получаем, что  $\mu^*(A) \leq \mu_1^*(A)$ .  $\square$

**7.40.** В силу результата задачи 7.39  $\mu^*(A) = \mu_1^*(A)$ . Пусть замкнутое множество  $F$  и открытое множество  $G$  таковы, что  $F \subseteq A \subseteq G \subseteq (\alpha, \beta)$ . Тогда (см. задачу 6.2)  $\mu(F) \leq \mu(G)$ . Следовательно,  $\mu(F) \leq \mu_1^*(A)$ . Так как это неравенство выполнено для любого замкнутого множества  $F \subseteq A$ , то мы получаем, что  $\mu_{1,*}(A) \leq \mu_1^*(A) = \mu^*(A)$ .  $\square$

**7.41.** Для заданного  $\varepsilon > 0$  выберем такое открытое множество  $G \subseteq (\alpha, \beta)$ , что  $A \subseteq G$  и  $\mu_1^*(A) > \mu(G) - \varepsilon$ . Тогда  $F = [a, b] \setminus G$  — замкнутое множество, и  $F \subseteq [a, b] \setminus A$ . Мы получаем, что

$$\begin{aligned} \mu_1^*(A) > \mu(G) - \varepsilon &\geq \mu(G \cap [a, b]) - \varepsilon = \mu([a, b]) - \mu(F) - \varepsilon \geq \\ &\geq \mu([a, b]) - \mu_{1,*}([a, b] \setminus A) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Так как  $\varepsilon > 0$  произвольно, то  $\mu_1^*(A) \geq \mu([a, b]) - \mu_{1,*}([a, b] \setminus A)$ . С другой стороны, если замкнутое множество  $F \subseteq [a, b] \setminus A$  таково, что  $\mu_{1,*}([a, b] \setminus A) \leq \mu(F) + \varepsilon$ , то открытое множество  $G = (a, b) \setminus F$  содержит в себе  $A \cap (a, b)$ . Заметим, что так как  $\mu$  — классическая мера Лебега, то  $\mu(G) = \mu([a, b] \setminus F)$  и  $\mu_1^*(A) = \mu_1^*(A \cap (a, b))$ . Поэтому

$$\mu_1^*(A) \leq \mu(G) = \mu([a, b]) - \mu(F) \leq \mu([a, b]) - \mu_{1,*}([a, b] \setminus A) + \varepsilon.$$

Так как  $\varepsilon > 0$  произвольно, то  $\mu_1^*(A) \leq \mu([a, b]) - \mu_{1,*}([a, b] \setminus A)$ .  $\square$

**7.42.** Пусть вначале  $A \in \mathfrak{M}$ . Тогда (см. задачу 7.39)  $\mu(A) = \mu^*(A) = \mu_1^*(A)$ . Далее (см. задачу 7.18),  $[a, b] \setminus A \in \mathfrak{M}$  и (см. задачу 7.41)

$$\mu([a, b]) - \mu(A) = \mu([a, b] \setminus A) = \mu_1^*([a, b] \setminus A) = \mu([a, b]) - \mu_{1,*}(A),$$

поэтому  $\mu(A) = \mu_{1,*}(A)$ . Пусть теперь  $A \subseteq [a, b]$  и  $\mu_1^*(A) = \mu_{1,*}(A)$ . Тогда для заданного  $\varepsilon > 0$  существуют такое открытое множество  $G$  и такое замкнутое множество  $F$ , что  $F \subseteq A \subseteq G \subseteq (\alpha, \beta)$  и  $\mu(G \setminus F) = \mu G - \mu F \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Так как  $G \in \mathfrak{M}$ , то существует множество  $B \in R(S)$ , для которого  $\mu(G \Delta B) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Так как  $G \Delta A = G \setminus A \subseteq G \setminus F$ , то мы получаем, что  $\mu^*(A \Delta B) \leq \mu^*(A \Delta G) + \mu^*(G \Delta B) \leq \varepsilon$ , откуда следует, что  $A \in \mathfrak{M}$ .  $\square$

**7.43.** Необходимость условия следует из задачи 7.32. Чтобы доказать его достаточность, возьмём  $B = [a, b]$ . Тогда  $\mu([a, b]) = \mu^*(A) + \mu^*([a, b] \setminus A)$ . Можно считать, что мера определена на некотором параллелепипеде  $[\alpha, \beta]$ , где  $(\alpha, \beta) \supseteq [a, b]$ . Применяя задачи 7.39 и 7.41,

мы получаем, что  $\mu_1^*(A) = \mu_{1,*}(A)$ . Теперь из задачи 7.42 следует, что  $A \in \mathfrak{M}$ .  $\square$

**7.44.** Очевидно, что

$$\mu^*(A) \geq \lim_{i \rightarrow \infty} \mu^*(A_i) = \alpha.$$

Пусть задано  $\varepsilon > 0$ . Выберем такую возрастающую последовательность натуральных чисел  $\{i_k\}_{k=1}^\infty$ , что  $\mu^*(A_i) > \alpha - \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}$  при  $i \geq i_k$ . Построим теперь по индукции последовательность множеств  $\{B_i\}$  из  $\mathfrak{M}$ . Пусть  $B_1 \in \mathfrak{M}$  таково, что  $A_{i_1} \subseteq B_1$  и  $\mu^*(A_{i_1}) > \mu(B_1) - \frac{\varepsilon}{8}$ . Обозначим  $A'_{i_2} = A_{i_2} \setminus B_1$ . Так как  $A_{i_2} \cap B_1 \supseteq A_{i_1}$ , то из задачи 7.32 следует, что

$$\begin{aligned} \mu^*(A'_{i_2}) &= \mu^*(A_{i_2}) - \mu^*(A_{i_2} \cap B_1) \leq \\ &\leq \mu^*(A_{i_2}) - \mu^*(A_{i_1}) \leq \alpha - (\alpha - \frac{\varepsilon}{8}) = \frac{\varepsilon}{8}. \end{aligned}$$

Теперь мы можем выбрать множество  $B_2 \in \mathfrak{M}$  так, чтобы  $A'_{i_2} \subseteq B_2$  и

$$\frac{\varepsilon}{8} \geq \mu^*(A'_{i_2}) > \mu(B_2) - \frac{\varepsilon}{8},$$

т. е.  $\mu(B_2) < \frac{\varepsilon}{4}$ . Предположим, что мы уже выбрали множества  $B_1, B_2, \dots, B_{r-1} \in \mathfrak{M}$ , для которых  $\mu(B_l) < \frac{\varepsilon}{2^l}$  и  $A'_{i_l} = A_{i_l} \setminus B_{l-1} \subseteq B_l$  при  $l = 2, \dots, r-1$ . Тогда мы можем выбрать множество  $B_r \in \mathfrak{M}$  так, чтобы

$$A'_{i_r} = A_{i_r} \setminus \bigcup_{i=1}^{r-1} B_i \subseteq B_r$$

и

$$\mu^*(A'_{i_r}) > \mu(B_r) - \frac{\varepsilon}{2^{r+1}}.$$

Так как

$$\begin{aligned} \mu^*(A'_{i_r}) &= \mu^*(A_{i_r}) - \mu^*\left(A_{i_r} \cap \bigcup_{i=1}^{r-1} B_i\right) \leq \\ &\leq \mu^*(A_{i_r}) - \mu^*(A_{i_{r-1}}) \leq \alpha - (\alpha - \frac{\varepsilon}{2^{r+1}}) = \frac{\varepsilon}{2^{r+1}}, \end{aligned}$$

то мы получаем, что

$$\frac{\varepsilon}{2^{r+1}} \geq \mu^*(A'_{i_r}) > \mu(B_r) - \frac{\varepsilon}{2^{r+1}},$$

т. е.  $\mu(B_r) < \frac{\varepsilon}{2^r}$ . Построив по индукции последовательность множеств  $\{B_r\}$ , получим, что

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i,$$

поэтому

$$\mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \leq \alpha + \frac{\varepsilon}{8} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} \leq \alpha + \varepsilon.$$

Так как  $\varepsilon > 0$  произвольно, то  $\mu^*(A) \leq \alpha$ .  $\square$

**7.45.** Для каждого натурального  $i$  существует такое множество  $C_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_{i,j} \supset A$ , что  $D_{i,j} \in S$  и  $\mu(C_i \setminus A) < \frac{1}{i}$ . Действительно, по определению внешней меры Лебега найдутся такие множества  $\{D_{i,j}\}_{j=1}^{\infty}$  из  $S$ , покрывающие  $A$ , что

$$\mu^* A \geq \sum_{j=1}^{\infty} m D_{i,j} - \varepsilon.$$

Но так как  $\mathfrak{M} \supseteq S$  и  $\mathfrak{M}$  является  $\sigma$ -алгеброй (см. задачу 7.27), то множество  $C_i = \bigcup_j D_{i,j}$  измеримо по Лебегу, и по свойствам меры выполнены оценки

$$0 < \mu(C_i \setminus A) = \mu C_i - \mu A \leq \sum_j m D_{i,j} - \mu A < \varepsilon.$$

Обозначим  $B_i = \bigcap_{r=1}^i C_r$  при  $i \in \mathbb{N}$ . Тогда  $B_i = \bigcup_{l=1}^{\infty} E_{i,l}$ , где все множества  $E_{i,l}$  из  $S$ . Далее, последовательность множеств  $\{B_i\}$  не возрастает (т. е.  $B_i \supseteq B_{i+1}$ ), и  $\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \setminus A\right) = 0$ . Если для  $j \in \mathbb{N}$  обозначить  $A_{i,j} = \bigcup_{l=1}^j E_{i,l} \in R(S)$ , то мы получаем искомое представление множества  $A$ .  $\square$

**7.46.** Предположим, что есть ещё одно представление

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j,$$

где все множества  $B_j$  из  $S$ , которое порождает другую  $\sigma$ -аддитивную меру  $\mu'$  на некоторой системе множеств  $\mathfrak{M}'$ . Пусть  $C_{i,j} = A_i \cap B_j$  для всех таких пар  $(i, j)$ , что  $C_{i,j} \neq \emptyset$ . Заметим, что  $\mathfrak{M} \cap C_{i,j} = \mathfrak{M}' \cap C_{i,j}$  (обозначение из задачи 5.13) и  $\mu'(A) = \mu(A)$  для каждого  $A \in \mathfrak{M} \cap C_{i,j}$ , поскольку  $\mu$  и  $\mu'$  — продолжения по Лебегу одной и той же меры  $t$ .

на полукольце  $S \cap C_{i,j}$  с единицей  $C_{i,j}$ . Пусть теперь множество  $A$  из  $\mathfrak{M}$ . Тогда для любых таких  $i, j$ , что  $C_{i,j} \neq \emptyset$ , выполнено условие  $A \cap C_{i,j} \in \mathfrak{M}_i \subseteq \mathfrak{M}$ , и

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A \cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A \cap C_{i,j}).$$

Но, как мы отмечали,  $A \cap C_{i,j} \in \mathfrak{M}'$  и  $\mu(A \cap C_{i,j}) = \mu'(A \cap C_{i,j})$ . Поэтому  $A \cap B_j \in \mathfrak{M}'_j$  для каждого  $j$ , откуда следует, что  $A \in \mathfrak{M}'$  и

$$\mu'(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu'(A \cap B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu'(A \cap C_{i,j}) = \mu(A).$$

□

**7.47.** Пусть

$$X = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j,$$

где все множества  $A_j$  из  $S$ , и  $\mathfrak{M}_j = \mathfrak{M} \cap A_j$  для всех  $j$ . Заметим, что в силу результата задачи 7.27 каждая система  $\mathfrak{M}_j$  является  $\sigma$ -алгеброй. Ясно, что  $X \in \mathfrak{M}$ . Пусть  $C, D \in \mathfrak{M}$ . Тогда  $C \cap A_j \in \mathfrak{M}_j$  и  $D \cap A_j \in \mathfrak{M}_j$  для всех  $j$ . Отсюда следует, что  $(C \cap D) \cap A_j = (C \cap A_j) \cap (D \cap A_j) \in \mathfrak{M}_j$  и  $(C \Delta D) \cap A_j = (C \cap A_j) \Delta (D \cap A_j) \in \mathfrak{M}_j$ . Поэтому  $C \cap D \in \mathfrak{M}$  и  $C \Delta D \in \mathfrak{M}$ . Таким образом,  $\mathfrak{M}$  — алгебра. Пусть теперь  $\{B_i\}$  — множества из  $\mathfrak{M}$ . Тогда  $B_i \cap A_j \in \mathfrak{M}_j$  для всех  $i$  и  $j$ . Отсюда следует, что

$$A_j \cap \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (B_i \cap A_j) \in \mathfrak{M}_j$$

для каждого  $j$ . Поэтому

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathfrak{M}.$$

□

**7.48.** Пусть  $B = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} B_j$ , где множества  $\{B_i\}$  из  $\mathfrak{M}$ . Так как все

меры  $\mu_i$  — ограничения меры  $\mu$  на  $\mathfrak{M} \cap A_i$  — являются  $\sigma$ -аддитивными, то

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \left( \bigsqcup_{j=1}^{\infty} (B_j \cap A_i) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu_i(B_j \cap A_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(B_j \cap A_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j). \end{aligned}$$

□

**7.49.** Пусть

$$A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \left[ n, n + \frac{1}{n^2} \right].$$

Тогда  $A$  неограничено, но

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

□

**7.50.** Мы можем повторить рассуждения из решения задачи 7.45. Условие  $\mu(B_1) < \infty$  следует из того, что  $\mu(B_1) = \mu(C_1) \leq \mu(A) + 1 < \infty$ . □

**7.51.** Если существует такое  $n$ , что  $\mu(A_n) = \infty$ , то утверждение верно. Предположим, что  $\mu(A_n) < \infty$  для всех  $n$ . Пусть  $B_1 = A_1$  и

$$B_j = A_j \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i \right)$$

при  $i = 2, 3, \dots$ . Тогда все множества  $B_j$  из  $\mathfrak{M}$ ,

$$A = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} B_j \quad \text{и} \quad A_n = \bigsqcup_{j=1}^n B_j.$$

Мы получаем, что

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \mu(B_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

□

**7.52.** Заметим, что множество  $A$  и все множества  $A_i$  — из  $\mathfrak{M}_1$ , где  $\sigma$ -алгебра есть  $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} \cap A_1$ , и  $\mu$  — конечная  $\sigma$ -аддитивная мера на  $\mathfrak{M}_1$ . Теперь утверждение следует из задачи 6.13. □

**7.53.** Пусть  $A_i = [i, \infty)$  при  $i \in \mathbb{N}$ . Тогда  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ ,  $\mu(A_i) = \infty$  для каждого  $i$ , но

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu(\emptyset) = 0.$$

□

**7.54.** По определению  $\sigma$ -конечной меры найдутся такие множества  $A_i$  из  $S$ , что  $\mu(A_i) < \infty$  и  $X = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i$ . Положим  $B_k = \bigsqcup_{i=k}^{\infty} A_i$ . Тогда

$B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$ ,  $\mu(B_k) = \infty$  для каждого  $k$ , но

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \mu(\emptyset) = 0.$$

□

**7.55.** Заметим вначале, что

$$B = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}.$$

Так как  $\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \subseteq \bigcap_{n=k+1}^{\infty} A_n$ , то в силу результата задачи 7.51 получаем, что

$$\mu(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n\right) \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

□

**7.56.** Пусть  $A_{2n-1} = \left(0, \frac{1}{2}\right)$  и  $A_{2n} = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\mu(A_n) = \frac{1}{2}$  при каждом  $n$ . Но так как  $A_{2n-1} \cap A_{2m} = \emptyset$  для всех  $n$  и  $m$ , то

$$\mu\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \mu(\emptyset) = 0.$$

□

**7.57.** Заметим, что

$$B = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}.$$

Так как  $\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \supseteq \bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n$ , то, используя задачу 6.13, получаем, что

$$\mu(B) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

□

**7.58.** Пусть  $A_n = [n, n+1)$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\mu(A_n) = 1$  для каждого  $n$ , но

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} [k, \infty) = \emptyset.$$

□

**7.59.** Пусть  $A_{2n-1} = \left(0, \frac{1}{2}\right)$  и  $A_{2n} = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\mu(A_n) = \frac{1}{2}$  при каждом  $n$ , но

$$\mu\left(\limsup_{r \rightarrow \infty} A_r\right) = \mu([0, 1]) = 1.$$

□

**7.60.** Для каждого натурального  $N$  имеем

$$\mu\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) \leq \mu\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=N}^{\infty} \mu(A_n).$$

Последняя величина стремится к нулю при  $N \rightarrow \infty$ . Поэтому

$$\mu\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 0.$$

□

**7.61.** Пусть  $m$  — полная мера на  $\sigma$ -алгебре  $S$ , а  $\mu$  — её продолжение по Лебегу на  $\sigma$ -алгебре  $\mathfrak{M}$ . Рассмотрим вначале случай, когда  $A \in \mathfrak{M}$  и  $\mu(A) = 0$ . Тогда для любого  $n$  существуют такие  $A_{n,k} \in S$ , что  $A \subseteq A_n = \bigcup_k A_{n,k}$  и  $\sum_k m(A_{n,k}) \leq \frac{1}{n}$ . В силу результата задачи 6.11  $m(A_n) \leq \frac{1}{n}$ . Полагая  $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ , получим, что  $A \subseteq B$ , где  $B \in S$  и  $m(B) = 0$ . Так как мера  $m$  полна, то отсюда следует, что  $A \in S$ .

Пусть теперь  $A \in \mathfrak{M}$  произвольное. Тогда в силу результата задачи 7.45 множество  $A$  может быть представлено в виде

$$A = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j}\right) \setminus A_0,$$

где множества  $A_{i,j} \in R(S) = S$  для  $i, j \in \mathbb{N}$ , а  $A_0 \in \mathfrak{M}$  и  $\mu(A_0) = 0$ . Выше установлено, что  $A_0 \in S$ . Тогда и  $A \in S$ . Следовательно,  $S = \mathfrak{M}$ . □

**7.62.** Пусть  $G$  — открытое множество в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда в силу результата задачи 7.34 множество  $G \cap (-r, r)^n$  из  $\mathfrak{M}$  для каждого натурального  $r$ . Так как  $\mathfrak{M}$  —  $\sigma$ -алгебра, то тогда и  $G \in \mathfrak{M}$ . Если  $F$  — замкнутое множество в  $\mathbb{R}^n$ , то  $G = \mathbb{R}^n \setminus F$  открыто, поэтому  $G \in \mathfrak{M}$ . Тогда и  $F \in \mathfrak{M}$ . □

**7.63.** По определению борелевской  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{B}_n$  — минимальная  $\sigma$ -алгебра, содержащая все открытые множества. В силу результата задач 7.47 и 7.62  $\mathfrak{M}$  —  $\sigma$ -алгебра, содержащая все открытые множества. Поэтому  $\mathcal{B}_n \subseteq \mathfrak{M}$ . □

**7.64.** Пусть  $E = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ . Заметим, что каждое одноточечное множество  $\{x_k\}$  измеримо по Лебегу и  $\mu(\{x_k\}) = 0$ . Так как в силу результата задачи 7.47 система  $\mathfrak{M}$  является  $\sigma$ -алгеброй, а мера  $\mu$  в силу результата задачи 7.48  $\sigma$ -аддитивна, то  $E \in \mathfrak{M}$  и  $\mu(E) = 0$ .  $\square$

**7.65.** Пусть  $A(k) = A \cap [-k, k]^n$  при  $k \in \mathbb{N}$ . Ясно, что  $A(k) \in \mathfrak{M}$  и  $\mu(A(k)) < \infty$ . Поэтому (см. задачи 7.39 и 7.42) для каждого  $r$  существует такое замкнутое множество  $F_r(k) \subseteq A(k)$ , что  $\mu(A(k) \setminus F_r(k)) < 1/r$ . Обозначим

$$P(k) = \bigcup_{r=1}^{\infty} F_r(k).$$

Тогда  $P(k)$  имеет тип  $F_{\sigma}$  и  $\mu(A(k) \setminus P(k)) = 0$ . Заметим, что

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A(k).$$

Если

$$A_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} P(k),$$

то  $A_1$  имеет тип  $F_{\sigma}$  и  $\mu(A \setminus A_1) = 0$ .  $\square$

**7.66.** Если  $A \in \mathfrak{M}$ , то  $B = \mathbb{R}^n \setminus A \in \mathfrak{M}$ . В силу результата задачи 7.65  $B = B_1 \sqcup B_2$ , где  $B_1$  имеет тип  $F_{\sigma}$ , а  $\mu(B_2) = 0$ . Но тогда

$$A = \mathbb{R}^n \setminus B = (\mathbb{R}^n \setminus B_1) \setminus B_2 \equiv A_1 \setminus B_2$$

и в силу результата задачи 3.42 множество  $A_1$  имеет тип  $G_{\delta}$ .  $\square$

**7.67.** Из построения немедленно следует, что  $\mu(I_k^n) = \frac{1}{3^n}$  для всех  $n$  и  $k$ . Поэтому

$$\mu(G) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1$$

и, следовательно,  $\mu(P_0) = 0$ .  $\square$

**7.68.** Пусть дан интервал  $(a, b) \subset (0, 1)$ . Предположим, что  $(a, b) \cap P \neq \emptyset$ . Тогда для каждого  $n$  выполнено условие

$$(a, b) \cap \left( \bigsqcup_{k=1}^{2^n} J_k^n \right) \neq \emptyset,$$

т. е. существует такое  $x \in (a, b)$ , что для каждого  $n$  найдётся натуральное число  $k_n \in [1, 2^n]$ , для которого  $x \in J_{k_n}^n$ . Выберем  $n$  так, чтобы  $\mu(J_{k_n}^n) < \min(b - x, x - a)$ . Тогда  $I_{k_n}^{n+1} \subset J_{k_n}^n \subset (a, b)$  и  $I_{k_n}^{n+1} \cap P = \emptyset$ .  $\square$

**7.69.** Так как

$$P(\alpha) = [0, 1] \setminus G = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{k=1}^{2^n} J_k^n(\alpha),$$

то в силу результата задачи 7.52

$$\mu(P(\alpha)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{2^n} J_k^n(\alpha)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \mu(J_1^n(\alpha)).$$

Докажем по индукции, что

$$\mu(J_1^n(\alpha)) = \frac{(n + \alpha + 1)\alpha}{2^n(n + \alpha)(\alpha + 1)}.$$

При  $n = 0$  и  $J_1^1 = [0; 1]$  утверждение верно. Если оно верно для некоторого  $n$ , то

$$\begin{aligned} \mu(J_1^{n+1}(\alpha)) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{(n + \alpha + 1)^2}\right) \mu(J_1^n(\alpha)) = \\ &= \frac{((n + 1)\alpha + 1)^2 - 1^2}{2^{n+1}(n + \alpha)(n + \alpha + 1)^2(\alpha + 1)} = \frac{(n + \alpha + 2)\alpha}{2^{n+1}(n + 1 + \alpha)(\alpha + 1)}. \end{aligned}$$

Подставляя выражение для  $\mu(J_1^n(\alpha))$  в формулу для  $\mu(P(\alpha))$ , получим, что  $\mu(P(\alpha)) = \frac{\alpha}{\alpha + 1}$ .  $\square$

**7.70.** Возьмём такие положительные числа  $\{a_n\}$ , что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - \alpha.$$

Из середины отрезка  $[0; 1]$  удалим интервал длины  $a_1$ . Затем из середины каждого из оставшихся отрезков удалим интервал длины  $\frac{a_2}{2}$ .

Если после  $(n - 1)$  шага у нас осталось множество  $F_{n-1}$ , состоящее из  $2^{n-1}$  равных отрезков суммарной меры  $1 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k > a_n$ , то удалим из середины каждого из них интервал длины  $\frac{a_n}{2^{n-1}}$ . В пересечении всех множеств  $F_n$  получим искомое  $P_\alpha$ . Тот факт, что любое  $P_\alpha$  нигде не плотно на  $[0, 1]$ , доказывается так же, как в задаче 7.68.  $\square$

**7.71.** Пусть  $\mu(A) = a > 0$ . Предположим, что  $A \in \mathfrak{M}_J$ . Тогда (см. задачу 7.22)  $\mu_J(A) = a$  и (см. задачу 7.19)  $B = [0, 1] \setminus A \in \mathfrak{M}_J$ . Но  $B$  — всюду плотное множество на  $[0, 1]$ . Отсюда следует, что

$\mu_J(B) = \mu_J^*(B) = 1$  (доказательство аналогично приведённому в решении задачи 7.9). Поэтому

$$1 = \mu_J([0, 1]) = \mu_J(A) + \mu_J(B) = a + 1,$$

и мы пришли к противоречию. Это означает, что  $A \notin \mathfrak{M}_J$ .  $\square$

**7.72.** Пусть  $A(N) = \{x \in [0, 1]: x_{n_k} = a_k \text{ при } k = 1, 2, \dots, N\}$ . Заметим, что  $A(1) \supset A(2) \supset \dots$  и

$$A = \bigcap_{N=1}^{\infty} A(N).$$

Поэтому  $\mu(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(A(N))$ . Но ясно, что  $\mu(A(N+1)) = \frac{1}{2} \mu(A(N))$  для каждого  $N$ . Следовательно, в силу результата задачи 7.62 мера множества  $A$  равна нулю.  $\square$

**7.73.** Поскольку множество  $A$  открыто, то  $A \in \mathfrak{M}$ . Пусть

$$G = [0, 1] \setminus P = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i).$$

Если  $b_n - a_n < 0.1$ , то  $(a_n, b_n) \subset (a_n - 0.05, a_n + 0.05) \cup (b_n - 0.05, b_n + 0.05) \subset A$ . Если  $b_n - a_n \geq 0.1$ , то  $(a_n, b_n) \setminus A = [a_n + 0.05, b_n - 0.05]$ . Отсюда следует, что

$$(0, 1) \setminus A =$$

$$= \left[ \frac{1}{3} + 0.05, \frac{2}{3} - 0.05 \right] \cup \left[ \frac{1}{9} + 0.05, \frac{2}{9} - 0.05 \right] \cup \left[ \frac{7}{9} + 0.05, \frac{8}{9} - 0.05 \right]$$

и  $\mu((0, 1) \setminus A) = \frac{5}{9} - \frac{3}{10} = \frac{23}{90}$ . Поэтому  $\mu(A) = \frac{67}{90}$ .  $\square$

**7.74.** Если  $A_j = \{x = (x_1, x_2, \dots) \in [0, 1]: x_k \neq 6 \text{ при } k = 1, 2, \dots, j\}$ , то  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$  и

$$A = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j.$$

Поэтому  $A \in \mathfrak{M}$  и, так как  $\mu(A_{j+1}) = \frac{9}{10} \mu(A_j)$  при всех  $j$ , то

$$\mu(A) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \left( \frac{9}{10} \right)^j = 0.$$

$\square$

**7.75.** Предположим, что множество  $F$  не является нигде не плотным. Тогда существует такой невырожденный отрезок  $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$ , что  $F$  всюду плотно на  $[a, b]$ . Так как  $F$  замкнуто, то  $[a, b] \subseteq F$ . Поэтому

$\mu(F) \geq \mu([a, b]) > 0$ . Мы пришли к противоречию, следовательно,  $F$  нигде не плотно.  $\square$

**7.76.** Пусть  $P_{1/2}$  — нигде не плотное множество меры  $1/2$ , построенное в задаче 7.70, а  $A \subset P_{1/2}$  — множество всех граничных точек дополнительных к  $P_{1/2}$  интервалов. Так как  $P_{1/2}$  нигде не плотно, то и  $A$  нигде не плотно. Так как  $A$  счётно, то  $\mu(A) = 0$ . Но  $\bar{A} = P_{1/2}$ .  $\square$

**7.77.** Если  $t > 0$ , то

$$\begin{aligned} |f(x+t) - f(x)| &= |\mu(A \cap [0, x+t]) - \mu(A \cap [0, x])| = \\ &= \mu(A \cap [x, x+t]) \leq t. \end{aligned}$$

Отсюда следует непрерывность функции  $f$ .  $\square$

**7.78.** Вначале (см. задачу 7.70) мы построим замкнутое нигде не плотное множество  $F_1$  на  $[0, 1]$  с  $\mu(F_1) = \frac{\alpha}{2} < \frac{1}{2}$ . Дополнением к нему будет открытое множество

$$G_1 = (0, 1) \setminus F_1 = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (c_{1,n}, d_{1,n}),$$

и, поскольку  $\mu(G_1) > \alpha/2$ , то можно построить замкнутые нигде не плотные множества  $F_{2,n} \subset (c_{1,n}, d_{1,n})$  с  $\mu(F_{2,n}) = \frac{\alpha(d_{1,n} - c_{1,n})}{4\mu(G_1)}$  для  $n \in \mathbb{N}$ . Докажем, что множество

$$F_2 = F_1 \sqcup \left( \bigsqcup_{n=1}^{\infty} F_{2,n} \right)$$

замкнуто и нигде не плотно. Действительно, если  $a$  — предельная точка множества  $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} F_{2,n}$ , то она либо лежит в некотором интервале  $(c_{1,n_0}, d_{1,n_0})$  и является предельной точкой множества  $F_{2,n_0}$ , либо лежит в  $F_1 = [0; 1] \setminus G_1$ . В обоих случаях  $a \in F_2$ . Множество  $F_2$  нигде не плотно; это следует из того, что для любого интервала  $I$  найдётся интервал  $J \subseteq I \cap (c_{1,n_0}, d_{1,n_0})$  при некотором  $n_0$ , а  $F_{2,n_0}$  нигде не плотно на  $(c_{1,n_0}, d_{1,n_0})$ . Пусть теперь

$$G_2 = (0, 1) \setminus F_2 = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (c_{2,n}, d_{2,n}).$$

Заметим, что  $\mu(F_2) = \alpha \left( 1 - \frac{1}{4} \right)$  и  $\mu(G_2) = 1 - \alpha \left( 1 - \frac{1}{4} \right) > \frac{\alpha}{4}$ .

Предположим теперь, что мы уже определили замкнутые нигде не плотные множества  $F_1 \subset \dots \subset F_{l-1}$  с  $\mu(F_i) = \alpha \left(1 - \frac{1}{2^{l-1}}\right)$  для  $i \leq l-1$ , и пусть

$$G_{l-1} = (0, 1) \setminus F_{l-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (c_{l-1,n}, d_{l-1,n}).$$

Тогда  $\mu(G_{l-1}) = 1 - \alpha \left(1 - \frac{1}{2^{l-1}}\right) > \frac{\alpha}{2^{l-1}}$ . Построим замкнутые нигде не плотные множества  $F_{l,n} \subset (c_{l-1,n}, d_{l-1,n})$  с  $\mu(F_{l,n}) = \frac{\alpha(d_{l-1,n} - c_{l-1,n})}{2^l \mu(G_{l-1})}$ .

Аналогично предыдущим рассуждениям доказывается, что множество

$$F_l = F_{l-1} \sqcup \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{l,n} \right)$$

замкнуто и нигде не плотно. При этом  $\mu(F_l) = \alpha \left(1 - \frac{1}{2^l}\right)$ . Наконец, пусть

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j.$$

Покажем, что множество  $A$  удовлетворяет условиям задачи. Имеем  $\mu(A) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(F_j) = \alpha$ . Рассмотрим невырожденный отрезок  $[a, b] \subseteq [0, 1]$ . Так как множество  $F_k$  нигде не плотно для каждого  $k$  и  $\max_n (d_{k,n} - c_{k,n}) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , то существуют такие числа  $k_0$  и  $n_0$ , что  $I_0 = (c_{k_0, n_0}, d_{k_0, n_0}) \subset (a, b)$  и  $1 - \frac{\alpha}{2^{k_0}(1-\alpha)} > 0$ . Тогда  $F_{k_0+1, n_0} \subset [a, b]$ , поэтому  $\mu(A \cap [a, b]) \geq \mu(F_{k_0+1, n_0}) > 0$ . С другой стороны,  $\mu(A \cap [a, b]) \leq b - a - \mu([0, 1] \setminus A) \cap I_0)$  и в силу очевидного неравенства  $\mu(G_k) \geq 1 - \alpha$  при всех  $k$  мы получаем, что

$$\begin{aligned} \mu([0, 1] \setminus A) \cap I_0) &\geq \mu(I_0) \left(1 - \frac{\alpha}{2^{k_0+1} \mu(G_{k_0})} - \frac{\alpha}{2^{k_0+2} \mu(G_{k_0+1})} - \dots\right) \geq \\ &\geq \mu(I_0) \left(1 - \frac{\alpha}{2^{k_0}(1-\alpha)}\right) > 0. \end{aligned}$$

□

**7.79.** Пусть  $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$  — последовательность замкнутых множеств, построенная в решении задачи 7.78 для  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Тогда  $F_n \cap F_k = \emptyset$  при  $n \neq k$ . Пусть

$$A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_{(p_n)^i}$$

для  $n \in \mathbb{N}$ , где  $p_n$  —  $n$ -е простое число ( $p_1 = 2$ ). Очевидно, что  $A_n \cap A_k = \emptyset$  при  $n \neq k$ . Рассмотрим невырожденный отрезок  $[a, b] \subset [0, 1]$ . Если

$$G_k = (0, 1) \setminus F_k = \bigsqcup_{r=1}^{\infty} (c_{k,r}, d_{k,r}),$$

то (см. решение задачи 7.78) существует такое  $K$ , что для каждого  $k \geq K$  существует  $r = r(k)$ , для которого  $(c_{k,r}, d_{k,r}) \subset [a, b]$ . Для каждого  $n$  найдём такое  $l$ , что  $p_n^l > K$ . Затем найдём такое  $r_0$ , что  $(c_{p_n^l, r_0}, d_{p_n^l, r_0}) \subset [a, b]$ . Тогда (см. решение задачи 7.78)

$$\mu(A_n \cap [a, b]) \geq \mu(F_{p_n^l} \cap (c_{p_n^l, r_0}, d_{p_n^l, r_0})) > 0.$$

□

**7.80.** Построим вначале (см. задачу 7.70) замкнутое нигде не плотное множество  $F_1 \subset [0, 1]$  с  $\mu(F_1) = \frac{1}{2}$ . Пусть

$$G_1 = (0, 1) \setminus F_1 = \bigsqcup_{r=1}^{\infty} (c_{1,r}, d_{2,r}).$$

Затем для каждого  $r$  построим нигде не плотное замкнутое множество  $F_{2,r} \subset (c_{1,r}, d_{2,r})$  с  $\mu(F_{2,r}) = \frac{1}{2} \mu((c_{1,r}, d_{2,r}))$ . Аналогично рассуждениям из решения задачи 7.78 показывается, что множество

$$F_2 = F_1 \sqcup \left( \bigsqcup_{r=1}^{\infty} F_{2,r} \right)$$

замкнуто и нигде не плотно. Пусть теперь

$$G_2 = (0, 1) \setminus F_2 = \bigsqcup_{r=1}^{\infty} (c_{2,r}, d_{2,r}).$$

Так как множество

$$F_1 \cap \left( \bigsqcup_{r=1}^{\infty} F_{2,r} \right)$$

пусто, то  $\mu(F_2) = 1 - \frac{1}{4}$ . Предположим, что мы уже определили замкнутые нигде не плотные множества  $F_1 \subset \dots \subset F_{l-1}$  с  $\mu(F_i) = 1 - \frac{1}{2^i}$  при  $i \leq l-1$ , и пусть

$$G_{l-1} = (0, 1) \setminus F_{l-1} = \bigsqcup_{r=1}^{\infty} (c_{l-1,r}, d_{l-1,r}).$$

Построим замкнутые нигде не плотные множества  $F_{l,r} \subset (c_{l-1,r}, d_{l-1,r})$  с  $\mu(F_{l,n}) = \frac{(d_{l-1,n} - c_{l-1,n})}{2}$ . Так как все  $F_{l,r}$  лежат на непересекающихся интервалах, то множество

$$F_l = F_{l-1} \bigcup \left( \bigsqcup_{r=1}^{\infty} F_{l,r} \right)$$

замкнуто и нигде не плотно. При этом  $\mu(F_l) = 1 - \frac{1}{2^l}$ . Наконец, пусть  $A_1 = F_1$  и

$$A_n = F_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} F_j.$$

Ясно, что все множества  $A_n$  нигде не плотны и  $A_n \cap A_k = \emptyset$  при  $n \neq k$ . При этом

$$\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n) = 1.$$

□

**7.81.** Существует такой замкнутый невырожденный отрезок  $J$ , что  $\mu(F \cap J) > 0$ . На первом шаге, используя задачу 7.77, выберем два невырожденных отрезка  $J_0, J_1 \subset J$ , для которых  $J_0 \cap J_1 = \emptyset$  и  $\mu(F \cap J_k) > 0$  для  $k = 0, 1$ . Предположим теперь, что на  $(n-1)$ -м шаге мы выбрали такие невырожденные отрезки  $J_{i_1, \dots, i_{n-1}}$ , где  $i_k \in \{0, 1\}$ , что  $J_{i_1, \dots, i_{n-1}} \cap J_{k_1, \dots, k_{n-1}} = \emptyset$ , если для некоторого  $l \in [1, n-1]$  выполнено  $i_l \neq k_l$ , и  $\mu(F \cap J_{i_1, \dots, i_{n-1}}) > 0$  для всех этих отрезков. Тогда на  $n$ -м шаге для каждого  $i_1, \dots, i_{n-1}$  мы выберем два невырожденных отрезка  $J_{i_1, \dots, i_{n-1}, 0}, J_{i_1, \dots, i_{n-1}, 1} \subset J_{i_1, \dots, i_{n-1}}$ , для которых  $J_{i_1, \dots, i_{n-1}, 0} \cap J_{i_1, \dots, i_{n-1}, 1} = \emptyset$  и  $\mu(F \cap J_{i_1, \dots, i_{n-1}, k}) > 0$  при  $k = 0, 1$ . Теперь для каждого набора  $y = (y_1, y_2, \dots)$ , где  $y_j \in \{0, 1\}$ , определим множество

$$E_y = \bigcap_{n=1}^{\infty} J_{y_1, y_2, \dots, y_n}.$$

Заметим, что  $E_y \neq \emptyset$  для каждого  $y$  и  $E_y \cap E_z = \emptyset$  при  $y \neq z$ . Так как множество  $F$  замкнуто и  $F \cap J_{y_1, y_2, \dots, y_n} \neq \emptyset$  для любых  $y_1, \dots, y_n$ , то по принципу вложенных отрезков существует точка  $x_y \in F \cap E_y$ . Таким образом,  $F$  содержит подмножество мощности континуума. Но так как  $F \subset \mathbb{R}^n$ , то мощность  $F$  не превосходит мощности континуума. □

**7.82.** Выберем замкнутое  $F \subseteq A$  с  $\mu(F) > 0$  (такое множество существует в силу результата задачи 7.40) и применим к нему задачу 7.81. □

**7.83.** Пусть  $f(x) = \mu(A \cap [-x, x]^n)$  при  $x > 0$ . Тогда  $f(0) = 0$  и  $f(x)$  — неубывающая функция на  $[0, \infty)$ . Заметим, что при  $t > 0$  выполнена оценка

$|f(x+t) - f(x)| \leq \mu([-x-t, x+t]^n \setminus [-x, x]^n) \leq 2n(2x+2t)^{n-1}t \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0_+$ . Поэтому  $f(x) \in C([0, \infty))$ . Далее, так как

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

где  $A_k = A \cap [-k, k]^n$  при  $k \in \mathbb{N}$  и  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ , то мы получаем, что (см. задачу 7.51)  $a = \mu(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k)$ . Отсюда следует, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ . Следовательно, существует такое число  $y \in [0, \infty)$ , что  $f(y) = b$ . Тогда  $A_b = A \cap [-y, y]^n$  есть множество меры  $b$ .  $\square$

**7.84.** Пусть

$$A = \bigsqcup_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{\alpha}{n(n-1)} \right].$$

Ясно, что  $A \in \mathfrak{M}$ . Пусть теперь  $x \in (0, 1]$ . Тогда существует такое  $n_0 \geq 2$ , что  $\frac{1}{n_0} < x \leq \frac{1}{n_0-1}$ . Имеем

$$\begin{aligned} \mu(A \cap [0, x]) &= \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \mu \left( \left[ \frac{1}{k}, \frac{1}{k} + \frac{\alpha}{k(k-1)} \right] \right) + \\ &+ \mu \left( \left[ \frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0} + \frac{\alpha}{n_0(n_0-1)} \right] \cap [0, x] \right) = \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{\alpha}{k(k-1)} + \beta_{n_0} = \frac{\alpha}{n_0} + \beta_{n_0}, \end{aligned}$$

где  $0 \leq \beta_{n_0} \leq \frac{\alpha}{n_0(n_0-1)}$ . Поэтому

$$f(x) \equiv \frac{\mu(A \cap [0, x])}{x} = \frac{\alpha}{n_0 x} + \frac{\beta_{n_0}}{x}$$

и, так как  $\frac{1}{n_0} < x \leq \frac{1}{n_0-1}$ , то

$$\frac{\alpha(n_0-1)}{n_0} \leq f(x) \leq \alpha + \beta_{n_0} n_0 \leq \alpha + \frac{\alpha}{n_0-1}.$$

Отсюда следует, что существует  $\lim_{x \rightarrow 0_+} f(x) = \alpha$ .  $\square$

**7.85.** Заметим вначале, что если множество  $A$  из  $R(S)$ , то утверждение выполнено. Пусть теперь  $\varepsilon > 0$  и  $A_\varepsilon \in R(S)$  таково, что  $\mu^*(A \Delta A_\varepsilon) < \varepsilon$ . Тогда множество  $A_\varepsilon + a$ , принадлежащее  $R(S)$ , удовлетворяет условию  $\mu^*((A + a) \Delta (A_\varepsilon + a)) = \mu^*(A \Delta A_\varepsilon) < \varepsilon$ . Поэтому

$A + a \in \mathfrak{M}$ . Более того, так как  $m(B) = m(B + a)$  для каждого  $B \in S$ , то  $\mu(A + a) = \mu^*(A + a) = \mu^*(A) = \mu(A)$ .  $\square$

**7.86.** Пусть  $A_k = A \cap [-k, k]^n$  при  $k \in \mathbb{N}$ . В силу результата задачи 7.85  $A_k + a \in \mathfrak{M}$  для каждого  $k$ . Отсюда следует, что

$$A + a = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k + a) \in \mathfrak{M}.$$

При этом (см. задачу 7.51),

$$\mu(A + a) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k + a) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \mu(A).$$

$\square$

**7.87.** Пусть  $\mathbb{Q}_{[0;1]} = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$  — последовательность всех рациональных чисел из отрезка  $[0, 1]$ . Обозначим  $A_n = A + r_n$ . Тогда (см. задачу 7.85) все множества  $A_n$  из  $\mathfrak{M}$  и  $\mu(A_n) = \mu(A) = a > 0$ . Заметим, что  $A_n \subset [0, 2]$ . Пусть  $A_n \cap A_k = \emptyset$  при  $n \neq k$ . Тогда

$$2 \geq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \infty.$$

Из полученного противоречия следует, что существуют такие  $n \neq k$ , что  $A_n \cap A_k \neq \emptyset$ , т. е. для некоторых  $x, y \in A$  выполнено равенство  $x + r_n = y + r_k$ . Это эквивалентно утверждению задачи.  $\square$

**7.88.** Предположим, что  $x - y \in \mathbb{Q}$  для любых  $x, y \in A$ . Тогда, взяв произвольное  $x_0 \in A$ , получим, что  $A \subseteq \mathbb{Q} + x_0$ . Но в силу результата задач 7.64 и 7.86 мера множества  $\mu(\mathbb{Q} + x_0)$  равна нулю. Тогда и  $\mu(A) = 0$ , что противоречит условиям задачи.  $\square$

**7.89.** Определим на  $[0, 1]$  отношение эквивалентности:  $x \sim y$ , если  $x - y \in \mathbb{Q}$ . Нетрудно видеть, что свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности действительно выполнены, поэтому

$$[0, 1] = \bigsqcup_{\alpha \in U} H_{\alpha},$$

где  $H_{\alpha}$  — соответствующие классы эквивалентности. Используя аксиому выбора, возьмём по одному элементу из каждого класса  $H_{\alpha}$ ; получим множество  $E = \{x_{\alpha}\}_{\alpha \in U}$ . Обозначим через  $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ , где  $r_0 = 0$ , множество всех рациональных чисел из отрезка  $[-1, 1]$ , и пусть  $E_n = E + r_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Пусть для некоторых  $n \neq k$  выполнено условие  $E_n \cap E_k \neq \emptyset$ . Тогда существует число  $a$ , которое имеет два представления:  $x_{\alpha} + r_n = a = x_{\beta} + r_k$ . Поэтому  $x_{\alpha} - x_{\beta} \in \mathbb{Q}$ , но так как  $E$  не содержит двух элементов из одного класса, то  $x_{\alpha} = x_{\beta}$  и  $r_n = r_k$ , т. е.  $n = k$ . Мы пришли к противоречию, следовательно,  $E_k \cap E_n = \emptyset$  при  $n \neq k$ . Далее, для каждого  $x \in [0, 1]$  существует

такое  $x_\omega \in E$ , что  $x \sim x_\omega$ . Так как  $|x - x_\omega| \leq 1$ , то  $x - x_\omega = r_n$  при некотором  $n$ . Тогда  $x \in E_n$ . Таким образом,

$$[0, 1] \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \subseteq [-1, 2].$$

Предположим, что  $E_0 \in \mathfrak{M}$  и  $\mu(E_0) = a$ . Тогда (см. задачу 7.85) все множества  $E_n$  измеримы по Лебегу и  $\mu(E_n) = a$ . Если  $a = 0$ , то

$$1 = \mu([0, 1]) \leq \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0,$$

что невозможно. Если  $a > 0$ , то

$$\infty = \sum_{n=0}^{\infty} a \leq \mu([-1, 2]) = 3,$$

и мы вновь пришли к противоречию. Поэтому  $E_0$  неизмеримо по Лебегу.  $\square$

**7.90.** Проведём доказательство по той же схеме, что и в задаче 7.89. Без ограничения общности будем считать, что  $A \subset [0, 1]^n$ . Определим на  $A$  отношение эквивалентности:  $x \sim y$ , если  $x_j - y_j \in \mathbb{Q}$  при  $1 \leq j \leq n$ . Свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности выполнены, поэтому

$$A = \bigsqcup_{\alpha \in U} H_\alpha,$$

где  $H_\alpha$  — классы эквивалентности. Применяя аксиому выбора, возьмём по одному элементу из каждого класса  $H_\alpha$  и получим множество  $E = \{x_\alpha\}_{\alpha \in U}$ . Обозначим теперь через  $\{r(k)\}_{k=0}^\infty$ , где  $r(0) = 0$ , все точки с рациональными координатами из промежутка  $[-1, 1]^n$ , и пусть  $E_k = E + r(k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Если для некоторых  $j \neq k$  выполнено условие  $E(j) \cap E(k) \neq \emptyset$ , то существует вектор  $a$ , который имеет два представления:  $x_\alpha + r(j) = a = x_\beta + r(k)$ . Тогда  $x_\alpha - x_\beta$  — вектор, все координаты которого рациональны. Так как  $E$  не содержит двух эквивалентных элементов, то  $x_\alpha = x_\beta$  и  $r(j) = r(k)$ , т. е.  $j = k$ . Полученное противоречие доказывает, что  $E(k) \cap E(j) = \emptyset$  при  $j \neq k$ . Для любого  $x \in A$  существует такое  $x_\omega \in E$ , что  $x \sim x_\omega$ . Пусть  $x - x_\omega = r(k)$ . Тогда  $x \in E_k$ . Поэтому

$$A \subseteq \bigsqcup_{k=0}^{\infty} E_k \subseteq [-1, 2]^n.$$

Предположим, что  $E_0 \in \mathfrak{M}$  и  $\mu(E_0) = a$ . Тогда (см. задачу 7.85) все множества  $E_k$  из  $\mathfrak{M}$  и  $\mu(E_k) = a$ . Если  $a = 0$ , то

$$0 < \mu(A) \leq \sum_{k=0}^{\infty} 0 = 0,$$

что невозможно. Если  $a > 0$ , то

$$\infty = \sum_{k=0}^{\infty} a \leq \mu([-1, 2]^n) = 3^n,$$

и мы вновь пришли к противоречию. Поэтому  $E_0 \notin \mathfrak{M}$ . Заметим, что в множестве  $E_0$  нет измеримых подмножеств положительной меры, так как это приводит к тому же противоречию, что и в случае  $a > 0$ . Данным фактом мы воспользуемся ниже.  $\square$

**7.91.** Пример тот же, что и в задаче 7.29.  $\square$

**7.92.** Пусть  $A_1$  — неизмеримое множество, построенное в решении задачи 7.89 и  $A_2 = [0, 1] \setminus A_1$ . Тогда (см. задачу 7.18) множество  $A_2$  также неизмеримо относительно классической меры Лебега на  $[0, 1]$ , но  $A_1 \sqcup A_2 = [0, 1] \in \mathfrak{M}$ .  $\square$

**7.93.** Пусть  $A_1$  — неизмеримое множество, построенное в решении задачи 7.89 и  $A_2 = [0, 1] \setminus A_1$ . Тогда, как отмечено в указанном решении, в  $A_1$  нет измеримых подмножеств положительной меры, тем более замкнутых. Поэтому  $\mu_{1,*}(A_1) = 0$  и, так как  $A_1$  неизмеримо (см. задачи 7.39 и 7.42), то  $\mu^*(A_1) = \mu_1^*(A_1) = a > 0$ . Также (см. задачу 7.41)

$$\mu^*(A_2) = \mu_1^*(A_2) = 1 - \mu_{1,*}(A_1) = 1.$$

Тогда

$$1 = \mu([0, 1]) = \mu^*(A_1 \sqcup A_2) < \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) = 1 + a.$$

$\square$

**7.94.** Пусть  $E$  — неизмеримое множество на  $[0, 1]$  и  $A = \{(x, x) : x \in E\}$ . Тогда обе проекции  $A$  на координатные оси равны  $E$  и, следовательно, неизмеримы. В то же время для каждого  $n$  множество  $A$  может быть покрыто объединением квадратов  $\left\{ \left[ \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right]^2 \right\}_{k=1}^n$ . Сумма их мер равна  $\frac{1}{n}$ . Поэтому множество  $A$  измеримо относительно классической меры Лебега на  $[0, 1]^2$  (см. задачу 7.17) и его мера равна нулю.  $\square$

**7.95.** Пусть  $E$  — неизмеримое подмножество квадрата  $\left[ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right]^2$  (см. задачу 7.90) и  $A = E \sqcup (\{0\} \times [0, 1]) \sqcup ([0, 1] \times \{0\})$ . Нетрудно

видеть, что  $A$  неизмеримо относительно классической меры Лебега на  $[0, 1]^2$ , но обе его проекции равны  $[0, 1]$ .  $\square$

**7.96.** Пусть  $S_1$  и  $S_2$  — полуокольца всех промежутков из  $\mathbb{R}^1$  и  $\mathbb{R}^2$  соответственно и дано  $\varepsilon > 0$ . Найдём такие множества  $A_1$  и  $B_1$  из  $R(S_1)$ , что  $\mu(A \Delta A_1) < \varepsilon$  и  $\mu(B \Delta B_1) < \varepsilon$ . Это означает, что существует системы  $\{C_i\}_{i=1}^\infty$  и  $\{D_i\}_{i=1}^\infty$  элементов  $S_1$ , для которых

$$A \Delta A_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty C_i, \quad B \Delta B_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty D_i$$

и

$$\sum_{i=1}^\infty m(C_i) < \varepsilon, \quad \sum_{i=1}^\infty m(D_i) < \varepsilon.$$

Заметим, что  $A_1 \times B_1 \in R(S_2)$ , а системы  $\{C_i \times [a, b]\}_{i=1}^\infty$  и  $\{[a, b] \times D_i\}_{i=1}^\infty$  состоят из элементов  $S_2$ . Кроме того,

$$(A \times B) \Delta (A_1 \times B_1) \subseteq \left( \bigcup_{i=1}^\infty (C_i \times [a, b]) \right) \cup \left( \bigcup_{i=1}^\infty ([a, b] \times D_i) \right)$$

и

$$\sum_{i=1}^\infty (m_2(C_i \times [a, b]) + m_2([a, b] \times D_i)) < 2\varepsilon(b - a).$$

Поэтому множество  $A \times B$  измеримо относительно классической меры Лебега на  $[a, b]^2$ .  $\square$

**7.97.** Из задачи 7.96 следует, что множество  $(A \times B) \cap [-k, k]^2$  измеримо относительно классической меры Лебега на  $\mathbb{R}^2$  для каждого  $k$ . Поэтому множество  $A \times B$  измеримо относительно классической меры Лебега на  $\mathbb{R}^2$ .  $\square$

**7.98.** Пусть  $A$  — неизмеримое подмножество отрезка  $[0; 1]$  (см. задачу 7.89), а  $B = \emptyset$ . Тогда  $A \times B = \emptyset$  — измеримое. Более того, в качестве  $B$  можно взять произвольное множество  $B \subset \mathbb{R}$ , мера которого равна нулю.  $\square$

**7.99.** Заметим, что  $A = A_1 \setminus A_2$ , где

$$A_1 = \left\{ (x, y) \in [0, 1]^2 : \sin y < \frac{1}{2} \right\} = [0, 1] \times \left[ 0, \frac{\pi}{6} \right)$$

и

$$A_2 = \{(x, y) \in A_1 : x \in \mathbb{Q}_{[0, 1]}\}.$$

Ясно, что  $\mu(A_1) = \frac{\pi}{6}$  и

$$\mu(A_2) = \sum_{r_n \in [0, \frac{\pi}{6}) \cap \mathbb{Q}} \mu(\{r_n\} \times [0, 1]) = 0.$$

Поэтому  $\mu(A) = \frac{\pi}{6}$ .  $\square$

**7.100.** Заметим вначале, что

$$\bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathfrak{M}.$$

Далее,

$$A \setminus \left( \bigcap_{k=1}^n A_k \right) = \bigcup_{k=1}^n (A \setminus A_k).$$

Отсюда следует, что

$$\mu \left( A \setminus \left( \bigcap_{k=1}^n A_k \right) \right) \leq \sum_{k=1}^n (\mu(A) - \mu(A_k)) = n - \sum_{k=1}^n \mu(A_k) < 1.$$

Следовательно,

$$\mu \left( \bigcap_{k=1}^n A_k \right) > 0.$$

$\square$

**7.101.** Пусть  $A_i = [0, 1] \setminus \left[ \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right]$  для  $i = 1, 2, \dots, n$ . Тогда  $\mu(A_i) = \frac{n-1}{n}$  при всех  $i$ , поэтому

$$\sum_{i=1}^n \mu(A_i) = n - 1.$$

С другой стороны,

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \emptyset.$$

$\square$

**7.102.** Заметим, что если множество  $A$  принадлежит  $S$ , то  $aA \in S$  и  $m(aA) = a \cdot m(A)$ . Далее, если  $A \in R(S)$ , то  $aA \in R(S)$  и  $\nu(aA) = a \times \nu(A)$ . Для данного  $\varepsilon > 0$  выберем  $B \in R(S)$  так, чтобы  $\mu(A \Delta B) < \frac{\varepsilon}{a}$ . Тогда существует такая система множеств  $\{C_i\}_{i=1}^\infty \subset S$ , что

$$A \Delta B \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty C_i \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^\infty m(C_i) < \frac{\varepsilon}{a}.$$

Но тогда система  $\{aC_i\}_{i=1}^\infty$  элементов  $S$  такова, что

$$(aA) \Delta (aB) \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty aC_i \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^\infty m(aC_i) < \varepsilon.$$

Поэтому  $aA \in \mathfrak{M}$ . Аналогичные рассуждения показывают, что  $\mu(aA) = \mu^*(aA) = a\mu^*(A) = \mu(A)$ .  $\square$

**7.103.** Ясно, что  $A$  — замкнутое множество на  $\mathbb{R}^2$ , поэтому оно измеримо. Пусть дано  $\varepsilon > 0$ . Найдём такое разбиение отрезка  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , что если  $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$ ,  $M_k = \max_{x \in \Delta_k} f(x)$  и  $m_k = \min_{x \in \Delta_k} f(x)$  при  $k = 1, \dots, n$ , то

$$\sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \mu(\Delta_k) < \varepsilon.$$

Определим два множества из  $R(S)$ :

$$A_M = \bigcup_{k=1}^n (\Delta_k \times [0, M_k]) \quad \text{и} \quad A_m = \bigcup_{k=1}^n (\Delta_k \times [0, m_k]).$$

Тогда  $A_m \subseteq A \subseteq A_M$ , поэтому  $\mu(A_m) \leq \mu(A) \leq \mu(A_M)$ . В то же время

$$\mu(A_m) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \mu(A_M)$$

и  $\mu(A_M) - \mu(A_m) < \varepsilon$ . Отсюда следует, что

$$\left| \mu(A) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Но  $\varepsilon > 0$  произвольно.  $\square$

**7.104.** Для невырожденного отрезка  $I$  обозначим через  $5I$  промежуток с той же серединой и длины  $5\mu(I)$ . Пусть вначале

$$a_1 = \sup_{I(x) \in T_0} \mu(I(x)) = \sup_{I(x) \in T_0} t_x.$$

Если  $a_1 = \infty$ , то можно выбрать отрезок  $I_1 \in T_0$  с  $\mu(I_1) > \mu^*(E)$ , и утверждение доказано. Пусть  $a_1 < \infty$ . Выберем тогда такой отрезок  $I_1 \in T_0$ , что  $\mu(I_1) > \frac{1}{2} a_1$ . Определим множество

$$T_1 = \{I \in T_0 : I \cap I_1 = \emptyset\}.$$

Предположим, что уже выбраны системы  $T_0 \supset T_1 \supset \dots \supset T_m$ , определены числа

$$a_j = \sup_{I \in T_{j-1}} \mu(I) > 0$$

для  $j = 1, \dots, m$  и выбраны такие непересекающиеся отрезки  $I_1, I_2, \dots, I_m \in T_0$ , что  $\mu(I_j) > \frac{1}{2} a_j$  при  $j = 1, \dots, m$ . Если  $T_m = \emptyset$ , то положим  $a_{m+1} = a_{m+2} = \dots = 0$  и завершим построение. В противном случае, пусть

$$a_{m+1} = \sup_{I \in T_m} \mu(I)$$

и мы выберем такой отрезок  $I_{m+1} \in T_m$ , что  $\mu(I_{m+1}) > \frac{1}{2} a_{m+1}$ . Определим систему

$$T_{m+1} = \{I \in T_m : I \cap I_{m+1} = \emptyset\}.$$

Продолжая этот процесс, мы построим систему  $Q = \{I_k\}$  непересекающихся интервалов, которая конечна или счётна. По построению  $a_k$  не возрастают при  $k \rightarrow \infty$ . Если существует  $c > 0$ , для которого  $a_i \geq c$  при всех  $i$ , то

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) \geq Nc > \mu^*(E)$$

при достаточно больших  $N$ . Пусть  $a_k \downarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  (или  $a_k = 0$  при достаточно больших  $k$ ). Докажем, что в этом случае

$$E \subseteq \bigcup_{k=1}^N 5I_k.$$

Пусть  $x \in E$ . Тогда  $\mu(I(x)) > a_r$  при некотором  $r$ , т. е. существует такое  $l < r$ , что  $I(x) \in T_{l-1} \setminus T_l$ . Поэтому  $I(x) \cap I_l \neq \emptyset$ . Пусть  $z \in I(x) \cap I_l$ , а  $d$  — центр отрезка  $I_l$ . Тогда для каждой точки  $y \in I(x)$  выполнены неравенства

$$\begin{aligned} |y - d| &\leq |y - z| + |z - d| \leq \mu(I(x)) + \frac{1}{2} \mu(I_l) \leq \\ &\leq a_l + \frac{1}{2} \mu(I_l) < 2\mu(I_l) + \frac{1}{2} \mu(I_l) \leq \frac{5}{2} \mu(I_l), \end{aligned}$$

откуда следует, что  $I(x) \subseteq 5I_l$ . Тогда

$$\mu^*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(5I_i) = 5 \sum_{i=1}^{\infty} \mu(I_i).$$

При достаточно большом  $N$  отсюда вытекает, что

$$\sum_{i=1}^N \mu(I_i) > \frac{1}{6} \mu^*(E).$$

□

**7.105.** Так как множество  $E$  ограничено, то можно считать, что все отрезки системы  $T_0$  содержатся в некотором интервале  $(a, b)$ . Проведём построение по индукции. Возьмём число

$$a_1 = \sup_{I \in T_0} \mu(I) \leq b - a < \infty.$$

Выберем отрезок  $I_1 \in T_0$  так, чтобы  $\mu(I_1) > \frac{1}{2} a_1$ . Затем определим множество

$$T_1 = \{I \in T_0 : I \cap I_1 = \emptyset\}.$$

Пусть мы уже выбрали системы  $T_0 \supset T_1 \supset \dots \supset T_m$ , определили номера

$$a_j = \sup_{I \in T_{j-1}} \mu(I) > 0$$

для  $j = 1, \dots, m$  и выбрали такие непересекающиеся отрезки  $I_1, I_2, \dots, I_m \in T_0$ , что  $\mu(I_j) > \frac{1}{2} a_j$  при  $j = 1, \dots, m$ . Если  $T_m = \emptyset$ , то положим  $a_{m+1} = a_{m+2} = \dots = 0$  и завершим процесс. В противном случае, пусть

$$a_{m+1} = \sup_{I \in T_m} \mu(I) > 0,$$

и мы выберем отрезок  $I_{m+1} \in T_m$  так, чтобы  $\mu(I_{m+1}) > \frac{1}{2} a_{m+1}$ . Пусть также

$$T_{m+1} = \{I \in T_m : I \cap I_{m+1} = \emptyset\}.$$

Продолжая этот процесс, мы построим не более чем счётную систему  $Q = \{I_k\}$  попарно непересекающихся отрезков. Так как  $E$  ограничено, то  $a_k \downarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Для невырожденного отрезка  $I$  обозначим через  $5I$  отрезок длины  $5\mu(I)$  с той же серединой. Пусть вначале последовательность построенных отрезков конечна:  $I_1, I_2, \dots, I_n$ . Если существует точка

$$x \in E \setminus F, \quad \text{где} \quad F = \bigcup_{k=1}^n I_k,$$

то мы рассмотрим отрезок  $I(x, \varepsilon) \in T_n$ , где  $\varepsilon > 0$  — расстояние между  $x$  и замкнутым множеством  $F$ , и придём к противоречию с предположением, что  $T_n = \emptyset$ . Следовательно, в этом случае  $E \subset F$ , и утверж-

ждение задачи выполнено. Пусть теперь система отрезков счётна. Обозначим

$$S = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k.$$

Пусть  $l$  — натуральное число и  $x \in E \setminus S$ . Тогда, поскольку

$$x \notin F_l = \bigcup_{k=1}^l I_k$$

и множество  $F_l$  замкнуто, то существует отрезок  $I(x, \varepsilon_l) \in T_0$ , который содержит  $x$  и не пересекается с  $F_l$ . Поэтому  $I(x, \varepsilon_l) \in T_l$ . Так как  $\mu(I(x, \varepsilon_l)) > a_k$  при достаточно больших  $k$ , то существует такое натуральное  $m > l$ , что  $I(x, \varepsilon_l) \in T_{m-1} \setminus T_m$ . В этом случае  $I(x, \varepsilon_l) \cap I_m \neq \emptyset$  и  $\mu(I(x, \varepsilon_l)) < a_m < 2\mu(I_m)$ . Но тогда  $I(x, \varepsilon_l) \subset 5I_m$ . Следовательно,

$$E \setminus S \subseteq \bigcup_{k=l}^{\infty} 5I_k$$

и

$$\mu^*(E \setminus S) \leq \sum_{k=l}^{\infty} \mu(5I_k) = 5 \sum_{k=l}^{\infty} \mu(I_k).$$

Поскольку

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) < b - a < \infty$$

и  $l$  произвольно, то  $\mu^*(E \setminus S) = 0$ .  $\square$

**7.106.** Пусть (см. задачу 7.105) система  $\{I_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq T_0$  такова, что  $I_k \cap I_l = \emptyset$  при  $k \neq l$  и

$$\mu^*\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) = 0.$$

Ясно, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) < \infty.$$

Найдём такое  $N$ , что

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \mu(I_k) < \varepsilon.$$

Тогда (см. задачу 7.6)

$$\mu^*\left(E \setminus \bigcup_{k=l}^N I_k\right) \leq \mu^*\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) + \mu^*\left(\bigcup_{k=N+1}^{\infty} I_k\right) < \varepsilon.$$

$\square$

**7.107.** Пусть  $\mathbb{Q}_{[0;1]} = \{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ . Положим

$$A_n = \bigcup_{k=1}^n \left( r_k - \frac{1}{2^{n+k}}, r_k + \frac{1}{2^{n+k}} \right).$$

Тогда  $A_n$  — открытые множества,  $A_n \supseteq A_{n+1}$ , каждое  $A_n$  всюду плотно, поскольку содержит  $\mathbb{Q}_{[0;1]}$ , и  $\mu(A_n) \leq 2^{-n}$ . В силу результата задачи 7.52 мера пересечения всех  $A_n$  равна нулю, так что это пересечение не имеет ни одной внутренней точки. В то же время оно непусто, так как содержит  $\mathbb{Q}_{[0;1]}$ .  $\square$

## Г л а в а 8

# ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ

*Измеримым пространством* называется тройка  $(X, M, \mu)$ , где  $M$  —  $\sigma$ -алгебра с единицей  $X$ , а  $\mu$  —  $\sigma$ -аддитивная мера на  $M$ . Если  $\mu(X) < \infty$ , то мы будем называть пространство *конечным*, а если мера  $\mu$   $\sigma$ -конечна на  $M$ , то мы скажем, что оно  *$\sigma$ -конечно*. Через  $\mathfrak{M}$  будет обозначаться  $\sigma$ -алгебра измеримых по Лебегу множеств для классической меры Лебега на  $\mathbb{R}^1$ .

Пусть теперь  $(X, M, \mu)$  — измеримое пространство и  $A \in M$ . Функция  $f : A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$  называется *измеримой* на  $A$  (относительно измеримого пространства  $(X, M, \mu)$  или просто относительно меры  $\mu$ , но мы будем часто опускать это уточнение), если для любого  $c \in \mathbb{R}$  выполнено условие

$$f_A^{-1}((c, +\infty]) = f^{-1}((c, +\infty]) = \{x \in A : c < f(x) \leqslant +\infty\} \in M.$$

Заметим, что мы допускаем бесконечные значения функции. Иногда для краткости мы будем говорить, что функция  $f(x)$  измерима относительно меры  $\mu$ . Если функция принимает только конечные значения на множестве  $A$ , то будем называть её *конечной* на  $A$ . Предположим, что функция  $f(x)$  измерима на множестве  $A$ , множество  $B$  принадлежит  $M$ ,  $B \subseteq A$ ,  $\mu(A \setminus B) = 0$  и  $f(x)$  обладает некоторым свойством на  $B$  (например, конечна). В этом случае скажем, что  $f(x)$  обладает этим свойством *почти всюду (п.в.) на  $A$* . Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены на некотором  $A \in M$  и таковы, что  $\mu(\{x \in A : f(x) \neq g(x)\}) = 0$ , то мы будем называть их *эквивалентными* на  $A$ .

Так как рассматриваемые функции могут принимать бесконечные значения, мы будем использовать следующие естественные соглашения об арифметических операциях с измеримыми функциями:

$$\infty \pm a = \infty \text{ для любого } a \in \mathbb{R};$$

$$-\infty \pm a = -\infty \text{ для любого } a \in \mathbb{R};$$

$$a \times (\pm\infty) = \pm\infty \text{ при } a > 0;$$

$$a \times (\pm\infty) = \mp\infty \text{ при } a < 0;$$

$$\frac{a}{\pm\infty} = 0 \text{ для любого } a \in \mathbb{R};$$

$$\infty + \infty = \infty - (-\infty) = \infty;$$

$$-\infty - \infty = -\infty + (-\infty) = -\infty;$$

$$\infty \times \infty = (-\infty) \times (-\infty) = \infty;$$

$$-\infty \times \infty = \infty \times (-\infty) = -\infty.$$

Также для определённости положим

$$0 \times (\pm\infty) = 0;$$

$$\infty - \infty = -\infty - (-\infty) = 0.$$

Можно также считать, что все функции конечны или, в случае полной меры, конечны почти всюду. В последнем случае нам будет неважно, как определены операции на множестве меры 0.

### ЗАДАЧИ

**8.1.** Пусть  $(X, M, \mu)$  — измеримое пространство, множества  $A$  и  $A_1$  из  $M$ , причём  $A_1 \subset A$ , а функция  $f(x)$  измерима на  $A$ . Доказать, что  $f(x)$  измерима на  $A_1$ .

**8.2.** Пусть  $(X, M, \mu)$  — измеримое пространство, множества  $A_i$  из  $M$ , а функция  $f(x)$  измерима на  $A_i$  при  $i \in \mathbb{N}$ . Доказать, что  $f(x)$  измерима на множестве  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ .

**8.3.** Пусть  $(X, M, \mu)$  — измеримое пространство,  $A \in M$ , а функция  $f(x)$  измерима на множестве  $A$ . Доказать, что множества  $f^{-1}(\{+\infty\})$ ,  $f^{-1}(\{-\infty\})$  и  $f^{-1}(\mathbb{R})$  измеримы.

**8.4.** Пусть  $(X, M, \mu)$  — измеримое пространство,  $A \in M$ , а функция  $f(x)$  измерима на множестве  $A$ . Доказать, что для любых чисел  $a$  и  $b$ , где  $-\infty < a < b < +\infty$ , множество  $f^{-1}((a, b))$  принадлежит  $M$ .

**8.5.** Пусть  $(X, M, \mu)$  — измеримое пространство,  $A \in M$ , а функция  $f(x)$  измерима на множестве  $A$ . Доказать, что для любого множества  $B \in \mathcal{B}^1$  множество  $f^{-1}(B)$  принадлежит  $M$ .

**8.6.** Пусть  $(X, M, \mu)$  — измеримое пространство,  $A \subseteq X$  и  $f(x) = \chi_A(x)$ . Доказать, что  $f(x)$  измерима на  $X$  тогда и только тогда, когда  $A \in M$ .

**8.7.** Пусть  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $[0, 1]$ . Построить такую неизмеримую функцию  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , что для любого  $c \in \mathbb{R}$  множество  $f^{-1}(\{c\})$  измеримо.

**8.8.** Пусть  $(X, M, \mu)$  — измеримое пространство,  $A \in M$ , а функция  $f : A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$  такова, что для каждого  $c \in \mathbb{R}$  множество  $f_A^{-1}([c, +\infty])$  принадлежит  $M$ . Доказать, что  $f(x)$  измерима на  $A$ .

**8.9.** Пусть  $(X, M, \mu)$  — измеримое пространство,  $A \in M$ ,  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  — некоторое всюду плотное множество в  $\mathbb{R}$ , а функция  $f : A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$  такова, что для каждого  $n$  множество

$$f_A^{-1}((a_n, +\infty]) \in M.$$

Доказать, что  $f(x)$  измерима на  $A$ .

**8.10.** Пусть  $n \geq 1$  и  $G \subset \mathbb{R}^n$  — открытое множество. Пусть также функция  $f(\mathbf{x})$  непрерывна на  $G$ . Доказать, что  $f(\mathbf{x})$  измерима на  $G$  относительно классической меры Лебега.

**8.11.** Построить функцию  $f(x)$  на  $[0, 1]$ , измеримую на  $[0, 1]$  относительно классической меры Лебега, но разрывную в каждой точке.

**8.12.** Пусть  $(X, M, \mu)$  — измеримое пространство,  $A \in M$ , а  $f(x)$  — конечная измеримая функция на  $A$ . Пусть также  $f(A) \subseteq G \subseteq \mathbb{R}$ , где  $G$  — открытое множество, и  $g(t)$  непрерывна на  $G$ . Доказать, что композиция функций  $g(f(x))$  измерима на  $A$ .

**8.13.** Пусть  $(X, M, \mu)$  — измеримое пространство,  $A \in M$ ,  $n \geq 2$  и  $f_1(x), \dots, f_n(x)$  — конечные измеримые функции на  $A$ . Пусть также  $f(A) \subseteq G \subseteq \mathbb{R}^n$ , где  $G$  — открытое множество, и  $h(\mathbf{t}) \in C(G)$ . Доказать, что композиция функций  $h(f_1(x), \dots, f_n(x))$  измерима на  $A$ .

**8.14.** Пусть  $(X, M, \mu)$  — измеримое пространство,  $A \in M$ , а  $f(x)$  и  $g(x)$  — измеримые функции на  $A$ . Доказать, что  $B = \{x \in A : f(x) > g(x)\} \in M$  и  $C = \{x \in A : f(x) = g(x)\} \in M$ .

**8.15.** Пусть  $(X, M, \mu)$  — полное измеримое пространство (т. е. мера  $\mu$  полна),  $A \in M$ , а  $f(x)$  — измеримая функция на  $A$ . Пусть  $g(x)$  — функция, эквивалентная  $f(x)$  на  $A$ . Доказать, что  $g(x)$  — измеримая функция на  $A$ .

**8.16.** Построить такую измеримую относительно классической меры Лебега на  $[0, 1]$  функцию  $f(x)$  на  $A$ , что любая эквивалентная  $f(x)$  функция  $g(x)$  всюду разрывна на  $[0, 1]$ .

**8.17.** Пусть  $(X, M, \mu)$  — измеримое пространство,  $A \in M$ ,  $a \in \mathbb{R}^1$ , а  $f$  — измеримая функция на  $A$ . Доказать, что  $f(x) + a$  — измеримая функция на  $A$ .

**8.18.** Пусть  $(X, M, \mu)$  — измеримое пространство,  $A \in M$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , а  $f$  — измеримая функция на  $A$ . Доказать, что  $af(x)$  — измеримая функция  $A$ .

**8.19.** Пусть  $(X, M, \mu)$  — измеримое пространство,  $A \in M$ , а  $f(x)$  и  $g(x)$  — измеримые функции на  $A$ . Доказать, что  $f(x) + g(x)$  — также измеримая функция на  $A$ .

**8.20.** Пусть  $(X, M, \mu)$  — измеримое пространство,  $A \in M$ , а  $f(x)$  — измеримая функция на  $A$ . Доказать, что  $f^2(x)$  — также измеримая функция на  $A$ .

**8.21.** Пусть  $(X, M, \mu)$  — измеримое пространство,  $A \in M$ , а  $f(x)$  и  $g(x)$  — измеримые функции на  $A$ . Доказать, что  $f(x)g(x)$  — также измеримая функция на  $A$ .

**8.22.** Пусть  $(X, M, \mu)$  — измеримое пространство,  $A \in M$ ,  $f(x)$  — измеримая функция на  $A$  и  $f(x) \neq 0$  при  $x \in A$ . Доказать, что  $\frac{1}{f(x)}$  — также измеримая функция на  $A$ .

**8.23.** Пусть  $(X, M, \mu)$  — измеримое пространство,  $A \in M$ ,  $f(x)$  и  $g(x)$  — измеримые функции на  $A$  и  $f(x) \neq 0$  для  $x \in A$ . Доказать, что  $\frac{g(x)}{f(x)}$  — измеримая функция на  $A$ .

**8.24.** Пусть  $(X, M, \mu)$  — измеримое пространство,  $A \in M$  и  $f^3(x)$  — измеримая функция на  $A$ . Доказать, что  $f(x)$  — также измеримая функция на  $A$ .

**8.25.** Построить такую функцию  $f(x)$  на  $[0, 1]$ , что  $f^2(x)$  измерима относительно классической меры Лебега на  $[0, 1]$ , но  $f(x)$  неизмерима относительно этой меры.

**8.26.** Пусть  $(X, M, \mu)$  — измеримое пространство,  $A \in M$ ,  $f(x)$  и  $g(x)$  — конечные измеримые функции на  $A$  и  $f(x) > 0$  на  $A$ . Доказать, что  $(f(x))^{g(x)}$  — измеримая функция на  $A$ .

**8.27.** Пусть  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  и функция  $f(x)$  монотонна на  $[a, b]$ . Доказать, что  $f(x)$  измерима относительно классической меры Лебега на  $[a, b]$ .

**8.28.** Пусть  $(X, M, \mu)$  — измеримое пространство,  $A$  — множество конечной меры из  $M$  и  $f(x)$  — конечная измеримая функция на  $A$ . Доказать, что функция  $g(t) = \mu(\{x \in A: f(x) > t\})$  не возрастает на  $\mathbb{R}$  и непрерывна справа в каждой точке.

**8.29.** Построить такую функцию  $f(x) \in C([0, 1])$ , что  $g(t) = \mu(\{x \in [0, 1]: f(x) > t\})$  — не непрерывная функция.

**8.30.** Построить функцию  $f(x) \in C([0, 1])$ , для которой функция  $g(t) = \mu(\{x \in [0, 1]: f(x) > t\})$  непрерывна на  $[0, 1]$ .

**8.31.** Пусть  $(X, M, \mu)$  — измеримое пространство,  $A \in M$ ,  $\mu(A) = 1$  и  $f(x)$  — конечная измеримая функция на  $A$ . Построить невозрастающую функцию  $h(y)$  на  $[0, 1]$ , для которой  $\mu(\{x \in A: f(x) > t\}) = \mu(\{y \in [0, 1]: h(y) > t\})$  при каждом  $t \in \mathbb{R}$ .

**8.32.** Пусть  $f(x) \in C([0, 1])$ , а невозрастающая функция  $h(x)$  на  $[0, 1]$  такова, что  $\mu(\{x \in [0, 1]: f(x) > t\}) = \mu(\{x \in [0, 1]: h(x) > t\})$  для каждого  $t \in \mathbb{R}$ . Доказать, что  $h(x) \in C([0, 1])$ .

**8.33.** Построить непрерывную неубывающую функцию  $\varphi(x)$  на  $[0, 1]$ , не являющуюся на этом отрезке постоянной, для которой  $\varphi'(x) = 0$  п.в. на  $[0; 1]$ .

**8.34.** Построить такую функцию  $f(x) \in C([0, 1])$ , что для некоторого измеримого  $A \subset [0, 1]$  меры нуль множество  $f(A)$  измеримо и  $\mu(f(A)) > 0$ , где  $\mu$  — классическая мера Лебега.

**8.35.** Построить такую строго возрастающую функцию  $f(x) \in C([0, 1])$ , что для некоторого измеримого множества  $A \subset [0, 1]$  меры нуль множество  $f(A)$  измеримо и  $\mu(f(A)) > 0$ , где  $\mu$  — классическая мера Лебега.

**8.36.** Построить функцию  $f(x) \in C([0, 1])$  и измеримое множество  $A \subset \mathbb{R}$ , для которых множество  $f^{-1}(A)$  неизмеримо относительно классической меры Лебега.

**8.37.** Построить такую функцию  $g(x) \in C([0, 1])$ , что для некоторого измеримого  $A \subset [0, 1]$  с  $\mu(A) = 0$  множество  $g(A)$  неизмеримо относительно классической меры Лебега.

**8.38.** Построить множество  $A \subset [0, 1]$ , которое измеримо относительно классической меры Лебега, но не является борелевским. Таким образом,  $\mathfrak{M} \setminus \mathcal{B}^1 \neq \emptyset$  для классической меры Лебега на  $\mathbb{R}$ .

**8.39.** Построить функцию  $f(x) \in C([0, 1])$ ,  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  и измеримую относительно классической меры Лебега на  $[0, 1]$  функцию  $g(x)$ , для которых  $g(f(x))$  неизмерима относительно классической меры Лебега на  $[0, 1]$ .

**8.40.** Пусть  $(X, M, \mu)$  — измеримое пространство,  $A \in M$  и  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  — последовательность измеримых на  $A$  функций. Доказать, что функции

$$\varphi(x) = \sup_n f_n(x) \quad \text{и} \quad \psi(x) = \inf_n f_n(x)$$

также измеримы на  $A$ .

**8.41.** Пусть  $(X, M, \mu)$  — измеримое пространство,  $A \in M$  и  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  — последовательность функций, измеримых на  $A$ . Доказать, что функции

$$g(x) = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} f_n(x) \quad \text{и} \quad h(x) = \underline{\lim_n} f_n(x)$$

также измеримы на  $A$ .

**8.42.** Пусть  $(X, M, \mu)$  — измеримое пространство,  $A \in M$  и  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  — последовательность функций, измеримых на  $A$ . Доказать, что множество

$$B = \{x \in A : \text{существует } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\}$$

измеримо, и что функция  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  измерима на  $B$ .

**8.43.** Пусть  $(X, M, \mu)$  — измеримое пространство,  $A \in M$ , мера  $\mu$  полна,  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  — последовательность функций, измеримых на  $A$ , и  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  п.в. на  $A$ . Доказать, что функция  $f$  измерима на  $A$ .

**8.44.** Пусть  $(X, M, \mu)$  — измеримое пространство,  $A \in M$  и  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  — последовательность функций, измеримых на  $A$ . Доказать, что множество

$$C = \{x \in A : \text{существует конечный } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\}$$

измеримо и что функция  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  измерима на  $C$ .

**8.45.** Построить такую функцию  $f(x, y)$  на  $(0, 1)^2$ , что она измерима относительно классической меры Лебега на  $(0, 1)^2$ , функция  $f(x_0, y)$  измерима относительно классической меры Лебега на  $(0, 1)$  для каждого  $x_0 \in (0, 1)$ , функция  $f(x, y_0)$  измерима относительно классической меры Лебега на  $(0, 1)$  для каждого  $y_0 \in (0, 1)$ , но

$$\varphi(x) = \sup_{y \in (0,1)} f(x, y) \quad \text{и} \quad \psi(x) = \inf_{y \in (0,1)} f(x, y)$$

неизмеримы относительно классической меры Лебега на  $(0, 1)$ .

**8.46.** Построить такую функцию  $f(x, y)$  на  $(0, 1)^2$ , измеримую относительно классической меры Лебега на  $(0, 1)^2$ , что  $f(x_0, y)$  измерима относительно классической меры Лебега на  $(0, 1)$  для каждого  $x_0 \in (0, 1)$ , функция  $f(x, y_0)$  измерима относительно классической меры Лебега на  $(0, 1)$  для каждого  $y_0 \in (0, 1)$ , но

$$g(x) = \overline{\lim}_{y \rightarrow 0+} f(x, y) \quad \text{и} \quad h(x) = \underline{\lim}_{y \rightarrow 0+} f(x, y)$$

неизмеримы относительно классической меры Лебега на  $(0, 1)$ .

**8.47.** Пусть  $f(x, y) \in C((0, 1)^2)$ . Доказать, что функции  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $g(x)$  и  $h(x)$  (см. задачи 8.45–8.46) измеримы относительно классической меры Лебега на  $(0, 1)$ .

**8.48.** Пусть  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  и  $f(x) \in C((a, b))$ . Доказать, что множество

$$A = \{x \in (a, b) : \text{существует конечная } f'(x)\}$$

измеримо относительно классической меры Лебега на  $(a, b)$  и что  $f'(x)$  измерима на  $A$ .

**8.49.** Пусть  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  и  $f(x)$  — конечная функция на  $(a, b)$ , измеримая относительно классической меры Лебега на этом интервале. Доказать, что функции

$$\bar{f}'_+(x) = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{и} \quad \underline{f}'_+(x) = \underline{\lim}_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

измеримы на  $(a, b)$ .

**8.50.** Пусть  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  и  $f(x)$  — конечная функция на  $(a, b)$ , измеримая относительно классической меры Лебега на этом интервале. Доказать, что множество

$$A = \{x \in (a, b) : \text{существует конечная } f'(x)\}$$

измеримо относительно классической меры Лебега на  $(a, b)$  и что  $f'(x)$  измерима на  $A$ .

**8.51.** Пусть  $B$  — борелевское множество в  $\mathbb{R}^n$ , где  $n \geq 1$ , а  $f(x)$  — функция на  $B$ , измеримая относительно классической меры Лебега. Доказать, что существует функция  $g(x)$ , эквивалентная  $f(x)$  на  $B$ , для которой  $g^{-1}((c, +\infty])$  — борелевское множество при каждом  $c \in \mathbb{R}$ .

**8.52.** Пусть  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  и функция  $f(x) \in C([a, b])$ . Индикаторной Банаха называется функция  $g(y)$  на  $\mathbb{R}$ , равная количеству корней уравнения  $f(x) = y$  на  $[a, b]$  (возможно,  $g(y) = \infty$  при некоторых  $y$ ). Доказать, что  $g(y)$  измерима относительно классической меры Лебега на  $\mathbb{R}$ .

**8.53.** Пусть  $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$  — десятичное разложение (без 9 в периоде) точек из  $[0, 1)$ . Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \infty, & \text{если } x_i \neq 6 \text{ при всех } i, \\ \min \{i : x_i = 6\} & \text{— иначе.} \end{cases}$$

Доказать, что  $f(x)$  измерима и п.в. конечна относительно классической меры Лебега на  $[0, 1)$ .

**8.54.** Пусть  $n > 1$ , а  $\mu_1$  и  $\mu_n$  — классические меры Лебега на  $[0, 1]$  и  $[0, 1]^n$  соответственно. Пусть также  $\mathfrak{M}_1$  и  $\mathfrak{M}_n$  — соответствующие  $\sigma$ -алгебры. Построить такое взаимно однозначное соответствие  $f(x)$  между  $[0, 1]$  и  $[0, 1]^n$ , что для каждого  $A \subset [0, 1]$  множество  $A$  принадлежит  $\mathfrak{M}_1$  тогда и только тогда, когда  $f(A) \in \mathfrak{M}_n$ , и если  $A \in \mathfrak{M}_1$ , то  $\mu_1(A) = \mu_n(f(A))$ .

## РЕШЕНИЯ

**8.1.** Для каждого  $c \in \mathbb{R}$  выполнено условие

$$f_{A_1}^{-1}((c, +\infty]) = f_A^{-1}((c, +\infty]) \cap A_1 \in M.$$

□

**8.2.** Для каждого  $c \in \mathbb{R}$  выполнено условие

$$f_A^{-1}((c, +\infty]) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f_{A_i}^{-1}((c, +\infty]) \in M.$$

□

**8.3.** Заметим, что

$$f^{-1}(\{+\infty\}) = \bigcap_{i=1}^{\infty} f^{-1}((i, +\infty]) \in M.$$

Далее,

$$f^{-1}(\{-\infty\}) = A \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}((-i, +\infty]) \right) \in M$$

и  $f^{-1}(\mathbb{R}) = (A \setminus f^{-1}(\{+\infty\})) \setminus f^{-1}(\{-\infty\}) \in M$ .  $\square$

**8.4.** Утверждение вытекает из того, что

$$f^{-1}((a, b)) = f^{-1}((a, +\infty]) \setminus \left( \bigcap_{i=1}^{\infty} f^{-1}((b - \frac{1}{i}, +\infty]) \right).$$

$\square$

**8.5.** Обозначим  $\Sigma = \{D \subseteq \mathbb{R}: f^{-1}(D) \in M\}$ . Тогда (см. задачу 8.3)  $\mathbb{R} \in \Sigma$ . Если  $D$  и  $C$  из  $\Sigma$ , то

$f^{-1}(D \cap C) = f^{-1}(D) \cap f^{-1}(C)$  и  $f^{-1}(D \Delta C) = f^{-1}(D) \Delta f^{-1}(C)$ , поэтому  $D \cap C \in \Sigma$  и  $D \Delta C \in \Sigma$ . Это означает, что  $\Sigma$  — алгебра. Далее, если  $\{D_i\}$  — множества из  $\Sigma$ , то

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(D_n) \in M.$$

Поэтому  $\Sigma$  является  $\sigma$ -алгеброй. Более того, в силу результата задач 8.4 и 3.109 система  $\Sigma$  содержит все открытые подмножества  $\mathbb{R}$ . Но по определению борелевская  $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{B}^1$  есть минимальная  $\sigma$ -алгебра, содержащая все открытые подмножества  $\mathbb{R}$ . Поэтому  $\mathcal{B}^1 \subseteq \Sigma$ .  $\square$

**8.6.** Заметим, что

$$f^{-1}((c, +\infty]) = \begin{cases} X, & \text{если } c < 0, \\ A, & \text{если } 0 \leq c < 1, \\ \emptyset, & \text{если } c \geq 1. \end{cases}$$

Но множества  $\emptyset$  и  $X$  заведомо измеримы. Поэтому функция  $f(x)$  измерима тогда и только тогда, когда измеримо множество  $A$ .  $\square$

**8.7.** Пусть  $A$  — неизмеримое подмножество на  $[0, 1]$  и

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{если } x \in A, \\ -x, & \text{если } x \in [0, 1] \setminus A. \end{cases}$$

Тогда для любого  $c \in \mathbb{R}$  множество  $f^{-1}(\{c\})$  состоит не более чем из одной точки и, следовательно, измеримо. В то же время  $f^{-1}((1/2, +\infty]) = A \notin \mathfrak{M}$ .  $\square$

**8.8.** Для каждого  $c \in \mathbb{R}$  выполнено условие

$$f^{-1}((c, +\infty]) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left[c + \frac{1}{i}, +\infty\right]\right) \in M.$$

□

**8.9.** Пусть дано  $c \in \mathbb{R}$ . Найдём такую подпоследовательность  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ , что  $a_{n_k} \downarrow c$  при  $k \rightarrow \infty$ . Тогда

$$f^{-1}((c, +\infty]) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}((a_{n_k}, +\infty]) \in M.$$

□

**8.10.** Для каждого  $c \in \mathbb{R}$  множество  $f^{-1}((c, +\infty]) = f^{-1}((c, +\infty))$  открыто, а все открытые множества измеримы относительно классической меры Лебега. □

**8.11.** Рассмотрим на  $[0; 1]$  функцию Дирихле (см. решение задачи 4.24). Она разрывна в каждой точке, но в силу результата задач 7.64 и 8.6 измерима относительно классической меры Лебега. □

**8.12.** Заметим вначале, что функция  $g(f(x))$  конечна на  $A$ . Для каждого  $c \in \mathbb{R}$  имеем

$$\begin{aligned} F_c = (g(f))^{-1}((c, +\infty]) &= (g(f))^{-1}((c, +\infty)) = \\ &= \{x \in X : f(x) \in g^{-1}((c, +\infty))\}. \end{aligned}$$

Так как  $g(t)$  — непрерывная функция, то множество  $E_c = g^{-1}((c, +\infty))$  открыто и, следовательно, является борелевским. Тогда в силу результата задачи 8.5  $F_c = f^{-1}(E_c) \in M$ . □

**8.13.** Заметим, что функция  $h(f_1(x), \dots, f_n(x))$  конечна на  $A$ . Для каждого  $c \in \mathbb{R}$  множество  $G_c = \{\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n) \in G : h(\mathbf{t}) > c\}$  открыто. Пусть  $T_c = G_c \cap \mathbb{Q}^n$  и для  $r \in T_c$  положим  $\rho(\mathbf{r}) = \text{dist}(\mathbf{r}, \mathbb{R}^n \setminus G_c)$ . Тогда

$$G_c = \bigcup_{\mathbf{r} \in T_c} \prod_{i=1}^n \left(r_i - \frac{\rho(\mathbf{r})}{n}, r_i + \frac{\rho(\mathbf{r})}{n}\right) \equiv \bigcup_{\mathbf{r} \in T_c} I_{\mathbf{r}}.$$

Отсюда мы получаем, что

$$\begin{aligned} \{x \in A : (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in G_c\} &= \bigcup_{\mathbf{r} \in T_c} \{x \in A : (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in I_{\mathbf{r}}\} = \\ &= \bigcup_{\mathbf{r} \in T_c} \bigcap_{i=1}^n \left\{x \in A : f_i(x) \in \left(r_i - \frac{\rho(\mathbf{r})}{n}, r_i + \frac{\rho(\mathbf{r})}{n}\right)\right\} \in M. \end{aligned}$$

Поэтому  $(h(f_1, \dots, f_n))^{-1}((c, +\infty]) \in M$ . □

**8.14.** Занумеруем некоторым образом все рациональные числа:  $\mathbb{Q} = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Тогда

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\{x \in A : f(x) > r_n\} \cap \{x \in A : g(x) < r_n\}) \in M.$$

Аналогично,  $D = \{x \in A : f(x) < g(x)\} \in M$ . Следовательно, и  $C = A \setminus (B \cup D) \in M$ .  $\square$

**8.15.** Пусть  $A_0 = \{x \in A : f(x) \neq g(x)\}$ . Так как мера  $\mu$  полна, то любое множество  $B \subseteq A_0$  принадлежит  $M$ . Далее, для каждого  $c \in \mathbb{R}$  выполнено равенство  $g^{-1}((c, +\infty]) = (f^{-1}((c, +\infty]) \cup B_1) \setminus B_2$ , где  $B_1, B_2 \in M$ . Действительно, достаточно взять  $B_1 = \{x : f(x) \leq c, g(x) > c\} \subseteq A_0$  и  $B_2 = \{x : g(x) \leq c, f(x) > c\} \subseteq A_0$ . Отсюда следует, что функция  $g(x)$  измерима на  $A$ .  $\square$

**8.16.** Пусть  $A$  — такое множество на  $[0, 1]$ , что (см. задачу 7.78)  $\mu(A) = \frac{1}{2}$  и для любого невырожденного отрезка  $[a, b] \subseteq [0, 1]$  выполнено условие  $0 < \mu(A \cap [a, b]) < b - a$ . Пусть  $f(x) = \chi_A(x)$ . Тогда (см. задачу 8.6)  $f(x)$  измерима относительно классической меры Лебега на  $[0, 1]$ . Предположим, что  $g(x)$  эквивалентна  $f(x)$  на  $[0, 1]$ . Тогда для каждого интервала  $I \subseteq [0, 1]$  найдутся такие точки  $y, z \in I$ , что  $g(y) = 1$  и  $g(z) = 0$ . Поэтому функция  $g(x)$  разрывна в каждой точке.  $\square$

**8.17.** Для каждого  $c \in \mathbb{R}$  выполнено условие  $(f + a)^{-1}((c, +\infty]) = f^{-1}((c - a, +\infty]) \in M$ .

З а м е ч а н и е. Для конечных функций этот результат, так же как и результаты задач 8.18, 8.20 и 8.22, немедленно следует из задачи 8.12, а результаты задач 8.19 и 8.21 — из задачи 8.13.  $\square$

**8.18.** Если  $a = 0$ , то  $af(x) = 0$  и, очевидно, измерима. При  $a > 0$  для каждого  $c \in \mathbb{R}$  выполнено условие  $(af)^{-1}((c, +\infty)) = f^{-1}((\frac{c}{a}, +\infty]) \in M$ . При  $a < 0$  для каждого  $c \in \mathbb{R}$  аналогично  $(af)^{-1}((c, +\infty)) = f^{-1}([-\infty, \frac{c}{a})) \in M$ .  $\square$

**8.19.** Пусть  $B$  — множество, где обе функции  $f(x)$  и  $g(x)$  конечны. Заметим (см. задачу 8.3), что  $B \in M$ . Тогда в силу результата задачи 8.13 (при  $n = 2$  и  $h(s, t) = s + t$ ) функция  $f(x) + g(x)$  измерима на  $B$ . Пусть теперь  $D = \{x \in A : f(x) = +\infty\}$ . Тогда согласно нашим определениям операций над бесконечными величинами для всех  $x \in D$  получаем

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } g(x) > -\infty, \\ 0, & \text{если } g(x) = -\infty. \end{cases}$$

Отсюда следует, что если  $E = \{x \in D : g(x) = -\infty\}$ , то

$$(f + g)_D^{-1}((c, +\infty]) = \begin{cases} D, & \text{если } c < 0, \\ D \setminus E, & \text{если } c \geq 0. \end{cases}$$

Поэтому  $f(x) + g(x)$  измерима на  $D$ . Аналогично доказывается, что эта сумма измерима на множествах, где  $f(x) = -\infty$  или  $g(x) = \pm\infty$ . Применение задачи 8.2 завершает доказательство.  $\square$

**8.20.** Измеримость  $f^2(x)$  на множестве, где  $f(x)$  конечна, немедленно следует из задачи 8.12 (при  $g(t) = t^2$ ). Если  $D = \{x : f(x) = \pm\infty\}$ , то  $f^2(x) = +\infty$  на  $D$ , поэтому она измерима на  $D$ . Теперь утверждение следует из задачи 8.2.  $\square$

**8.21.** Пусть  $B$  — множество, где обе функции  $f(x)$  и  $g(x)$  конечны. Заметим (см. задачу 8.3), что  $B \in M$ . Тогда в силу результата задачи 8.13 (при  $n = 2$  и  $h(s, t) = st$ ) функция  $f(x)g(x)$  измерима на  $B$ . Отметим также, что на множестве, где хотя бы одна из функций равна нулю, функция  $f(x)g(x)$  равна 0 и, следовательно, измерима. Пусть теперь  $D = \{x \in A : f(x) = +\infty, g(x) \neq 0\}$ . Тогда, согласно данным определениям операций над бесконечными значениями, для  $x \in D$  имеем

$$f(x)g(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } g(x) > 0, \\ -\infty, & \text{если } g(x) < 0. \end{cases}$$

Поэтому если  $E = \{x \in D : g(x) > 0\}$ , то  $(fg)_D^{-1}((c, +\infty]) = E \in M$  для каждого  $c \in \mathbb{R}$ , т. е.  $f(x)g(x)$  измерима на  $D$ . Аналогично доказывается, что это произведение измеримо на множествах, где  $f(x) = -\infty$ ,  $g(x) \neq 0$  или  $g(x) = \pm\infty$ ,  $f(x) \neq 0$ . В силу результата задачи 8.2 функция  $f \cdot g$  измерима.  $\square$

**8.22.** Измеримость функции  $\frac{1}{f(x)}$  на множестве, где  $f(x)$  конечна, следует из задачи 8.12 (при  $g(t) = \frac{1}{t}$ ). Если  $D$  — множество, где  $f(x) = \pm\infty$ , то  $\frac{1}{f(x)} = 0$ , поэтому она измерима на  $D$ . Применяя задачу 8.2, получаем измеримость функции  $\frac{1}{f(x)}$ .  $\square$

**8.23.** Утверждение вытекает из задач 8.21 и 8.22.  $\square$

**8.24.** Для каждого  $c \in \mathbb{R}$  выполнено равенство  $f^{-1}((c, +\infty]) = (f^3)^{-1}((c^3, +\infty]) \in M$ .  $\square$

**8.25.** Пусть  $E$  — неизмеримое подмножество на  $[0, 1]$ , а

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in E, \\ -1, & \text{если } x \in [0, 1] \setminus E. \end{cases}$$

Так как  $f^{-1}((0, +\infty]) = E \notin M$ , то функция  $f(x)$  неизмерима, но  $f^2(x) \equiv 1$  на  $[0, 1]$  и, следовательно, измерима.  $\square$

**8.26.** Имеем:  $(f(x))^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$ . В силу результата задач 8.12 и 8.21 функция  $g(x) \ln f(x)$  измерима на  $A$ . Вновь применяя задачу 8.12, получаем, что  $(f(x))^{g(x)}$  измерима.  $\square$

**8.27.** Пусть, для определённости,  $f(x)$  — невозрастающая функция на  $[a, b]$ . Тогда для каждого  $c \in \mathbb{R}$  множество  $f^{-1}((c, +\infty])$  является либо полуинтервалом  $[a, d)$ ,  $d \in (a, b]$ , либо отрезком  $[a, d]$ ,  $d \in [a, b]$ , либо пустым множеством. Поэтому  $f(x)$  измерима.  $\square$

**8.28.** Если  $t_1 > t_2$ , то, очевидно,  $g(t_1) \leq g(t_2)$ . Пусть  $t \in \mathbb{R}$  и  $t_n \downarrow t$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда

$$\{x \in A: f(x) > t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in A: f(x) > t_n\} \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Так как  $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$ , то (см. задачу 6.17)  $g(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(t_n)$ .  $\square$

**8.29.** Пусть  $f(x) \equiv 0$  на  $[0, 1]$ . Тогда

$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t < 0, \\ 0, & \text{если } t \geq 0. \end{cases}$$

Эта функция разрывна в точке  $t = 0$ .  $\square$

**8.30.** Пусть  $f(x) = x$  на  $[0, 1]$ . Тогда

$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t < 0, \\ 1 - t, & \text{если } t \in [0, 1], \\ 0, & \text{если } t > 1. \end{cases}$$

Мы видим, что  $g(t) \in C([0, 1])$ .  $\square$

**8.31.** Пусть  $g(u) = \mu(\{x \in A: f(x) > u\})$  при  $u \in \mathbb{R}$ . Это невозрастающая функция на  $\mathbb{R}$ . Определим функцию

$$h(y) = \inf \{u: g(u) \leq y\}.$$

Ясно, что  $h(y)$  — невозрастающая функция на  $[0, 1]$ . Докажем, что  $\mu(\{y \in [0, 1]: h(y) > t\}) = g(t)$  для всех  $t \in \mathbb{R}$ . Если для данного  $y$  выполнено неравенство  $h(y) > t$ , то  $\inf \{u: g(u) \leq y\} > t$ , и поэтому  $g(t) > y$ . Аналогично, если  $h(y) < t$ , то  $g(t) \leq y$ . Поэтому

$$\mu(\{y \in [0, 1]: h(y) > t\}) = \sup \{y \in [0, 1]: h(y) > t\} = g(t).$$

$\square$

**8.32.** Предположим, что  $h(x) \notin C([0, 1])$ . Так как  $h(x)$  — невозрастающая функция, то существует такой непустой интервал  $(a, b)$ , что  $[a, b] \cap h([0, 1]) = \emptyset$ , а некоторые числа  $c$  и  $d$ ,  $c < a$  и  $d > b$  принадлежат  $h([0, 1])$ . Тогда получаем, что

$$\mu(\{x \in [0, 1]: f(x) > b\}) = \mu(\{x \in [0, 1]: f(x) > a\}).$$

Так как  $f(x) \in C([0, 1])$ , то отсюда следует, что  $(a, b) \cap f([0, 1]) = \emptyset$ . Поэтому либо  $f(x) \geq b$  для каждого  $x \in [a, b]$ , либо  $f(x) \leq a$  для каждого  $x \in [a, b]$ , и мы приходим к противоречию с условием  $\{c, d\} \subseteq h([0, 1])$ .  $\square$

**8.33.** Пусть  $\varphi(x)$  — функция Кантора (см. задачу 4.19), а  $G$  — канторово открытое множество (см. задачу 2.22). Мера его дополнения, т. е. мера канторова замкнутого множества, равна нулю (см. задачу 7.67). Но функция  $\varphi(x)$  постоянна на каждом интервале из  $G$ , поэтому  $\varphi'(x) = 0$  для  $x \in G$ .  $\square$

**8.34.** Пусть  $f(x)$  — функция Кантора (см. решение задач 4.19 и 8.33) и  $A = P_0$  — канторово замкнутое множество. Тогда  $\mu(P_0) = 0$ .

Так как  $f([0, 1]) = [0, 1]$  и  $f([0, 1] \setminus P_0) = \left\{ \frac{k}{2^n} \right\}_{n=0, k=0}^{\infty, 2^n}$ , то  $f(P_0) = [0, 1]$ . Поэтому  $f(P_0)$  измеримо и  $\mu(f(P_0)) = 1$ .  $\square$

**8.35.** Пусть  $\varphi(x)$  — функция Кантора (см. решение задачи 8.33) и  $\psi(x) = \frac{1}{2}(\varphi(x) + x)$  на  $[0, 1]$ . Тогда  $\psi(x)$  — строго возрастающая непрерывная функция на  $[0, 1]$ , и она переводит отрезок  $[0, 1]$  в себя. Пусть

$$G = [0, 1] \setminus P_0 = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n).$$

Ясно, что  $\mu(\psi((a_n, b_n))) = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$  для каждого  $n$ , поэтому  $\mu(\psi(G)) = \frac{1}{2}$ . Так как  $\psi([0, 1]) = [0, 1]$ , то  $\mu(\psi(P_0)) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ .

**8.36.** Возьмём функцию  $\psi(x)$ , построенную в решении задачи 8.35. Тогда существует непрерывная функция  $f(y) = \psi^{-1}(y)$  из  $[0, 1]$  на  $[0, 1]$ . Пусть  $B$  — неизмеримое подмножество в  $\psi(P_0)$  (оно существует в силу результата задачи 7.90) и  $A = \psi^{-1}(B) = f(B)$ . Тогда  $A \subset P_0$ , поэтому  $A \in \mathfrak{M}$  в силу полноты меры Лебега, но  $f^{-1}(A) = B \notin \mathfrak{M}$ .  $\square$

**8.37.** Пусть  $A$  — множество, построенное в решении задачи 8.36, и  $g(x) = \psi(x)$  (см. решение задачи 8.35). Тогда  $g(A) = B \notin \mathfrak{M}$ .  $\square$

**8.38.** Возьмём функцию  $f(x)$  и множество  $A$  из решения задачи 8.36. Тогда  $A \in \mathfrak{M}$ . Предположим, что  $A \in \mathcal{B}$ . Тогда, так как  $f(x)$  измерима, то (см. задачу 8.5)  $B = f^{-1}(A) \in \mathfrak{M}$ . Но по построению

(см. задачу 8.36)  $B \notin \mathfrak{M}$ , поэтому  $A$  не является борелевским множеством.  $\square$

**8.39.** Возьмём функцию  $f(x)$  и множество  $A$  из решения задачи 8.36 и множество  $g(x) = \chi_A(x)$ . Тогда  $g(x)$  измерима относительно классической меры Лебега, но  $g(f(x)) = \chi_B(x)$  неизмерима.  $\square$

**8.40.** Для каждого  $c \in \mathbb{R}$  выполнено равенство

$$\{x \in A: \varphi(x) \in (c, +\infty]\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in A: f_n(x) \in (c, +\infty]\} \in M,$$

откуда следует, что  $\varphi(x)$  измерима. Так как  $\psi(x) = -\sup_n (-f_n(x))$ , то она тоже измерима.  $\square$

**8.41.** В силу результата задачи 8.40 функция  $\varphi_n(x) = \sup_{k \geq n} f_k(x)$  измерима для всех  $n \in \mathbb{N}$ . В силу той же задачи  $g(x) = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} f_k(x)$  измерима. Аналогично, функция  $h(x) = \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} f_k(x)$  измерима.  $\square$

**8.42.** В силу результата задачи 8.41 функции

$$g(x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \text{и} \quad h(x) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

измеримы на  $A$ . Тогда в силу результата задачи 8.14 множество  $B = \{x \in A: g(x) = h(x)\}$  из  $M$ . На  $B$  функция  $f(x)$  совпадает с измеримой функцией  $g(x)$ . Поэтому  $f(x)$  измерима на  $B$ .  $\square$

**8.43.** Пусть

$$B = \{x \in A: \text{существует } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\}.$$

В силу результата задачи 8.42 множество  $B$  измеримо. Через  $B_1$  обозначим множество тех точек из  $B$ , где указанных предел равен  $f(x)$ . Так как  $\mu(B \setminus B_1) = 0$ , то  $B \setminus B_1 \in M$  в силу полноты меры, а тогда  $B_1 \in M$  и (см. задачу 8.1) функция  $f$  измерима на  $B_1$ . Далее,  $\mu(A \setminus B_1) = 0$ . В силу полноты меры любая функция измерима на этом множестве, в частности функция  $f$ . А тогда (см. задачу 8.2)  $f$  измерима на множестве  $A$ .  $\square$

**8.44.** Пусть  $B$  — множество, определённое в задаче 8.42. Тогда  $f(x)$  измерима на  $B$ . В силу результата задачи 8.3 множество  $C = f_B^{-1}(\mathbb{R})$  принадлежит  $M$ . Наконец, в силу результата задачи 8.1 функция  $f(x)$  измерима на  $C$ .  $\square$

**8.45.** Пусть  $E$  — неизмеримое подмножество  $(0, 1)$  и

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y \in E, \\ -1, & \text{если } x = y \notin E, \\ 0 & \text{— иначе.} \end{cases}$$

Так как  $f(x, y) = 0$  при  $x \neq y$ , то в силу результата задачи 8.15  $f(x, y)$  измерима на  $(0, 1)^2$ . При каждом  $x_0 \in (0, 1)$  функция  $f(x_0, y)$  отлична от нуля не более чем в одной точке  $(0, 1)$ , поэтому функция измерима. Аналогично,  $f(x, y_0)$  измерима на  $(0, 1)$  при каждом  $y_0 \in (0, 1)$ . Но  $\varphi(x) = \sup_{y \in (0, 1)} f(x, y) = \chi_E(x)$  и  $\psi(x) = \inf_{y \in (0, 1)} f(x, y) = -\chi_{(0,1) \setminus E}(x)$

и обе функции неизмеримы на  $(0, 1)$  в силу результата задачи 8.6.  $\square$

**8.46.** Пусть множество  $E$  и функция  $f(x, y)$  — из решения задачи 8.45. Обозначим  $B_n = (0, 1) \times \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$  и для  $n \in \mathbb{N}$  определим функции  $u_n(x, y) = f\left(x, \left(y - \frac{1}{n+1}\right)n(n+1)\right)$  при  $(x, y) \in B_n$  и  $u_n(x, y) = 0$  при  $(x, y) \in (0, 1)^2 \setminus B_n$ . Положим теперь

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y).$$

Так как (см. решение задачи 8.45)  $f(x, y)$  измерима на  $(0, 1)^2$ , то каждая функция  $u_n(x, y)$  измерима на  $B_n$  и, следовательно, на  $(0, 1)^2$ . Тогда в силу результата задачи 8.44 функция  $u(x, y)$  также измерима на  $(0, 1)^2$ . Аналогично, функция  $u(x_0, y)$  измерима на  $(0, 1)$  для каждого  $x_0 \in (0, 1)$ , и функция  $u(x, y_0)$  измерима на  $(0, 1)$  для каждого  $y_0 \in (0, 1)$ . В то же время  $g(x) = \overline{\lim}_{y \rightarrow 0_+} u(x, y) = \chi_E(x)$  и  $h(x) = \underline{\lim}_{y \rightarrow 0_+} u(x, y) = -\chi_{(0,1) \setminus E}(x)$ , так что обе функции неизмеримы на  $(0, 1)$ .  $\square$

**8.47.** Пусть  $c \in \mathbb{R}$ . Определим множества

$$E(c) = \{x \in (0, 1) : \varphi(x) > c\} \quad \text{и} \quad E_y(c) = \{x \in (0, 1) : f(x, y) > c\}.$$

Тогда  $E(c) = \bigcup_{y \in (0, 1)} E_y(c)$ . Так как множество  $E_y(c)$  открыто для каждого  $y \in (0, 1)$ , то множество  $E(c)$  также открыто и, следовательно, измеримо. Поэтому  $\varphi(x)$  — измеримая функция. Аналогично,  $\psi(x)$  — измеримая функция на  $(0, 1)$ . Отсюда следует, что функции

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in (0, \frac{1}{n})} f(x, y) \quad \text{и} \quad h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{y \in (0, \frac{1}{n})} f(x, y)$$

измеримы на  $(0, 1)$ .  $\square$

**8.48.** Доопределим функцию  $f(x)$  на всю вещественную ось:  $f(x) = f(a)$  при  $x < a$  и  $f(x) = f(b)$  при  $x > b$ . Положим  $F(x, y) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ . Эта функция непрерывна на прямоугольнике  $[a-1, b+1] \times [-1, 1]$ . Тогда, применяя задачу 8.47 с линейной заменой переменных, получим, что функция

$$\bar{f}'_+(x) = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0_+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0_+} F(x, h)$$

измерима относительно классической меры Лебега на  $(a, b)$ . Аналогично, функции

$$\underline{f}'_+(x) = \underline{\lim}_{h \rightarrow 0_+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \underline{\lim}_{h \rightarrow 0_+} F(x, h)$$

$$\bar{f}'_-(x) = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0_-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{и} \quad \underline{f}'_-(x) = \underline{\lim}_{h \rightarrow 0_-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

измеримы относительно классической меры Лебега на  $(a, b)$ . Заметим, что

$$A = \{x \in (0, 1) : \bar{f}'_+(x) = \bar{f}'_-(x) = \underline{f}'_+(x) = \underline{f}'_-(x) \text{ и } \bar{f}'_+(x) \text{ конечна}\}.$$

Отсюда следует, что множество  $A$  измеримо. Так как  $f'(x) = \bar{f}'_+(x)$  на  $A$ , то функция  $f'(x)$  измерима на  $A$  (см. задачи 8.3 и 8.14).  $\square$

**8.49.** Доопределим функцию  $f(x)$  на всю вещественную ось:  $f(x) = f(a)$  при  $x < a$  и  $f(x) = f(b)$  при  $x > b$ . Для каждого фиксированного  $c \in \mathbb{R}$  рассмотрим функцию  $y(x) = f(x) - cx$ . Заметим, что для любого натурального  $n$  и для каждого  $t \in \mathbb{R}$  множество

$$\left\{ x \in (a, b) : \sup_{h \in (0, \frac{1}{n}) \cap (0, b-x)} y(x+h) > t \right\}$$

открыто. Поэтому функции  $g_n(x) = \sup_{h \in (0, \frac{1}{n}) \cap (0, b-x)} y(x+h)$  измеримы

на  $(a, b)$  для  $n \in \mathbb{N}$ . Следовательно, функции

$$y_n(x) = g_n(x) - y(x) = \sup_{h \in (0, \frac{1}{n}) \cap (0, b-x)} (y(x+h) - y(x))$$

при  $n \in \mathbb{N}$  также измеримы. А поэтому измеримо множество

$$\left\{ x \in (a, b) : \sup_{h \in (0, \frac{1}{n}) \cap (0, b-x)} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > c \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ x \in (a, b) : \sup_{h \in (0, \frac{1}{n}) \cap (0, b-x)} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} > 0 \right\} = \\
&= \{x \in (a, b) : y_n(x) > 0\}.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали, что функции

$$f_n(x) = \sup_{h \in (0, \frac{1}{n}) \cap (0, b-x)} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

измеримы для  $n \in \mathbb{N}$ . Отсюда вытекает, что функция

$$\bar{f}'_+(x) = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0_+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

также измерима. Аналогично, функция

$$\underline{f}'_+(x) = \underline{\lim}_{h \rightarrow 0_+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

измерима на  $(a, b)$ .  $\square$

**8.50.** В силу результата задачи 8.49 функции

$$\bar{f}'_+(x) = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0_+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad \underline{f}'_+(x) = \underline{\lim}_{h \rightarrow 0_+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

$$\bar{f}'_-(x) = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0_-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{и} \quad \underline{f}'_-(x) = \underline{\lim}_{h \rightarrow 0_-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

измеримы относительно классической меры Лебега на  $(a, b)$ . Заметим, что

$$A = \{x \in (a, b) : \bar{f}'_+(x) = \bar{f}'_-(x) = \underline{f}'_+(x) = \underline{f}'_-(x) \text{ и } \bar{f}'_+(x) \text{ конечна}\}.$$

Поэтому множество  $A$  измеримо (см. задачи 8.3 и 8.14). Так как  $f'(x) = \bar{f}'_+(x)$  на  $A$ , то функция  $f'(x)$  измерима на  $A$ .  $\square$

**8.51.** Пусть  $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$  — все рациональные числа из  $\mathbb{R}$  и  $A_k = f^{-1}((r_k, +\infty]) \in \mathfrak{M}$  для каждого  $k \in \mathbb{N}$ . В силу результата задачи 7.65 для каждого  $k$  существует представление  $A_k = B_k \sqcup D_k$ , где  $B_k \in \mathcal{B}$  и  $\mu(D_k) = 0$ . Аналогично, если  $A'_k = B \setminus A_k$ , то  $A'_k = B'_k \sqcup D'_k$ , где  $B'_k \in \mathcal{B}$ , и  $\mu(D'_k) = 0$ . Теперь

$$H_k = D_k \sqcup D'_k = B \setminus (B_k \sqcup B'_k) \in \mathcal{B}$$

и  $\mu(H_k) = 0$  при  $k \in \mathbb{N}$ . Пусть

$$H = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k.$$

Заметим, что  $H$  — также борелевское множество и  $\mu(H) = 0$ . Определим функцию

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in H, \\ f(x) & \text{— иначе.} \end{cases}$$

Ясно, что  $g(x)$  эквивалентна  $f(x)$  на  $B$ . Мы получаем, что

$$g^{-1}((r_k, +\infty]) = \begin{cases} B_k \setminus H, & \text{если } r_k \geq 0, \\ B_k \cup H, & \text{если } r_k < 0 \end{cases}$$

при каждом  $k$ , поэтому  $g^{-1}((r_k, +\infty]) \in \mathcal{B}$ . Следовательно, для произвольного  $c \in \mathbb{R}$  мы получили, что множество

$$g^{-1}((c, +\infty]) = \bigcup_{k:r_k>c} g^{-1}((r_k, +\infty])$$

также является борелевским.  $\square$

**8.52.** Для заданного  $n \geq 1$  пусть  $\Delta_{k,n} = \left[ a + \frac{(b-a)(k-1)}{2^n}, a + \frac{(b-a)k}{2^n} \right)$  при  $k = 1, 2, \dots, 2^n - 1$  и  $\Delta_{2^n,n} = \left[ a + \frac{(b-a)(2^n-1)}{2^n}, b \right]$ . Обозначим

$$g_{k,n}(y) = \begin{cases} 1, & \text{если существует такое } x \in \Delta_{k,n}, \text{ что } f(x) = y, \\ 0 & \text{— иначе} \end{cases}$$

и

$$g_n(y) = \sum_{k=1}^{2^n} g_{k,n}(y)$$

для всех  $n$ . Так как  $f(x) \in C([a, b])$ , то каждая функция  $g_{k,n}(y)$  — характеристическая функция некоторого промежутка (замкнутого или полуоткрытого), поэтому функции  $g_n(y)$  измеримы. Докажем теперь, что  $g_n(y) \rightarrow g(y)$  при  $n \rightarrow \infty$  для каждого  $y \in \mathbb{R}$ , тогда утверждение будет сразу следовать из задачи 8.42. Если  $g(y) = l < \infty$ , то существует такое  $N$ , что  $2^{-N} < \min_{1 \leq k, j \leq l} |x_k - x_j|$ , где  $\{x_r\}_{r=1}^l$  — множество всех корней уравнения  $f(x) = y$ . Тогда при  $n > N$  все  $x_r$  лежат в разных промежутках  $\Delta_{k,n}$ , и поэтому  $g_n(y) = l$ . Если  $g(y) = \infty$ , то аналогично показывается, что  $g_n(y) \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

**8.53.** Так как (см. задачу 7.74)  $\mu(\{x \in [0, 1]: x_i \neq 6 \text{ при всех } i\}) = 0$ , то функция  $f(x)$  конечна п.в. на  $[0, 1]$ . Далее, пусть

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_j \neq 6 \text{ при } 1 \leq j \leq n, \\ 0 & \text{— иначе} \end{cases}$$

для  $n \in \mathbb{N}$ . Ясно, что каждая функция  $f_n(x)$  измерима и

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Поэтому утверждение следует из задачи 8.42.  $\square$

**8.54.** Для каждого  $x \in [0, 1]$  обозначим через  $(x_1, \dots, x_k, \dots)$  его двоичное разложение без 1 в периоде. Введём вспомогательное отображение  $g(x) = (y_1, \dots, y_n)$ , где  $y_j = (x_j, x_{j+n}, x_{j+2n}, \dots)$  для  $j = 1, \dots, n$  при  $x < 1$  и  $g(1) = (1, \dots, 1)$ . Ясно, что для каждого  $z = (z_1, \dots, z_n) \in [0, 1]^n$  существует такое  $x = x(z) \in [0, 1]$ , что  $g(x) = z$ . Предположим, что  $x(1) \neq x(2)$ , но  $g(x(1)) = g(x(2))$ . Тогда хотя бы одна из координат точки  $g(x)$  двоично-рациональна, т. е. для некоторых  $j$  и  $r_0$  выполнены равенства  $x(1)_{r_0 n+j} = 1$ ,  $x(1)_{rn+j} = 0$  при  $r > r_0$ ,  $x(2)_{r_0 n+j} = 0$  и  $x(2)_{rn+j} = 1$  при  $r > r_0$ . Обозначим

$$E_{k,j,0} = \{x \in [0, 1]: x_{rn+j} = 0 \text{ для } r > k\}$$

и

$$E_{k,j,1} = \{x \in [0, 1]: x_{rn+j} = 1 \text{ для } r > k\},$$

где  $j = 1, \dots, n$  и  $k \in \mathbb{N}$ . Пусть тогда

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{i=0}^1 E_{k,j,i}.$$

В силу результата задачи 7.74 мера множества  $\mu(E_{k,j,i})$  равна нулю для любых  $k$ ,  $j$  и  $i$ . Поэтому  $\mu(E) = 0$ . Нетрудно видеть, что и  $E$ , и  $g(E)$  имеют мощность континуума. Поэтому существует взаимно однозначное соответствие  $\varphi$  между множествами  $E$  и  $g(E)$ . Заметим также, что  $g$  есть взаимно однозначное соответствие между  $[0, 1] \setminus E$  и  $[0, 1]^n \setminus g(E)$ . Далее,  $g$  отображает любой двоичный интервал вида  $[\frac{k-1}{2^{nr}}, \frac{k}{2^{nr}}]$  с  $r \geq 1$  и  $1 \leq k \leq 2^{nr}$  на  $n$ -мерный двоичный интервал с ребром  $\frac{1}{2^r}$ , т. е. той же меры. Поэтому для любого  $A \subseteq [0, 1]$  выполнено равенство  $\mu_1^*(A) = \mu_n^*(g(A))$  (в частности,  $\mu_n(g(E)) = 0$ ).

Следовательно,  $A \in \mathfrak{M}_1$  тогда и только тогда, когда  $g(A) \in \mathfrak{M}_n$ , и если  $A \in \mathfrak{M}_1$ , то  $\mu_1(A) = \mu_n(g(A))$ . Пусть теперь

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } x \in E, \\ g(x), & \text{если } x \in [0, 1] \setminus E. \end{cases}$$

Тогда  $f(x)$  есть взаимно однозначное соответствие между  $[0, 1]$  и  $[0, 1]^n$ . Более того, так как  $\varphi(x)$  есть отображение множеств нулевой меры, то  $f(x)$  сохраняет класс измеримых множеств и значения меры, поскольку  $g(x)$  обладает этими свойствами.  $\square$

## Г л а в а 9

# СХОДИМОСТЬ ПО МЕРЕ И ПОЧТИ ВСЮДУ

Мы будем рассматривать пространство с мерой  $(X, M, \mu)$  (конечной или  $\sigma$ -конечной) и предполагать, что все функции измеримы на множестве  $A \in M$  и конечны в каждой точке. Если мера  $\mu$  полна, то достаточно считать, что функция конечна почти всюду на  $A$ . При этом несущественно, как операции над функциями определены на множестве, где хотя бы одна из них бесконечна.

Пусть  $A$  — множество из  $M$ , а  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  и  $f(x)$  — измеримые конечные функции на  $A$ . Скажем, что  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  на  $A$  при  $n \rightarrow \infty$  (что *последовательность функций  $\{f_n\}$  сходится к  $f(x)$  по мере на  $A$* ), если для любого  $\varepsilon > 0$  выполнено условие.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in A : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$

Напомним, что последовательность функций  $\{f_n\}$  называется сходящейся к функции  $f(x)$  почти всюду (п.в.) на множестве  $A$ , если  $\mu\{x \in A : f_n(x) \not\rightarrow f(x)\} = 0$ . Если последовательность  $\{t_n\}$  сходится к числу  $t$  и при этом является монотонно неубывающей или монотонно невозрастающей, то будут употребляться обозначения  $t_n \uparrow t$  и  $t_n \downarrow t$  соответственно.

## ЗАДАЧИ

**9.1.** Пусть  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  и  $f_n(x) \Rightarrow g(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ . Доказать, что  $f(x)$  и  $g(x)$  эквивалентны на  $A$ .

**9.2.** Пусть  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  и  $g_n(x) \Rightarrow g(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ . Доказать, что  $f_n(x) + g_n(x) \Rightarrow f(x) + g(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ .

**9.3.** Пусть  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$  и  $a, b \in \mathbb{R}$ . Доказать, что  $af_n(x) + b \Rightarrow af(x) + b$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ .

**9.4.** Пусть  $\mu(A) < \infty$ , функция  $g(y)$  непрерывна на открытом множестве  $G \subseteq \mathbb{R}$ , последовательность  $f_n(x)$  сходится по мере к  $f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$  и все функции  $f_n$  и  $f$  отображают  $A$  в  $G$ . Доказать, что  $g(f_n)(x) \Rightarrow g(f)(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ .

**9.5.** Пусть  $\mu(A) < \infty$  и  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ . Доказать, что  $f_n^2(x) \Rightarrow f^2(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ .

**9.6.** Пусть  $\mu(A) < \infty$ ,  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  и  $g_n(x) \Rightarrow g(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ . Доказать, что  $f_n(x) \cdot g_n(x) \Rightarrow f(x) \cdot g(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ .

**9.7.** Пусть  $\mu(A) < \infty$ ,  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ ,  $f(x) \neq 0$  на  $A$  и  $f_n(x) \neq 0$  на  $A$  при каждом  $n$ . Доказать, что  $\frac{1}{f_n(x)} \Rightarrow \frac{1}{f(x)}$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ .

**9.8.** Пусть  $\mu(A) < \infty$ ,  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  и  $g_n(x) \Rightarrow g(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ , причём  $f(x) \neq 0$  на  $A$  и все  $f_n(x) \neq 0$  на  $A$ . Доказать, что  $\frac{g_n(x)}{f_n(x)} \Rightarrow \frac{g(x)}{f(x)}$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ .

**9.9.** Построить функции  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  и функцию  $f(x)$ , конечные и измеримые относительно классической меры Лебега на  $\mathbb{R}$ , для которых  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $\mathbb{R}$ , но  $f_n^2(x) \not\Rightarrow f^2(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $\mathbb{R}$ .

**9.10.** Построить последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  и функцию  $f(x)$ , конечные и измеримые относительно классической меры Лебега на  $(0, \infty)$  и положительные на этом луче, для которых  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $(0, \infty)$ , но  $\frac{1}{f_n(x)} \not\Rightarrow \frac{1}{f(x)}$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $(0, \infty)$ .

**9.11.** Построить последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  и функции  $f(x)$ ,  $g(x)$ , конечные и измеримые относительно классической меры Лебега на  $\mathbb{R}$ , для которых  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $\mathbb{R}$ , но  $f_n(x)g(x) \not\Rightarrow f(x)g(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $\mathbb{R}$ .

**9.12.** Пусть последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  сходится по мере на множестве  $A$ . Доказать, что она *фундаментальна по мере*, т. е. для любых  $\varepsilon > 0$  и  $\gamma > 0$  существует такое  $N$ , что при  $n, m \geq N$  выполнено неравенство

$$\mu(\{x \in A : |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\}) < \gamma.$$

**9.13.** Пусть последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  фундаментальна по мере на множестве  $A$  (см. задачу 9.12). Доказать, что существует такая конечная измеримая функция  $f(x)$  на  $A$ , что  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ .

**9.14.** Пусть  $f(x)$  и  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  — конечные измеримые функции на множестве  $A$ , а  $E = \{x \in A : f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ при } n \rightarrow \infty\}$ . Доказать, что

$$A \setminus E = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \left\{ x \in A : |f_k(x) - f(x)| > \frac{1}{m} \right\} \equiv \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} F_{k,m}.$$

**9.15.** Пусть  $f(x)$  и  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  — конечные измеримые функции на множестве  $A$ , где  $\mu(A) < \infty$ . Доказать, что  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$

п.в. на  $A$  тогда и только тогда, когда для любого  $\varepsilon > 0$  выполнено условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left( \bigcup_{k=n}^{\infty} \{x \in A : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\} \right) = 0.$$

**9.16.** Пусть  $f(x)$  и  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  — конечные измеримые функции на множестве  $A$ , где  $\mu(A) < \infty$ , и  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  п.в. на  $A$ . Доказать, что  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ .

**9.17.** Построить такие функции  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  и функцию  $f(x)$ , конечные и измеримые относительно классической меры Лебега на  $\mathbb{R}$ , что  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  для каждого  $x \in \mathbb{R}$ , но  $f_n(x) \not\Rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $\mathbb{R}$ .

**9.18.** Построить функции  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  и  $f(x)$ , конечные и измеримые относительно классической меры Лебега на  $\mathbb{R}$ , для которых  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $[0, 1]$ , но  $f_n(x)$  расходится в каждой точке  $x \in [0, 1]$ .

**9.19. Теорема Ф. Рисса.** Пусть  $f(x)$  и  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  — конечные измеримые функции на множестве  $A$  и  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ . Доказать, что существует возрастающая последовательность натуральных чисел  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ , для которой  $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$  при  $k \rightarrow \infty$  п.в. на  $A$ .

**9.20.** Доказать, что последовательность  $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$  не сходится по мере на  $[0, \pi]$ .

**9.21.** Пусть  $\mathbb{Q}_{[0;1]} = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Доказать, что последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = r_n, \\ \frac{1}{\sqrt{n}(x - r_n)}, & \text{если } x \in [0, 1] \setminus \{r_n\}, \end{cases}$$

где  $n \in \mathbb{N}$ , сходится по классической мере Лебега на  $[0, 1]$ .

**9.22.** Доказать, что последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ , где  $f_n(x) = x^n$ , сходится по классической мере Лебега на  $[0, 1]$ , но не сходится по мере на  $[0, 2]$ .

**9.23.** Пусть  $\mathbb{Q}_{[0;1]} = \left\{ r_n = \frac{p_n}{q_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ , где  $p_n$  и  $q_n$  — взаимно простые натуральные числа,  $n \in \mathbb{N}$ . Доказать, что последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ , где  $f_n(x) = e^{-(p_n - q_n x)^2}$ , сходится по классической мере Лебега на  $[0, 1]$ .

**9.24.** Доказать, что последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ , определённая в задаче 9.23, расходится в каждой точке  $x \in [0, 1]$ .

**9.25.** Пусть последовательность неотрицательных функций  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  сходится по мере к  $f(x)$  на  $A$ . Доказать, что  $f(x) \geq 0$  п.в. на  $A$ .

**9.26. Теорема Егорова.** Пусть  $\mu(A) < \infty$ , и  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  п.в. на  $A$ . Доказать, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое измеримое множество  $E_{\varepsilon} \subseteq A$ , что  $\mu(A \setminus E_{\varepsilon}) < \varepsilon$  и последовательность  $\{f_n(x)\}$  равномерно сходится на  $E_{\varepsilon}$ .

**9.27.** Построить пример, показывающий, что утверждение теоремы Егорова не выполняется для классической меры Лебега на  $\mathbb{R}$ .

**9.28.** Построить пример, показывающий, что утверждение теоремы Егорова не выполняется ни для какой  $\sigma$ -конечной меры, не являющейся конечной.

**9.29.** Пусть  $f(x)$  — измеримая неотрицательная функция на  $A$  (возможно,  $f(x) = +\infty$  на некотором множестве). Доказать, что существует последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  измеримых конечных неотрицательных функций на  $A$ , для которой каждое множество  $f_n(A)$  конечно,  $\mu(\{x \in A : f_n(x) \neq 0\}) < \infty$  при каждом  $n$  и  $f_n(x) \uparrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  для любого  $x \in A$ .

**9.30.** Пусть  $f(x)$  — измеримая конечная функция на  $A$ . Доказать, что существует последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  измеримых конечных функций на  $A$ , для которой при любом  $n$  множество  $f_n(A)$  конечно,  $\mu(\{x \in A : f_n(x) \neq 0\}) < \infty$  и  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  для каждого  $x \in A$ .

**9.31. Теорема Лузина.** Пусть  $n \geq 1$ ,  $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$ , а функция  $f(x)$  измерима и конечна п.в. на  $[a, b]$  относительно классической меры Лебега  $\mu$ . Доказать, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует такая функция  $g(x) = g_{\varepsilon}(x) \in C([a, b])$ , что  $\mu(\{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$ .

**9.32.** Пусть  $n \geq 1$ , функция  $f(x)$  измерима и конечна п.в. на  $\mathbb{R}^n$  относительно классической меры Лебега  $\mu$ . Доказать, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует такая функция  $g(x) = g_{\varepsilon}(x) \in C(\mathbb{R}^n)$ , что  $\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$ .

**9.33.** Пусть  $n \geq 1$ ,  $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$ , а функция  $f(x)$  на  $[a, b]$  такова, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует функция  $g(x) = g_{\varepsilon}(x) \in C([a, b])$ , для которой множество  $\{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}$  измеримо, и

$$\mu(\{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon,$$

где  $\mu$  — классическая мера Лебега. Доказать, что  $f(x)$  измерима относительно  $\mu$  и конечна п.в. на  $[a, b]$ .

**9.34.** Пусть  $n \geq 1$ ,  $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$  и  $f(x)$  — функция на  $[a, b]$ , измеримая и конечная п.в. относительно классической меры Лебега на  $[a, b]$ .

Доказать, что существует такая последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  непрерывных функций на  $[a, b]$ , что  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  п.в. на  $[a, b]$ .

**9.35.** Пусть  $f(x)$  — конечная измеримая относительно классической меры Лебега функция на  $[-1, 1]$ . Доказать, что  $f_n(x) \equiv f\left(x - \frac{1}{n}\right) \Rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $[0, 1]$ .

**9.36.** Построить конечную измеримую относительно классической меры Лебега функцию  $f(x)$  на  $[-1, 1]$ , для которой последовательность  $\{g_m(x) \equiv f\left(x - \frac{1}{m}\right)\}_{m=1}^{\infty}$  расходится на множестве положительной меры  $A \subset [0, 1]$ .

**9.37.** Пусть двойная последовательность  $\{f_{n,k}(x)\}_{n,k=1}^{\infty}$ , последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  и функция  $f(x)$ , определённые на  $A$ , таковы, что  $f_{n,k}(x) \Rightarrow f_n(x)$  при  $k \rightarrow \infty$  на  $A$  для каждого  $n$  и  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ . Доказать, что существует возрастающая последовательность натуральных чисел  $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ , для которой  $f_{n,k_n}(x) \Rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ .

**9.38.** Пусть двойная последовательность  $\{f_{n,k}(x)\}_{n,k=1}^{\infty}$ , последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  и функция  $f(x)$ , определённые на  $A$ , таковы, что  $f_{n,k}(x) \rightarrow f_n(x)$  при  $k \rightarrow \infty$  п.в. на  $A$  для каждого  $n$  и  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  п.в. на  $A$ . Доказать, что существует возрастающая последовательность натуральных чисел  $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ , для которой  $f_{n,k_n}(x) \rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  п.в. на  $A$ .

**9.39.** Построить двойную последовательность  $\{f_{n,k}(x)\}_{n,k=1}^{\infty}$ , последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  и функцию  $f(x)$ , конечные и измеримые относительно классической меры Лебега на  $[0, 1]$ , для которых  $f_{n,k}(x) \rightarrow f_n(x)$  при  $k \rightarrow \infty$  всюду на  $[0, 1]$  для каждого  $n$  и  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  всюду на  $[0, 1]$ , но для любой возрастающей последовательности натуральных чисел  $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$  последовательность  $f_{n,k_n}(x)$  расходится на непустом подмножестве  $[0, 1]$ .

**9.40.** Построить такой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k(x),$$

где все  $P_k(x)$  — полиномы, что для любой функции  $f(x) \in C([0, 1])$  существует возрастающая последовательность натуральных чисел  $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ , для которой функции

$$R_n(x) = \sum_{k=1}^{k_n} P_k(x)$$

равномерно сходятся к  $f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $[0, 1]$ .

**9.41.** Пусть  $f(x)$  — измеримая конечная функция на  $A$ . Доказать, что существует такая последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  измеримых конечных функций на  $A$ , что для любого  $n$  множество  $f_n(A)$  не более чем счётно и  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно на  $A$ .

### РЕШЕНИЯ

**9.1.** Для любого  $\varepsilon > 0$  и для каждого натурального  $n$  имеем

$$\{x \in A: |f(x) - g(x)| > \varepsilon\} \subseteq$$

$$\subseteq \left\{x \in A: |f_n(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x \in A: |f_n(x) - g(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Но мера множеств в правой части этого включения стремится к нулю. Поэтому  $\mu(\{x \in A: |f(x) - g(x)| > \varepsilon\}) = 0$ . Так как

$$\{x \in A: |f(x) - g(x)| > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x \in A: |f(x) - g(x)| > \frac{1}{k}\right\},$$

то  $f(x)$  и  $g(x)$  эквивалентны на  $A$ .  $\square$

**9.2.** Для любого  $\varepsilon > 0$  и для каждого  $n$  имеем

$$\{x \in A: |(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))| > \varepsilon\} \subseteq$$

$$\subseteq \{x \in A: |f_n(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{x \in A: |g_n(x) - g(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in A: |(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))| > \varepsilon\}) = 0.$$

$\square$

**9.3.** Если  $a = 0$ , то утверждение очевидно. Пусть  $a \neq 0$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  и для каждого  $n$  имеем

$$\{x \in A: |(af_n(x) + b) - (af(x) + b)| > \varepsilon\} =$$

$$= \left\{x \in A: |f_n(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{|a|}\right\},$$

откуда следует утверждение задачи.  $\square$

**9.4.** Пусть даны  $\varepsilon > 0$  и  $\gamma > 0$ . Найдём такие компакты  $K_n \subset \mathbb{R}$ , что  $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ , причём  $K_n \subset K_{n+1}$  при каждом  $n \in \mathbb{N}$ . Для этого заметим, что в силу результата задачи 3.109 имеет место представление

$$G = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n),$$

где одно из чисел  $a_k$  и (или)  $b_j$  может быть бесконечным, а объединение может быть конечным. Положим  $J_{n,k} = \left[ a_n + \frac{1}{k}, b_n - \frac{1}{k} \right]$  для конечных  $a_n$  и  $b_n$ . Если, например,  $a_1$  конечно, а  $b_1 = +\infty$ , то положим  $J_{1,k} = \left[ a_1 + \frac{1}{k}, k \right]$ . Аналогично определим отрезки  $J_{n,k}$  и в других случаях — так, чтобы были выполнены условия:  $J_{n,k} \subseteq J_{n,k+1}$  и  $(a_n, b_n) = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_{n,k}$ . Теперь можно взять компакты  $K_n = \bigcup_{k=1}^n J_{k,n}$ .

Рассмотрим множества  $E_n = f^{-1}(K_n)$  для  $n \in \mathbb{N}$ . Ясно, что,  $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$  и

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Применяя результат задачи 7.51, получаем, что существует  $N$ , для которого

$$\mu(B) \equiv \mu\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^N E_n\right) < \frac{\gamma}{2}.$$

Пусть  $\rho$  — расстояние между компактом  $K = \bigcup_{n=1}^N K_n$  и замкнутым множеством  $F = \mathbb{R} \setminus G$ . В силу результата задачи 3.89 величина  $\rho$  положительна. Определим компакт

$$K' = \{y \in \mathbb{R}^1 : \min_{x \in K} |x - y| \leq \frac{\rho}{2}\} \subset G.$$

Так как функция  $g(y)$  равномерно непрерывна на  $K'$ , то существует такое  $\delta > 0$ , что для любых  $z, y \in K'$  при  $|z - y| < \delta$  выполнено неравенство  $|g(z) - g(y)| < \varepsilon$ . Далее, найдём такое натуральное  $L$ , что при  $n > L$  выполнено неравенство

$$\mu(B_n) \equiv \mu\left(\{x \in A : |f_n(x) - f(x)| \geq \min\left(\frac{\rho}{2}, \delta\right)\}\right) < \frac{\gamma}{2}.$$

Тогда при  $n > L$  выполнена оценка  $\mu(B \cup B_n) < \gamma$ , и если  $x \in A \setminus (B \cup B_n)$ , то  $f(x) \in K \subset K'$ ,  $f_n(x) \in K'$  и  $|f_n(x) - f(x)| < \delta$ , откуда следует, что  $|g(f_n(x)) - g(f(x))| < \varepsilon$ . Это означает, что  $g(f_n)(x) \Rightarrow g(f)(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ .  $\square$

**9.5.** Утверждение следует из задачи 9.4, если взять  $G = \mathbb{R}$  и  $g(y) = y^2$ .  $\square$

**9.6.** Утверждение следует из задач 9.2, 9.3, 9.5, а также тождеств

$$(f_n + g_n)^2 = f_n^2 + 2f_n g_n + g_n^2 \quad \text{и} \quad (f + g)^2 = f^2 + 2fg + g^2.$$

$\square$

**9.7.** Утверждение следует из задачи 9.4, если взять  $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  и  $g(y) = \frac{1}{y}$ .  $\square$

**9.8.** Утверждение вытекает из задач 9.7 и 9.6.  $\square$

**9.9.** Пусть  $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$  при  $x \in \mathbb{R}$  и  $n \in \mathbb{N}$ . Ясно, что  $f_n(x) \Rightarrow x \equiv f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $\mathbb{R}$ , более того, имеет место равномерная сходимость. В то же время

$$f_n^2(x) - f^2(x) = \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \not\rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$  на  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**9.10.** Пусть  $f(x) = \frac{1}{x}$  при  $x > 0$  и

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x \in (0, n), \\ \frac{2}{x}, & \text{если } x \in [n, \infty), \end{cases}$$

при  $n \in \mathbb{N}$ . Ясно, что  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $(0, \infty)$ . В то же время

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f_n(x)} = \frac{x}{2} \geq \frac{n}{2}$$

при  $x \geq n$ , т. е. сходимости по мере нет.  $\square$

**9.11.** Пусть  $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$  для  $x \in \mathbb{R}$  и  $n \in \mathbb{N}$ , а  $f(x) = g(x) = x$ . Тогда  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $\mathbb{R}$ . В то же время  $f_n(x)g(x) - f(x)g(x) = \frac{x}{n} \not\rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**9.12.** Пусть  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ . Для любых заданных  $\varepsilon > 0$  и  $\gamma > 0$  найдём такое натуральное  $N$ , что при  $n \geq N$  выполнено неравенство

$$\mu \left( \left\{ x \in A : |f_n(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right) < \frac{\gamma}{2}.$$

Тогда при  $n, m \geq N$  получаем, что

$$\mu(\{x \in A : |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\}) \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \mu \left( \left\{ x \in A : |f_n(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right) + \\ &+ \mu \left( \left\{ x \in A : |f_m(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right) < \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = \gamma. \end{aligned}$$

$\square$

**9.13.** Выберем вначале по индукции возрастающую последовательность натуральных чисел  $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$  так, чтобы для множеств

$$B_i = \{x \in A : |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)| > 2^{-i}\}$$

было выполнено условие  $\mu(B_i) < 2^{-i}$ . Пусть

$$B = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{i=m}^{\infty} B_i.$$

Так как

$$\mu\left(\bigcup_{i=m}^{\infty} B_i\right) < \frac{1}{2^{m-1}},$$

то (см. задачу 7.60)  $\mu(B) = 0$ . Если  $x \in A \setminus B$ , то числовая последовательность  $\{f_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$  фундаментальна и, следовательно, существует конечный предел

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_{n_i}(x) = f(x).$$

Функция  $f(x)$  измерима на множестве  $A \setminus B$  (см. задачу 8.44). Если положить  $f(x) = 0$  при  $x \in B$ , то  $f(x)$  будет измерима на  $A$ . Докажем, что  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ . Заметим, что если для некоторого  $m$  точка  $x$  не принадлежит множеству  $\bigcup_{i=m+1}^{\infty} B_i$ , то при  $i, j \geq m + 1$  получаем, что

$$|f_{n_j}(x) - f_{n_i}(x)| \leq \sum_{r=m+1}^{\infty} 2^{-r} = 2^{-m},$$

откуда следует, что  $|f(x) - f_{n_i}(x)| \leq 2^{-m}$ . Следовательно, при  $i \geq m + 1$  имеем

$$\mu(\{x \in A : |f_{n_i}(x) - f(x)| > 2^{-m}\}) \leq \sum_{r=m+1}^{\infty} \mu(B_r) < 2^{-m}.$$

Теперь для заданных  $\varepsilon > 0$  и  $\gamma > 0$  найдём такое число  $N$ , что при  $n, r \geq N$  выполняется неравенство

$$\mu\left(\left\{x \in A : |f_n(x) - f_r(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) < \frac{\gamma}{2}.$$

Затем выберем  $m$  так, чтобы  $2^{-m} < \min\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)$ , и зафиксируем  $n_i > N$  с  $i \geq m + 1$ . Тогда при  $n \geq N$  получаем, что

$$\mu(\{x \in A : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \leq$$

$$\leq \mu \left( \left\{ x \in A : |f_n(x) - f_{n_i}(x)| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right) + \\ + \mu \left( \left\{ x \in A : |f_{n_i}(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right) < \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = \gamma.$$

Это и означает, что  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ .  $\square$

**9.14.** Заметим, что  $x \in A \setminus E$  тогда и только тогда, когда  $f_n(x) \not\rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Это означает, что для некоторого  $m_0$  и для каждого  $n \geq 1$  существует такое  $k > n$ , что  $|f_k(x) - f(x)| > \frac{1}{m_0}$ . Равенство в формулировке задачи является формальной записью последнего утверждения.  $\square$

**9.15.** Возьмём множества  $F_{k,m}$  из задачи 9.14. При каждом  $m$  обозначим  $G_{n,m} = \bigcup_{k=n}^{\infty} F_{k,m}$  для  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $G_{1,m} \supseteq G_{2,m} \supseteq \dots$  Утверждение задачи состоит в том, что сходимость  $f_n(x)$  к  $f(x)$  п.в. на  $A$  эквивалентна условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(G_{n,m}) = 0$$

для каждого натурального  $m$ . В силу результата задачи 9.14  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  п.в. на  $A$  тогда и только тогда, когда  $\mu(A \setminus E) = 0$ , т.е.

$$\mu \left( \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} G_{n,m} \right) = 0.$$

Последнее утверждение эквивалентно тому, что

$$\mu \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} G_{n,m} \right) = 0$$

для каждого  $m$ . Так как  $\mu(A) < \infty$ , то, используя задачу 7.52, мы получаем, что

$$0 = \mu \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} G_{n,m} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(G_{n,m})$$

для каждого  $m \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**9.16.** Утверждение немедленно вытекает из задачи 9.15 и определения сходимости по мере.  $\square$

**9.17.** Пусть  $f_n(x) = \frac{x}{n}$  при  $x \in \mathbb{R}$  и  $n \in \mathbb{N}$ , а  $f(x) = 0$ . Тогда  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  для каждого  $x \in \mathbb{R}$ , но  $f_n(x) \not\rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**9.18. Пример Ф. Рисса.** Пусть  $f(x) = 0$  на  $[0, 1]$  и

$$\varphi_{n,k}(x) = \chi_{\left[ \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right]}(x)$$

при  $n = 0, 1, \dots$  и  $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ . Заметим, что для любого натурального  $m$  существует единственная пара целых чисел  $(n, k)$ , для которой  $n \geq 0$ ,  $0 \leq k \leq 2^n - 1$  и  $m = 2^n + k$ . Определим функции  $f_m(x) = \varphi_{n,k}(x)$  для  $m \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$\mu(\{x \in [0, 1]: |f_m(x)| > 0\}) = \frac{1}{2^n} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0,$$

поэтому  $f_m(x) \Rightarrow 0$  на  $[0, 1]$ . С другой стороны, в каждой точке отрезка  $[0, 1]$  бесконечное множество членов последовательности  $\{f_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$  равно 0 и бесконечное число её членов равно 1, откуда следует, что  $f_n(x)$  расходится в каждой точке  $x \in [0, 1]$ .  $\square$

**9.19.** Предположим вначале, что  $\mu(A) < \infty$ . Возьмём  $n_0 = 1$  и при  $k \in \mathbb{N}$  выберем по индукции натуральные  $n_k > n_{k-1}$ , для которых

$$\mu\left(\left\{x \in A: |f_{n_k}(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\right\}\right) < \frac{1}{2^k}.$$

Докажем, что  $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$  при  $k \rightarrow \infty$  п.в. на  $A$ . Для данных  $\varepsilon > 0$  и  $\delta > 0$  найдём такое  $m_0$ , что  $\frac{1}{m_0} < \varepsilon$  и  $\frac{1}{2^{m_0-1}} < \delta$ . Тогда при  $m > m_0$  получаем, что

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} \{x \in A: |f_{n_k}(x) - f(x)| > \varepsilon\}\right) &\leq \\ &\leq \mu\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} \left\{x \in A: |f_{n_k}(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\right\}\right) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{m-1}} < \delta. \end{aligned}$$

В силу результата задачи 9.15 получаем, что  $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$  п.в.

Пусть теперь  $\mu$  —  $\sigma$ -конечная мера на  $A$ , т.е.  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ , где  $\mu(A_i) < \infty$  при  $i \in \mathbb{N}$ . Так как  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  на  $A$ , то  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  на каждом  $A_i$ . По доказанному выше, существует подпоследовательность  $f_{1,n_1}(x) \rightarrow f(x)$  п.в. на  $A_1$ . Далее, эта подпоследовательность сходится по мере на каждом  $A_i$ , поэтому из неё можно выбрать подпоследовательность  $f_{2,n_2}(x)$ , сходящуюся к  $f(x)$  п.в. на  $A_2$ . Продолжая этот процесс по индукции и выбирая диагональную подпоследовательность  $\{f_{k,n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ , получим, что эта подпоследовательность сходится к  $f(x)$  п.в. на каждом  $A_i$ , т.е п.в. на  $A$ .  $\square$

**9.20.** Предположим, что последовательность  $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$  сходится по мере на  $[0, \pi]$ . Тогда (см. задачу 9.12) существует такое  $N$ , что при  $m, n \geq N$  выполнено условие

$$\mu\left(\left\{x \in [0, \pi]: |\sin nx - \sin mx| > \frac{1}{2}\right\}\right) < \frac{1}{10}.$$

При этом можно считать, что  $N > 4$ . С другой стороны, для любого натурального  $k \in \left[1, \frac{N}{2}\right)$  имеем

$$\begin{aligned} \mu\left(\left\{x \in \left[\frac{2\pi k}{N}, \frac{\pi(2k+1)}{N}\right] : |\sin Nx - \sin 2Nx| > \frac{1}{2}\right\}\right) &> \\ &> \mu\left(\left[\frac{2\pi k}{N} + \frac{\pi}{2N}, \frac{2\pi k}{N} + \frac{3\pi}{4N}\right]\right) = \frac{\pi}{4N}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\mu\left(\{x \in [0, \pi] : |\sin Nx - \sin 2Nx| > \frac{1}{2}\}\right) > \frac{\pi}{4N} \cdot \frac{N}{4} = \frac{\pi}{16} > \frac{1}{10}.$$

Полученное противоречие доказывает, что последовательность не сходится по мере.  $\square$

**9.21.** Пусть дано  $\varepsilon > 0$ . Тогда

$$E_n = \{x \in [0, 1] : |f_n(x)| > \varepsilon\} = \left(\left(r_n - \frac{1}{\sqrt{n\varepsilon}}, r_n + \frac{1}{\sqrt{n\varepsilon}}\right) \setminus \{r_n\}\right) \cap [0, 1]$$

для  $n \in \mathbb{N}$ . Поэтому  $\mu(E_n) \leq \frac{2}{\sqrt{n\varepsilon}} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

**9.22.** Пусть дано  $\varepsilon > 0$ . Тогда

$$E_n = \{x \in [0, 1] : x^n > \varepsilon\} = \left(\varepsilon^{\frac{1}{n}}, 1\right].$$

Поэтому  $\mu(E_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и, следовательно,  $x^n \Rightarrow 0$  на  $[0, 1]$ . С другой стороны, для каждого  $n > 2$  имеем

$$B_n = \{x \in [0, 2] : x^{2n} - x^n > 1\} \supset \left[\frac{3}{2}, 2\right],$$

откуда следует, что последовательность  $\{x^n\}$  не сходится по мере на отрезке  $[0, 2]$ .  $\square$

**9.23.** Пусть  $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ . Если  $x \in [0, 1] \setminus (r_n - \delta, r_n + \delta)$ , то  $f_n(x) \leq e^{-q_n^2 \delta^2} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Поэтому для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $N$ , что при  $n > N$  справедлива оценка

$$\mu(\{x \in [0, 1] : f_n(x) > \varepsilon\}) \leq \mu((r_n - \delta, r_n + \delta)) = 2\delta,$$

из которой следует, что  $f_n(x) \Rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $[0, 1]$ .  $\square$

**9.24.** Из решения задачи 9.23 и из задачи 9.19 следует, что для любого  $x_0 \in [0, 1]$  найдётся подпоследовательность  $f_{n_k}(x_0) \rightarrow 0$  при

$k \rightarrow \infty$ . С другой стороны, для любого простого  $q$  существует такое рациональное  $r_m = \frac{p_m}{q_m}$  с  $q_m = q$ , что  $0 < |r_m - x_0| \leq \frac{1}{q}$ . Тогда

$$f_m(x_0) = e^{-q_m^2(r_m-x_0)^2} \geq e^{-1}.$$

□

**9.25.** В силу результата задачи 9.19 существует такая подпоследовательность  $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^\infty$ , что  $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$  при  $k \rightarrow \infty$  п.в. на  $A$ . Поэтому  $f(x) \geq 0$  п.в. на  $A$ . □

**9.26.** Из задачи 9.15 следует, что для любого  $m$  существует число  $n_m$ , для которого

$$\mu\left(\bigcup_{k=n_m}^\infty \left\{x \in X : |f_k(x) - f(x)| > \frac{1}{m}\right\}\right) \equiv \mu(G_m) < \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

Введём обозначение

$$E_\varepsilon = X \setminus \bigcup_{m=1}^\infty G_m.$$

Тогда

$$\mu(X \setminus E_\varepsilon) \leq \sum_{m=1}^\infty \mu(G_m) < \varepsilon.$$

Для заданного  $\gamma > 0$  найдём такое натуральное  $m$ , что  $\frac{1}{m} < \gamma$ . Тогда при  $k > n_m$  получаем

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \frac{1}{m} < \gamma \quad \text{для каждого } x \in E_\varepsilon,$$

что и означает равномерную сходимость на  $E_\varepsilon$ . □

**9.27.** Пусть  $f_n(x) = \chi_{[-n,n]}(x)$  при  $x \in \mathbb{R}$  и  $n \in \mathbb{N}$ . Ясно, что  $f_n(x) \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$  для любого  $x$ . В то же время

$$\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - 1| > \frac{1}{2}\right\}\right) = \infty$$

для любого  $n$ , поэтому утверждение теоремы Егорова не выполняется. □

**9.28.** По определению  $\sigma$ -конечной меры найдутся такие множества  $A_i \in M$ , что  $\mu(A_i) < \infty$  и  $X = \bigsqcup_{i=1}^\infty A_i$ . Положим  $B_k = \bigsqcup_{i=k}^\infty A_i$  и  $f_k(x) = \chi_{B_k}(x)$ . Тогда  $f_n(x) \rightarrow 0$  в каждой точке, но

$$\mu\left(\left\{x \in X : |f_n(x)| > \frac{1}{2}\right\}\right) = \mu(B_n) = \infty$$

для любого  $n$ , поэтому утверждение теоремы Егорова не выполняется.  $\square$

**9.29.** Представим вначале множество  $A$  в виде

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

где  $\mu(A_n) < \infty$  при  $n \in \mathbb{N}$  (если  $\mu(A) < \infty$ , то можно взять  $A_1 = A$  и  $A_2 = A_3 = \dots = \emptyset$ ). Пусть  $f_m(x) = 0$  при  $x \notin \bigcup_{n=1}^m A_n$  и

$$f_m(x) = \begin{cases} \frac{k-1}{2^m}, & \text{если } \frac{k-1}{2^m} \leq f(x) < \frac{k}{2^m}, \text{ где } k = 1, 2, \dots, 2^{2m}, \\ 2^m, & \text{если } f(x) \geq 2^m, \end{cases}$$

при  $x \in \bigcup_{n=1}^m A_n$ . Докажем, что эта последовательность монотонна

на  $A$ . Пусть  $m$  — натуральное число и  $x \in A$ . Если  $f_m(x) = 0$ , то  $f_{m+1}(x) \geq 0 = f_m(x)$ . Если  $f_m(x) = 2^m$ , то  $x \in \bigcup_{k=1}^m A_k$  и  $f(x) \geq 2^m$ ,

откуда следует, что  $f_{m+1}(x) \geq 2^m$ . Пусть  $f(x) = \frac{k}{2^m}$ , где  $1 \leq k < 2^m$ ,

тогда  $x \in \bigcup_{k=1}^m A_k$  и

$$f(x) \in \left[ \frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m} \right) = \left[ \frac{2k}{2^{m+1}}, \frac{2(k+1)}{2^{m+1}} \right).$$

Следовательно,  $f_{m+1}(x) = \frac{2k}{2^{m+1}}$  или  $f_{m+1}(x) = \frac{2(k+1)}{2^{m+1}}$ , и в обоих случаях  $f_{m+1}(x) \geq f_m(x)$ .

Докажем теперь, что  $f_m(x) \rightarrow f(x)$  при  $m \rightarrow \infty$  для  $x \in A$ . Если  $x \in A$  и  $f(x) < +\infty$ , то для некоторого  $m_0$  имеем:  $x \in \bigcup_{k=1}^{m_0} A_k$  и  $f(x) \leq 2^{m_0}$ .

Следовательно, при  $n \geq m_0$  получаем, что  $|f_n(x) - f(x)| \leq 2^{-n}$ . Если  $f(x) = \infty$ , то для достаточно больших  $m$  имеем:  $f_m(x) = 2^m \rightarrow +\infty$  при  $m \rightarrow \infty$ .  $\square$

**9.30.** Пусть  $f_+(x) = \max(f(x), 0)$  и  $f_-(x) = -\min(f(x), 0)$ . Ясно, что функции  $f_+(x)$  и  $f_-(x)$  неотрицательны, измеримы и конечны на  $A$  и  $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ . В силу результата задачи 9.29 существуют такие последовательности  $\{f_{n,+}(x)\}_{n=1}^{\infty}$  и  $\{f_{n,-}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ , что множества  $f_{n,+}(A)$  и  $f_{n,-}(A)$  конечны для каждого  $n$ ,  $f_{n,+}(x) \uparrow f_+(x)$  и  $f_{n,-}(x) \uparrow f_-(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  для любого  $x \in A$ . Тогда последовав-

тельность  $f_n(x) = f_{n,+}(x) - f_{n,+}(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , удовлетворяет требованиям задачи.  $\square$

**9.31.** Без ограничения общности будем считать, что  $f(x)$  конечна всюду на  $[a, b]$ . В силу результата задачи 9.30 существует такая последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ , что  $f_n([a, b])$  конечна при всех  $n$  и всех  $x \in [a, b]$ , и  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $[a, b]$ . Тогда

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{k_n} a_{n,k} \chi_{A(n,k)}(x), \quad \text{где} \quad \bigsqcup_{k=1}^{k_n} A(n, k) = [a, b],$$

при всех  $n \in \mathbb{N}$ . Для любых заданных  $n$  и  $k$  выберем такое замкнутое множество  $F(n, k) \subseteq A(n, k)$ , что  $\mu(A(n, k) \setminus F(n, k)) < \frac{1}{2^n n_k}$  (существует в силу результатов задач 7.40 и 7.42). Обозначим

$$F(n) = \bigsqcup_{k=1}^{k_n} F(n, k)$$

для  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $F_n$  — замкнутое множество, и  $\mu([a, b] \setminus F(n)) < \frac{1}{2^n}$  при каждом  $n$ . Так как  $f_n(x)$  постоянна на  $F(n, k)$  при  $k = 1, 2, \dots, k_n$ , то  $f_n(x) \in C(F(n))$ . Для заданного  $\varepsilon > 0$  найдём  $N$  такое, что  $2^{-N+2} < \varepsilon$ , и обозначим

$$B = \bigcap_{n=N}^{\infty} F(n).$$

Тогда  $\mu([a, b] \setminus B) < \frac{\varepsilon}{2}$  и  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $B$ , причём функции  $f_n$  непрерывны на  $B$  начиная с номера  $N$ . По теореме Егорова найдём такое множество  $D \subset B$ , что  $\mu(B \setminus D) < \frac{\varepsilon}{2}$  и сходимость равномерна на  $D$ . Более того, используя задачи 7.40 и 7.42, можно выбрать  $D$  замкнутым. По теореме Вейерштрасса  $f(x) \in C(D)$ . Наконец, используя задачу 4.22, построим такую  $g(x) \in C([a, b])$ , что  $g(x) = f(x)$  на  $D$ . Так как  $\mu([a, b] \setminus D) < \varepsilon$ , то  $g$  — искомая функция.  $\square$

**9.32.** Пусть задано  $\varepsilon > 0$ . Разобьём  $\mathbb{R}^n$  на счётное количество единичных кубов, пересекающихся лишь по границам:

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}} [k_1, k_1 + 1] \times \dots \times [k_n, k_n + 1] = \bigcup_{m=1}^{\infty} I_m.$$

На каждом кубе  $I_m$  в силу результата задачи 9.31 можно построить такую функцию  $h_m(x) \in C(I_m)$ , что  $\mu(\{x \in I_m : f(x) \neq h_m(x)\}) < 2^{-m-2}\varepsilon$ . Далее, построим такие функции  $g_m(x) \in C(I_m)$ , что

$\mu(\{x \in I_m : h_m(x) \neq g_m(x)\}) < 2^{-m-2}\varepsilon$  и  $h_m(x) \equiv 0$  на границе куба  $I_m$ . Определим функции

$$\psi_\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \leq 0, t \geq 1; \\ 1, & \text{при } \delta \leq t \leq 1 - \delta; \\ t/\delta, & \text{при } 0 < t < \delta; \\ (1-t)/\delta, & \text{при } 1 - \delta < t < 1. \end{cases}$$

Тогда функции  $g_m$  можно задать следующим образом:

$$g_m(x) = h_m(x) \cdot \prod_{j=1}^n \psi_{\delta(m)}(x_j - k_j),$$

где  $\delta(m)$  выбраны достаточно малыми. Теперь нетрудно видеть, что функция  $g(x)$ , равная  $g_m(x)$  на каждом  $I_m$ , удовлетворяет условиям задачи.  $\square$

**9.33.** Найдём такие функции  $f_n(x) \in C([a, b])$ , что

$$\mu(E_n) < 2^{-n}, \quad \text{где} \quad E_n = \{x \in [a, b] : f(x) \neq f_n(x)\},$$

для  $n \in \mathbb{N}$ . Покажем, что функция  $f$  измерима. Действительно,  $f_n(x) = f(x)$  всюду на множестве  $A_n = [a, b] \setminus E_n$ . Поэтому  $f(x)$  измерима и конечна на каждом  $A_n$ . В силу результата задачи 8.2 функция  $f$  измерима и конечна и на их объединении, т. е. на множестве с дополнением нулевой меры. Но так как классическая мера Лебега полна, то тогда  $f(x)$  измерима на всём отрезке  $[a, b]$  (см. решение задачи 8.43).  $\square$

**9.34.** Найдём, используя теорему Лузина, такие функции  $f_n(x) \in C([a, b])$ , что

$$\mu(E_n) < 2^{-n}, \quad \text{где} \quad E_n = \{x \in [a, b] : f(x) \neq f_n(x)\},$$

для  $n \in \mathbb{N}$ . Заметим, что

$$\mu\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} \{x \in [a, b] : |f(x) - f_n(x)| > 0\}\right) = \mu\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n\right) \leqslant 2^{-k+1} \rightarrow 0$$

при  $k \rightarrow \infty$ . Поэтому  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  п.в. на  $[a, b]$  в силу результата задачи 9.15.  $\square$

**9.35.** Пусть заданы  $\varepsilon > 0$  и  $\gamma > 0$ . Вначале, используя теорему Лузина, выберем  $g(x) \in C([-1, 1])$  так, что если  $E = \{x \in [-1, 1] : f(x) \neq g(x)\}$ , то  $\mu(E) < \frac{\gamma}{2}$ . Далее, опираясь на теорему Кантора, выберем  $n$  так, что если  $x, y \in [-1, 1]$  и  $|x - y| \leqslant \frac{1}{n}$ , то  $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$ . Обозначим

$F = \left( E \cup \left( E + \frac{1}{n} \right) \right) \cap [0, 1]$ . Ясно, что  $\mu(F) < \gamma$ , и если  $x \in [0, 1] \setminus F$ , то  $x, x - \frac{1}{n} \in [-1, 1] \setminus E$ , поэтому

$$\left| f\left(x - \frac{1}{n}\right) - f(x) \right| = \left| g\left(x - \frac{1}{n}\right) - g(x) \right| < \varepsilon.$$

□

**9.36.** Мы будем строить функцию  $f(x)$  на  $[0, 1]$ , считая, что  $f(x-1) = f(x)$  при  $x \in (0, 1]$ . Для произвольного  $n \geq 10$  положим  $\Delta_{k,n} = \left( \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right)$  и  $\Delta'_{k,n} = \left( \frac{k-1}{n}, \frac{k-1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$  при  $k = 1, 2, \dots, n$ . Обозначим также  $f_{k,n}(x) = \chi_{\Delta'_{k,n}}(x)$ . Докажем теперь, что для любого  $x \in \Delta''_{k,n} = \left( \frac{k-1}{n} + \frac{2}{n^2}, \frac{k}{n} \right)$  существует такое натуральное  $l \in (n, n^2)$ , что  $f_{k,n}\left(x - \frac{1}{l}\right) = 1$ . Действительно, пусть  $y = x - \frac{k-1}{n}$ . Тогда  $y \in \left( \frac{2}{n^2}, \frac{1}{n} \right)$ . Следовательно,

$$\frac{\frac{n^2}{y-1}}{n^2 y - 1} - \frac{1}{y} - 1 = \frac{n^2 y - n^2 y^2 - n^2 y + y + 1}{(n^2 y - 1)y} = \frac{-n^2 y^2 + y + 1}{(n^2 y - 1)y} > 0,$$

откуда следует, что существует натуральное  $l$ , для которого

$$\frac{1}{y} < l < \frac{n^2}{n^2 y - 1}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{l} < y < \frac{1}{l} + \frac{1}{n^2}.$$

Заметим, что при этом  $l > n$  и  $l < n^2$ .

Перейдём к построению функции  $f$ . На первом шаге возьмём произвольное  $n_1 \geq 10$ , и пусть

$$f_1(x) = \sum_{k=1}^{n_1} f_{k,n_1}(x) \quad \text{и} \quad E_1 = \bigcup_{k=1}^{n_1} \Delta''_{k,n_1}.$$

Затем возьмём  $n_2 = 2n_1^2$ , и пусть

$$B_2 = \{k \in [1, n_2] : \Delta'_{k,n_2} \subset E_1\},$$

$$f_2(x) = \sum_{k \in B_2} f_{k,n_2}(x) \quad \text{и} \quad E_2 = \bigcup_{k \in B_2} \Delta''_{k,n_1}.$$

Далее возьмём  $n_3 = 2n_2^2$ , и пусть

$$B_3 = \{k \in [1, n_3] : \Delta'_{k,n_3} \subset E_2\},$$

$$f_3(x) = \sum_{k \in B_3} f_{k,n_3}(x) \quad \text{и} \quad E_3 = \bigcup_{k \in B_3} \Delta''_{k,n_1}$$

и т. д. Наконец, пусть

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \quad \text{и} \quad E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i.$$

Так как  $\text{supp } f_i$  попарно не пересекаются, то  $f(x)$  корректно определена (на самом деле,  $f(x)$  — индикатор некоторого множества). Так как  $E_1 \supset E_2 \supset \dots$  и  $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j} < \infty$ , то

$$\mu(E) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(E_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^i \left(1 - \frac{2}{n_j}\right) > 0.$$

Заметим также, что  $f(x) = 0$  при  $x \in E$ . По построению для любого  $x \in E$  и для любого  $i$  существует такое  $l_i \in (n_i, n_i^2)$ , что  $f\left(x - \frac{1}{l_i}\right) = 1$ .

Если предположить, что  $g_m(x) \equiv f\left(x - \frac{1}{m}\right) \rightarrow g(x)$  при  $m \rightarrow \infty$  п.в. на  $[0, 1]$ , то в силу результата задач 9.16 и 9.35  $g(x) = f(x)$  п.в. на  $[0, 1]$ . Следовательно,  $g_m(x) \rightarrow 0$  п.в. на  $E$ , что противоречит предыдущим рассуждениям. Таким образом, последовательность  $\{g_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$  расходится на множестве положительной меры.  $\square$

**9.37.** Найдём такую возрастающую последовательность  $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ , что

$$\mu\left(\left\{x \in A: |f_{n,k_n}(x) - f_n(x)| > \frac{1}{n}\right\}\right) < 2^{-n}$$

при  $n \in \mathbb{N}$ . Докажем, что  $f_{n,k_n}(x) \Rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ . Пусть даны  $\varepsilon > 0$  и  $\gamma > 0$ . Тогда можно выбрать натуральное  $N$  так, чтобы

$$\mu\left(\left\{x \in A: |f_n(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) < \frac{\gamma}{2}$$

при  $n \geq N$ ,  $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$  и  $2^{-N} < \frac{\gamma}{2}$ . Если теперь  $n \geq N$ , то

$$\begin{aligned} \mu(\{x \in A: |f_{n,k_n}(x) - f(x)| > \varepsilon\}) &\leq \\ &\leq \mu\left(\left\{x \in A: |f_{n,k_n}(x) - f_n(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) + \\ &\quad + \mu\left(\{x \in A: |f_n(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\}\right) \leq \\ &\leq \mu\left(\{x \in A: |f_{n,k_n}(x) - f_n(x)| > \frac{1}{n}\}\right) + \frac{\gamma}{2} < \frac{1}{2^n} + \frac{\gamma}{2} < \gamma. \end{aligned}$$

$\square$

**9.38.** Пусть

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i, \quad \text{где } \mu(B_i) < \infty \quad \text{при } i \in \mathbb{N}.$$

Обозначим

$$A_n = \bigcup_{i=1}^n B_i \quad \text{при } n \in \mathbb{N}.$$

Тогда  $\mu(A_n) < \infty$  для любого  $n$  и  $f_{n,k}(x) \rightarrow f_n(x)$  при  $k \rightarrow \infty$  п.в. на  $A_n$ , поэтому  $f_{n,k}(x) \Rightarrow f_n(x)$  при  $k \rightarrow \infty$  на  $A_n$ . Следовательно, можно найти такую возрастающую последовательность  $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ , что

$$\mu(D_n) \equiv \mu \left( \left\{ x \in A_n : |f_{n,k_n}(x) - f_n(x)| > \frac{1}{n} \right\} \right) < 2^{-n}$$

при  $n \in \mathbb{N}$ . Достаточно доказать, что  $f_{n,k_n}(x) \rightarrow f(x)$  п.в. на каждом  $A_j$ , тогда и утверждение задачи будет установлено. Зафиксируем  $j$ . Пусть даны  $\varepsilon > 0$  и  $\gamma > 0$ . Так как  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  п.в. на  $A_j$ , то для некоторого натурального  $N$  в силу результата задачи 9.15 выполнено неравенство

$$\mu \left( \bigcup_{n=N}^{\infty} \left\{ x \in A_j : |f_n(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right) < \frac{\gamma}{2}.$$

При этом мы можем считать, что  $N > j$ . Тогда выберем  $K > N$  так, что  $\frac{1}{K} < \frac{\varepsilon}{2}$  и  $2^{-K+1} < \frac{\gamma}{2}$ . При этом

$$\begin{aligned} \mu \left( \bigcup_{n=K}^{\infty} \left\{ x \in A_j : |f_{n,k_n}(x) - f(x)| > \varepsilon \right\} \right) &\leq \\ &\leq \mu \left( \bigcup_{n=K}^{\infty} \left\{ x \in A_j : |f_{n,k_n}(x) - f_n(x)| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right) + \\ &\quad + \mu \left( \bigcup_{n=K}^{\infty} \left\{ x \in A_j : |f_n(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right) < \\ &< \mu \left( \bigcup_{n=K}^{\infty} \left\{ x \in A_j : |f_{n,k_n}(x) - f_n(x)| > \frac{1}{n} \right\} \right) + \frac{\gamma}{2} < \sum_{n=K}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \frac{\gamma}{2} < \gamma. \end{aligned}$$

Применяя задачу 9.15, получаем, что  $f_{n,k_n}(x) \rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  п.в. на  $A_j$ .  $\square$

**9.39.** Пусть  $\mathbb{Q}_{[0;1]} = \{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ ,

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \{r_k\}_{k=1}^n; \\ 0 & \text{— иначе.} \end{cases}$$

Тогда  $f_n(x) \rightarrow D(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  для каждого  $x \in [0, 1]$ , где  $D(x)$  — функция Дирихле.

При чётных  $n$  построим такие последовательности  $\{f_{n,k}(x)\}_{n,k=1}^\infty$  непрерывных функций, что  $f_{n,k}(x) \rightarrow f_n(x)$  при  $k \rightarrow \infty$  для всех  $x \in [0, 1]$  (нетрудно построить такую последовательность, например, из кусочно-линейных функций). При нечётных  $n$  положим  $f_{n,k}(x) = f_n(x)$  для произвольного  $k \in \mathbb{N}$ .

Предположим, что существует сходящаяся в каждой точке последовательность  $\{f_{n,k_n}(x)\}_{n=1}^\infty$ . Так как  $f_{2j+1,k_{2j+1}} = f_{2j+1}(x) \rightarrow D(x)$  в каждой точке при  $j \rightarrow \infty$ , то предельной функцией может быть только функция Дирихле. Тогда и  $f_{2j,k_{2j}}(x) \rightarrow D(x)$  при  $j \rightarrow \infty$ . Но согласно задаче 4.36 никакая последовательность  $\{g_n(x)\}_{n=1}^\infty$  непрерывных на  $[0, 1]$  функций не может сходиться всюду на  $[0, 1]$  к функции Дирихле.  $\square$

**9.40.** Из теоремы Вейерштрасса следует, что существует счётное всюду плотное множество многочленов  $\{Q_k(x)\}_{k=1}^\infty$  в  $C([0, 1])$ . Пусть  $P_1(x) = Q_1(x)$  и  $P_n(x) = Q_n(x) - Q_{n-1}(x)$  при  $n = 2, 3, \dots$ . Тогда для любого  $n$  имеем

$$\sum_{k=1}^n P_k(x) = Q_n(x).$$

Для заданной  $f(x) \in C([0, 1])$  найдём такую возрастающую последовательность  $\{k_n\}_{n=1}^\infty$ , что  $Q_{k_n}(x) \rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно на  $[0, 1]$ . Это и означает, что

$$\sum_{k=1}^{k_n} P_k(x) \rightarrow f(x)$$

при  $n \rightarrow \infty$  равномерно на  $[0, 1]$ .  $\square$

**9.41.** Пусть  $A_{n,k} = \left\{ x \in A : \frac{k-1}{n} \leq f(x) < \frac{k}{n} \right\}$  при  $n \in \mathbb{N}$  и  $k \in \mathbb{Z}$ . Ясно, что  $A_{n,k} \in M$  при любых  $n$  и  $k$ . Пусть тогда

$$f_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{k-1}{n} \chi_{A_{n,k}}(x)$$

при  $n \in \mathbb{N}$ . Заметим, что каждая функция  $f_n(x)$  конечна и измерима на  $A$ , множество  $f_n(A)$  счётно и  $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$  при всех  $x \in A$ . Таким образом, последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  удовлетворяет условиям задачи.  $\square$

# Г л а в а 10

## ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

В этой главе мы будем считать заданным  $\sigma$ -конечное измеримое пространство  $(X, M, \mu)$  и множество  $A \in M$ . Мы будем также считать, что все рассматриваемые функции отображают  $A$  в множество  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ .

Пусть конечная функция  $f(x)$  определена на  $A$ . Будем называть её *простой функцией на  $A$* , если она измерима на  $A$ , множество  $f(A)$  конечно и, если  $a \in f(A)$  и  $a \neq 0$ , то множество  $f^{-1}(\{a\})$  имеет конечную меру; или, эквивалентно,  $f(x)$  — простая функция на  $A$ , если

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{A_k}(x),$$

где  $A_k \in M$ ,  $A_k \cap A_j = \emptyset$  при  $k \neq j$  и, если  $c_k \neq 0$ , то  $\mu(A_k) < \infty$ . При этом можно считать, что  $c_1 < c_2 < \dots < c_n$  и что  $\bigcup_{k=1}^n A_k = A$ .

Если  $f(x)$  — простая функция на  $A$  вида

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{A_k}(x), \quad \text{где } \bigcup_{k=1}^n A_k = A,$$

то мы определяем *интеграл Лебега* от этой функции по множеству  $A$  формулой

$$(L) \int_A f(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu = \sum_{k=1}^n c_k \mu(A_k)$$

(где, формально,  $0 \cdot \infty = 0$ ). Здесь мы не предполагаем, что  $c_k \neq c_j$  при  $k \neq j$ .

Если  $f(x)$  — неотрицательная измеримая функция на  $A$ , то мы обозначим через  $Q_f = Q_{f,A}$  множество всех простых функций  $h(x)$  на  $A$ , удовлетворяющих всюду на  $A$  условию  $0 \leq h(x) \leq f(x)$ .

Определим *интеграл Лебега* от неотрицательной измеримой функции  $f(x)$  по множеству  $A$  формулой

$$\int_A f(x) d\mu = \sup_{h(x) \in Q_f} \int_A h(x) d\mu$$

(заметим, что мы допускаем бесконечное значение интеграла). Если интеграл конечен, то скажем, что  $f(x) \in L(A)$  (что  $f(x)$  интегрируема по Лебегу на  $A$ ).

Для произвольной измеримой функции  $f(x)$  на  $A$  мы определим две функции:

$$f_+(x) = \max(f(x), 0) \quad \text{и} \quad f_-(x) = \max(-f(x), 0) = -(f(x) - f_+(x)).$$

Скажем, что  $f(x) \in L(A)$  (что  $f(x)$  интегрируема по Лебегу на  $A$ ), если  $f_+(x) \in L(A)$  и  $f_-(x) \in L(A)$ . Назовём интегралом Лебега от функции  $f(x) \in L(A)$  по множеству  $A$  величину

$$\int_A f(x) d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_A f_+(x) d\mu - \int_A f_-(x) d\mu.$$

Корректность этого определения будет показана в задаче 10.13.

Ниже через  $L([a, b])$ , где  $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , будем обозначать множество функций, интегрируемых по Лебегу относительно классической меры Лебега на  $[a, b]$ . Отметим, что в этом случае, как будет следовать из задачи 10.18, нет разницы между классами  $L([a, b])$  и  $L((a, b))$ .

### ЗАДАЧИ

**10.1.** Пусть  $f(x)$ ,  $g(x)$  — простые функции на  $A$  и  $a, b \in \mathbb{R}$ . Доказать, что функции  $af(x) + bg(x)$ ,  $|f(x)|$ ,  $f(x) \cdot g(x)$ ,  $\frac{f(x)}{g(x)}$  (если  $0 \notin g(A)$ ) также простые на  $A$ .

**10.2.** Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  — простые функции на  $A$ . Доказать, что функция  $\max(f(x), g(x))$  также простая на  $A$ .

**10.3.** Доказать, что определение интеграла Лебега от простой функции корректно, т. е. его значение не зависит от выбора множеств  $A_k$ .

**10.4.** Пусть  $f(x)$ ,  $g(x)$  — простые функции на  $A$  и  $a, b \in \mathbb{R}$ . Доказать, что

$$\int_A (af(x) + bg(x)) d\mu = a \int_A f(x) d\mu + b \int_A g(x) d\mu.$$

**10.5.** Пусть  $f(x)$  — простая функция на  $A$  и  $f(x) \geq 0$  на  $A$ .  
Доказать, что

$$\int_A f(x) d\mu \geq 0.$$

**10.6.** Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  — простые функции на  $A$ , причём  $f(x) \geq g(x)$  на  $A$ . Доказать, что

$$\int_A f(x) d\mu \geq \int_A g(x) d\mu.$$

**10.7.** Пусть  $f(x)$  — простая функция на  $A$ ,  $\mu(A) < \infty$  и  $C_1 \leq f(x) \leq C_2$  на  $A$ . Доказать, что

$$C_1\mu(A) \leq \int_A f(x) d\mu \leq C_2\mu(A).$$

**10.8.** Пусть  $f(x)$  — простая функция на  $A$ . Доказать, что

$$\left| \int_A f(x) d\mu \right| \leq \int_A |f(x)| d\mu.$$

**10.9.** Пусть  $f(x)$  — простая функция на  $A$  и  $A = B \sqcup C$ , где  $B, C \in M$ . Доказать, что

$$\int_A f(x) d\mu = \int_B f(x) d\mu + \int_C f(x) d\mu.$$

**10.10.** Пусть  $\{g_n(x)\}_{n=1}^\infty$  — неубывающая последовательность простых неотрицательных функций на  $A$ ,  $g(x)$  — простая неотрицательная функция на  $A$  и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) \geq g(x)$$

для каждого  $x \in A$ . Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n(x) d\mu \geq \int_A g(x) d\mu.$$

**10.11.** Пусть  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  и  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $(0, 1)$ .  
Доказать, что

$$\int_{(0,1)} f(x) d\mu = \infty,$$

используя только определение интеграла Лебега.

**10.12.** Пусть  $f(x) = \frac{1}{x}$  и  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $(0, 1)$ .  
Доказать, что

$$\int_{(0,1)} f(x) d\mu = \infty,$$

используя только определение интеграла Лебега.

**10.13.** Доказать, что если  $f(x)$  — простая функция на  $A$ , то значения интеграла Лебега от неё как от простой функции и полученное согласно общему определению совпадают.

**10.14.** Пусть  $f(x)$  — измеримая функция на  $A$ , дано множество  $B \subset A$  и  $B \in M$ . Доказать, что  $f(x) \in L(B)$  тогда и только тогда, когда  $f(x)\chi_B(x) \in L(A)$ , и если  $f(x) \in L(B)$ , то

$$\int_B f(x) d\mu = \int_A f(x)\chi_B(x) d\mu.$$

**10.15.** Пусть  $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  — неубывающая последовательность неотрицательных простых функций на  $A$  и  $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$  на  $A$ .

Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n(x) d\mu = \int_A g(x) d\mu.$$

**10.16.** Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  — неотрицательные измеримые функции на  $A$ . Доказать, что

$$\int_A (f(x) + g(x)) d\mu = \int_A f(x) d\mu + \int_A g(x) d\mu.$$

Здесь, как обычно,  $\infty + \infty = \infty$ .

**10.17.** Пусть  $f(x)$  — неотрицательная измеримая функция на  $A$  и  $A = B \sqcup C$ , где  $B, C \in M$ . Доказать, что

$$\int_A f(x) d\mu = \int_B f(x) d\mu + \int_C f(x) d\mu.$$

**10.18.** Пусть функция  $f(x)$  измерима на  $A$  и  $\mu(A) = 0$ . Доказать, что  $f(x) \in L(A)$  и

$$\int_A f(x) d\mu = 0.$$

**10.19.** Пусть мера  $\mu$  полна,  $f(x) \in L(A)$  и функция  $g(x)$  эквивалентна функции  $f(x)$  на  $A$ . Доказать, что  $g(x) \in L(A)$  и

$$\int_A g(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu.$$

**10.20.** Пусть  $f(x) \in L(A)$ . Доказать, что

$$\mu(\{x \in E : f(x) = \pm\infty\}) = 0.$$

**10.21.** Пусть  $f(x) \in L(A)$ . Доказать, что для любого  $\alpha \in \mathbb{R}^1$  функция  $\alpha f(x)$  принадлежит  $L(A)$  и

$$\int_A \alpha f(x) d\mu = \alpha \int_A f(x) d\mu.$$

**10.22.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  из  $L(A)$ . Доказать, что  $f(x) + g(x) \in L(A)$  и

$$\int_A (f(x) + g(x)) d\mu = \int_A f(x) d\mu + \int_A g(x) d\mu.$$

**10.23.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  из  $L(A)$  и  $a, b \in \mathbb{R}$ . Доказать, что  $af(x) + bg(x) \in L(A)$  и

$$\int_A (af(x) + bg(x)) d\mu = a \int_A f(x) d\mu + b \int_A g(x) d\mu.$$

**10.24.** Пусть  $f(x)$  — измеримая функция на  $A$ . Доказать, что  $f(x) \in L(A)$  тогда и только тогда, когда  $|f(x)| \in L(A)$ .

**10.25.** Пусть  $f(x) \in L(A)$ . Доказать, что

$$\left| \int_A f(x) d\mu \right| \leq \int_A |f(x)| d\mu.$$

**10.26.** Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  — такие измеримые функции на  $A$ , что  $f(x) \in L(A)$  и  $|g(x)| \leq |f(x)|$  при  $x \in A$ . Доказать, что  $g(x) \in L(A)$ .

**10.27.** Пусть  $f(x) \in L(A)$  и  $f(x) \geq 0$  при  $x \in A$ . Доказать, что

$$\int_A f(x) d\mu \geq 0.$$

**10.28.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  из  $L(A)$  и  $g(x) \leq f(x)$  при  $x \in A$ . Доказать, что

$$\int_A g(x) d\mu \leq \int_A f(x) d\mu.$$

**10.29.** Пусть  $f(x)$  — измеримая функция на  $A$ , где  $\mu(A) < \infty$ , и  $|f(x)| \leq C$  для некоторого  $C \geq 0$  при всех  $x \in A$ . Доказать, что

$f(x) \in L(A)$  и

$$\left| \int_A f(x) d\mu \right| \leq \int_A |f(x)| d\mu \leq C\mu(A).$$

**10.30.** Пусть  $f(x)$  — такая измеримая функция на  $A$ , что  $f(A)$  счётно, т. е.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \chi_{A_i}(x), \quad \text{где } A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Доказать, что  $f(x) \in L(A)$  тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \mu(A_i) < \infty,$$

и если  $f(x) \in L(A)$ , то

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mu(A_i).$$

**10.31.** Пусть  $\mu(A) < \infty$ , а  $f(x)$  — такая измеримая функция на  $A$ , что  $-\infty < a < f(x) < b < \infty$  при  $x \in A$ . Пусть  $T$  — разбиение отрезка  $[a, b]$ , т. е.  $a = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = b$ . Положим  $R_k = \{x \in A : y_{k-1} \leq f(x) < y_k\}$  при  $k = 1, 2, \dots, n$ , и пусть  $\lambda(T) = \max_{1 \leq k \leq n} (y_k - y_{k-1})$ . Доказать, что если

$$F_T = \sum_{k=1}^n y_k \mu(R_k)$$

(эта величина называется *интегральной суммой Лебега*), то существует

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} F_T = (L) \int_A f(x) d\mu.$$

**10.32. Теорема Б. Леви** для неотрицательных функций. Пусть  $\{f_n(x)\}$  — такие измеримые функции на  $A$ , что  $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq \dots$  при всех  $x \in A$ . Доказать, что если  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ , то

$$\int_A f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu$$

(здесь допускаются бесконечные значения функций и интегралов).

**10.33. Теорема Б. Леви** для интегрируемых функций. Пусть  $\{f_n(x)\}$  — такие функции из  $L(A)$ , что  $-\infty < f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq \dots$  для всех  $x \in A$ . Пусть существует такое  $C > 0$ , что

$$\sup_n \int_A f_n(x) d\mu \leq C.$$

Доказать, что функция  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  интегрируема по Лебегу на  $A$  (в частности, функция  $f(x)$  конечна п.в. на  $A$ ) и

$$\int_A f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu.$$

**10.34. Теорема Б. Леви** для рядов. Пусть  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  — последовательность измеримых неотрицательных функций на  $A$ , а

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Доказать, что

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n(x) d\mu.$$

**10.35. Теорема Фату.** Пусть  $\mu$  — полная мера, а  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  — такая последовательность неотрицательных измеримых функций на  $A$ , что  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  п.в. на  $A$ . Доказать, что

$$\int_A f(x) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu.$$

Замечание. Теорема Фату, так же как и теорема Лебега (задача 10.37), остаётся справедливой, если заменить условие полноты меры  $\mu$  на условие измеримости предельной функции  $f(x)$ .

**10.36.** Доказать, что теорема Фату (10.35) остаётся справедливой, если заменить условие « $f_n(x) \rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  п.в. на  $A$ » условием « $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ ».

**10.37. Теорема Лебега.** Пусть  $\mu$  — полная мера, а  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  — такая последовательность измеримых функций на  $A$ , что  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  п.в. на  $A$ . Пусть к тому же существует такая функция  $F(x) \in L(A)$ , что  $|f_n(x)| \leq F(x)$  при всех  $n$  для всех  $x \in A$  (функция  $F$  называется *мажорантой*). Доказать, что  $f(x) \in L(A)$  и

$$\int_A f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu.$$

**10.38.** Доказать, что теорема Лебега (10.37) остаётся справедливой, если заменить условие « $f_n(x) \rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  п.в. на  $A$ » условием « $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ ».

**10.39.** Построить такую последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  неотрицательных функций из  $L([0, 1])$ , что  $f_n(x) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  для каждого  $x \in [0, 1]$ , но

$$\int_{[0,1]} f_n(x) d\mu \not\rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ .

**10.40.** Построить такую последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  неотрицательных функций из  $L((0, 1))$ , что  $f_n(x) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  для каждого  $x \in [0, 1]$  и  $|f_n(x)| \leq \frac{1}{x}$  при всех  $n$  для всех  $x \in (0, 1)$ , но

$$\int_{[0,1]} f_n(x) d\mu \not\rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ .

**10.41.** Построить такую последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  неотрицательных функций из  $L((0, 1))$ , что  $f_n(x) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  для каждого  $x \in [0, 1]$  и

$$\int_{[0,1]} f_n(x) d\mu \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ , но  $F(x) = \sup_n f_n(x) \notin L(0, 1)$ .

**10.42.** Пусть  $f(x) \in L(A)$  и

$$A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

где все  $A_n \in M$ . Доказать, что  $f(x) \in L(A_n)$  для каждого  $n$  и

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x) d\mu.$$

**10.43.** Пусть

$$A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

где  $A_n \in M$ , и  $f(x)$  — неотрицательная измеримая функция на  $A_n$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Доказать, что

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x) d\mu.$$

**10.44.** Построить такую функцию  $f(x)$  на  $(0, 1)$ , что если  $A_n = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$  при  $n \in \mathbb{N}$ , то  $f(x) \in L(A_n)$  для всех  $n$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{A_n} f(x) d\mu \right| < \infty,$$

но  $f(x) \notin L((0, 1))$ .

**10.45.** Пусть  $f(x)$  — измеримая неотрицательная функция на  $A$  и

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \leq n \\ n & \text{— иначе} \end{cases}$$

при  $n \in \mathbb{N}$ . Доказать, что

$$\int_A f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu.$$

**10.46.** Построить такую последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  функций из  $L(\mathbb{R})$ , что  $f_n(x) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно на  $\mathbb{R}$ , но

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) d\mu \rightarrow \infty$$

при  $n \rightarrow \infty$ .

**10.47.** Пусть  $f(x) \in L(A)$ ,  $g(x)$  — измеримая функция на  $A$  и  $|g(x)| \leq C$  для некоторого  $C$  при всех  $x \in A$ . Доказать, что  $f(x) \times g(x) \in L(A)$  и

$$\left| \int_A f(x)g(x) d\mu \right| \leq C \int_A |f(x)| d\mu.$$

**10.48.** Пусть  $f(x) \in L(A)$ ,  $f(x) \geq 0$  на  $A$ ,  $g(x)$  — измеримая функция на  $A$  и  $\alpha \leq g(x) \leq \beta$  при некоторых  $\alpha, \beta$  для всех  $x \in A$ . Доказать, что существует  $\gamma \in [\alpha, \beta]$ , для которого

$$\int_A f(x)g(x) d\mu = \gamma \int_A f(x) d\mu.$$

**10.49.** Построить пример таких функций  $f(x) \in L((0, 1))$  и  $g(x)$ , что  $g(x)$  — измеримая ограниченная функция на  $(0, 1)$  и  $\alpha \leq g(x) \leq \beta$  для некоторых  $\alpha, \beta$  при всех  $x \in (0, 1)$ , но не существует  $\gamma \in [\alpha, \beta]$ , для которого

$$\int_A f(x)g(x) d\mu = \gamma \int_A f(x) d\mu.$$

**10.50.** Пусть  $f(x), g(x) \in L(A)$  и  $h(x) = \max(f(x), g(x))$  при всех  $x \in A$ . Доказать, что  $h(x) \in L(A)$ .

**10.51. Неравенство Чебышёва.** Пусть функция  $f(x) \in L(A)$  неотрицательна на  $A$  и  $A_\lambda = \{x \in A : f(x) \geq \lambda\}$  при  $\lambda > 0$ . Доказать, что

$$\mu(A_\lambda) \leq \frac{1}{\lambda} \int_A f(x) d\mu.$$

**10.52.** Пусть  $f(x) \in L(A)$ ,  $f(x) \geq 0$  на  $A$  и

$$\int_A f(x) d\mu = 0.$$

Доказать, что  $f(x) = 0$  п.в. на  $A$ .

**10.53.** Пусть  $f(x) \in L(A)$  и для любого множества  $B \subset A$ ,  $B \in M$  выполнено равенство

$$\int_B f(x) d\mu = 0.$$

Доказать, что  $f(x) = 0$  п.в. на  $A$ .

**10.54.** Пусть  $\mu(A) < \infty$ , а функция  $f(x)$  измерима и конечна на  $A$ . Пусть также  $E_k(f) = \{x \in A : k \leq |f(x)| < k + 1\}$  при  $k = 0, 1, \dots$

Доказать, что  $f(x) \in L(A)$  тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\mu(E_k(f)) < \infty.$$

**10.55.** Построить функцию  $f(x)$ , которая измерима относительно классической меры Лебега на  $\mathbb{R}$ , неотрицательна и конечна на  $\mathbb{R}$  и (см. задачу 10.54)

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\mu(E_k(f)) < \infty,$$

но  $f(x) \notin L(\mathbb{R})$ .

**10.56.** Пусть  $\mu(A) < \infty$  и функция  $f(x)$  измерима на  $A$ . Пусть также  $F_k(f) = \{x \in A: |f(x)| \geq k\}$  при  $k = 0, 1, \dots$ . Доказать, что  $f(x) \in L(A)$  тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k(f)) < \infty.$$

**10.57.** Построить функцию  $f(x)$ , которая измерима относительно классической меры Лебега на  $\mathbb{R}$ , неотрицательна и конечна на  $\mathbb{R}$ , и (см. задачу 10.56)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k(f)) < \infty,$$

но  $f(x) \notin L(\mathbb{R})$ .

**10.58.** Пусть функция  $f(x)$  измерима на множестве  $A$ , и  $D_k(f) = \{x \in A: |f(x)| \geq 2^{-k}\}$  при  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Доказать, что  $f(x) \in L(A)$  тогда и только тогда, когда (см. задачу 10.56)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k(f)) < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \mu(D_k(f)) < \infty.$$

**10.59.** Пусть  $f(x) \in L(A)$ . Доказать, что (см. задачу 10.56)  $\mu(F_k(f)) = o\left(\frac{1}{k}\right)$  при  $k \rightarrow \infty$ .

**10.60.** Построить такую измеримую функцию  $f(x) \notin L((0, 1))$ , что (см. задачу 10.56)  $\mu(F_k(f)) = o\left(\frac{1}{k}\right)$  при  $k \rightarrow \infty$ .

**10.61.** Пусть  $f(x)$  — конечная измеримая функция на  $A$ . Доказать, что существует положительная измеримая функция  $g(x)$  на  $A$ , для которой  $f(x) \cdot g(x) \in L(A)$ .

**10.62.** Пусть  $A_1, A_2, \dots$  — измеримые подмножества  $A$  и

$$B_n = \{x \in A: x \text{ принадлежит не менее чем } n \text{ различным } A_i\}.$$

Доказать, что

$$\mu(B_n) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

**10.63.** Пусть  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  и  $f(x)$  — неотрицательные функции из  $L(A)$ ,  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$  и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu.$$

Доказать, что для любого  $B \subset A$ ,  $B \in M$ , выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_B f_n(x) d\mu = \int_B f(x) d\mu.$$

**10.64.** Построить пример, показывающий, что в задаче 10.63 нельзя отбросить условие « $f_n(x) \geq 0$  на  $A$ ».

**10.65.** Пусть  $\mu(A) = \infty$  и  $f(x) \in L(A)$ . Доказать, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое множество  $B \subset A$ ,  $B \in M$ , удовлетворяющее условию  $\mu(B) < \infty$ , что

$$\int_{A \setminus B} |f(x)| d\mu < \varepsilon.$$

**10.66.** Пусть  $f(x) \in L(A)$ . Доказать, что существует непрерывная положительная неубывающая функция  $\Phi(u)$  на  $[0, \infty)$ , для которой  $\Phi(u) \rightarrow \infty$  при  $u \rightarrow \infty$  и в то же время

$$\int_A |f(x)| \Phi(|f(x)|) d\mu < \infty.$$

**10.67. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега.** Пусть  $f(x) \in L(A)$ . Доказать, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что для каждого множества  $B \in M$ ,  $B \subset A$ , с  $\mu(B) < \delta$  выполнено неравенство

$$\int_B |f(x)| d\mu < \varepsilon.$$

**10.68.** Пусть  $\mu(A) < \infty$ ,  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  и  $f(x)$  — функции из  $L(A)$ ,  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$  и функции  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  имеют равнотепенно абсолютно непрерывные интегралы на  $A$ , т. е. для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что для любого  $B \in M$ ,  $B \subset A$ , с  $\mu(B) < \delta$  и для любого  $n$  выполнено неравенство

$$\left| \int_B f_n(x) d\mu \right| < \varepsilon.$$

Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu.$$

**10.69.** Доказать, что утверждение задачи 10.68 не выполняется для  $A = \mathbb{R}$ .

**10.70.** Пусть дана система  $\{f_{\omega}(x)\}_{\omega \in \Omega} \subset L(A)$  и функции из этой системы имеют равнотепенно абсолютно непрерывные интегралы на  $A$

(см. задачу 10.68). Доказать, что система  $\{|f_\omega(x)|\}_{\omega \in \Omega}$  обладает тем же свойством.

**10.71.** Пусть  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  и  $f(x)$  — функции из  $L(A)$ ,  $f_n(x) \geq f(x)$  п.в. на  $A$ ,  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$  и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu.$$

Доказать, что функции  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  имеют равнотепенно абсолютно непрерывные интегралы на  $A$ .

**10.72.** Пусть дана система  $V = \{f_\omega(x)\}_{\omega \in \Omega} \subset L(A)$  и существует такая непрерывная положительная неубывающая функция  $\Phi(u)$  на  $[0, \infty)$ , что  $\Phi(u) \rightarrow \infty$  при  $u \rightarrow \infty$  и

$$\sup_{f(x) \in V} \int_A |f(x)| \Phi(|f(x)|) d\mu = C < \infty.$$

Доказать, что функции системы имеют равнотепенно абсолютно непрерывные интегралы на  $A$ .

**10.73.** Построить измеримое пространство  $(X, M, \mu)$ , где  $\mu X < \infty$ , и систему измеримых функций  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  из  $L(X)$  с равнотепенно абсолютно непрерывными интегралами на  $X$ , для которых

$$\sup_n \int_X f_n(x) d\mu = \infty.$$

**10.74.** Пусть  $k \geq 1$ ,  $A \subset \mathbb{R}^k$ ,  $\mu(A) < \infty$ , дана система  $V = \{f_\omega(x)\}_{\omega \in \Omega} \subset L(A)$  и функции из системы имеют равнотепенно абсолютно непрерывные интегралы на  $A$ . Доказать, что существует такая непрерывная положительная неубывающая функция  $\Phi(u)$  на  $[0, \infty)$ , что  $\Phi(u) \rightarrow \infty$  при  $u \rightarrow \infty$  и

$$\sup_{f(x) \in V} \int_A |f(x)| \Phi(|f(x)|) d\mu = C < \infty.$$

**10.75.** Доказать, что результат задачи 10.74 не выполняется при  $A = \mathbb{R}$ .

## РЕШЕНИЯ

**10.1.** Проверим только первое утверждение; остальные проверяются аналогично. Пусть

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{A_k}(x) \quad \text{и} \quad g(x) = \sum_{j=1}^m d_j \chi_{B_j}(x),$$

где

$$\bigsqcup_{k=1}^n A_k = \bigsqcup_{j=1}^m B_j = A.$$

Тогда

$$af(x) + bg(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m (ac_k + bd_j) \chi_{A_k \cap B_j}(x).$$

Заметим также, что если  $ac_k + bd_j \neq 0$ , то хотя бы одно из чисел  $c_k$ ,  $d_j$  отлично от нуля. Поэтому  $\mu(A_k \cap B_j) \leq \min(\mu(A_k), \mu(B_j)) < \infty$ . Следовательно,  $af(x) + bg(x)$  — простая функция на  $A$ .  $\square$

**10.2.** Пусть

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{A_k}(x) \quad \text{и} \quad g(x) = \sum_{j=1}^m d_j \chi_{B_j}(x),$$

где

$$\bigsqcup_{k=1}^n A_k = \bigsqcup_{j=1}^m B_j = A.$$

Тогда

$$\max(f(x), g(x)) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \max(c_k, d_j) \chi_{A_k \cap B_j}(x).$$

Если  $\max(c_k, d_j) \neq 0$  при некоторых  $k$  и  $j$ , то хотя бы одно из чисел  $c_k$ ,  $d_j$  отлично от нуля. Поэтому  $\mu(A_k \cap B_j) \leq \min(\mu(A_k), \mu(B_j)) < \infty$ . Следовательно,  $\max(f(x), g(x))$  — также простая функция на  $A$ .  $\square$

**10.3.** Пусть

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{A_k}(x) = \sum_{j=1}^m d_j \chi_{B_j}(x),$$

где

$$\bigsqcup_{k=1}^n A_k = \bigsqcup_{j=1}^m B_j = A$$

и  $c_1 < c_2 < \dots < c_n$ . В этом случае каждое число  $d_j$  равно одному из чисел  $c_k$ . Определим множества  $\Gamma_k = \{j : d_j = c_k\}$  при  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Ясно, что

$$A_k = \bigsqcup_{j \in \Gamma_k} B_j.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^n c_k \mu(A_k) = \sum_{k=1}^n c_k \sum_{j \in \Gamma_k} \mu(B_j) = \sum_{k=1}^n \sum_{j \in \Gamma_k} d_j \mu(B_j) = \sum_{j=1}^m d_j \mu(B_j),$$

откуда следует утверждение задачи.  $\square$

**10.4.** Пусть

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{A_k}(x) \quad \text{и} \quad g(x) = \sum_{j=1}^m d_j \chi_{B_j}(x),$$

где

$$\bigsqcup_{k=1}^n A_k = \bigsqcup_{j=1}^m B_j = A.$$

В силу результата задачи 10.1 функция  $af(x) + bg(x)$  — простая. Мы будем использовать выражение для неё, полученное в решении задачи 10.1. Получаем

$$\begin{aligned} \int_A (af(x) + bg(x)) d\mu &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m (ac_k + bd_j) \mu(A_k \cap B_j) = \\ &= a \sum_{k=1}^n c_k \sum_{j=1}^m \mu(A_k \cap B_j) + b \sum_{j=1}^m d_j \sum_{k=1}^n \mu(A_k \cap B_j) = \\ &= a \sum_{k=1}^n c_k \mu(A_k) + b \sum_{j=1}^m d_j \mu(B_j) = a \int_A f(x) d\mu + b \int_A g(x) d\mu. \end{aligned}$$

□

**10.5.** Пусть

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{A_k}(x), \quad \text{где} \quad \bigsqcup_{k=1}^n A_k = A.$$

Тогда все числа  $c_k$  неотрицательны, поэтому

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_{k=1}^n c_k \mu(A_k) \geq 0.$$

□

**10.6.** В силу результата задачи 10.1 функция  $f(x) - g(x)$  простая на  $A$ . Более того,  $f(x) - g(x) \geq 0$  на  $A$ . Применяя результаты задач 10.4 и 10.5, получаем, что

$$\int_A f(x) d\mu - \int_A g(x) d\mu = \int_A (f(x) - g(x)) d\mu \geq 0.$$

□

**10.7.** Так как  $\mu(A) < \infty$ , то функции  $g_1(x) \equiv C_1$  и  $g_2(x) \equiv C_2$  простые на  $A$ . Далее,

$$\int_A g_j(x) d\mu = C_j \mu(A) \quad \text{при } j = 1, 2.$$

Применяя результат задачи 10.6, получаем нужные неравенства. □

**10.8.** Так как  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$  при всех  $x \in A$ , то утверждение следует из задачи 10.6.  $\square$

**10.9.** Пусть

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{A_k}(x), \quad \text{где } \bigsqcup_{k=1}^n A_k = A.$$

Тогда на множестве  $B$  имеет место представление

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{A_k \cap B}(x), \quad \text{где } \bigsqcup_{k=1}^n (A_k \cap B) = B,$$

а на множестве  $C$  — представление

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{A_k \cap C}(x), \quad \text{где } \bigsqcup_{k=1}^n (A_k \cap C) = C.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \int_A f(x) d\mu &= \sum_{k=1}^n c_k \mu(A_k) = \sum_{k=1}^n c_k \mu(A_k \cap B) + \\ &\quad + \sum_{k=1}^n c_k \mu(A_k \cap C) = \int_B f(x) d\mu + \int_C f(x) d\mu. \end{aligned}$$

$\square$

**10.10.** Если предел интегралов бесконечен, то утверждение очевидно. Пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n(x) d\mu < \infty.$$

Возьмём произвольное  $\varepsilon > 0$ . Пусть

$$g(x) = \sum_{k=1}^m a_k \chi_{A_k}(x),$$

где  $A_k \cap A_l = \emptyset$  при  $k \neq l$ ,  $\mu(A_k) < \infty$  при всех  $k$  и  $0 < a_1 < \dots < a_m$ . Определим множества  $F_n = \{x \in A : g_n(x) < g(x) - \varepsilon\}$  при  $n \in \mathbb{N}$ , и пусть

$$F = \bigsqcup_{k=1}^m A_k.$$

Так как последовательность  $\{g_n\}$  монотонна, то  $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$  При этом

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$$

и  $\mu(F_1) \leq \mu(F) < \infty$ . Отсюда, согласно задаче 7.52, следует, что  $\mu(F_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно, для каждого  $n$  получаем

$$\begin{aligned} \int_A g(x) d\mu &= \int_{F_n} g(x) d\mu + \int_{F \setminus F_n} g(x) d\mu \leqslant \int_{F_n} g(x) d\mu + \int_F (g_n(x) + \varepsilon) d\mu = \\ &= \sum_{k=1}^m a_k \mu(F_n \cap A_k) + \int_A g_n(x) d\mu + \varepsilon \mu(F) \leqslant \\ &\leqslant a_m \mu(F_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n(x) d\mu + \varepsilon \mu(F). \end{aligned}$$

Так как числа  $n \in \mathbb{N}$  и  $\varepsilon > 0$  произвольны, то утверждение задачи доказано.  $\square$

**10.11.** Пусть  $f_n(x) = n^2 \chi_{(0, \frac{1}{n})}(x)$  при  $n \in \mathbb{N}$  и  $x \in (0, 1)$ . Тогда  $f_n(x) \in Q_f$ . Поэтому

$$\int_{(0,1)} f(x) d\mu \geqslant \sup_{n \geqslant 1} \int_{(0,1)} f_n(x) d\mu = \sup_{n \geqslant 1} n = \infty.$$

$\square$

**10.12.** Пусть  $\varphi_k(x) = k \chi_{(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k})}(x)$  при  $k \in \mathbb{N}$  и  $x \in (0, 1)$ , а

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) \quad \text{при } n \in \mathbb{N}.$$

Тогда все функции  $f_n(x)$  принадлежат множеству  $Q_f$ . Поэтому

$$\int_{(0,1)} f(x) d\mu \geqslant \sup_{n \geqslant 1} \int_{(0,1)} f_n(x) d\mu = \sup_{n \geqslant 1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \infty.$$

$\square$

**10.13.** В силу результата задачи 10.4 достаточно доказать утверждение для случая  $f(x) \geqslant 0$  на  $A$ . Если  $h(x) \in Q_f$ , то (см. задачу 10.6)

$$\int_A h(x) d\mu \leqslant \int_A f(x) d\mu.$$

С другой стороны, в нашем случае  $f(x) \in Q_f$ , поэтому

$$\sup_{h(x) \in Q_f} \int_A h(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu.$$

$\square$

**10.14.** Достаточно доказать утверждение для неотрицательных функций. Из определения ясно, что утверждение верно для простых функций. Но если простая функция  $h(x)$  удовлетворяет условию  $0 \leqslant h(x) \leqslant f(x)$  на  $B$ , то простая функция  $h(x)\chi_B(x)$  удовле-

творяет условию  $0 \leq h(x)\chi_B(x) \leq f(x)\chi_B(x)$  на  $A$ . Обратно, если  $0 \leq h(x) \leq f(x)\chi_B(x)$  на  $A$ , то  $h(x) = 0$  на множестве  $A \setminus B$ , т. е.  $h(x) = h(x)\chi_B(x)$ , и  $0 \leq h(x) \leq f(x)$  на  $B$ . Поэтому значения интегралов  $\int\limits_B f(x) d\mu$  и  $\int\limits_A f(x)\chi_B(x) d\mu$  совпадают.  $\square$

**10.15.** Существование функции  $g(x)$  очевидно (возможно,  $g(x) = \infty$  на некотором множестве). В силу результата задачи 8.44 функция  $g(x)$  измерима на  $A$ . Так как  $g_n \in Q_g$ , то по определению интеграла получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int\limits_A g_n(x) d\mu \leq \int\limits_A g(x) d\mu.$$

Пусть  $h(x) \in Q_g$ . Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) \geq h(x)$  при  $x \in A$ , откуда следует, что (см. задачу 10.10)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int\limits_A g_n(x) d\mu \geq \int\limits_A h(x) d\mu.$$

Переходя к точной верхней грани по всем  $h(x) \in Q_g$ , получаем утверждение задачи.  $\square$

**10.16.** Используя результат задачи 9.29, построим такие две последовательности неотрицательных простых функций  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  и  $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  на  $A$ , что  $f_n(x) \uparrow f(x)$  и  $g_n(x) \uparrow g(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ . Тогда  $(f_n(x) + g_n(x)) \uparrow (f(x) + g(x))$  и, применяя результаты задач 10.15 и 10.4, получаем, что

$$\begin{aligned} \int\limits_A (f(x) + g(x)) d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int\limits_A (f_n(x) + g_n(x)) d\mu = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int\limits_A f_n(x) d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int\limits_A g_n(x) d\mu = \int\limits_A f(x) d\mu + \int\limits_A g(x) d\mu. \end{aligned}$$

$\square$

**10.17.** Используя задачу 9.29, построим такую последовательность неотрицательных простых функций  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  на  $A$ , что  $f_n(x) \uparrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A = B \sqcup C$ . Тогда, применяя результаты задач 10.15 и 10.9, получаем, что

$$\begin{aligned} \int\limits_A f(x) d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int\limits_A f_n(x) d\mu = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int\limits_B f_n(x) d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int\limits_C f_n(x) d\mu = \int\limits_B f(x) d\mu + \int\limits_C f(x) d\mu. \end{aligned}$$

$\square$

**10.18.** Достаточно доказать утверждение для неотрицательной функции  $f(x)$  на  $A$ . Но в этом случае для любой  $h(x) \in Q_f$  имеем:  $\int_A h(x) d\mu = 0$ , поэтому  $\int_A f(x) d\mu = 0$ .  $\square$

**10.19.** Заметим, что функция  $f_+(x)$  эквивалентна функции  $g_+(x)$  на  $A$ , а  $f_-(x)$  эквивалентна  $g_-(x)$  на  $A$ . Поэтому достаточно доказать равенство интегралов для неотрицательных функций  $f(x)$  и  $g(x)$ . Заметим, что функция  $g(x)$  измерима (это единственное место, где мы используем полноту меры  $\mu$ ). Обозначим  $A_1 = \{x \in A : f(x) = g(x)\} \in M$ . Тогда  $\mu(A \setminus A_1) = 0$ , и мы получаем (см. задачи 10.17 и 10.18):

$$\begin{aligned} \int_A g(x) d\mu &= \int_{A_1} g(x) d\mu + \int_{A \setminus A_1} g(x) d\mu = \int_{A_1} g(x) d\mu = \\ &= \int_{A_1} f(x) d\mu = \int_{A_1} f(x) d\mu + \int_{A \setminus A_1} f(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu. \end{aligned}$$

 $\square$ 

**10.20.** Можно считать, что  $f(x) \geq 0$  на  $A$ . Пусть  $A_1 = \{x \in A : f(x) = +\infty\} \in M$ . Предположим, что  $\mu(A_1) > 0$ . Положим  $A_2 = A_1$ , если  $\mu(A_1) < \infty$ , иначе выберем множество  $A_2 \subset A_1$ ,  $A_2 \in M$  с  $0 < \mu(A_2) < \infty$ . Определим простые функции  $h_n(x) = n\chi_{A_2}(x)$  для  $n \in \mathbb{N}$ . Ясно, что  $0 \leq h_n(x) \leq f(x)$  при  $n \in \mathbb{N}$  и  $x \in E$ , т. е.  $h_n(x) \in Q_f$ . Тогда по определению интеграла Лебега получаем, что

$$\int_A f(x) d\mu \geq \sup_n \int_A h_n(x) d\mu = \sup_n n\mu(A_2) = \infty,$$

а это противоречит условию интегрируемости  $f$ .  $\square$

**10.21.** В силу результата задачи 8.18 функция  $\alpha f(x)$  измерима на  $A$ . Если  $\alpha = 0$ , то  $\alpha f(x) = 0$  на  $A$ , поэтому

$$\int_A \alpha f(x) d\mu = 0.$$

Пусть теперь  $\alpha > 0$ . Тогда  $\alpha f(x) = (\alpha f)_+(x) - (\alpha f)_-(x) = \alpha f_+(x) - \alpha f_-(x)$ . Заметим, что  $h(x) \in Q_{f+}$  тогда и только тогда, когда  $\alpha h(x) \in Q_{\alpha f+}$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_A f_+(x) d\mu &= \sup_{h(x) \in Q_{f+}} \int_A h(x) d\mu = \\ &= \frac{1}{\alpha} \sup_{\alpha h(x) \in Q_{\alpha f+}} \int_A \alpha h(x) d\mu = \frac{1}{\alpha} \int_A \alpha f_+(x) d\mu. \end{aligned}$$

Аналогичное равенство верно для функции  $f_-(x)$ . Поэтому при  $\alpha > 0$  утверждение верно. При  $\alpha < 0$  доказательство аналогично.  $\square$

**10.22.** Рассмотрим вначале случай, когда  $f(x) \geq 0$  и  $g(x) \leq 0$  при  $x \in A$ . Пусть  $A_1 = \{x \in A : f(x) + g(x) \geq 0\}$  и  $A_2 = \{x \in A : f(x) + g(x) < 0\}$ . Тогда мы получаем (см. задачи 10.16 и 10.21)

$$\begin{aligned} \int_{A_1} f(x) d\mu &= \int_{A_1} (f(x) + g(x)) d\mu + \int_{A_1} (-g(x)) d\mu = \\ &= \int_{A_1} (f(x) + g(x)) d\mu - \int_{A_1} g(x) d\mu. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} - \int_{A_2} g(x) d\mu &= \int_{A_2} (-f(x) - g(x)) d\mu + \int_{A_2} f(x) d\mu = \\ &= - \int_{A_2} (f(x) + g(x)) d\mu + \int_{A_2} f(x) d\mu. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $f(x) + g(x) \in L(A)$  и (см. задачу 10.16)

$$\begin{aligned} \int_A (f(x) + g(x)) d\mu &= \int_A (f(x) + g(x))_+ d\mu - \int_A (f(x) + g(x))_- d\mu = \\ &= \int_{A_1} (f(x) + g(x)) d\mu + \int_{A_2} (f(x) + g(x)) d\mu = \int_{A_1} f(x) d\mu + \\ &\quad + \int_{A_1} g(x) d\mu + \int_{A_2} f(x) d\mu + \int_{A_2} g(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu + \int_A g(x) d\mu. \end{aligned}$$

В общем случае имеем

$$f(x) + g(x) = (f_+ + g_+)(x) - (f_- + g_-)(x) \equiv \varphi(x) - \psi(x).$$

При этом в силу результата задачи 10.16

$$\int_A \varphi(x) d\mu = \int_A f_+(x) d\mu + \int_A g_+(x) d\mu$$

и

$$\int_A \psi(x) d\mu = \int_A f_-(x) d\mu + \int_A g_-(x) d\mu.$$

Отсюда следует, что  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  из  $L(A)$ . Но  $\varphi(x) \geq 0$  и  $\psi(x) \leq 0$ . Тогда, согласно предыдущим рассуждениям,  $f(x) + g(x) = \varphi(x) - \psi(x) \in L(A)$  и

$$\begin{aligned} \int_A (f(x) + g(x)) d\mu &= \int_A \varphi(x) d\mu - \int_A \psi(x) d\mu = \int_A f_+(x) d\mu + \\ &+ \int_A g_+(x) d\mu - \int_A f_-(x) d\mu - \int_A g_-(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu + \int_A g(x) d\mu. \end{aligned}$$

□

**10.23.** Утверждение немедленно следует из задач 10.21 и 10.22. □

**10.24.** По определению  $f(x) \in L(A)$  тогда и только тогда, когда  $f_+(x) \in L(A)$  и  $f_-(x) \in L(A)$ . Более того, так как  $|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$ , то согласно задаче 10.16 получаем, что

$$\int_A |f(x)| d\mu = \int_A f_+(x) d\mu + \int_A f_-(x) d\mu.$$

Так как интегралы в последнем неравенстве неотрицательны, то  $|f(x)| \in L(A)$  тогда и только тогда, когда  $f_+(x) \in L(A)$  и  $f_-(x) \in L(A)$ , откуда следует утверждение задачи. □

**10.25.** Имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_A f(x) d\mu \right| &= \left| \int_A f_+(x) d\mu - \int_A f_-(x) d\mu \right| \leqslant \\ &\leqslant \int_A f_+(x) d\mu + \int_A f_-(x) d\mu = \int_A |f(x)| d\mu. \end{aligned}$$

□

**10.26.** Из задачи 10.24 следует, что достаточно доказать результат для неотрицательных функций  $f(x)$  и  $g(x)$ . Но в этом случае  $Q_g \subseteq Q_f$ , поэтому

$$\int_A g(x) d\mu \leqslant \int_A f(x) d\mu < \infty.$$

□

**10.27.** Утверждение сразу вытекает из определения интеграла Лебега для неотрицательных функций, поскольку множество  $Q_f$  содержит функцию  $h(x) \equiv 0$ . □

**10.28.** Утверждение следует из задач 10.23 и 10.27. □

**10.29.** Так как  $g(x) \equiv C$  — простая функция на  $A$  ( $\mu(A) < \infty$ ), то  $C \in L(A)$  и

$$\int_A C d\mu = C\mu(A).$$

Теперь утверждение следует из задач 10.26, 10.25 и 10.28. □

**10.30.** Достаточно доказать утверждение для неотрицательных функций  $f(x)$ . В этом случае  $a_i \geq 0$ . Если  $a_{i_0} > 0$  и  $\mu(A_{i_0}) = \infty$ , то одновременно

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \mu(A_i) = \infty \quad \text{и} \quad f(x) \notin L(A).$$

Пусть теперь  $\mu(A_i) < \infty$  при всех  $a_i \neq 0$ . Определим функции

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}(x) \quad \text{для } n \in \mathbb{N}.$$

Тогда все  $f_n(x) \in Q_f$  и  $f_n(x) \uparrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  для  $x \in A$ . Мы получаем, что (см. задачу 10.15)

$$\int_A f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mu(A_i).$$

□

**10.31.** Пусть для данного разбиения  $T$

$$f_T(x) = \sum_{k=1}^n y_k \chi_{R_k}(x).$$

Тогда  $f_T(x)$  — простая функция на  $A$  и

$$F_T = (L) \int_A f_T(x) d\mu.$$

Так как для любого  $x \in A$  выполнено неравенство  $|f_T(x) - f(x)| \leq \lambda(T)$ , то в силу результата задачи 10.29 имеет место оценка

$$\left| F_T - (L) \int_A f(x) d\mu \right| = \left| \int_A (f_T(x) - f(x)) d\mu \right| \leq \lambda(T) \mu(E),$$

откуда следует утверждение задачи. □

**10.32.** Обозначим  $g_1(x) = f_1(x)$  и  $g_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$  при  $n \geq 2$ . Ясно, что эти функции неотрицательны и измеримы на  $A$ . Применяя результат задачи 9.29, построим при каждом фиксированном  $n$  последовательность неотрицательных простых функций  $\psi_{m,n}(x) \uparrow g_n(x)$  при  $m \rightarrow \infty$  на  $A$ . Определим также для  $m \in \mathbb{N}$  простые функции

$$F_m(x) = \sum_{n=1}^m \psi_{m,n}(x).$$

Тогда для  $m \geq 1$  и  $x \in A$  получаем, что

$$F_{m+1}(x) - F_m(x) = \sum_{n=1}^m (\psi_{m+1,n}(x) - \psi_{m,n}(x)) + \psi_{m+1,m+1}(x) \geq 0.$$

С другой стороны, для каждого  $m$

$$F_m(x) \leq \sum_{n=1}^m g_n(x) = f_m(x) \leq f(x).$$

При этом для каждого фиксированного  $N$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} F_m(x) \geq \sum_{n=1}^N \lim_{m \rightarrow \infty} \psi_{m,n}(x) = \sum_{n=1}^N g_n(x) = f_N(x),$$

откуда следует, что всюду на  $A$  существует функция  $f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} F_m(x)$ . Применяя результат задачи 10.15, получаем, что

$$\int_A f(x) d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_A F_m(x) d\mu.$$

В то же время, так как для любого  $m$  и всех  $x \in A$  выполняется неравенство  $0 \leq F_m(x) \leq f_m(x) \leq f(x)$ , то

$$\int_A F_m(x) d\mu \leq \int_A f_m(x) d\mu \leq \int_A f(x) d\mu$$

при каждом  $m$ . Следовательно,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_A f_m(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu.$$

□

**10.33.** Определим функции  $\psi_n(x) = f_n(x) - f_1(x)$  для  $n \in \mathbb{N}$ . Ясно, что последовательность функций  $\{\psi_n(x)\}$  удовлетворяет условиям задачи 10.32. Следовательно, измеримая неотрицательная функция

$$\psi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x) = f(x) - f_1(x)$$

удовлетворяет равенству

$$\int_A \psi(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \psi_n(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu - \int_A f_1(x) d\mu.$$

Так как правая часть равенства конечна, то  $\psi(x) \in L(A)$ . Следовательно,  $f(x) = \psi(x) + f_1(x) \in L(A)$  и

$$\int_A f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu.$$

□

**10.34.** Пусть

$$\psi_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

при  $n = 1, 2, \dots$ . Тогда эта последовательность удовлетворяет условиям задачи 10.32, поэтому

$$\int_A f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \psi_n(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_A f_k(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n(x) d\mu.$$

□

**10.35.** Обозначим  $\varphi_n(x) = \inf_{k \geq n} f_k(x)$  для  $n \in \mathbb{N}$  и  $x \in A$ . Тогда  $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$  для всех  $n$  и  $x$ , и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

при  $x \in A_1$ , где  $\mu(A \setminus A_1) = 0$ . Применяя задачу 10.32, получаем, что

$$\int_A f(x) d\mu = \int_{A_1} f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_1} \varphi_n(x) d\mu = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_A \varphi_n(x) d\mu.$$

Так как

$$\int_A \varphi_n(x) d\mu \leq \int_A f_n(x) d\mu$$

при каждом  $n$ , то мы приходим к утверждению задачи. □

**10.36.** Предположим, что утверждение задачи неверно. Тогда найдутся полная мера  $\mu$  и такая последовательность неотрицательных измеримых функций  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  на  $A$ , что  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  п.в. на  $A$ , но

$$\int_A f(x) d\mu > \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu.$$

Выберем такую подпоследовательность  $\{f_{n_k}\}$ , что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_A f_{n_k}(x) d\mu = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu.$$

Согласно теореме Рисса (задача 9.19), найдётся подпоследовательность  $\{f_{n_{k_l}}\}$ , сходящаяся к  $f(x)$  п.в. на  $A$ . Тогда

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_A f_{n_{k_l}}(x) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_A f_{n_k}(x) d\mu < \int_A f(x) d\mu,$$

что противоречит теореме Фату.  $\square$

**10.37.** Заметим вначале, что в силу результата задачи 10.26 функции  $f_n(x)$  из  $L(A)$  при  $n \in \mathbb{N}$  и (см. задачу 10.19)  $f(x) \in L(A)$ . Рассмотрим функции  $\varphi_n(x) = F(x) + f_n(x)$  и  $\psi_n(x) = F(x) - f_n(x)$  при  $n = 1, 2, \dots$ . Все эти функции неотрицательны на  $A$  и интегрируемы по Лебегу на этом множестве. К тому же

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = F(x) + f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x) = F(x) - f(x)$$

п.в. на  $A$ . Применяя теорему Фату (задача 10.35), получаем, что

$$\begin{aligned} \int_A F(x) d\mu + \int_A f(x) d\mu &= \int_A (F(x) + f(x)) d\mu \leqslant \\ &\leqslant \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_A (F(x) + f_n(x)) d\mu = \int_A F(x) d\mu + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \int_A F(x) d\mu - \int_A f(x) d\mu &= \int_A (F(x) - f(x)) d\mu \leqslant \\ &\leqslant \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_A (F(x) - f_n(x)) d\mu = \int_A F(x) d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu \leqslant \int_A f(x) d\mu \leqslant \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu,$$

откуда следует, что существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu.$$

$\square$

**З а м е ч а н и е.** Из доказательств теорем Фату (задача 10.35) и Лебега (задача 10.37) видно, что условие полноты меры  $\mu$  используется лишь для доказательства измеримости предельной функции  $f(x)$ . Поэтому вместо полноты меры  $\mu$  можно потребовать измеримость  $f(x)$ .

**10.38.** В силу теоремы Рисса (задача 9.19) найдётся подпоследовательность  $\{f_{n_r}(x)\}_{r=1}^{\infty}$ , которая сходится к  $f(x)$  при  $r \rightarrow \infty$  п.в. на  $A$ .

Тогда в силу результата задачи 10.37 функция  $f(x)$  из  $L(A)$ . Предположим, что утверждение теоремы несправедливо. Тогда существуют такие  $\varepsilon_0 > 0$  и подпоследовательность  $\{f_{m_k}(x) = g_k(x)\}_{k=1}^\infty$ , что

$$\left| \int_A g_k(x) d\mu - \int_A f(x) d\mu \right| > \varepsilon_0$$

при каждом  $k$ . В то же время  $g_k(x) \Rightarrow f(x)$  при  $k \rightarrow \infty$  на  $A$ , и, вновь применяя теорему Рисса, найдём такую подпоследовательность  $\{g_{k_l}(x)\}_{l=1}^\infty$ , что  $g_{k_l}(x) \rightarrow f(x)$  при  $l \rightarrow \infty$  п.в. на  $A$ . Используя теорему Лебега (задача 10.37), получим, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_A g_{k_l}(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu,$$

что противоречит предыдущему неравенству.  $\square$

**10.39.** Пусть  $f_n(x) = n\chi_{(0, \frac{1}{n})}(x)$  при  $x \in [0, 1]$  и  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $f_n(x) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  для каждого  $x \in [0, 1]$ , но

$$\int_{[0,1]} f_n(x) d\mu = 1$$

при всех  $n$ .  $\square$

**10.40.** Тот же пример, что и в решении задачи 10.39.  $\square$

**10.41.** Пусть  $A_n = (2^{-n}, 2^{-n+1})$  и  $f_n(x) = \frac{1}{n} 2^n \chi_{A_n}(x)$  для  $n \in \mathbb{N}$ . Ясно, что  $f_n(x) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  для каждого  $x \in (0, 1)$  и

$$\int_{(0,1)} f_n(x) d\mu = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ , но

$$F(x) = \sup_n f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),$$

и поэтому

$$\int_{(0,1)} F(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(0,1)} f_n(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

$\square$

**10.42.** Достаточно рассмотреть случай, когда  $f(x) \geq 0$  на  $A$ . Имеем  $|f(x)\chi_{A_n}(x)| \leq f(x)$  при каждом  $n$  и всех  $x \in A$ , откуда следует, что

$f(x)\chi_{A_n}(x) \in L(A)$ , т. е. (см. задачу 10.14)  $f(x) \in L(A_n)$  при всех  $n$ .  
Более того,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(x)\chi_{A_k}(x).$$

Применяя теорему Б. Леви (задача 10.34), получаем, что

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_A f(x)\chi_{A_k}(x) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f(x) d\mu.$$

□

**10.43.** Утверждение немедленно следует из теоремы Б. Леви (задача 10.34) и представления

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(x)\chi_{A_k}(x).$$

□

**10.44.** Возьмём множества

$$A_n = \left[ \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right), \quad B_n = \left[ \frac{1}{n+1}, \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) \right)$$

и

$$C_n = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right), \frac{1}{n} \right)$$

при  $n \in \mathbb{N}$ . Определим функцию

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) (\chi_{C_k}(x) - \chi_{B_k}(x)).$$

Ясно, что  $f(x) \in L(A_k)$  и

$$\int_{A_k} f(x) d\mu = 0$$

при каждом  $k$ . При этом множество  $f((0, 1))$  счётно и

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)(\mu(C_k) + \mu(B_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k(k+1)} = \infty,$$

откуда следует (см. задачу 10.30), что  $f(x) \notin L((0, 1))$ . □

**10.45.** Утверждение немедленно вытекает из теоремы Б. Леви (задача 10.32). □

**10.46.** Пусть  $f_n(x) = \frac{1}{n} \chi_{(0,n^2)}(x)$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Ясно, что все функции  $f_n(x)$  интегрируемы по Лебегу на  $\mathbb{R}$  и  $f_n(x) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно на  $\mathbb{R}$ , но

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) d\mu = n \rightarrow \infty$$

при  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

**10.47.** Так как  $f(x) \cdot g(x)$  — измеримая функция на  $A$  и (см. задачи 10.21 и 10.24)  $|f(x) \cdot g(x)| \leq C|f(x)| \in L(A)$ , то (см. задачи 10.26 и 10.24)  $f(x) \cdot g(x) \in L(A)$ . Применяя задачи 10.25 и 10.28, мы получаем, что

$$\left| \int_A f(x)g(x) d\mu \right| \leq \int_A |f(x)g(x)| d\mu \leq C \int_A |f(x)| d\mu.$$

$\square$

**10.48.** Заметим, что согласно задаче 10.47 функция  $f(x) \cdot g(x)$  интегрируема по Лебегу на  $A$ . Так как  $\alpha f(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq \beta f(x)$ , то мы получаем, что (см. задачу 10.28)

$$\alpha \int_A f(x) d\mu \leq \int_A f(x)g(x) d\mu \leq \beta \int_A f(x) d\mu.$$

Если

$$\int_A f(x) d\mu = 0,$$

то можно взять  $\gamma = \alpha$ . В противном случае имеем

$$\alpha \leq \frac{\int_A f(x)g(x) d\mu}{\int_A f(x) d\mu} \leq \beta,$$

т. е.

$$\gamma = \frac{\int_A f(x)g(x) d\mu}{\int_A f(x) d\mu} \in [\alpha, \beta].$$

$\square$

**10.49.** Пусть  $f(x) = \frac{1}{2} \chi_{(0, \frac{1}{2})}(x) - \frac{1}{2} \chi_{(\frac{1}{2}, 1)}(x)$  и  $g(x) = 2\chi_{(0, \frac{1}{2})}(x) + \chi_{[\frac{1}{2}, 1]}(x)$ . Тогда  $1 \leq g(x) \leq 2$  при  $x \in (0, 1)$ ,

$$\int_{(0,1)} f(x) d\mu = 0$$

и  $f(x)g(x) = \chi_{(0, \frac{1}{2})}(x) - \frac{1}{2} \chi_{(\frac{1}{2}, 1)}(x)$ , поэтому

$$\int_{(0,1)} f(x)g(x) d\mu = \frac{1}{4}.$$

Но не существует такого  $\gamma \in [1, 2]$ , что  $\frac{1}{4} = 0 \cdot \gamma$ .  $\square$

**10.50.** Пусть  $A_1 = \{x \in A : f(x) \geq g(x)\}$  и  $A_2 = \{x \in A : f(x) < g(x)\} = A \setminus A_1$ . Тогда  $f(x) \in L(A_1)$  и  $g(x) \in L(A_2)$ , откуда следует, что

$$\int_A |h(x)| d\mu = \int_{A_1} |f(x)| d\mu + \int_{A_2} |g(x)| d\mu < \infty.$$

$\square$

**10.51.** Имеем

$$\int_A f(x) d\mu = \int_{A_\lambda} f(x) d\mu + \int_{A \setminus A_\lambda} f(x) d\mu \geq \int_{A_\lambda} f(x) d\mu \geq \int_{A_\lambda} \lambda d\mu = \lambda \mu(A_\lambda),$$

откуда следует утверждение задачи.  $\square$

**10.52.** Из задачи 10.51 следует, что

$$\mu \left( \left\{ x \in A : f > \frac{1}{n} \right\} \right) = 0 \quad \text{при каждом } n.$$

Так как

$$\{x \in A : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in A : f(x) > \frac{1}{n} \right\},$$

то мы получаем, что

$$\mu(\{x \in A : f(x) > 0\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu \left( \left\{ x \in A : f(x) > \frac{1}{n} \right\} \right) = 0.$$

Следовательно,  $f(x) = 0$  п.в. на  $A$ .  $\square$

**10.53.** Пусть  $A_1 = \{x \in A : f(x) \geq 0\}$ . Тогда  $A_1 \in M$  и  $A_1 \subset A$ , поэтому

$$\int_{A_1} f(x) d\mu = 0.$$

Так как  $f(x) \geq 0$  на  $A_1$ , то из задачи 10.52 следует, что  $f(x) = 0$  п.в. на  $A_1$ . Аналогично,  $f(x) = 0$  п.в. на  $A_2 = \{x \in A : f(x) \leq 0\}$ .  $\square$

**10.54.** В силу результата задачи 10.24 достаточно рассмотреть случай, когда  $f(x) \geq 0$  на  $A$ . Пусть

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \chi_{E_k(f)}(x).$$

Тогда  $0 \leq \varphi(x) \leq f(x) \leq \varphi(x) + 1$  при всех  $x \in A$ . Отсюда мы получаем, что (см. задачу 10.30)

$$\int_A \varphi(x) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} k \mu(E_k(f))$$

и

$$\int_A \varphi(x) d\mu \leq \int_A f(x) d\mu \leq \int_A \varphi(x) d\mu + \mu(A).$$

Поэтому  $f(x) \in L(A)$  тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \mu(E_k(f)) < \infty.$$

$\square$

**10.55.** Пусть  $f(x) = \frac{1}{2}$  при  $x \in \mathbb{R}$ . Очевидно, что  $f(x) \notin L(\mathbb{R})$ , но  $E_k(f) = \emptyset$  при всех  $k \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**10.56.** В силу результата задачи 10.24 можно считать, что  $f(x) \geq 0$  на  $A$ . Пусть

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{F_k(f)}(x).$$

Нетрудно видеть, что  $0 \leq h(x) \leq f(x) \leq h(x) + 1$  для любого  $x \in A$ . Тогда (см. задачу 10.30)

$$\int_A h(x) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k(f))$$

и

$$\int_A h(x) d\mu \leq \int_A f(x) d\mu \leq \int_A h(x) d\mu + \mu(A).$$

Поэтому  $f(x) \in L(A)$  тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k(f)) < \infty.$$

$\square$

**10.57.** Пример тот же, что и в решении задачи 10.55.  $\square$

**10.58.** Можно считать, что  $f(x) \geq 0$  на  $A$ . Пусть  $B = F_1 = \{x \in A: f(x) \geq 1\}$  и  $C = A \setminus B = \{x \in A: 0 \leq f(x) < 1\}$ . Ясно, что  $f(x) \in L(A)$  тогда и только тогда, когда  $f(x) \in L(B)$  и  $f(x) \in L(C)$ . Предположим, что  $\mu(B) = \infty$ . Тогда  $f(x) \notin L(A)$  и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k(f)) \geq \mu(F_1(f)) = \infty,$$

и утверждение справедливо. Пусть теперь  $\mu(B) < \infty$ . В этом случае (см. задачу 10.56)  $f(x) \in L(B)$  тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k(f)) < \infty.$$

Определим функцию

$$w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k-1} \chi_{D_k(f)}(x)$$

для  $x \in A$ . Рассмотрим произвольное  $x \in C$ . Если  $f(x) = 0$ , то  $w(x) = 0$ . Если  $f(x) > 0$ , то существует такое  $r \geq 1$ , что  $x \in C \cap (D_r(f) \setminus D_{r-1}(f))$ . Это означает, что  $2^{-r} \leq f(x) < 2^{-r+1}$  и  $w(x) = 2^{-r}$ . Следовательно, всюду на  $C$  справедливо неравенство  $w(x) \leq f(x) \leq 2w(x)$ . Поэтому  $f(x) \in L(C)$  тогда и только тогда, когда  $w(x) \in L(C)$ . С другой стороны,  $w(x) = \frac{1}{2}$  на  $B$  и  $\mu(B) < \infty$ , поэтому  $w(x) \in L(C)$  тогда и только тогда, когда  $w(x) \in L(A)$ . Но, в силу теоремы Б. Леви,

$$\int_A w(x) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k-1} \mu(D_k(f)),$$

откуда следует утверждение задачи.  $\square$

**10.59.** Обозначим  $a_k = \mu(F_k(f))$  для  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда в силу результата задачи 10.58

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty.$$

Возьмём произвольное  $\varepsilon > 0$ . Тогда можно выбрать  $N$  так, чтобы

$$\sum_{k \geq \frac{N}{2}} a_k < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, при  $n > N$  справедливы оценки

$$\frac{\varepsilon}{2} > \sum_{\frac{n}{2} \leq k \leq n} a_k \geq \frac{n}{2} a_n,$$

откуда следует, что  $\mu(F_k(f)) = o(1/k)$ .  $\square$

**10.60.** Пусть  $A_n = (2^{-n}, 2^{-n+1})$ ,  $f_n(x) = \frac{1}{n} 2^n \chi_{A_n}(x)$  при  $n \in \mathbb{N}$  и

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Тогда

$$\int_{(0,1)} f(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(0,1)} f_n(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

В то же время  $F_k(f) \subset (0, 2^{-r+1})$  при каждом  $k$ , где  $r = r(k) = \min \left\{ l : \frac{2^l}{l} \geq k \right\}$ . Поскольку  $\frac{2^{\ln k}}{\ln k} \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , то  $r(k)$  растёт быстрее, чем  $\ln k$ , при  $k \rightarrow \infty$ , откуда следует, что  $\mu(F_k(f)) = o\left(\frac{1}{k}\right)$  при  $k \rightarrow \infty$ .  $\square$

**10.61.** Пусть

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

где  $\mu(A_n) < \infty$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Введём обозначения  $B_{n,k} = \{x \in A_n : |f(x)| \geq 2^k\}$  при  $n \in \mathbb{N}$  и  $k \in \mathbb{N}$ . Пусть теперь

$$\begin{aligned} g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(\mu(A_n) + 1)} \times \\ \times \left( \chi_{A_n \setminus B_{n,1}}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}(\mu(B_{n,k}) + 1)} \chi_{B_{n,k} \setminus B_{n,k+1}}(x) \right). \end{aligned}$$

Заметим, что функция  $g(x)$  измерима и положительна на  $A$ . При этом

$$\begin{aligned} \int_A |f(x)|g(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(\mu(A_n) + 1)} \int_{A_n} |f(x)| \times \\ \times \left( \chi_{A_n \setminus B_{n,1}}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}(\mu(B_{n,k}) + 1)} \chi_{B_{n,k} \setminus B_{n,k+1}}(x) \right) d\mu \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(\mu(A_n) + 1)} \left( 2\mu(A_n) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}(\mu(B_{n,k}) + 1)} \mu(B_{n,k}) 2^{k+1} \right) \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(\mu(A_n) + 1)} \left( 2\mu(A_n) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \right) \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 2 < \infty. \end{aligned}$$

□

**10.62.** Пусть  $f_n(x) = \chi_{A_n}(x)$  и

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \infty,$$

то утверждение тривиально. Пусть эта сумма конечна. Тогда по теореме Б. Леви (задача 10.34)

$$\int_{(0,1)} f(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(0,1)} f_n(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty.$$

При этом по неравенству Чебышёва (задача 10.51)

$$\mu(B_n) = \mu(\{x \in A : f(x) \geq n\}) \leq \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty.$$

□

**10.63.** Предположим, что утверждение неверно. Тогда для некоторого измеримого множества  $B \subset A$  существуют  $\varepsilon_0 > 0$  и подпоследовательность  $\{f_{m_k}(x) = g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ , для которых

$$\left| \int_B g_k(x) d\mu - \int_B f(x) d\mu \right| > \varepsilon_0$$

при каждом  $k$ . В силу теоремы Рисса (задача 9.19) можно считать, что  $g_k(x) \rightarrow f(x)$  при  $k \rightarrow \infty$  п.в. на  $A$ . Заметим, что по теореме Фату (задача 10.35)

$$\int_B f(x) d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_B g_k(x) d\mu,$$

откуда следует, что существует такое  $k_0$ , что при  $k \geq k_0$  выполнена оценка

$$\int_B g_k(x) d\mu - \int_B f(x) d\mu > \varepsilon_0.$$

С другой стороны, применяя теорему Фату к множеству  $B \setminus A$ , получаем, что существует такое  $k_1$ , что при  $k \geq k_1$

$$\int_{A \setminus B} g_k(x) d\mu - \int_{A \setminus B} f(x) d\mu > -\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Это означает, что при  $k \geq \max(k_0, k_1)$  выполнено неравенство

$$\int_A g_k(x) d\mu - \int_A f(x) d\mu > \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Мы получили противоречие с условием.  $\square$

**10.64.** Пусть  $A = (0, 1)$ ,  $B = (0, \frac{1}{2})$  и  $f_n(x) = n\chi_{(0, \frac{1}{n})}(x) - n\chi_{(1-\frac{1}{n}, 1)}(x)$  при  $n = 2, 3, \dots$ . Тогда  $f_n(x) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $(0, 1)$ ,

$$\int_A f_n(x) d\mu = 0$$

при каждом  $n$ , но

$$\int_B f_n(x) d\mu = 1$$

при каждом  $n$ .  $\square$

**10.65.** Можно считать, что  $f(x) \geq 0$  на  $A$ . Пусть

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

где все  $A_n \in M$ ,  $\mu(A_n) < \infty$  при каждом  $n$  и  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ . Определим функции  $f_n(x) = f(x)\chi_{A_n}(x)$  для  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $f_n(x) \uparrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ . Следовательно, по теореме Б. Леви (см. 10.32)

$$\int_{A_n} f(x) d\mu = \int_A f_n(x) d\mu \rightarrow \int_A f(x) d\mu$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Это означает, что существует  $n_0$ , для которого

$$0 \leq \int_A f(x) d\mu - \int_A f_{n_0}(x) d\mu \leq \varepsilon.$$

Взяв  $B = A_{n_0}$ , получим утверждение задачи.  $\square$

**10.66.** Можно считать, что  $f(x) \geq 0$  на  $A$ . Пусть  $E_n(f) = \{x \in A : n \leq |f(x)| < n+1\}$  для  $n = 0, 1, \dots$  и

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n(f) = \{x \in A : f(x) \geq 1\}.$$

Нетрудно видеть, что  $\mu(B) < \infty$  и  $f(x) \in L(B)$ , поэтому, применяя задачу 10.54, получим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\mu(E_n(f)) < \infty$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\mu(E_n(f)) = \sum_{n=1}^{\infty} n\mu(E_n(f)) + \mu(B) < \infty.$$

Мы можем выбрать возрастающую последовательность натуральных чисел  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ , для которой

$$\sum_{n=n_k}^{\infty} (n+1)\mu(E_n(f)) < \frac{1}{2^k} \text{ при } k \in \mathbb{N}.$$

Пусть теперь  $a_n = 1$  при  $0 \leq n \leq n_1$  и  $a_n = k$  для  $n_k < n \leq n_{k+1}$ , где  $k \in \mathbb{N}$ . Определим функцию  $\Phi(u)$  следующим образом:  $\Phi(0) = 1$ ,  $\Phi(n) = a_{n-1}$  для  $n \in \mathbb{N}$  и  $\Phi(u)$  линейная на каждом  $[n, n+1]$ . Тогда  $\Phi(u) \in C(\mathbb{R})$ ,  $\Phi(u) \geq 1$  и  $\Phi(u) \uparrow \infty$  при  $u \rightarrow \infty$ . При этом

$$\begin{aligned} \int_A f(x)\Phi(f(x)) d\mu &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n(f)} f(x)\Phi(f(x)) d\mu \leq \int_A f(x) d\mu + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)a_n\mu(E_n(f)) = C + \sum_{n=1}^{n_1} (n+1)\mu(E_n(f)) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} k \sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} (n+1)\mu(E_n(f)) \leq C + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} < \infty. \end{aligned}$$

□

**10.67.** Достаточно рассмотреть случай  $f(x) \geq 0$ . Найдём такую простую неотрицательную функцию  $h(x) \in Q_f$ , что

$$0 \leq \int_A (f(x) - h(x)) d\mu = \int_A f(x) d\mu - \int_A h(x) d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$h(x) = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{A_k}(x),$$

где множества  $A_k$  попарно не пересекаются. Пусть

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2(1 + \max_{1 \leq k \leq n} a_k)}.$$

Пусть теперь  $B \in M$ ,  $B \subset A$  и  $\mu(B) < \delta$ . Тогда мы получаем, что

$$\begin{aligned} \int_B f(x) d\mu &= \int_B f(x) d\mu - \int_B h(x) d\mu + \int_B h(x) d\mu \leq \\ &\leq \int_A (f(x) - h(x)) d\mu + \int_A \sum_{k=1}^n a_k \chi_{A_k \cap B}(x) d\mu < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k \cap B) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left( \max_{1 \leq k \leq n} a_k \right) \sum_{k=1}^n \mu(A_k \cap B) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \left( \max_{1 \leq k \leq n} a_k \right) \mu(B) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

□

**10.68.** Пусть задано  $\varepsilon > 0$ . Положим  $\gamma = \frac{\varepsilon}{2(\mu(A) + 1)}$  и (см. задачу 10.67) выберем  $\delta > 0$  так, чтобы для любого  $B \in M$ ,  $B \subset A$  с  $\mu(B) < \delta$  и для любого  $n$  выполнены условия

$$\left| \int_B f_n(x) d\mu \right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{и} \quad \left| \int_B f(x) d\mu \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Далее, в силу сходимости по мере найдётся такое  $N$ , что для множеств  $A_n = \{x \in A : |f_n(x) - f(x)| > \gamma\}$  выполнена оценка  $\mu(A_n) < \delta$  при каждом  $n \geq N$ . Тогда при  $n \geq N$  мы получаем, что

$$\begin{aligned} \left| \int_A f_n(x) d\mu - \int_A f(x) d\mu \right| &\leq \int_{A \setminus A_n} |f_n(x) - f(x)| d\mu + \\ &+ \left| \int_{A_n} f_n(x) d\mu \right| + \left| \int_{A_n} f(x) d\mu \right| \leq \gamma \mu(A \setminus A_n) + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

**10.69.** Пусть  $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \chi_{(0,n)}(x)$  для  $x \in \mathbb{R}^1$  и  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $f_n(x) \rightharpoonup 0 \equiv f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $\mathbb{R}$  и

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) d\mu = \sqrt{n} \rightarrow \infty$$

при  $n \rightarrow \infty$ . В то же время, если заданы  $\varepsilon > 0$  и измеримое множество  $B \in \mathbb{R}$ , причём  $\mu(B) < \varepsilon$ , то

$$\int_B f_n(x) d\mu \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \leq \varepsilon$$

при каждом  $n$ .  $\square$

**10.70.** Пусть задано  $\varepsilon > 0$ . Выберем  $\delta > 0$  так, чтобы для любого  $B \in M$ ,  $B \subset A$ , с  $\mu(B) < \delta$  и для любого  $\omega \in \Omega$  выполнялась оценка

$$\left| \int_B f_\omega(x) d\mu \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть теперь даны  $\omega \in \Omega$  и измеримое множество  $B \subset A$  с  $\mu(B) < \delta$ . Обозначим  $B_+ = \{x \in B : f_\omega(x) \geq 0\}$  и  $B_- = B \setminus B_+$ . Ясно, что  $\mu(B_+) < \delta$  и  $\mu(B_-) < \delta$ . Следовательно,

$$\left| \int_{B_+} f_\omega(x) d\mu \right| = \int_{B_+} f_\omega(x) d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$\left| \int_{B_-} f_\omega(x) d\mu \right| = - \int_{B_-} f_\omega(x) d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому

$$\int_B |f_\omega(x)| d\mu = \int_{B_+} f_\omega(x) d\mu - \int_{B_-} f_\omega(x) d\mu < \varepsilon.$$

$\square$

**10.71.** Пусть  $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$ . Из задачи 10.63 следует, что для любого измеримого множества  $B \subset A$  выполнено равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_B g_n(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B f_n(x) d\mu - \int_B f(x) d\mu = 0. \quad (\text{i})$$

Предположим, что утверждение задачи неверно. Тогда существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что для любого  $\delta > 0$  и любого  $N$  существуют измеримое множество  $A(\delta, N)$  и число  $n > N$ , для которых  $\mu(A(\delta, N)) < \delta$  и

$$\left| \int_{A(\delta, N)} g_n(x) d\mu \right| \geq \varepsilon_0.$$

Зафиксируем вначале такие  $n_1$  и  $A_1 \subset A$  с  $\mu(A_1) < \infty$ , что

$$\left| \int_{A_1} g_{n_1}(x) d\mu \right| \geq \varepsilon_0.$$

Затем найдём такое  $\delta_1 > 0$ , что для любого измеримого  $F \subset A$  с  $\mu(F) < \delta_1$  справедлива оценка

$$\left| \int_F g_{n_1}(x) d\mu \right| < \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Далее, возьмём  $n_2 > n_1$  и  $A_2 \subset A$  с  $\mu(A_2) < \frac{\delta_1}{2}$ , для которых

$$\left| \int_{A_2} g_{n_2}(x) d\mu \right| \geq \varepsilon_0.$$

Затем найдём такое  $\delta_2 > 0$ , что для любого измеримого множества  $F \subset A$  с  $\mu(F) < \delta_2$  выполнено

$$\left| \int_F g_{n_2}(x) d\mu \right| < \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Продолжая этот процесс, мы построим последовательность измеримых множеств  $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$  из  $A$ , строго возрастающую последовательность натуральных чисел  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  и последовательность положительных чисел  $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ , для которых

$$\left| \int_{A_k} g_{n_k}(x) d\mu \right| \geq \varepsilon_0, \quad \mu(A_{k+1}) < \frac{\delta_k}{2} \quad \text{и} \quad \left| \int_F g_{n_k}(x) d\mu \right| < \frac{\varepsilon_0}{4}$$

для любого измеримого  $F \subset A$  с  $\mu(F) < \delta_k$ , где  $k \in \mathbb{N}$ . Заметим, что  $\mu(A_k) \geq \delta_k$ , откуда следует, что  $\delta_{k+1} < \frac{\delta_k}{2}$  для любого  $k$ . Следовательно,

$$\mu\left(\bigcup_{l=k+1}^{\infty} A_l\right) \leq \sum_{l=k}^{\infty} \frac{\delta_l}{2} < \delta_k.$$

Отсюда следует, что если

$$B_k = A_k \cap \left( \bigcup_{l=k+1}^{\infty} A_l \right), \quad \text{то} \quad \left| \int_{B_k} g_{n_k}(x) d\mu \right| < \frac{\varepsilon_0}{4}$$

для всех  $k$ . Итак, если  $C_k = A_k \setminus B_k$ , то

$$\left| \int_{C_k} g_{n_k}(x) d\mu \right| \geq \frac{3\varepsilon_0}{4}$$

при всех  $k$ . К тому же,

$$\mu\left(\bigcup_{l=k+1}^{\infty} C_l\right) < \delta_k.$$

Пусть теперь  $k(1) = 1$  и  $k(2) > k(1)$  таковы, что

$$\left| \int_{C_{k(1)}} g_{n_{k(2)}}(x) d\mu \right| < \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Если мы уже определили индексы  $k(1) < k(2) < \dots < k(r-1)$ , то положим

$$D_{r-1} = \bigcup_{l=1}^{r-1} C_{k(l)},$$

и пусть  $k(r) > k(r-1)$  таково, что

$$\left| \int_{D_{r-1}} g_{n_{k(r)}}(x) d\mu \right| < \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Наконец, пусть

$$D = \bigcup_{r=1}^{\infty} C_{k(r)}$$

и  $G_r = D \setminus D_r$  для  $r \in \mathbb{N}$ . Тогда для любого  $r$  выполнена оценка  $\mu(G_r) < \delta_{k(r)}$ , и мы получаем, что

$$\begin{aligned} \left| \int_D g_{n_{k(r)}}(x) d\mu \right| &\geq \left| \int_{C_{k(r)}} g_{n_{k(r)}}(x) d\mu \right| - \left| \int_{D_{r-1}} g_{n_{k(r)}}(x) d\mu \right| - \\ &- \left| \int_{G_r} g_{n_{k(r)}}(x) d\mu \right| \geq \frac{3\varepsilon_0}{4} - \frac{\varepsilon_0}{4} - \frac{\varepsilon_0}{4} = \frac{\varepsilon_0}{4}, \end{aligned}$$

что противоречит условию (i).  $\square$

**10.72.** Для любого  $\varepsilon > 0$  выберем натуральное  $k$  так, что  $\frac{C}{\Phi(k)} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Для произвольной функции  $f(x) \in T$  определим множества  $A_1 = \{x \in$

$\in A: f(x) > k\}$  и  $A_2 = A \setminus A_1$ . Пусть также  $\delta = \frac{\varepsilon}{2(k+1)}$ . Тогда для любого измеримого множества  $F \subset A$  с  $\mu(F) < \delta$  получаем

$$\begin{aligned} \int_F |f(x)| d\mu &= \int_{F \cap A_1} |f(x)| d\mu + \int_{F \cap A_2} |f(x)| d\mu \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{\Phi(k)} \int_{A_1} |f(x)| \Phi(|f(x)|) d\mu + k\mu(F) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

**10.73.** Пусть  $X = \{x_0\}$ ,  $M = \{X, \emptyset\}$  и  $\mu(X) = 1$ . Пусть  $f_n(x_0) = n$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда если  $A \in M$  и  $\mu(A) < \frac{1}{2}$ , то  $A = \emptyset$ , поэтому

$$\int_A |f_n(x)| d\mu = 0$$

при всех  $n$ , но

$$\sup_n \int_A f_n(x) d\mu = \infty.$$

□

**10.74.** Определим для каждой функции  $f(x) \in V$  множества  $F_n(f) = \{x \in A: |f(x)| \geqslant n\}$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Вначале докажем, что  $\mu(F_n(f)) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно на  $V$ . Для отдельно взятой интегрируемой функции  $\mu(F_n(f)) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  по неравенству Чебышёва. Предположим, что равномерной сходимости нет. Тогда существует  $\varepsilon_0 > 0$ , для которого найдётся последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq V$  с  $\mu(F_n(f_n)) \geqslant \varepsilon_0$  при всех  $n$ . В силу равностепенной абсолютной непрерывности существует такое  $\delta > 0$ , что если  $B \subset A$  измеримое и  $\mu(B) < \delta$ , то

$$\int_A |f_n(x)| d\mu < 1$$

при всех  $n$ . Мы можем считать, что  $\delta < \varepsilon_0$ . Тогда выберем измеримое  $A_n \subset F_n(f_n)$  с  $\mu(A_n) = \delta$  (здесь мы используем, что  $A \subset \mathbb{R}^k$ ), и мы получим, что

$$\int_{A_n} |f_n(x)| d\mu \geqslant n\delta > 1$$

при достаточно больших  $n$ . Полученное противоречие доказывает, что  $\mu(F_n(f)) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно на  $V$ .

Пусть теперь  $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$  — такая убывающая последовательность положительных чисел, что если  $B \subset A$  измеримое и  $\mu(B) < \delta_n$ , то

$$\int_A |f(x)| d\mu < 2^{-n}$$

для всех  $f(x) \in V$ , где  $n \in \mathbb{N}$ . Пусть также  $\{n_r\}_{r=1}^{\infty}$  — такая строго возрастающая последовательность натуральных чисел, что  $\mu(F_{n_r}(f)) < \delta_r$  при всех  $f(x) \in V$ , где  $r \in \mathbb{N}$ . Определим теперь функцию  $\Phi(u)$ .

Пусть  $\Phi(u) = 1$  при  $0 \leq u \leq n_2$ ,  $\Phi(u) = r$  при  $n_r + \frac{1}{2} \leq u \leq n_{r+1}$ , где  $r = 2, 3, \dots$ , и  $\Phi(u)$  линейна на каждом отрезке  $[n_r, n_r + \frac{1}{2}]$ , где  $r \in \mathbb{N}$ . Ясно, что  $\Phi(u)$  — непрерывная положительная и неубывающая функция на  $[0, \infty)$ . Далее, для любой функции  $f(x) \in V$  мы получаем, что

$$\begin{aligned} \int_A |f(x)| \Phi(|f(x)|) d\mu &= \int_{A \setminus F_{n_2}(f)} |f(x)| \Phi(|f(x)|) d\mu + \\ &+ \sum_{r=2}^{\infty} \int_{F_{n_r}(f) \setminus F_{n_{r+1}}(f)} |f(x)| \Phi(|f(x)|) d\mu \leq n_2 \mu(A) + \\ &+ \sum_{r=2}^{\infty} r \int_{F_{n_r}(f)} |f(x)| d\mu \leq n_2 \mu(A) + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{r}{2^r} = C < \infty. \end{aligned}$$

□

**10.75.** Пример тот же, что в решении задачи 10.69. □

## Г л а в а 11

### СРАВНЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ЛЕБЕГА И РИМАНА

Пусть  $n \geq 1$ ,  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}^n$  — промежуток, а  $f(x)$  — вещественнонезначная функция на  $I$ . Пусть  $T = \{I_i = [a(i), b(i)]\}_{i=1}^k$  — разбиение промежутка  $[a, b]$  с отмеченными точками  $\{\xi_i\}_{i=1}^k$ , т. е.

$$I = \bigcup_{i=1}^k I_i,$$

$(a(i), b(i)) \cap (a(j), b(j)) = \emptyset$  при  $i \neq j$  и  $\xi_i \in I_i$  для  $i = 1, 2, \dots, k$ . Диаметром разбиения  $T$  назовём величину  $\lambda(T) = \max_{1 \leq i \leq k} \operatorname{diam}(I_i)$ , а интегральной суммой Римана — величину

$$S(f; T) = \sum_{i=1}^k f(\xi_i) \prod_{l=1}^n (b_l(i) - a_l(i)).$$

Будем говорить, что  $f(x) \in \mathcal{R}([a, b])$  (что  $f(x)$  — интегрируемая по Риману функция на  $[a, b]$ ), если существует

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(f; T) = (\mathcal{R}) \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Ниже мы будем считать известными основные свойства интеграла Римана такие, как линейность интеграла Римана относительно  $f(x)$  и  $I$ , а также следующий критерий Дарбу.

**Теорема.** Пусть  $T$  — разбиение,  $M_i = \sup_{x \in I_i} f(x)$  и  $m_i = \inf_{x \in I_i} f(x)$  при  $i = 1, 2, \dots, k$ . Назовём верхней и нижней суммами Дарбу величины

$$\bar{S}(f; T) = \sum_{i=1}^k M_i \prod_{l=1}^n (b_l(i) - a_l(i)), \quad \underline{S}(f; T) = \sum_{i=1}^k m_i \prod_{l=1}^n (b_l(i) - a_l(i))$$

соответственно. Функция  $f(x)$  интегрируема по Риману на  $[a; b]$  тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} (\bar{S}(f; T) - \underline{S}(f; T)) = 0.$$

В одномерном случае мы будем также рассматривать несобственный интеграл Римана. Пусть  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  (здесь  $a$  и  $b$  могут быть конечными или бесконечными) и  $f(x)$  — такая вещественноненулевая функция на  $(a, b)$ , что  $f(x) \in \mathcal{R}([c, d])$  для любого отрезка  $[c, d] \subset (a, b)$ . Скажем, что  $f(x) \in \mathcal{R}((a_+, b_-))$  (что  $f(x)$  интегрируема по Риману в несобственном смысле на  $(a, b)$ ), если существует конечный предел

$$\lim_{\substack{c \rightarrow a_+ \\ d \rightarrow b_-}} \int_c^d f(x) dx.$$

Значение этого предела называется несобственным интегралом Римана от  $f(x)$  по  $(a, b)$  и обозначается

$$(\mathcal{R}) \int_{a_+}^{b_-} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Аналогично определяются множества функций  $\mathcal{R}([a, b_-])$  и  $\mathcal{R}((a_+, b])$ .

Ниже мы будем обозначать через  $L([a, b])$ , где  $n \geq 1$  и  $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$ , множество функций, интегрируемых по Лебегу относительно классической меры Лебега  $\mu$  на  $[a, b]$ .

### ЗАДАЧИ

**11.1.** Пусть  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  и  $f(x) \in \mathcal{R}([a, b])$ . Доказать, что  $f(x) \in L([a, b])$  и

$$(L) \int_{[a,b]} f(x) d\mu = (\mathcal{R}) \int_a^b f(x) dx.$$

**11.2.** Пусть  $n > 1$ ,  $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$  и  $f(x) \in \mathcal{R}([a, b])$ . Доказать, что  $f(x) \in L([a, b])$  и

$$(L) \int_{[a,b]} f(x) d\mu = (\mathcal{R}) \int_a^b f(x) dx.$$

**11.3. Критерий Лебега.** Пусть  $n \geq 1$ ,  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}^n$ , а  $f(x)$  — конечная вещественноненулевая функция на  $[a, b]$ . Доказать, что  $f(x) \in \mathcal{R}([a, b])$  тогда и только тогда, когда  $f(x)$  ограничена на  $I$  и непрерывна п.в. на  $I$  относительно классической меры Лебега  $\mu$ .

**11.4.** Пусть  $f(x) \in \mathcal{R}((a_+, b])$  и  $f(x) \geq 0$  на  $(a, b]$ . Доказать, что  $f(x) \in L((a, b))$  и

$$(L) \int_{(a,b)} f(x) d\mu = (\mathcal{R}) \int_{a_+}^b f(x) dx.$$

**11.5.** Построить функцию  $f(x) \in \mathcal{R}((0_+, 1])$  такую, что  $f(x) \notin L((0, 1))$ .

**11.6.** Пусть  $f(x) \in \mathcal{R}([a', b])$  для любого  $a' \in (a, b)$ . Доказать, что  $|f| \in \mathcal{R}((a_+, b])$  тогда и только тогда, когда  $f \in L((a, b))$ , и если интегрируемость имеет место, то

$$(L) \int_{(a,b)} f(x) d\mu = (\mathcal{R}) \int_{a_+}^b f(x) dx.$$

**11.7.** Пусть  $\alpha \in \mathbb{R}$  и задана функция

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha & \text{при } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Найти все такие  $\alpha$ , что:

а)  $f(x) \in \mathcal{R}([0, 1])$ ; б)  $f(x) \in \mathcal{R}((0_+, 1])$ ; в)  $f(x) \in L([0, 1])$ .

**11.8.** Пусть  $\alpha \in \mathbb{R}$  и  $f(x) = x^\alpha$  при  $x \in [1, \infty)$ . Найти все такие  $\alpha$ , что:

а)  $f(x) \in \mathcal{R}([1, \infty))$ ; б)  $f(x) \in L([1, \infty))$ .

**11.9.** Пусть  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \geq 0$ , а

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin x^\beta & \text{при } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Найти все пары  $(\alpha, \beta)$ , для которых: а)  $f(x) \in \mathcal{R}([0, 1])$ ; б)  $f(x) \in \mathcal{R}((0_+, 1])$ ; в)  $f(x) \in L([0, 1])$ .

**11.10.** Пусть  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta < 0$ , а

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin x^\beta & \text{при } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Найти все пары  $(\alpha, \beta)$ , для которых: а)  $f(x) \in \mathcal{R}([0, 1])$ ; б)  $f(x) \in \mathcal{R}((0_+, 1])$ ; в)  $f(x) \in L([0, 1])$ .

**11.11.** Пусть  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , а  $f(x) = x^\alpha \sin x^\beta$  при  $x \in [1, \infty)$ . Найти все пары  $(\alpha, \beta)$ , для которых: а)  $f(x) \in \mathcal{R}([1, \infty))$ ; б)  $f(x) \in L([1, \infty))$ .

**11.12.** Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_{(0, \infty)} \frac{d\mu}{x^{\frac{1}{n}} (1 + \frac{x}{n})^n}.$$

**11.13.** Пусть  $\mathbb{Q}_{[0;1]} = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$  и задано  $\varepsilon > 0$ . Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon} \sqrt{|x - r_n|}}$$

сходится п.в. на  $[0, 1]$ .

**11.14.** Пусть  $x \in [0; 1] \setminus \mathbb{Q}_{[0;1]}$ . Доказать, что найдётся нумерация  $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$  множества  $\mathbb{Q}_{[0;1]}$ , при которой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon} \sqrt{|x - r_n|}}$$

разойдётся в точке  $x$  для любого  $\varepsilon > 0$ .

**11.15.** Пусть  $(X, M, \mu)$  — пространство с мерой,  $A \in M$ ,  $0 < \mu(A) = \alpha < \infty$ , дана функция  $f(x) \in L(A)$ ,  $f(x) > 0$  на  $A$ , и число  $\beta \in (0, \alpha)$ . Доказать, что

$$\inf_{B \in M, B \subseteq A: \mu(B) \geq \beta} \int_B f(x) d\mu > 0.$$

**11.16.** Построить пример такой положительной функции  $f(x) \in L((1, \infty))$ , что для любого  $\varepsilon > 0$  существует измеримое множество  $B = B_{\varepsilon} \subset (1, \infty)$ , для которого  $\mu(B) = \infty$ , но

$$\int_B f(x) d\mu < \varepsilon.$$

**11.17.** Построить такие конечные неотрицательные функции  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  и  $f(x)$ , измеримые относительно классической меры Лебега  $\mu$  на  $(0, 1)$ , что  $f(x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  на  $(0, 1)$ ,

$$\int_{(0,1)} f_n(x) d\mu \leq C$$

для некоторого  $C$  при всех  $n$ , но  $f(x) \notin L((0, 1))$ .

**11.18.** Пусть  $D(x)$  — функция Дирихле на  $[0, 1]$  (см. решение задачи 4.24). Доказать, что  $D(x) \in L((0, 1)) \setminus \mathcal{R}([0, 1])$ .

**11.19.** Построить функцию  $f(x) \in \mathcal{R}([0, 1])$ , множество точек разрыва которой всюду плотно на  $[0, 1]$ .

**11.20.** Пусть  $A$  — замкнутое нигде не плотное множество в  $[0, 1]$  и  $\mu(A) = 0$  ( $\mu$  — классическая мера Лебега). Доказать, что  $\chi_A(x) \in \mathcal{R}([0, 1])$ .

**11.21.** Построить такое замкнутое нигде не плотное множество  $A$  на  $[0, 1]$ , что  $\chi_A(x) \notin \mathcal{R}([0, 1])$ .

**11.22.** Построить такое нигде не плотное множество  $A$  на  $[0, 1]$ , что  $\mu(A) = 0$ , но  $\chi_A(x) \notin \mathcal{R}([0, 1])$ .

**11.23.** Пусть  $P_0$  — замкнутое канторово множество на  $[0, 1]$ , а

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in P_0, \\ x, & \text{если } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \setminus P_0, \\ x^2, & \text{если } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \setminus P_0. \end{cases}$$

Найти

$$(L) \int_{(0,1)} f(x) d\mu.$$

**11.24.** Пусть  $P_0$  — канторово замкнутое множество на  $[0, 1]$ ,

$$G = [0, 1] \setminus P_0 = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n).$$

Определим функции  $f_n$ :  $f_n(x) = 0$  при  $x \in [0, 1] \setminus (a_n, b_n)$ ,  $f_n\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) = 1$  и  $f_n(x)$  непрерывна и линейна на отрезках  $\left[a_n, \frac{a_n + b_n}{2}\right]$  и  $\left[\frac{a_n + b_n}{2}, b_n\right]$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Положим

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Найти

$$(L) \int_{(0,1)} f(x) d\mu.$$

**11.25.** Пусть  $P_0$  — канторово замкнутое множество на  $[0, 1]$ ,

$$G = [0, 1] \setminus P_0 = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n).$$

Определим функции  $f_n$ :  $f_n(x) = 0$  при  $x \in [0, 1] \setminus (a_n, b_n)$ ,  $f_n\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) = \frac{b_n - a_n}{2}$  и  $f_n(x)$  непрерывна и линейна на отрезках

$\left[a_n, \frac{a_n + b_n}{2}\right]$  и  $\left[\frac{a_n + b_n}{2}, b_n\right]$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Положим

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Найти

$$(L) \int_{(0,1)} f(x) d\mu.$$

**11.26.** Пусть

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x, y) \in (0, 1)^2 \text{ и } xy \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } (x, y) \in (0, 1)^2 \text{ и } xy \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Найти

$$(L) \int_{(0,1)^2} f(x) d\mu,$$

где  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $(0, 1)^2$ .

**11.27.** Пусть

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i 2^{-i}$$

— двоичное разложение числа  $x \in [0, 1)$ , где  $x_i \in \{0, 1\}$  и  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i \neq 1$ . Положим  $f_k(x) = 2x_k - 1$  при  $k \in \mathbb{N}$  и  $x \in (0, 1)$ . Доказать, что

$$(L) \int_{(0,1)} f_k(x) f_j(x) d\mu = 0$$

при  $k \neq j$  и

$$(L) \int_{(0,1)} f_k^2(x) d\mu = 1$$

при каждом  $k$ , где  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $(0, 1)$ .

**11.28.** Пусть

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i 2^{-i}$$

— двоичное разложение числа  $x \in [0, 1)$ , где все  $x_i \in \{0, 1\}$  и  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i \neq 1$ . Пусть  $g_k(x) = x_k$  для  $k \in \mathbb{N}$  и  $x \in (0, 1)$ . Найти

$$(L) \int_{(0,1)} g_k(x) g_j(x) d\mu$$

при всех  $k$  и  $j$ .

**11.29.** Построить последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  конечных функций из  $L((0, 1))$  и конечную измеримую по Лебегу функцию  $f(x)$  на  $(0, 1)$ , для которых  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  для любого  $x \in (0, 1)$ ,

$$\int_{(0,1)} f_n(x) d\mu = 0,$$

при всех  $n$ , но  $f(x) \notin L((0, 1))$ .

**11.30.** Построить такие функции  $f(x), g(x) \in \mathcal{R}((0_+, 1])$ , что

$$h(x) = \max(f(x), g(x)) \notin \mathcal{R}((0_+, 1]).$$

**11.31.** Построить такую функцию  $f(x)$  на  $[0, 1]$ , что  $f'(x)$  существует всюду на  $[0, 1]$  (в точках 0 и 1 существуют односторонние производные),  $f'(x)$  ограничена на  $[0, 1]$ , но  $f'(x) \notin \mathcal{R}([0, 1])$ .

## РЕШЕНИЯ

**11.1.** Для каждого  $r \in \mathbb{N}$  мы определим точки  $x(k) = a + \frac{k}{2^r}(b - a)$ , где  $k = 0, 1, \dots, 2^r$ . Обозначим

$$\Delta(k) = [x(k-1), x(k)] \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \dots, 2^r - 1$$

и  $\Delta(2^r) = [x(2^r - 1), x(2^r)]$ . Пусть также

$$m_{r,k} = \inf_{x \in \Delta(k)} f(x) \quad \text{и} \quad M_{r,k} = \sup_{x \in \Delta(k)} f(x)$$

при  $r \geq 1$  и  $1 \leq k \leq 2^r$ . Теперь при  $r \in \mathbb{N}$  рассмотрим функции

$$\overline{f_r}(x) = \sum_{k=1}^{2^r} M_{r,k} \chi_{\Delta(k)}(x)$$

и

$$\underline{f_r}(x) = \sum_{k=1}^{2^r} m_{r,k} \chi_{\Delta(k)}(x).$$

Заметим, что функции  $\overline{f_r}(x)$  и  $\underline{f_r}(x)$  — простые на  $[a, b]$  при каждом  $r$  и, согласно определению интеграла Римана,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} (L) \int_{[a,b]} \overline{f_r}(x) d\mu &= \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^r} M_{r,k} \frac{b-a}{2^r} = J = \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^r} m_{r,k} \frac{b-a}{2^r} = \lim_{r \rightarrow \infty} (L) \int_{[a,b]} \underline{f_r}(x) d\mu. \end{aligned}$$

Далее, для любого  $x \in [a, b]$  выполнены неравенства  $\bar{f}_r(x) \geq f(x) \geq \underline{f}_r(x)$ , последовательность  $\{\bar{f}_r(x)\}_{r=1}^{\infty}$  невозрастающая, а последовательность  $\{\underline{f}_r(x)\}_{r=1}^{\infty}$  неубывающая. Следовательно, для любого  $x \in [a, b]$  существуют их пределы:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \bar{f}_r(x) = \bar{f}(x) \geq f(x) \geq \underline{f}(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} \underline{f}_r(x).$$

Применяя теорему Леви (см. задачу 10.33) получаем, что

$$(L) \int_{[a,b]} \bar{f}(x) d\mu = J = (L) \int_{[a,b]} \underline{f}(x) d\mu.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{[a,b]} |\bar{f}(x) - \underline{f}(x)| d\mu = \int_{[a,b]} (\bar{f}(x) - \underline{f}(x)) d\mu = 0.$$

Поэтому (см. задачу 10.52)  $\bar{f}(x) = \underline{f}(x)$  п.в. на  $[a, b]$ . Это означает, что  $\bar{f}(x) = f(x) = \underline{f}(x)$  п.в. на  $[a, b]$  — измеримые функции и

$$(L) \int_{[a,b]} f(x) d\mu = J.$$

□

**11.2.** Доказательство аналогично одномерному случаю (задача 11.1). Приведём его.

Пусть  $[a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ . Для каждого  $r = 1, 2, \dots$  и  $s = 1, 2, \dots, n$  определим точки  $x_s(k) = a_s + \frac{k}{2^r} (b_s - a_s)$  при  $k = 0, 1, \dots, 2^r$ . Обозначим

$$\Delta_s(k) = [x_s(k-1), x_s(k)] \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \dots, 2^r - 1$$

и  $\Delta_s(2^r) = [x_s(2^r-1), x_s(2^r)]$ . Пусть

$$E_k = \Delta_1(k_1) \times \Delta_2(k_2) \times \dots \times \Delta_n(k_n),$$

$$m_{r,k} = \inf_{x \in E_k} f(x) \quad \text{и} \quad M_{r,k} = \sup_{x \in E_k} f(x)$$

при  $r \geq 1$  и  $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ , где  $1 \leq k_s \leq 2^r$  и  $s = 1, 2, \dots, n$ . Теперь при  $r \in \mathbb{N}$  рассмотрим функции

$$\bar{f}_r(x) = \sum_{k_1=1}^{2^r} \dots \sum_{k_n=1}^{2^r} M_{r,k} \chi_{E_k}(x)$$

и

$$\underline{f}_r(x) = \sum_{k_1=1}^{2^r} \dots \sum_{k_n=1}^{2^r} m_{r,k} \chi_{E_k}(x).$$

Заметим, что функции  $\bar{f}_r(x)$  и  $\underline{f}_r(x)$  простые на  $[a, b]$  при каждом  $r$  и, согласно определению интеграла Римана,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} (L) \int_{[a,b]} \bar{f}_r(x) d\mu &= \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{k_1=1}^{2^r} \dots \sum_{k_n=1}^{2^r} M_{r,k} \prod_{s=1}^n \frac{b_s - a_s}{2^r} = J = \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{k_1=1}^{2^r} \dots \sum_{k_n=1}^{2^r} m_{r,k} \prod_{s=1}^n \frac{b_s - a_s}{2^r} = \lim_{r \rightarrow \infty} (L) \int_{[a,b]} \underline{f}_r(x) d\mu. \end{aligned}$$

Далее, при любом  $x \in [a, b]$  выполнены оценки  $\bar{f}_r(x) \geq f(x) \geq \underline{f}_r(x)$ , последовательность  $\{\bar{f}_r(x)\}_{r=1}^{\infty}$  невозрастающая, а последовательность  $\{\underline{f}_r(x)\}_{r=1}^{\infty}$  неубывающая. Следовательно, при каждом  $x \in [a, b]$  существуют их пределы:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \bar{f}_r(x) = \bar{f}(x) \geq f(x) \geq \underline{f}(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} \underline{f}_r(x).$$

По теореме Леви (см. задачу 10.33) имеем

$$(L) \int_{[a,b]} \bar{f}(x) d\mu = J = (L) \int_{[a,b]} \underline{f}(x) d\mu.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{[a,b]} |\bar{f}(x) - \underline{f}(x)| d\mu = \int_{[a,b]} (\bar{f}(x) - \underline{f}(x)) d\mu = 0.$$

Поэтому (см. задачу 10.52)  $\bar{f}(x) = \underline{f}(x)$  п.в. на  $[a, b]$ . Это означает, что  $\bar{f}(x) = f(x) = \underline{f}(x)$  п.в. на  $[a, b]$  и

$$(L) \int_{[a,b]} f(x) d\mu = J.$$

□

**11.3.** Пусть  $\{\bar{f}_r(x)\}_{r=1}^{\infty}$ ,  $\{\underline{f}_r(x)\}_{r=1}^{\infty}$ ,  $\bar{f}(x)$  и  $\underline{f}(x)$  — функции, определённые в решении задачи 11.2. Заметим, что если  $x \in [a, b]$  и

$$x_s \notin \left\{ a_s + \frac{k}{2^r} (b_s - a_s) \right\}_{r=1, k=0}^{\infty, 2^r} \quad \text{при } s = 1, 2, \dots, n,$$

то  $f(x)$  непрерывна в точке  $x$  тогда и только тогда, когда  $\bar{f}(x) = \underline{f}(x)$ . Но если  $f(x) \in \mathcal{R}([a, b])$ , то (см. решение задачи 11.2)  $\bar{f}(x) = \underline{f}(x)$  п.в. на  $[a, b]$ . Отсюда следует, что  $f(x)$  непрерывна п.в. на  $[a, b]$ . Далее, если  $f(x)$  неограничена на  $[a, b]$ , то для любого разбиения  $T$  отрезка  $[a, b]$  хотя бы одна из сумм Дарбу,  $\bar{S}(f; T)$  или  $\underline{S}(f; T)$ , бесконечна. Таким образом, если  $f(x) \in \mathcal{R}([a, b])$ , то  $f(x)$  ограничена на  $[a, b]$ .

Пусть теперь  $f(x)$  — ограниченная вещественномнозначная функция, непрерывная п.в. на  $[a, b]$ . Предположим, что  $f(x) \notin \mathcal{R}([a, b])$ . Тогда существует  $\varepsilon_0 > 0$  и последовательность разбиений  $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$  отрезка  $[a, b]$ , для которых  $\lambda(T_i) \rightarrow 0$  при  $i \rightarrow \infty$ , но  $\bar{S}(f; T_i) - \underline{S}(f; T_i) \geq \varepsilon_0$  для всех  $i$ . Пусть  $T_i = \{\Delta(i, k)\}_{k=1}^{k(i)}$ , где

$$[a, b] = \bigcup_{k=1}^{k(i)} \Delta(i, k),$$

при  $i \in \mathbb{N}$ ,

$$m_{i,k} = \inf_{x \in \Delta(i,k)} f(x) \quad \text{и} \quad M_{i,k} = \sup_{x \in \Delta(i,k)} f(x)$$

при  $i \geq 1$  и  $1 \leq k \leq k(i)$ . Пусть также  $B_i$  — множество всех граничных точек прямоугольников  $\{\Delta(i, k)\}_{k=1}^{k(i)}$  и

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Обозначим

$$f_i^*(x) = \sum_{k=1}^{k(i)} M_{i,k} \chi_{\Delta(i,k)}(x) \quad \text{и} \quad f_{*,i}(x) = \sum_{k=1}^{2^r} m_{i,k} \chi_{\Delta(i,k)}(x)$$

для каждого  $i$ . Мы получаем, что

$$\int_{[a,b]} f_i^*(x) d\mu = \bar{S}(f; T) \quad \text{и} \quad \int_{[a,b]} f_{*,i}(x) d\mu = \underline{S}(f; T)$$

при  $i \in \mathbb{N}$ . Пусть теперь

$$f^*(x) = \limsup_{t \rightarrow x} f(t) \quad \text{и} \quad f_*(x) = \liminf_{t \rightarrow x} f(t).$$

Ясно, что  $f_*(x) = f(x) = f^*(x)$  в каждой точке непрерывности  $f(x)$ . Далее, для любого  $x \in [a, b] \setminus B$  выполнены условия  $f_i^*(x) \rightarrow f^*(x)$  и  $f_{*,i}(x) \rightarrow f_*(x)$  при  $i \rightarrow \infty$ . При этом  $|f_i^*(x)| \leq \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| = C$  и,

аналогично,  $|f_{*,i}(x)| \leq C$  для каждого  $i$  при всех  $x \in [a, b]$ . Применяя теорему Лебега (см. задачу 10.37), получаем, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} f_i^*(x) d\mu = \int_{[a,b]} f^*(x) d\mu = \int_{[a,b]} f_*(x) d\mu = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} f_{*,i}(x) d\mu.$$

Следовательно,  $\bar{S}(f; T) - \underline{S}(f; T) \rightarrow 0$  при  $i \rightarrow \infty$ , и мы пришли к противоречию. Это означает, что  $f(x) \in \mathcal{R}([a, b])$ .  $\square$

**11.4.** Пусть вначале  $a$  конечно. Возьмём  $A_n = \left[a + \frac{1}{n}, b\right]$  при  $n \geq n_0 > \frac{1}{b-a}$ . Определим функции  $f_n(x) = f(x)\chi_{A_n}(x)$  для  $n = n_0, n_0 + 1, \dots$ . Так как  $f(x) \geq 0$ , то  $f_n(x) \uparrow f(x)$  на  $(a, b)$ . Далее, в силу результата задачи 11.1 функция  $f_n(x)$  из  $L((a, b))$  при каждом  $n$  и

$$(L) \int_{(a,b)} f_n(x) d\mu = (L) \int_{A_n} f(x) d\mu = (\mathcal{R}) \int_{a+\frac{1}{n}}^b f(x) dx \leq (\mathcal{R}) \int_{a+}^b f(x) dx = J.$$

Тогда по теореме Леви (см. задачу 10.32)

$$(L) \int_{(a,b)} f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_{(a,b)} f_n(x) d\mu = J.$$

Если  $a = -\infty$ , то возьмём  $A_n = [-n, b]$  при  $n \geq n_0 > |b|$ , и далее доказательство аналогично.  $\square$

**11.5.** Пусть

$$A_n = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], \quad B_n = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)\right)$$

и

$$C_n = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right), \frac{1}{n}\right)$$

при  $n \in \mathbb{N}$ . Определим

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) (\chi_{C_k}(x) - \chi_{B_k}(x)).$$

Тогда (см. решение задачи 10.44)  $f(x) \notin L((0, 1))$ . Пусть теперь  $y \in (0, 1)$ . Существует такое натуральное  $n \geq 1$ , что  $\frac{1}{n+1} \leq y < \frac{1}{n}$ . Имеем

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{R}) \left| \int_y^1 f(x) dx \right| &= \left| (L) \int_{(y,1)} f(x) d\mu \right| = \left| \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)} f(x) d\mu + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{(y, \frac{1}{n})} f(x) d\mu \right| = \left| \int_{(y, \frac{1}{n})} f(x) d\mu \right| \leqslant (n+1) \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{n},
 \end{aligned}$$

поэтому существует

$$(\mathcal{R}) \int_{0_+}^1 f(x) dx = 0.$$

□

**11.6.** Будем считать, что  $a$  конечно; при  $a = -\infty$  доказательство практически не изменяется (ср. с решением задачи 11.4). Если функция  $|f| \in \mathcal{R}([a', b])$  при всех  $a' > a$ , то она измерима (см. решение задачи 11.1) на каждом  $[a', b]$ , а значит и на  $(a, b]$ .

Пусть  $|f| \in \mathcal{R}((a_+, b])$ . Тогда в силу результата задач 11.4 и 10.24 функция  $f$  интегрируема по Лебегу на  $(a, b)$ . Пусть, напротив,  $f \in L((a, b))$ . Положим формально  $a_0 = b$ . Тогда для любой последовательности  $a_n \downarrow a$ , используя результаты задач 11.1 и 10.42, получим, что

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{R}) \int_{a_n}^b f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_{[a_n, b]} f(x) d\mu = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (L) \int_{[a_k, a_{k-1}]} f(x) d\mu = (L) \int_{(a, b]} f(x) d\mu.
 \end{aligned}$$

Таким образом, существует несобственный интеграл Римана от  $f(x)$  и он равен интегралу Лебега. Но так как эти же рассуждения применимы к функции  $|f(x)|$ , то существует несобственный интеграл Римана и от неё. □

**11.7. а)** Так как  $f(x) \in C((0, 1])$ , то в силу результата задачи 11.3 функция  $f(x)$  интегрируема по Риману на  $[0, 1]$  тогда и только тогда, когда  $\alpha \geqslant 0$ .

б) При каждом  $b \in (0, 1)$  имеем

$$(\mathcal{R}) \int_b^1 f(x) dx = \begin{cases} \frac{1 - b^{\alpha+1}}{1 + \alpha}, & \text{если } \alpha \neq -1, \\ -\ln b, & \text{если } \alpha = -1. \end{cases}$$

Следовательно,  $f(x) \in \mathcal{R}((0_+, 1])$  тогда и только тогда, когда  $\alpha > -1$ , так как лишь в этом случае существует конечный предел вычисленных интегралов.

в) Так как функция неотрицательна и непрерывна на  $(0, 1]$ , то в силу результата задачи 11.6 ответ тот же, что и в п. (б).

**11.8.** а) При любом  $b > 1$  получаем

$$(\mathcal{R}) \int_1^b f(x) dx = \begin{cases} \frac{b^{\alpha+1} - 1}{\alpha + 1}, & \text{если } \alpha \neq -1, \\ \ln b, & \text{если } \alpha = -1. \end{cases}$$

Следовательно,  $f(x) \in \mathcal{R}((1, \infty))$  тогда и только тогда, когда  $\alpha < -1$ , так как лишь в этом случае существует конечный предел вычисленных интегралов.

б) Так как при любом  $\alpha$  функция неотрицательна и непрерывна всюду, кроме точки 0, то в силу результата задачи 11.6 ответ тот же, что и в п. (а).

**11.9.** Заметим, что  $\frac{2}{\pi} x^{\alpha+\beta} \leq f(x) \leq x^{\alpha+\beta}$  при  $x \in (0, 1)$ . Поэтому:

а) по критерию Лебега (задача 11.3)  $f(x) \in \mathcal{R}([0, 1])$  тогда и только тогда, когда  $\alpha + \beta \geq 0$ ;

б) в силу результата задачи 11.7 (б) и указанного выше неравенства  $f(x) \in \mathcal{R}((0_+, 1])$  тогда и только тогда, когда  $\alpha + \beta > -1$ .

в) так как  $f(x) \geq 0$  при  $0 \leq x \leq (\pi/2)^{1/\beta}$  и непрерывна при  $x > 0$ , то в силу результата задачи 11.6 ответ такой же, как в п. (б).

**11.10.** а) Функция  $f(x)$  непрерывна на  $(0, 1]$  при всех  $\alpha$  и  $\beta$ , а ограничена на  $(0, 1]$  тогда и только тогда, когда  $\alpha \geq 0$ . Поэтому (см. задачу 11.3)  $f(x) \in \mathcal{R}([0, 1])$  тогда и только тогда, когда  $\alpha \geq 0$ , независимо от  $\beta$ .

б) Пусть  $a \in (0, 1)$  и  $U = a^\beta$ . Тогда

$$J(a) \equiv (\mathcal{R}) \int_a^1 f(x) dx = \int_a^1 x^\alpha \sin x^\beta dx = -\frac{1}{\beta} \int_1^U t^{\frac{\alpha-\beta+1}{\beta}} \sin t dt.$$

Из признака Дирихле сходимости несобственного интеграла следует, что если  $\frac{\alpha-\beta+1}{\beta} < 0$ , т. е. если  $\alpha - \beta > -1$ , то существует конечный предел  $\lim_{a \rightarrow 0^+} J(a)$ . С другой стороны, если  $\delta = \frac{\alpha-\beta+1}{\beta} \geq 0$ , то для

любого натурального  $n$  имеем

$$\left| (\mathcal{R}) \int_{(2\pi n + \pi)^{\frac{1}{\beta}}}^{(2\pi n)^{\frac{1}{\beta}}} f(x) dx \right| \geq -\frac{1}{\beta} \int_{2\pi n}^{2\pi n + \pi} t^\delta \sin t dt \geq -\frac{2}{\beta} \not\rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно,  $f(x) \in \mathcal{R}((0_+, 1])$  тогда и только тогда, когда  $\alpha - \beta > -1$ .

в) Заметим, что (см. задачу 11.7 (б), (в)) если  $\alpha > -1$ , то  $|f(x)| \leq x^\alpha \in L((0, 1))$ , поэтому  $f(x) \in L((0, 1))$ . Пусть  $\alpha \leq -1$ . Если предположить, что  $f(x) \in L((0, 1))$ , то  $\frac{|\sin x^\beta|}{x} \leq |f(x)| \in L((0, 1))$ . Следовательно, для любого  $a \in (0, 1)$  при  $U = a^\beta$  имеем

$$C \equiv (L) \int_{(0,1)} |f(x)| d\mu \geq (\mathcal{R}) \int_a^1 \frac{|\sin x^\beta|}{x} dx = -\frac{1}{\beta} \int_1^U \frac{|\sin t|}{t} dt \rightarrow \infty$$

при  $a \rightarrow 0_+$ . Полученное противоречие показывает, что  $f(x) \in L((0, 1))$  тогда и только тогда, когда  $\alpha > -1$ , независимо от  $\beta$ .  $\square$

**11.11.** а) Заметим, что  $x^\alpha \sin x^\beta \in \mathcal{R}([1, \infty))$  тогда и только тогда, когда  $x^{-2-\alpha} \sin x^{-\beta} \in \mathcal{R}((0_+, 1])$ . Действительно,

$$\int_1^a x^\alpha \sin(x^\beta) dx = \int_{1/a}^1 y^{-2-\alpha} \sin(y^{-\beta}) dy.$$

Применяя результаты задач 11.9 (б) и 11.10 (б), получаем, что

$$f(x) \in \mathcal{R}([1, \infty)) \iff \begin{cases} \alpha + \beta < -1, & \text{если } \beta \leq 0, \\ \beta - \alpha > 1, & \text{если } \beta > 0. \end{cases}$$

б) Если  $\beta \leq 0$ , то подынтегральная функция неотрицательна при  $x > (\pi/2)^{1/\beta}$ . Поэтому несобственный интеграл Римана не может сходиться условно, и в силу результата задачи 11.6 ответ тот же, что и в п. (а), т. е.  $\alpha + \beta < -1$ .

Если же  $\beta > 0$ , то в силу результата задачи 11.6 функция  $x^\alpha \sin x^\beta$  интегрируема по Лебегу на  $[1, \infty)$  тогда и только тогда, когда  $x^{-2-\alpha} |\sin x^{-\beta}| \in \mathcal{R}((0_+, 1])$ . Как показано в решении задачи 11.10 (в), это имеет место при  $-2 - \alpha > -1$ , т. е. при  $\alpha < -1$ .

**11.12.** Пусть

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{если } x \in (0, 1), \\ \frac{1}{1+x+\frac{x^2}{4}}, & \text{если } x \in [1, \infty). \end{cases}$$

Тогда в силу результатов задач 11.7 (в) и 11.8 (б) выполнено условие  $F(x) \in L((0, \infty))$ . Обозначим  $f_n(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{n}} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}$  при  $n = 2, 3, \dots$

Заметим, что  $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}} = F(x)$  для любого  $n \geq 2$  и любого  $x \in (0, 1)$  и что

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{1+x+\left(\frac{x}{n}\right)^2 \frac{n(n-1)}{2}} \leq \frac{1}{1+x+\frac{x^2}{4}} = F(x)$$

для любого  $n \geq 2$  и для любого  $x \in [1, \infty)$ . Заметим также, что  $f_n(x) \rightarrow e^{-x}$  при  $n \rightarrow \infty$  для любого  $x \in (0, \infty)$ . Применяя теорему Лебега (задача 10.37) и задачу 11.6, получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_{(0, \infty)} f_n(x) d\mu = (L) \int_{(0, \infty)} e^{-x} d\mu = (\mathcal{R}) \int_{0_+}^{\infty} e^{-x} dx = 1.$$

□

**11.13.** Пусть  $f_n(x) = \frac{1}{n^{1+\varepsilon} \sqrt{|x - r_n|}}$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Заметим, что, согласно задаче 11.6,

$$\int_{(0,1)} f_n(x) d\mu \leq \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \int_{(r_n-1, r_n+1)} \frac{d\mu}{\sqrt{|x - r_n|}} = \frac{2}{n^{1+\varepsilon}} \int_{0_+}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{4}{n^{1+\varepsilon}}$$

для каждого  $n$ . Поэтому если

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon} \sqrt{|x - r_n|}},$$

то по теореме Леви (задача 10.32)

$$\int_{(0,1)} f(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(0,1)} f_n(x) d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^{1+\varepsilon}} < \infty.$$

Следовательно,  $f(x) \in L((0, 1))$ , откуда следует, что  $f(x)$  конечна п.в. на  $(0, 1)$ . □

**11.14.** Выберем последовательность различных чисел  $y_k \in \mathbb{Q}_{[0;1]}$  так, чтобы  $|x - y_k| \leq 2^{-k}$ . Положим  $r_{2k} = y_k$ , а остальные точки из  $\mathbb{Q}_{[0;1]}$  занумеруем произвольным образом нечётными числами. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon} \sqrt{|x - r_n|}} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^{1+\varepsilon} \sqrt{|x - r_{2k}|}} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(2k)^{1+\varepsilon}} = +\infty.$$

□

**11.15.** Пусть  $A_n = \{x \in A : f(x) \in A : f(x) > \frac{1}{n}\}$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$  и

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Поэтому (см. задачу 7.51)  $\mu(A_n) \rightarrow \alpha < \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно, для некоторого  $n_0$  имеем  $\mu(A_{n_0}) > \alpha - \frac{\beta}{2}$ . Теперь для любого множества  $B \in M$ , вложенного в  $A$ , с  $\mu(B) \geq \beta$  имеем  $\mu(B \cap A_{n_0}) > \frac{\beta}{2}$ . Тогда

$$\int_B f(x) d\mu \geq \int_{B \cap A_{n_0}} f(x) d\mu \geq \frac{1}{n_0} \frac{\beta}{2}.$$

□

**11.16.** Пусть  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  при  $x \in (1, \infty)$  и  $B_\varepsilon = (\frac{2}{\varepsilon}, \infty)$  для некоторого  $\varepsilon \in (0, 2)$ . Тогда (см. задачу 11.8 б))  $f(x) \in L((1, \infty))$ , и  $\mu(B_\varepsilon) = \infty$ , но

$$\int_{B_\varepsilon} f(x) d\mu = (\mathcal{R}) \int_{2/\varepsilon}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

При  $\varepsilon \geq 2$  можно взять множество  $B_\varepsilon = (1, \infty)$ . □

**11.17.** Пусть  $g_{n,k}(x) = \chi_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]}(x)$  для  $n = 2, 3, \dots$  и  $k = 1, 2, \dots, n-1$ . Определим для  $m \geq 2$  функции  $h_m(x) = g_{n,k}(x)$ , где  $n$  и  $k$  находятся из условий  $m = 1 + 2 + \dots + n-2 + k$  и  $1 \leq k \leq n-1$ . Пусть теперь  $f_m(x) = h_m(x) \frac{1}{x}$  при  $x \in (0, 1)$ . Ясно, что

$$f(x) \equiv \limsup_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = \frac{1}{x} \notin L((0, 1)),$$

но (см. задачу 11.1)

$$\int_{(0,1)} f_m(x) d\mu = \int_{\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]} \frac{1}{x} d\mu = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{1}{x} dx = \ln \frac{k+1}{n} - \ln \frac{k}{n} = \ln \frac{k+1}{k} \leq \ln 2.$$

□

**11.18.** Заметим, что  $D(x)$  — простая функция на  $(0, 1)$ , поэтому  $D(x) \in L((0, 1))$  и

$$\int_{(0,1)} D(x) d\mu = 1 \cdot \mu(\mathbb{Q} \cap (0, 1)) = 0.$$

В то же время  $D(x)$  разрывна в каждой точке  $[0, 1]$ , поэтому в силу результата задачи 11.3  $D(x) \notin \mathcal{R}([0, 1])$ . □

**11.19.** Примером такой функции является функция Римана, разрывная на множестве  $\mathbb{Q}_{[0,1]}$  и непрерывная в остальных точках отрезка  $[0, 1]$  (см. решение задачи 4.3). □

**11.20.** Ясно, что  $0 \leq \chi_A(x) \leq 1$ . Если  $G = [0, 1] \setminus A$ , то  $\mu(G) = 1$ . При этом  $\chi_A(x)$  непрерывна в каждой точке  $x \in G$ , так как  $G$  открыто. По критерию Лебега (см. задачу 11.3)  $\chi_A(x) \in \mathcal{R}((0, 1])$ . □

**11.21.** Пусть  $A$  — множество канторовского типа из  $[0, 1]$  с  $\mu(A) > 0$  (см. задачу 7.69). Тогда  $\chi_A(x)$  разрывна в каждой точке  $x \in A$ , и по критерию Лебега  $\chi_A(x) \notin \mathcal{R}([0, 1])$ . □

**11.22.** Пусть  $F$  — множество канторовского типа в  $[0, 1]$  с  $\mu(F) > 0$  (см. задачу 7.69). Найдём счётное множество  $A \subset F$ , плотное в  $F$ . Тогда  $\mu(A) = 0$ , множество  $A$  нигде не плотно на отрезке, но  $\chi_A(x)$  разрывна в каждой точке  $x \in F$ , поэтому (см. задачу 11.3)  $\chi_A(x) \notin \mathcal{R}([0, 1])$ . □

**11.23.** Заметим вначале, что так как  $\mu(P) = 0$ , то функция  $f(x)$  эквивалентна на  $(0, 1)$  функции  $g(x) = x\chi_{[0, \frac{1}{2}]}(x) + x^2\chi_{(\frac{1}{2}, 1]}(x)$ . Поэтому

$$(L) \int_{(0,1)} f(x) d\mu = (L) \int_{(0,1)} g(x) d\mu = \\ = (\mathcal{R}) \int_0^{1/2} x dx + (\mathcal{R}) \int_{1/2}^1 x^2 dx = \frac{1}{8} + \frac{7}{24} = \frac{5}{12}.$$

□

**11.24.** Имеем

$$(L) \int_{(0,1)} f(x) d\mu = \int_{P_0} f(x) d\mu + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x) d\mu = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{\mu(G)}{2} = \frac{1}{2}.$$

□

**11.25.** Имеем

$$(L) \int_{(0,1)} f(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x) d\mu + \int_{P_0} f(x) d\mu = \\ = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b_n - a_n)^2}{4} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{2^{k-1}} 3^{-2k} = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^k = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{28}.$$

□

**11.26.** Пусть  $\mathbb{Q} = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Обозначим  $A_n = \{(x, y) \in (0, 1)^2 : xy = r_n\}$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Ясно, что для любого  $\varepsilon > 0$  можно покрыть  $A_n$  конечным набором прямоугольников, сумма мер которых меньше  $\varepsilon$ . Поэтому  $\mu(A_n) = 0$  при каждом  $n$ . Если теперь

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

то  $\mu(A) = 0$ . Таким образом,  $f(x)$  эквивалентна на  $(0, 1)^2$  функции  $g(x) \equiv 0$ . Поэтому  $f(x) \in L((0, 1)^2)$  и

$$\int_{(0,1)^2} f(x) d\mu = 0.$$

□

**11.27.** Так как  $f_k^2(x) \equiv 1$  на  $(0, 1)$  для каждого  $k$ , то второе равенство очевидно. Пусть  $k < j$ . Обозначим  $A_r^+ = \{x \in (0, 1) : f_r(x) = 1\}$  и  $A_r^- = \{x \in (0, 1) : f_r(x) = -1\}$  для  $r = k, j$ . Пусть также  $A_{k,j}^+ = \{x \in (0, 1) : f_k(x)f_j(x) = 1\}$  и  $A_{k,j}^- = \{x \in (0, 1) : f_k(x)f_j(x) = -1\}$ . Ясно, что  $\mu(A_r^+) = \mu(A_r^-) = \frac{1}{2}$  при  $r = k, j$  и что

$$\mu(A_{k,j}^+ \cap A_k^+) = \frac{1}{2} \mu(A_k^+) = \frac{1}{4}.$$

Аналогично,  $\mu(A_{k,j}^+ \cap A_k^-) = \frac{1}{4}$ . Откуда следует, что  $\mu(A_{k,j}^+) = \frac{1}{2}$ . Аналогично показывается, что  $\mu(A_{k,j}^-) = \frac{1}{2}$ . Поэтому

$$\int_{(0,1)} f_k(x)f_j(x) d\mu = \mu(A_{k,j}^+) - \mu(A_{k,j}^-) = 0.$$

□

**11.28.** Так как (см. задачу 11.27)  $g_k(x) = \frac{1}{2}(f_k(x) + 1)$  при каждом  $k$ , то

$$(L) \int_{(0,1)} g_k(x)g_j(x) d\mu = \frac{1}{4} \left( \int_{(0,1)} f_k(x)f_j(x) d\mu + \int_{(0,1)} f_k(x) d\mu + \right. \\ \left. + \int_{(0,1)} f_j(x) d\mu + 1 \right) = \frac{1}{4} \left( \int_{(0,1)} f_k(x)f_j(x) d\mu + 1 \right) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } k = j, \\ \frac{1}{4}, & \text{если } k \neq j. \end{cases}$$

□

**11.29.** Пусть  $f(x) = \frac{1}{x}$  на  $(0, 1/2)$ ,  $f(x) = f(1-x) = \frac{1}{1-x}$  на  $(1/2, 1)$  и  $f(1/2) = f(0) = f(1) = 0$ . Из задачи 10.12 следует, что  $f \notin L((0, 1))$ . Положим  $f_n(x) = f(x)\chi_{(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n})}(x)$ , где  $n = 3, 4, \dots$ . Тогда  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  для каждого  $x \in (0, 1)$ , но из соображений симметрии

$$\int_{(0,1)} f_n(x) d\mu = 0$$

при всех  $n$ . □

**11.30.** Пусть  $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$  при  $x \in (0, 1]$ . Тогда (см. задачу 11.10 (б))  $f(x) \in \mathcal{R}((0_+, 1])$ , но (см. задачи 11.6 и 11.10 (в))  $|f(x)| \notin \mathcal{R}((0_+, 1])$ . Пусть также  $g(x) = -f(x) \in \mathcal{R}((0_+, 1])$ . Тогда  $h(x) = |f(x)| \notin \mathcal{R}((0_+, 1])$ . □

**11.31.** Пусть  $F$  — замкнутое множество канторовского типа на  $[0, 1]$  с  $\mu(F) > 0$  и

$$G = [0, 1] \setminus F = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n).$$

Пусть также

$$f_n(x) = (x - a_n)^2(x - b_n)^2 \sin \frac{1}{(b_n - a_n)(x - a_n)(x - b_n)} \chi_{(a_n, b_n)}(x).$$

Тогда  $f'_n(x)$  существует всюду на  $[0, 1]$ ,  $f'_n(x) = 0$  при  $x \in [0, 1] \setminus (a_n, b_n)$  и

$$f'_n(x) = 2(x - a_n)(x - b_n)(2x - a_n - b_n) \sin \frac{1}{(b_n - a_n)(x - a_n)(x - b_n)} - \\ - \frac{2x - a_n - b_n}{b_n - a_n} \cos \frac{1}{(b_n - a_n)(x - a_n)(x - b_n)}$$

при  $x \in (a_n, b_n)$ . Поэтому  $|f'_n(x)| \leq 2(b_n - a_n)^3 + 2 \leq 4$  и  $\sup_{[0,1]} |f'_n(x)| = C \leq 4$ . Пусть теперь

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Если  $x \in G$ , то  $x \in (a_n, b_n)$  для некоторого  $n$ , и, следовательно, существует  $f'(x) = f'_n(x) \in [-4, 4]$ . Пусть  $x \in F$ . Тогда  $f(x) = 0$ . Пусть для некоторого  $h \neq 0$  выполнено  $f(x+h) \neq 0$ . Без ограничения общности можно предположить, что  $h > 0$ . Далее,  $x+h \in (a_n, b_n)$  для некоторого  $n$  и  $h > x+h-a_n$ . Тогда

$$|f(x+h) - f(x)| = |f_n(x+h)| \leq (x+h-a_n)^2 \leq h^2.$$

Поэтому существует  $f'(x) = 0$ . Следовательно,  $f'(x)$  существует всюду на  $[0, 1]$ ,  $|f'(x)| \leq 4$  на  $[0, 1]$ . Но  $f'(x)$  разрывна в каждой точке  $F$ , где  $\mu(F) > 0$ , поскольку в сколь угодно малой окрестности точки  $a_n$  или  $b_n$  производная принимает значения, близкие к 1 и к -1. Поэтому  $f'(x) \notin \mathcal{R}([0, 1])$ .  $\square$

## Г л а в а 12

### ТЕОРЕМА ФУБИНИ

Мы напомним, что, как доказано в задаче 5.43, если даны полуокольца  $S_1$  и  $S_2$ , то система множеств

$$S = S_1 \times S_2 = \{A_1 \times A_2 : A_1 \in S_1 \text{ и } A_2 \in S_2\}$$

также является полуокольцом.

Пусть  $(X_1, M_1, \mu_1)$  и  $(X_2, M_2, \mu_2)$  —  $\sigma$ -конечные измеримые пространства,  $X = X_1 \times X_2$ ,  $S = M_1 \times M_2$ . Определим на  $S$  функцию  $m = m_1 \cdot m_2$  формулой  $m(A_1 \times A_2) = m_1(A_1)m_2(A_2)$ , где  $A_j \in S_j$  при  $j = 1, 2$ . Ниже в задаче 12.1 будет доказано, что  $m$  — мера. Через  $\mu = \mu_1 \times \mu_2$  будем обозначать продолжение меры  $m$  по Лебегу (см. задачи 12.1 и 12.2) с полуокольцом  $S$ . Соответствующее измеримое пространство будет обозначаться через  $(X, M, \mu)$ .

Пусть  $A \subseteq X = X_1 \times X_2$ . Тогда для любого  $x \in X_1$  через  $A^2(x) \subseteq X_2$  будем обозначать его соответствующее *сечение*, т. е.

$$A^2(x) = \{y \in X_2 : (x, y) \in A\}.$$

Аналогично определяется сечение  $A^1(y) \subseteq X_1$  для  $y \in X_2$ .

Ниже мы будем обозначать через  $L((a, b))$ , где  $n \geq 1$  и  $(a, b) \subset \mathbb{R}^n$ , множество функций, интегрируемых по Лебегу относительно классической меры Лебега  $\mu$  на  $(a, b)$ .

#### ЗАДАЧИ

**12.1.** Пусть  $S_1$  и  $S_2$  — полуокольца,  $S = S_1 \times S_2$ , а  $m_1$  и  $m_2$  — меры на  $S_1$  и  $S_2$  соответственно. Доказать, что функция  $m = m_1 \cdot m_2$  является мерой на  $S$ .

**12.2.** Пусть в условиях задачи 12.1 меры  $m_1$  и  $m_2$   $\sigma$ -аддитивны на  $S_1$  и  $S_2$  соответственно. Доказать, что мера  $m$   $\sigma$ -аддитивна на  $S$ .

**12.3.** Пусть  $(X_1, M_1, \mu_1)$  и  $(X_2, M_2, \mu_2)$  —  $\sigma$ -конечные измеримые пространства с полными мерами  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , а мера  $\mu = \mu_1 \times \mu_2$  определена на  $\sigma$ -алгебре  $M$ . Пусть  $A \in M$  и  $\mu(A) < \infty$ . Доказать, что при

почти всех (относительно  $\mu_1$ )  $x \in X_1$  сечение  $A^2(x)$  принадлежит  $M_2$ , функция  $\mu_2(A^2(x))$  интегрируема по Лебегу на  $X_1$  и

$$\mu(A) = \int_{X_1} \mu_2(A^2(x)) d\mu_1.$$

**12.4. Теорема Фубини.** Пусть  $(X_1, M_1, \mu_1)$  и  $(X_2, M_2, \mu_2)$  —  $\sigma$ -конечные измеримые пространства с полными мерами  $\mu_1$  и  $\mu_2$ ,  $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ ,  $M$  — соответствующая  $\sigma$ -алгебра,  $A \in M$ , а  $f(x, y)$  — измеримая неотрицательная функция на  $A$ . Доказать, что функция  $f(x, y)$   $\mu_2$ -измерима для почти всех  $x \in X_1$  (относительно меры  $\mu_1$ ), функция

$$\Phi(x) = \int_{A^2(x)} f(x, y) d\mu_2$$

$\mu_1$ -измерима и

$$\int_A f(x, y) d\mu = \int_{X_1} \Phi(x) d\mu_1 = \int_{X_1} \int_{A^2(x)} f(x, y) d\mu_2 d\mu_1.$$

Аналогичное утверждение верно, если поменять ролями  $\mu_1$  и  $\mu_2$ .

**12.5. Теорема Фубини.** Пусть  $(X_1, M_1, \mu_1)$  и  $(X_2, M_2, \mu_2)$  —  $\sigma$ -конечные измеримые пространства с полными мерами  $\mu_1$  и  $\mu_2$ ,  $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ ,  $M$  — соответствующая  $\sigma$ -алгебра,  $A \in M$  и  $f(x, y) \in L(A, \mu)$ . Доказать, что  $f(x, y) \in L(A^2(x))$  для почти всех  $x \in X_1$  (относительно меры  $\mu_1$ ), причём

$$\Phi(x) = \int_{A^2(x)} f(x, y) d\mu_2 \in L(X_1),$$

и

$$\int_A f(x, y) d\mu = \int_{X_1} \Phi(x) d\mu_1 = \int_{X_1} \int_{A^2(x)} f(x, y) d\mu_2 d\mu_1.$$

Аналогичное утверждение верно, если поменять ролями  $\mu_1$  и  $\mu_2$ .

**12.6.** Построить такую функцию  $f(x, y) \notin L((0, 1)^2)$ , что  $f(x_0, y) \in L((0, 1))$  при каждом фиксированном  $x_0$  как функция от  $y$  и одновременно  $f(x, y_0) \in L((0, 1))$  при каждом фиксированном  $y_0$  как функция от  $x$ , причём при любых  $x_0$  и  $y_0$  верны равенства

$$\int_{(0,1)} f(x_0, y) d\mu(y) = \int_{(0,1)} f(x, y_0) d\mu(x) = 0.$$

**12.7.** Построить такую конечную измеримую на  $(0, 1)^2$  функцию  $f(x, y)$ , что

$$\int_{(0,1)} \left( \int_{(0,1)} f(x, y) d\mu(x) \right) d\mu(y) = 0$$

и

$$\int_{(0,1)} \left( \int_{(0,1)} f(x, y) d\mu(y) \right) d\mu(x) = 1.$$

**12.8.** Пусть  $a, b \in \mathbb{R}$  и  $a \neq b$ . Построить такую конечную измеримую на  $(0, 1)^2$  функцию  $f(x, y)$ , что

$$\int_{(0,1)} \left( \int_{(0,1)} f(x, y) d\mu(x) \right) d\mu(y) = a$$

и

$$\int_{(0,1)} \left( \int_{(0,1)} f(x, y) d\mu(y) \right) d\mu(x) = b.$$

**12.9.** Пусть  $f(x, y) = e^{-xy} \sin x \sin y$  на  $(0, \infty)^2$ . Доказать, что  $f(x, y) \in L((0, \infty)^2)$ .

**12.10.** Пусть  $(X_1, M_1, \mu_1)$  и  $(X_2, M_2, \mu_2)$  —  $\sigma$ -конечные измеримые пространства с полными мерами  $\mu_1$  и  $\mu_2$ ,  $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ ,  $f(x) \in L_{\mu_1}(X_1)$  и  $g(y) \in L_{\mu_2}(X_2)$ . Доказать, что  $f(x) \cdot g(y) \in L_{\mu}(X_1 \times X_2)$ .

**12.11.** Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  из  $L(\mathbb{R})$ . Доказать, что  $h(x, t) = f(t)g(x-t) \in L(\mathbb{R})$  для почти всех  $x \in \mathbb{R}^1$  и что *свёртка*  $f$  и  $g$  — функция

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) d\mu(t)$$

— принадлежит  $L(\mathbb{R})$ .

**12.12.** Пусть  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\mu_j$  — классическая мера Лебега на  $\mathbb{R}^j$  для  $j = 1, 2$ ,  $f(x) \in L(A)$  — конечная неотрицательная функция и

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A \text{ и } 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Доказать, что  $E$  — измеримое подмножество  $\mathbb{R}^2$  и

$$\mu_2(E) = \int_A f(x) d\mu_1.$$

**12.13.** Пусть  $(X_1, M_1, \mu_1)$  и  $(X_2, M_2, \mu_2)$  —  $\sigma$ -конечные измеримые пространства с полными мерами  $\mu_1$  и  $\mu_2$ ,  $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ ,  $M$  — соответ-

ствующая  $\sigma$ -алгебра. Доказать, что если множество  $A = A_1 \times A_2$  измеримо и имеет положительную меру, то множества  $A_1$  и  $A_2$  измеримы.

**12.14.** Пусть  $(X_1, M_1, \mu_1)$  и  $(X_2, M_2, \mu_2)$  —  $\sigma$ -конечные измеримые пространства с полными мерами  $\mu_1$  и  $\mu_2$ ,  $\mu = \mu_1 \times \mu_2$ ,  $M$  — соответствующая  $\sigma$ -алгебра, функция  $f$  измерима на  $X = X_1 \times X_2$  и существует повторный интеграл

$$I = \int_{X_1} \left( \int_{X_2} |f(x, y)| d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) < \infty.$$

Доказать, что  $f \in L(X, M, \mu)$ .

### РЕШЕНИЯ

**12.1.** Ясно, что  $m(A) \geq 0$  для любого  $A \in S$ . Пусть

$$A = A^1 \times A^2 = \bigsqcup_{k=1}^n A_k, \quad \text{где} \quad A_k = A_k^1 \times A_k^2 \text{ при } k \in \mathbb{N}. \quad (\text{i})$$

Тогда (см. задачу 5.19) существуют такие системы попарно непересекающихся множеств  $\{C_i\}_{i=1}^N \subseteq S_1$  и  $\{D_j\}_{j=1}^K \subseteq S_2$ , что множества  $A^1$ ,  $A_k^1$  при  $k = 1, 2, \dots, n$  и  $A^2$ ,  $A_k^2$  при  $k = 1, 2, \dots, n$  представляются как объединения некоторых из  $C_i$  и из  $D_j$  соответственно. Пусть

$$A_1^1 = \bigsqcup_{i \in \Omega(1)} C_i, \dots, \quad A_n^1 = \bigsqcup_{i \in \Omega(n)} C_i$$

и

$$A_1^2 = \bigsqcup_{j \in \Gamma(1)} D_j, \dots, \quad A_n^2 = \bigsqcup_{j \in \Gamma(n)} D_j.$$

Можно считать, что

$$A^1 = \bigsqcup_{i=1}^N C_i \text{ и} \quad A^2 = \bigsqcup_{j=1}^K D_j.$$

Тогда

$$\bigsqcup_{i=1}^N \bigsqcup_{j=1}^K (C_i \times D_j) = A^1 \times A^2 = \bigsqcup_{k=1}^n (A_k^1 \times A_k^2) = \bigsqcup_{k=1}^n \bigsqcup_{i \in \Omega(k)} \bigsqcup_{j \in \Gamma(k)} (C_i \times D_j).$$

В силу разложения (i) для любых фиксированных  $i \in [1, N]$  и  $j \in [1, K]$  существует единственное  $k \in [1, n]$ , при котором  $i \in \Omega(k)$  и  $j \in \Gamma(k)$ . Тогда

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n m(A_k) &= \sum_{k=1}^n m(A_k^1 \times A_k^2) = \sum_{k=1}^n m_1(A_k^1)m_2(A_k^2) = \\
&= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i \in \Omega(k)} m_1(C_i) \right) \left( \sum_{j \in \Gamma(k)} m_2(D_j) \right) = \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{i \in \Omega(k)} \sum_{j \in \Gamma(k)} m_1(C_i)m_2(D_j) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^K m_1(C_i)m_2(D_j) = \\
&= \sum_{i=1}^N m_1(C_i) \sum_{j=1}^K m_2(D_j) = m_1(A^1)m_2(A^2) = m(A).
\end{aligned}$$

□

**12.2.** Пусть

$$A = A^1 \times A^2 = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (A_k^1 \times A_k^2),$$

где  $A^1, A_1^1, A_2^1, \dots \in S_1$  и  $A^2, A_1^2, A_2^2, \dots \in S_2$ . Рассмотрим полукольцо  $S'_1 = S_1 \cap A^1$  с единицей  $A^1$ . Тогда  $m_1$  —  $\sigma$ -аддитивная мера на  $S'_1$ , и её можно продолжить по Лебегу. Обозначим это продолжение через  $\lambda_1$ . Обозначим теперь  $f_k(x) = m_2(A_k^2)\chi_{A_k^1}(x)$  при  $x \in A^1$  и  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда  $f_k(x)$  — простая функция на  $A^1$  и, так как для любого  $x \in A^1$  выполнено равенство

$$\bigsqcup_{k: x \in A_k^1} A_k^2 = A^2,$$

то мы получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k: x \in A_k^1} m_2(A_k^2) = m_2(A^2)\chi_{A^1}(x).$$

Более того, в силу результата задачи 6.10

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{A^1} f_k(x) d\lambda_1 = \sum_{k=1}^{\infty} m_2(A_k^2)m_1(A_k^1) < \infty.$$

Отсюда по теореме Б. Леви следует, что

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k^1 \times A_k^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} m_1(A_k^1)m_2(A_k^2) = \\
&= \int_{A^1} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) d\lambda_1 = \lambda_1(A^1)m_2(A^2) = m_1(A^1)m_2(A^2).
\end{aligned}$$

□

**12.3.** Ясно, что утверждение справедливо, если  $A \in S = M_1 \times M_2$ , поэтому оно справедливо и для  $A \in R(S)$ . Предположим, что утверждение верно для последовательности вложенных множеств  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$  из  $M$ . Пусть

$$B = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \quad \text{и} \quad \mu(B) < \infty.$$

Докажем, что тогда утверждение верно для  $B$ . Имеем

$$B^2(x) = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^2(x)$$

для каждого  $x \in X_1$ . Поэтому  $B^2(x) \in M_2$  для почти всех  $x \in X_1$ . Далее,  $\mu_2(A_j^2(x)) \uparrow \mu_2(B^2(x))$  при  $j \rightarrow \infty$  для почти всех  $x \in X_1$ . Поскольку мера  $\mu_1$  полна, то (см. задачу 8.43) функция  $\mu_2(B^2(x))$  измерима на  $X_1$ . Тогда в силу теоремы Б. Леви (задача 10.32)

$$\int_{X_1} \mu_2(B^2(x)) d\mu_1 = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{X_1} \mu_2(A_j^2(x)) d\mu_1 = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j) = \mu(B).$$

Аналогично, если утверждение верно для последовательности вложенных множеств  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$  из  $M$ , где  $\mu(A_1) < \infty$  и

$$B = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j,$$

то оно справедливо и для  $B$ .

Пусть теперь  $A \in M$ . Тогда (см. задачу 7.50)  $A$  может быть представлено в виде

$$A = F(A) \setminus A_0 \equiv \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j} \setminus A_0, \tag{ii}$$

где  $A_{i,j} \in R(S)$  при  $i, j \in \mathbb{N}$ ;  $A_{i,1} \subseteq A_{i,2} \subseteq \dots$  для любого  $i$ ; если  $B_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{i,j}$  при  $i \in \mathbb{N}$ , то  $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots$ ;  $\mu(B_1) < \infty$ ;  $A_0 \in M$  и  $\mu(A_0) = 0$ . Предыдущие рассуждения показывают, что для множества  $F(A)$  утверждение задачи верно.

Пусть вначале  $\mu(A) = 0$ . Так как  $\mu(A) = 0$ , то множество  $F(A)$  также имеет меру 0. Тогда

$$\int_{X_1} \mu_2(F(A)^2(x)) d\mu_1(x) = 0,$$

откуда следует, что  $\mu_2(F(A)^2(x)) = 0$  для почти всех  $x \in X_1$  относительно меры  $\mu_1$ . Поскольку мера  $\mu_2$  полна и  $A \subseteq F(A)$ , то  $\mu_2(A^2(x)) = 0$  при почти всех  $x \in X_1$ . Так как мера  $\mu_1$  полна, то функция  $\mu_2(A^2(x))$   $\mu_1$ -измерима, и мы получаем, что

$$\mu(A) = 0 = \int_{X_1} \mu_2(A^2(x)) d\mu_1.$$

Наконец, пусть дано произвольное  $A \in M$  с  $\mu(A) < \infty$ . Тогда справедливо разложение (ii). Заметим, что для множеств  $A_0$  и  $F(A)$  утверждение уже доказано. Но так как мера, и интеграл аддитивны, то утверждение верно и для  $A$ .  $\square$

**12.4.** Заметим, что в силу результата задачи 12.3 утверждение верно для индикаторов измеримых множеств с конечной мерой. Тогда оно верно и для любой простой функции на  $A$ . Применяя задачу 9.29, построим последовательность простых неотрицательных функций  $g_n(x, y) \uparrow f(x, y)$  на  $A$ . Из её существования следуют условия на измеримость. Теперь применим к обеим частям равенства теорему Леви и получим утверждение задачи.  $\square$

**12.5.** Утверждение немедленно следует из задачи 12.4.  $\square$

**12.6.** Пусть

$$A_{n,1} = \left( \frac{1}{n+1}, \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) \right) \quad \text{и} \quad A_{n,2} = \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right), \frac{1}{n} \right)$$

при  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда положим  $A_n(i, j) = A_{n,i} \times A_{n,j}$  для  $i, j = 1, 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , и определим функцию

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \sum_{i,j=1}^2 (-1)^{i+j} \chi_{A_n(i,j)}(x, y).$$

Для каждого  $x \in (0, 1)$  функция  $\varphi(y) = f(x, y)$  измерима и ограничена и

$$\int_{(0,1)} \varphi(y) d\mu(y) = 0.$$

Действительно, при фиксированном  $x$  функция либо является тождественным нулем, либо принимает два ненулевых значения  $n^4$  и  $-n^4$  на множествах равной меры. Аналогично, для каждого  $y \in (0, 1)$  функция  $\psi(x) = f(x, y)$  измерима и ограничена и

$$\int_{(0,1)} \psi(x) d\mu(x) = 0.$$

В то же время

$$\int_{(0,1)^2} |f(x, y)| d\mu(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \mu \left( \left( \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right)^2 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \infty.$$

□

**12.7.** Пусть  $A_n = (2^{-n}, 2^{-n+1})$  для  $n \in \mathbb{N}$  и

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 4^n (\chi_{A_n \times A_n}(x, y) - 2\chi_{A_{n+1} \times A_n}(x, y)).$$

Нетрудно видеть, что функция  $\psi(x) = f(x, y)$  измерима и ограничена для каждого фиксированного  $y \in (0, 1)$ , причём

$$\int_{(0,1)} \psi(x) d\mu(x) = 0.$$

Действительно, если  $y \in A_n$ , то

$$\int_{(0,1)} \psi(x) d\mu(x) = \int_{A_n} 4^n d\mu - \int_{A_{n+1}} 2 \cdot 4^n d\mu = \frac{4^n}{2^n} - \frac{2 \cdot 4^n}{2^{n+1}} = 0,$$

а для остальных  $x$  функция есть тождественный нуль. Следовательно,

$$\int_{(0,1)} \left( \int_{(0,1)} f(x, y) d\mu(x) \right) d\mu(y) = 0.$$

С другой стороны,

$$\int_{(0,1)} f(x, y) d\mu(y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \int_{1/2}^1 4 d\mu = 2, & \frac{1}{2} < x < 1, \end{cases}$$

откуда следует, что

$$\int_{(0,1)} \left( \int_{(0,1)} f(x, y) d\mu(y) \right) d\mu(x) = 1.$$

□

**12.8.** Пусть  $g(x, y)$  — функция, построенная в решении задачи 12.7. Тогда  $f(x, y) = (b - a)g(x, y) + a$  — искомая функция. □

**12.9.** Функция  $f$  измерима в силу своей непрерывности. Представим рассматриваемый интеграл в виде

$$\begin{aligned} \int_{(0,\infty)^2} |f(x,y)| d\mu &= \int_{(0,1)^2} |f(x,y)| d\mu + \int_{(0,1) \times (1,\infty)} |f(x,y)| d\mu + \\ &+ \int_{(1,\infty) \times (0,1)} |f(x,y)| d\mu + \int_{(1,\infty)^2} |f(x,y)| d\mu = J_1 + J_2 + J_3 + J_4. \end{aligned}$$

Ясно, что  $J_1 < \infty$ . Далее, используя результаты задач 12.4 и 11.4, получаем, что

$$J_4 \leq \int_1^\infty \left( \int_1^\infty e^{-xy} dx \right) dy = \int_1^\infty \frac{e^{-y}}{y} dy < \infty.$$

Наконец,

$$J_2 \leq \int_0^1 x \left( \int_1^\infty e^{-xy} dy \right) dx = \int_0^1 x \frac{e^{-x}}{x} dx = \int_0^1 e^{-x} dx < \infty$$

и, аналогично,  $J_3 < \infty$ . Поэтому  $f(x,y) \in L((0,\infty)^2)$ .  $\square$

**12.10.** Пусть  $X = X_1 \times X_2$ . Заметим, что  $f(x)$  и  $g(y)$  — измеримые функции на  $X$ . Тогда  $h(x,y) = f(x) \cdot g(y)$  — измеримая функция на  $X$ . В силу результата задачи 12.4 получаем, что

$$\int_X |h(x,y)| d\mu = \int_{X_1} |f(x)| d\mu_1 \cdot \int_{X_2} |g(y)| d\mu_2 < \infty.$$

Поэтому  $h(x,y) \in L(X)$ .  $\square$

**12.11.** Докажем вначале, что  $h(x,t)$  измерима на  $\mathbb{R}^2$ . Ясно, что  $f(t)$  измерима на  $\mathbb{R}^2$ . Заметим, что любая полоса  $a \leq x - t < b$  является измеримым множеством на  $\mathbb{R}^2$ , откуда следует, что любое множество  $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x - t \in A \in M\}$  также измеримо. Следовательно,  $g(x-t)$  — измеримая функция на  $\mathbb{R}^2$ , а тогда и  $h(x,t)$  измерима на  $\mathbb{R}^2$  как произведение двух измеримых функций. Используя задачу 12.4, получим, что

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |h(x,t)| d\mu_2 &= \int_{\mathbb{R}} |f(t)| d\mu(t) \cdot \int_{\mathbb{R}} |g(x-t)| d\mu(t) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(t)| d\mu(t) \cdot \int_{\mathbb{R}} |g(t)| d\mu(t) < \infty. \end{aligned}$$

$\square$

**12.12.** Предположим вначале, что функция  $f(x)$  ограничена на  $A$ , т.е.  $0 \leq f(x) < C$  для каждого  $x \in A$ . Возьмём разбиение  $T$  отрезка  $[0, C]$ :  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = C$ . Обозначим  $\lambda(T) = \max_{1 \leq i \leq n} |t_i - t_{i-1}|$ .

Далее, пусть  $A_i = \{x \in A : t_{i-1} \leq f(x) < t_i\}$  и  $E(i, T) = A_i \times [0, t_i]$  при  $i \in \mathbb{N}$ . Обозначим

$$E(T) = \bigsqcup_{i=1}^n E(i, T).$$

Нетрудно видеть, что  $E(T)$  измеримо относительно  $\mu_2$  и (см. задачу 10.31)

$$\mu_2(E(T)) = \sum_{i=1}^n t_i \mu(A_i) \rightarrow \int_A f(x) d\mu_1$$

при  $\lambda(T) \rightarrow 0$ . С другой стороны,

$$E \Delta E(T) = E(T) \setminus E \subseteq \bigsqcup_{i=1}^n (A_i \times [t_{i-1}, t_i]).$$

Отсюда следует, что

$$\mu_2(E \Delta E(T)) \leq \sum_{i=1}^n \mu_2(A_i \times [t_{i-1}, t_i]) \leq \lambda(T) \sum_{i=1}^n \mu_1(A_i) = \lambda(T) \mu_1(A).$$

Так как  $T$  произвольно и  $\lambda(T)$  может быть сколь угодно мало, то мы получаем, что  $E$  измеримо относительно  $\mu_2$  и

$$\mu_2(E) = \int_A f(x) d\mu_1.$$

Пусть теперь  $f$  — неограниченная функция. Положим  $B_n = \{x \in A : n \leq f(x) < n + 1\}$ ,  $E_n = \{(x, y) \in E : x \in B_n\}$  и  $f_n(x) = f(x)\chi_{B_n}(x)$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

и, как показано выше,  $E_n$  измеримо относительно  $\mu_2$  при каждом  $n$ . Поэтому  $E$  также измеримо относительно  $\mu_2$ , и по теореме Б. Леви

$$\mu_2(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n(x) d\mu_1 = \int_A f(x) d\mu_1.$$

□

**12.13.** Рассмотрим функцию  $f(x, y)$  — индикатор множества  $A$ . Она измерима относительно произведения мер, как и любой индикатор измеримого множества. По теореме Фубини (задача 12.4) функция  $f(x, y_0)$   $\mu_1$ -измерима как функция от  $x$  при почти всех значениях  $y_0$

(относительно меры  $\mu_2$ ). Следовательно, либо найдётся  $y_0$ , при котором функция  $f(x, y_0)$   $\mu_1$ -измерима, либо  $\mu_2 A_2 = 0$ . Нетрудно видеть, что во втором случае  $\mu^* A = 0$ , что противоречит условию. Но при любом  $y_0$  функция  $f(x, y_0)$  есть индикатор множества  $A_1$ , т. е. её измеримость эквивалентна измеримости множества  $A_1$ . Аналогично доказывается измеримость множества  $A_2$ .  $\square$

**12.14.** В силу результата задачи 10.24 достаточно рассмотреть случай неотрицательной функции  $f$ . Возьмём такие множества  $A_n^1$  из  $M_1$  и множества  $A_n^2$  из  $M_2$ , что их мера конечна,  $A_j^k \subseteq A_{j+1}^k$  при  $k = 1, 2$  и всех натуральных  $j$ . Определим функции

$$f_n(x, y) = \min \{f(x, y), n\} \chi_{A_n^1}(x) \chi_{A_n^2}(y).$$

Эти функции измеримы и интегрируемы по Лебегу на  $X$ , поскольку

$$\int_X f_n(x, y) d\mu \leq n \mu_1(A_n^1) \mu_2(A_n^2) < \infty.$$

По теореме Фубини

$$\int_X f_n(x, y) d\mu = \int_{X_1} \left( \int_{X_2} |f_n(x, y)| d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) \leq I.$$

Заметим, что  $f_n(x, y) \uparrow f(x, y)$  всюду на  $X$  при  $n \rightarrow \infty$ . Применяя теорему Б. Леви, получаем, что  $f \in L(X, M, \mu)$ .  $\square$

## Г л а в а 13

# ПРОСТРАНСТВА $L_p$ И НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА

В этой главе мы будем использовать следующие обозначения. Пусть  $1 \leq p \leq \infty$ . Для заданного  $p$  положим

$$q = q(p) = \begin{cases} \frac{p}{p-1}, & \text{если } 1 < p < \infty, \\ \infty, & \text{если } p = 1, \\ 1, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

Отметим, что во всех случаях  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , если считать, что  $\frac{1}{\infty} = 0$ .

Мы будем считать, что нам дано  $\sigma$ -конечное измеримое пространство  $(X, M, \mu)$  и множество  $A \in M$ . Через  $L((a, b))$ , где  $(a, b) \subset \mathbb{R}^n$  при некотором  $n \geq 1$ , будем обозначать множество функций, которые интегрируемы по Лебегу относительно классической меры  $\mu$  на  $(a, b)$ .

Напомним, что если  $E$  — линейное пространство, а  $E_0$  — линейное подпространство в нём, то фактор-пространством  $E/E_0$  называется множество классов эквивалентности элементов из  $E$  относительно следующего отношения эквивалентности:  $x \sim y$ , если  $x - y \in E_0$ , с индуцированными линейными операциями.

Пусть  $J(A)$  — линейное пространство всех измеримых функций на  $A$  (с поточечным сложением и умножением на скаляр), а  $J_0(A)$  — подпространство всех измеримых функций на  $A$ , равных нулю п.в. на  $A$ . Обозначим

$$\widehat{L}_p(A) = \left\{ f(x) \in J(A) : \int_A |f(x)|^p d\mu < \infty \right\}.$$

Пространством  $L_p(A) = L_p(A, M, \mu)$  называется фактор-пространство  $\widehat{L}_p(A)/J_0(A)$  с нормой

$$\|f\| = \|f\|_p = \left( \int_A |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Корректность этого определения будет показана в задаче 13.4. Там, где это не приводит к недоразумениям, мы будем называть элементы этого пространства функциями.

В этой главе будут встречаться также конечные  $\sigma$ -аддитивные функции на  $\sigma$ -алгебрах (заряды). Различие между зарядами и конечными  $\sigma$ -аддитивными мерами состоит в том, что для первых не требуется неотрицательности. Пусть  $M$  —  $\sigma$ -алгебра и  $\Phi$  — конечная  $\sigma$ -аддитивная функция на  $M$ . Множество  $A \in M$  называется *положительным* (относительно  $\Phi$ ), если для любого  $B \in M$ ,  $B \subseteq A$ , выполнено условие  $\Phi(B) \geq 0$ . Аналогично, если  $A \in M$  и для любого  $B \in M$ ,  $B \subseteq A$ , выполнено условие  $\Phi(B) \leq 0$ , то множество  $A$  называется *отрицательным*. Предположим, что  $\mu$  —  $\sigma$ -аддитивная мера (конечная или  $\sigma$ -конечная) на  $M$  и для любого такого  $A \in M$ , что  $\mu(A) = 0$ , выполнено условие  $\Phi(A) = 0$ . Тогда  $\Phi$  называется *абсолютно непрерывной относительно*  $\mu$ .

## ЗАДАЧИ

**13.1.** Пусть  $1 < p < \infty$  и  $a, b \geq 0$ . Доказать, что

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

**13.2. Неравенство Гёльдера.** Пусть  $1 < p < \infty$ , функции  $f(x)$  и  $g(x)$  измеримы на  $A$  и таковы, что  $|f(x)|^p$  и  $|g(x)|^q$  из  $L(A)$ . Доказать, что  $f(x)g(x) \in L(A)$  и

$$\int_A |f(x)g(x)| d\mu \leq \left( \int_A |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p} \times \left( \int_A |g(x)|^q d\mu \right)^{1/q}.$$

**13.3. Неравенство Минковского.** Пусть  $1 \leq p < \infty$ , функции  $f(x)$  и  $g(x)$  измеримы на  $A$  и таковы, что  $|f(x)|^p$  и  $|g(x)|^p$  из  $L(A)$ . Доказать, что  $|f(x) + g(x)|^p \in L(A)$  и

$$\left( \int_A |f(x) + g(x)|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left( \int_A |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p} + \left( \int_A |g(x)|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

**13.4.** Доказать, что  $L_p(A)$  с введённой в нём нормой — корректно определённое линейное нормированное пространство.

**13.5.** Пусть  $J(A)$  — множество всех измеримых функций на  $A$ , а  $J_0(A)$  — множество всех измеримых функций на  $A$ , равных нулю п.в. на  $A$ , и

$$\begin{aligned}\widehat{L}_\infty(A) &= \{f(x) \in J(A) : \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in A} |f(x)| = \\ &= \inf \{\alpha > 0 : \mu(\{x \in A : |f(x)| > \alpha\}) = 0\} < \infty.\end{aligned}$$

Доказать, что  $L_\infty(A) = \widehat{L}_\infty(A)/J_0(A)$  с нормой  $\|f\|_\infty$  — линейное нормированное пространство.

**13.6.** Пусть  $f$  — измеримая функция на множестве  $A$ . Доказать, что

$$\inf \{\alpha > 0 : \mu(\{x \in A : |f(x)| > \alpha\}) = 0\} = \inf_{g \sim f} \sup_{x \in A} |g(x)|.$$

**13.7.** Пусть  $1 < p < \infty$ . Доказать, что неравенство Гёльдера (см. задачу 13.2) обращается в равенство тогда и только тогда, когда для некоторых  $\alpha \geq 0$  и  $\beta \geq 0$  с  $\alpha + \beta > 0$  равенство  $\alpha|f(x)|^p = \beta|g(x)|^q$  выполнено п.в. на  $A$ .

**13.8.** Пусть  $1 < p < \infty$ . Доказать, что неравенство Минковского (см. задачу 13.3) обращается в равенство тогда и только тогда, когда для некоторых  $\alpha \geq 0$  и  $\beta \geq 0$  с  $\alpha + \beta > 0$  п.в. на  $A$  выполнено равенство  $\alpha f(x) = \beta g(x)$ .

**13.9.** (Расширение неравенства Гёльдера.) Пусть  $f(x) \in L_1(A)$  и  $g(x) \in L_\infty(A)$ . Доказать, что  $f(x)g(x) \in L(A)$  и

$$\int_A |f(x)g(x)| d\mu \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty.$$

**13.10.** Пусть  $\mu(A) < \infty$ ,  $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$  и  $f(x) \in L_{p_2}(A)$ . Доказать, что  $f(x) \in L_{p_1}(A)$  и

$$\|f\|_{p_1} \leq C(p_1, p_2, A) \|f\|_{p_2}.$$

**13.11.** Пусть  $1 \leq p < \infty$ . Построить такую функцию  $f(x) \in L_p((0, 1))$ , что для любого  $r > p$  выполнено условие  $f(x) \notin L_r((0, 1))$ .

**13.12.** Пусть  $1 < p \leq \infty$ . Построить такую функцию  $f(x) \notin L_p((0, 1))$ , что  $f(x) \in L_r((0, 1))$  при всех  $r \in [1, p]$ .

**13.13.** Пусть  $1 < p \leq \infty$ . Построить такую функцию  $f(x) \in L_p((1, \infty))$ , что  $f(x) \notin L_r((1, \infty))$  для любого  $r \in [1, p]$ .

**13.14.** Пусть  $1 \leq p \leq \infty$ . Построить такую функцию  $f(x) \in L_p((0, \infty))$ , что  $f(x) \notin L_r((0, \infty))$  для любого  $r \in [1, \infty] \setminus \{p\}$ .

**13.15.** Пусть  $\mu(A) = \infty$ ,  $1 \leq s < r < p \leq \infty$  и  $f(x) \in L_s(A) \cap L_p(A)$ . Доказать, что  $f(x) \in L_r(A)$ .

**13.16.** Пусть  $1 \leq s < p \leq \infty$  и  $[s, p] \neq [1, \infty]$ . Доказать, что существует такая функция  $f(x)$ , что  $f(x) \in L_r((0, \infty))$  при  $r \in [s, p]$ , но  $f(x) \notin L_r((0, \infty))$  при  $r \notin [s, p]$ .

**13.17.** Пусть  $f(x) \in L_p(A)$  при всех  $p \geq p_0 \geq 1$ . Доказать, что существует конечный или бесконечный предел величин  $\|f\|_p$ , причём в случае его конечности  $f \in L_\infty(A)$  и

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty,$$

а если предел бесконечен, то  $f \notin L_\infty(A)$ .

**13.18.** Пусть  $\mu(A) \leq 1$  и  $f(x)$  — измеримая функция на  $A$ . Доказать, что функция  $\psi(p) = \|f\|_p$  не убывает на  $[1, \infty]$  (мы допускаем бесконечные значения).

**13.19.** Пусть  $1 \leq p < \infty$  и  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  — фундаментальная последовательность в  $L_p(A)$ . Доказать, что существует подпоследовательность  $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ , сходящаяся п.в. на  $A$  к некоторой конечной измеримой на  $A$  функции  $f(x)$  при  $k \rightarrow \infty$ .

**13.20.** Пусть  $1 \leq p < \infty$ . Доказать, что пространство  $L_p(A)$  полно.

**13.21.** Доказать, что пространство  $L_\infty(A)$  полно.

**13.22.** Пусть  $1 \leq p < \infty$  и  $f_n \rightarrow f$  при  $n \rightarrow \infty$  в  $L_p(A)$ . Доказать, что  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ .

**13.23.** Пусть  $1 \leq p < \infty$  и  $f_n \rightarrow f$  при  $n \rightarrow \infty$  в  $L_p(A)$ . Доказать, что существует подпоследовательность  $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ , сходящаяся к  $f(x)$  при  $k \rightarrow \infty$  п.в. на  $A$ .

**13.24.** Построить такую последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  ограниченных функций на  $(0, 1)$ , что  $f_n(x) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  при каждом  $x \in (0, 1)$ , но  $\|f_n\|_1 \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**13.25.** Пусть  $1 \leq p < \infty$ , дана последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty \subset L_p(A)$ , функции  $f(x)$  и  $F(x)$  из  $L_p(A)$ ,  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$  и  $|f_n(x)| \leq |F(x)|$  при всех  $x \in A$  и всех  $n$ . Доказать, что  $f_n \rightarrow f$  при  $n \rightarrow \infty$  в  $L_p(A)$ .

**13.26.** Пусть  $\mu(A) < \infty$ ,  $1 \leq r < p < \infty$ , дана последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty \subset L_p(A)$ , функция  $f(x) \in L_p(A)$ , причём  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$  и существует такое  $C > 0$ , что  $\|f_n\|_p \leq C$  при всех  $n$ . Доказать, что  $f_n \rightarrow f$  при  $n \rightarrow \infty$  в  $L_r(A)$ .

**13.27.** Пусть  $1 \leq p \leq \infty$ , дана последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  функций из  $L_p(A)$  и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p < \infty.$$

Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

сходится в  $L_p(A)$ , сходится абсолютно п.в. на  $A$  и что

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right\|_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p.$$

**13.28.** Пусть  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  и  $f(x)$  — конечные измеримые функции на  $A$ , где  $\mu(A) < \infty$ . Доказать, что  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$  тогда и только тогда, когда

$$\int_A \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|} d\mu \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ .

**13.29.** Построить такие конечные измеримые функции  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  и  $f(x)$  на  $\mathbb{R}$ , что  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $\mathbb{R}$ , но

$$\int_A \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|} d\mu \not\rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ .

**13.30.** Пусть  $J(A)$  — множество всех конечных измеримых функций на  $A$  и  $J_0(A) = \{f(x) \in J: f(x) = 0 \text{ п.в. на } A\}$ . Доказать, что

$$\rho(f, g) = \int_A \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} d\mu$$

— метрика на фактор-пространстве  $L_0 = J(A)/J_0(A)$ .

**13.31.** Доказать, что не существует метрики на фактор-пространстве  $L = J([0, 1])/J_0([0, 1])$  (с классической мерой Лебега), сходимость по которой эквивалентна сходимости п.в. на  $[0, 1]$ .

**13.32.** Пусть  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , даны последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  функций из  $L_p(A)$ , функции  $f(x) \in L_p(A)$  и  $g(x) \in L_q(A)$ . Пусть также  $f_n \rightarrow f$  в  $L_p(A)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Доказать, что  $f_n g \rightarrow f g$  в  $L_1(A)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**13.33.** Пусть  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , даны последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  функций из  $L_p(A)$ , последовательность  $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  функций из  $L_q(A)$ , функции  $f(x) \in L_p(A)$  и  $g(x) \in L_q(A)$ . Пусть при этом

$f_n \rightarrow f$  в  $L_p(A)$  при  $n \rightarrow \infty$  и  $g_n \rightarrow g$  в  $L_q(A)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Доказать, что  $f_n g_n \rightarrow fg$  в  $L_1(A)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**13.34.** Пусть  $\Phi(u)$  — неотрицательная неубывающая непрерывная на  $[0, \infty)$  функция, причём  $\Phi(0) = 0$  и  $\Phi(u) > 0$  при  $u > 0$ . Пусть  $f(x)$  и  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  — конечные измеримые функции на  $A$  и

$$\int_A \Phi(|f_n(x) - f(x)|) d\mu \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Доказать, что  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ .

**13.35.** Пусть  $1 < p < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  и дана функция  $f(x) \in L_p(A)$ .

Доказать, что

$$\|f\|_p = \sup_{\substack{g(x) \in L_q(A): \\ \|g\|_q \leqslant 1}} \int_A f(x)g(x) d\mu$$

и что существует такая функция  $g_0(x) \in L_q(A)$  с  $\|g_0\|_q = 1$ , что

$$\|f\|_p = \int_A f(x)g_0(x) d\mu.$$

**13.36.** Пусть  $1 < p < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , дана функция  $f(x) \in L_p(A)$  и  $\|f\|_p > 0$ . Доказать, что элемент (см. задачу 13.35)  $g(x) \in L_q(A)$ , для которого  $\|g_0\|_q = 1$  и

$$\|f\|_p = \int_A f(x)g_0(x) d\mu,$$

единственен.

**13.37.** Пусть дана функция  $f(x) \in L_1(A)$ . Доказать, что

$$\|f\|_1 = \sup_{\substack{g(x) \in L_\infty(A): \\ \|g\|_\infty \leqslant 1}} \int_A f(x)g(x) d\mu$$

и что существует такая функция  $g_0(x) \in L_\infty(A)$ , что  $\|g_0\|_\infty = 1$  и

$$\|f\|_1 = \int_A f(x)g_0(x) d\mu.$$

**13.38.** Построить такие функции  $f(x) \in L_1((0, 1))$  и  $g_1(x), g_2(x) \in L_\infty((0, 1))$ , что  $\|g_1\|_\infty = \|g_2\|_\infty = 1$  и

$$0 < \|f\|_1 = \int_A f(x)g_1(x) d\mu = \int_A f(x)g_2(x) d\mu,$$

но  $g_1(x) \neq g_2(x)$  в  $L_\infty((0, 1))$ .

**13.39.** Пусть  $f(x) \in L_\infty(A)$ . Доказать, что

$$\|f\|_\infty = \sup_{\substack{g(x) \in L_1(A): \\ \|g\|_1 \leq 1}} \int_A f(x)g(x) d\mu.$$

**13.40.** Построить такую функцию  $f(x) \in L_\infty((0, 1))$ , что для любой  $g(x) \in L_1((0, 1))$  с  $\|g\|_1 \leq 1$  выполнено неравенство

$$\left| \int_{(0,1)} f(x)g(x) d\mu \right| < \|f\|_\infty.$$

**13.41.** Построить такие функции  $f(x) \in L_\infty((0, 1))$  и  $g_1(x), g_2(x) \in L_1((0, 1))$ , что  $\|g_1\|_1 = \|g_2\|_1 = 1$  и

$$0 < \|f\|_\infty = \int_A f(x)g_1(x) d\mu = \int_A f(x)g_2(x) d\mu,$$

но  $g_1(x) \neq g_2(x)$  в  $L_1((0, 1))$ .

**13.42.** Пусть  $1 < p < \infty$ ,  $q = \frac{p}{p-1}$ , функция  $f(x)$  измерима на  $A$  и  $f(x)g(x) \in L(A)$  для любой функции  $g(x) \in L_q(A)$ . Доказать, что  $f(x) \in L_p(A)$ .

**13.43.** Пусть функция  $f(x)$  измерима на  $A$  и  $f(x)g(x) \in L(A)$  для любой функции  $g(x) \in L_\infty(A)$ . Доказать, что  $f(x) \in L_1(A)$ .

**13.44.** Пусть функция  $f(x)$  измерима на  $A$  и  $f(x)g(x) \in L(A)$  для каждой  $g(x) \in L_1(A)$ . Доказать, что  $f(x) \in L_\infty(A)$ .

**13.45.** Пусть  $1 \leq p < \infty$ , функция  $f(x)$  измерима и неотрицательна на  $A$  и  $F_f(t) = F(t) = \mu(\{x \in A : f(x) > t\})$  при  $t > 0$ . Доказать, что

$$\int_A (f(x))^p d\mu = p \int_{(0,\infty)} t^{p-1} F(t) d\mu_1,$$

где  $\mu_1$  — классическая мера Лебега на  $(0, \infty)$  (возможно, обе части равенства бесконечны).

**13.46.** Пусть  $(X_1, M_1, \mu_1)$  и  $(X_2, M_2, \mu_2)$  —  $\sigma$ -конечные измеримые пространства,  $A_1 \in M_1$ ,  $A_2 \in M_2$ , конечная неотрицательная функция  $f(x)$  измерима на  $A_1$ , конечная неотрицательная функция  $g(y)$  измерима на  $A_2$  и

$$\mu_1(\{x \in A_1 : f(x) > t\}) = \mu_2(\{y \in A_2 : g(y) > t\})$$

при всех  $t \geq 0$ . Доказать, что для любого  $p \in [1, \infty)$  выполнено равенство

$$\int_{A_1} |f|^p d\mu_1 = \int_{A_2} |g|^p d\mu_2$$

(возможно, оба интеграла бесконечны).

**13.47.** Пусть  $(X_1, M_1, \mu_1)$  и  $(X_2, M_2, \mu_2)$  —  $\sigma$ -конечные измеримые пространства,  $A_1 \in M_1$ ,  $A_2 \in M_2$ ,  $\mu_1(A_1) = \mu_2(A_2) < \infty$ , конечная функция  $f(x)$  измерима на  $A_1$ , конечная функция  $g(y)$  измерима на  $A_2$  и

$$\mu_1(\{x \in A_1 : f(x) > t\}) = \mu_2(\{y \in A_2 : g(y) > t\})$$

при всех  $t \in \mathbb{R}$ . Доказать, что  $f(x) \in L(A_1)$  тогда и только тогда, когда  $g(y) \in L(A_2)$ , и что в случае, когда обе функции интегрируемы, выполнено равенство

$$\int_{A_1} f(x) d\mu_1 = \int_{A_2} g(y) d\mu_2.$$

**13.48.** Построить две конечные измеримые относительно классической меры Лебега  $\mu$  на  $\mathbb{R}$  функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , для которых

$$\mu(\{x \in \mathbb{R} : f(x) > t\}) = \mu(\{y \in \mathbb{R} : g(y) > t\})$$

при всех  $t \in \mathbb{R}$ , и  $f(x) \in L(\mathbb{R})$ , но  $g(x) \notin L(\mathbb{R})$ .

**13.49.** Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  — измеримые неотрицательные функции на  $A$ ,  $A_y = A_y(g) = \{x \in A : g(x) > y\}$  при  $y > 0$  и

$$F(y) = \int_{A_y} f(x) d\mu.$$

Доказать, что

$$\int_A f(x)g(x) d\mu = \int_{(0, \infty)} F(y) d\mu_1,$$

где  $\mu_1$  — классическая мера Лебега на  $(0, \infty)$ .

**13.50.** Пусть  $n \geq 1$ , дан конечный промежуток  $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $[a, b]$ ,  $1 \leq p < \infty$  и дана функция  $f(x) \in L_p([a, b])$ . Доказать, что при любом  $\varepsilon > 0$  существует функция  $g(x) \in C([a, b])$ , для которой  $\|f - g\|_p < \varepsilon$ , т. е. множество непрерывных функций всюду плотно в  $L_p([a, b])$ .

**13.51.** Пусть дан конечный отрезок  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  и число  $p \in [1, \infty)$ . Доказать, что множество всех многочленов всюду плотно в  $L_p([a, b])$ .

**13.52.** Пусть  $n \geq 1$ , дан конечный отрезок  $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $[a, b]$  и  $1 \leq p < \infty$ . Доказать, что пространство  $L_p([a, b])$  сепарабельно.

**13.53.** Пусть  $1 \leq p < \infty$  и  $C_0(\mathbb{R})$  — множество всех таких функций  $f(x) \in C(\mathbb{R})$ , что существует  $N = N(f)$ , для которого  $f(x) = 0$  при  $|x| \geq N$ . Доказать, что  $C_0(\mathbb{R}^1)$  — всюду плотное множество в  $L_p(\mathbb{R})$ .

**13.54.** Пусть  $1 \leq p < \infty$ . Доказать, что пространство  $L_p(\mathbb{R}^1)$  сепарабельно.

**13.55.** Пусть  $(X, M, \mu)$  — пространство с конечной мерой, и  $\rho(A, B) = \mu(A \Delta B)$  для  $A$  и  $B$  из  $M$ . Доказать, что  $(M, \rho)$  — квазиметрическое пространство, т. е. что  $\rho$  — неотрицательная симметричная функция и для неё выполнено неравенство треугольника.

**13.56.** Пусть  $(X, M, \mu)$  — пространство с конечной мерой и  $1 \leq p < \infty$ . Доказать, что нормированное пространство  $L_p(X)$  сепарабельно тогда и только тогда, когда квазиметрическое пространство  $(M, \rho)$  с  $\rho(A, B) = \mu(A \Delta B)$  при  $A$  и  $B$  из  $M$  сепарабельно.

**13.57.** Доказать, что пространство  $L_\infty([0, 1])$  несепарабельно.

**13.58.** Пусть  $1 \leq p < \infty$ ,  $\mu(A) < \infty$  и  $f(x) \in L_p(A)$ . Доказать, что существует такое  $c_0 \in \mathbb{R}$ , что  $\inf_{c \in \mathbb{R}} \|f - c\|_p = \|f - c_0\|_p$ .

**13.59.** Пусть  $1 < p < \infty$ ,  $\mu(A) < \infty$  и  $f(x) \in L_p(A)$ . Доказать, что число  $c_0 \in \mathbb{R}$ , для которого  $\inf_{c \in \mathbb{R}} \|f - c\|_p = \|f - c_0\|_p$  (см. задачу 13.58), единственное.

**13.60.** Построить функцию  $f(x) \in L((0, 1))$ , для которой множество

$$A = \{c \in \mathbb{R}^1 : \inf_{d \in \mathbb{R}^1} \|f - d\|_p = \|f - c\|_p\}$$

состоит более чем из одной точки.

**13.61.** Пусть  $f(x) \in L_\infty(A)$ . Доказать, что существует единственное  $c_0 \in \mathbb{R}$ , для которого  $\inf_{c \in \mathbb{R}} \|f - c\|_\infty = \|f - c_0\|_\infty$ .

**13.62.** Пусть  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $1 \leq p < \infty$ , дана функция  $f(x) \in L_p([a, b])$ . Определим её модуль непрерывности в  $L_p$  формулой

$$\omega(f; \delta)_p = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \left( \int_{[a, b-h]} |f(x+h) - f(x)|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Доказать, что  $\omega(f; \delta)_p \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0_+$ .

**13.63.** Пусть  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $1 \leq p < \infty$ , дана функция  $f(x) \in L_p([a, b])$ , причём её модуль непрерывности (см. задачу 13.62) удовлетворяет

условию  $\omega(f; \delta)_p = o(\delta)$  при  $\delta \rightarrow 0_+$ . Доказать, что  $f(x) = c$  п.в. на  $[a, b]$ .

**13.64.** Пусть  $f(x) \in L(\mathbb{R})$ . Доказать, что

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)| d\mu \rightarrow 0$$

при  $t \rightarrow 0$ .

**13.65.** Пусть  $f(x), g(x) \in L(\mathbb{R}^1)$ , причём  $f(x)$  — ограниченная функция на  $\mathbb{R}$ . Доказать, что их свёртка  $(f * g)(x)$  (см. задачу 12.11) непрерывна на  $\mathbb{R}$ .

**13.66.** Пусть  $f(x) \in L(\mathbb{R})$ , дано  $h > 0$  и

$$f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{(x-h, x+h)} f(t) d\mu.$$

Доказать, что  $\|f_h\|_1 \leq \|f\|_1$ .

**13.67.** Пусть  $1 < p < \infty$ ,  $h > 0$  и  $f(x) \in L_p(\mathbb{R})$ . Доказать, что (см. задачу 13.66)  $\|f_h\|_p \leq \|f\|_p$ .

**13.68.** Пусть  $1 \leq p < \infty$  и  $f(x) \in L_p(\mathbb{R}^1)$ . Доказать, что (см. задачу 13.66)  $\|f - f_h\|_p \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0_+$ .

**13.69.** Пусть  $f(x) \in L_1((0, 1))$  и

$$f_k(x) = k \int_{\left(\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right)} f(t) d\mu \quad \text{при } x \in \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right], \text{ где } i = 1, 2, \dots, k$$

для  $k \in \mathbb{N}$ . Доказать, что  $\|f_k\|_1 \leq \|f\|_1$  при всех  $k$ .

**13.70.** Пусть  $1 \leq p < \infty$  и  $f(x) \in L_p((0, 1))$ . Доказать, что (см. задачу 13.69)  $\|f_k\|_p \leq \|f\|_p$  для любого  $k$ .

**13.71.** Пусть  $1 \leq p < \infty$  и  $f(x) \in L_p((0, 1))$ . Доказать, что (см. задачу 13.69)  $\|f - f_k\|_p \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

**13.72.** Пусть  $M$  —  $\sigma$ -алгебра, а  $\Phi$  — заряд на  $M$ . Доказать, что для любых множеств  $A_i$  из  $M$  таких, что  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ , выполнено равенство

$$\Phi\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \Phi(A_i).$$

**13.73.** Пусть  $M$  —  $\sigma$ -алгебра,  $\Phi$  — заряд на  $M$  и  $A \in M$ . Доказать, что

$$\gamma(A) = \sup_{B \in M, B \subseteq A} \Phi(B) < \infty.$$

**13.74.** Пусть  $M$  —  $\sigma$ -алгебра,  $\Phi$  — заряд на  $M$ ,  $A \in M$  и  $\Phi(A) < 0$ . Доказать, что существует отрицательное множество  $B \subseteq A$ .

**13.75.** Пусть  $M$  —  $\sigma$ -алгебра с единицей  $X$ , а  $\Phi$  — заряд на  $M$ . Доказать, что существуют положительное множество  $A_+ \in M$  и отрицательное множество  $A_- \in M$ , для которых  $X = A_+ \sqcup A_-$  (это представление называется *разложением Хана множества*  $X$  относительно заряда  $\Phi$ ).

**13.76.** Привести пример заряда  $\Phi$  на  $\sigma$ -алгебре с единицей  $X$ , относительно которого множество  $X$  имеет два различных разложения Хана.

**13.77.** Пусть  $M$  —  $\sigma$ -алгебра с единицей  $X$ ,  $\Phi$  — заряд на  $M$  и  $X = A_+ \sqcup A_- = B_+ \sqcup B_-$  — два разложения Хана. Доказать, что для любого  $E \in M$  выполнены равенства  $\Phi(E \cap A_+) = \Phi(E \cap B_+)$  и  $\Phi(E \cap A_-) = \Phi(E \cap B_-)$ . Это означает, что можно определить две меры на  $M$ , связанные с  $\Phi$ :  $\Phi_+(E) = \Phi(E \cap A_+)$  и  $\Phi_-(E) = -\Phi(E \cap A_-)$ . Выражение  $\Phi = \Phi_+ - \Phi_-$  называется *разложением Жордана* заряда  $\Phi$ .

Замечание. Из утверждения задачи видно, что разложение Жордана единственno.

**13.78.** Пусть  $M$  —  $\sigma$ -алгебра с единицей  $X$ ,  $\mu$  —  $\sigma$ -аддитивная мера на  $M$ ,  $\Phi$  — заряд на  $M$ , который абсолютно непрерывен относительно  $\mu$ , а  $\Phi = \Phi_+ - \Phi_-$  — разложение Жордана заряда  $\Phi$  (см. задачу 13.77). Доказать, что меры  $\Phi_+$  и  $\Phi_-$  также абсолютно непрерывны относительно меры  $\mu$ .

**13.79.** Пусть  $M$  —  $\sigma$ -алгебра с единицей  $X$ ,  $\mu$  — конечная  $\sigma$ -аддитивная мера на  $M$ , а  $\Phi \not\equiv 0$  — конечная  $\sigma$ -аддитивная мера на  $M$ , которая абсолютно непрерывна относительно меры  $\mu$ . Доказать, что существуют такие натуральное число  $n$  и множество  $B \in M$ , что  $\mu(B) > 0$  и  $B$  — положительно относительно заряда  $\psi_n = \Phi - \frac{1}{n}\mu$ .

**13.80. Теорема Радона–Никодима.** Пусть  $(X, M, \mu)$  — пространство с конечной мерой, а  $\Phi$  — заряд на  $M$ , который абсолютно непрерывен относительно  $\mu$ . Доказать, что существует функция  $f(x) \in L(X)$ , для которой

$$\Phi(A) = \int_A f(x) d\mu \quad \text{для всех } A \in M.$$

**13.81.** Доказать теорему Радона–Никодима в случае, когда  $(X, M, \mu)$  —  $\sigma$ -конечное измеримое пространство.

**13.82.** Пусть  $(X, M, \mu)$  —  $\sigma$ -конечное измеримое пространство, функции  $f(x)$  и  $g(x)$  из  $L(X)$  и

$$\int_A f(x) d\mu = \int_A g(x) d\mu \quad \text{для всех } A \in M.$$

Доказать, что  $f(x) = g(x)$  п.в. на  $X$ .

**13.83.** Пусть  $([0, 1], M, \mu)$  — пространство с классической мерой Лебега. Построить такую  $\sigma$ -аддитивную меру  $\Phi$  на  $M$ , что не существует функции  $f(x) \in L((0, 1))$ , для которой

$$\Phi(A) = \int_A f(x) d\mu \quad \text{при всех } A \in M.$$

**13.84.** Пусть  $(X, M, \mu)$  — пространство с конечной мерой, а  $\Phi$  — заряд на  $M$ , который не является абсолютно непрерывным относительно  $\mu$ . Доказать, что не существует функции  $f(x) \in L(X)$ , для которой

$$\Phi(A) = \int_A f(x) d\mu \quad \text{для всех } A \in M.$$

## РЕШЕНИЯ

**13.1.** Ясно, что достаточно рассмотреть случай положительных  $a$  и  $b$ . Рассмотрим кривую на плоскости  $y = x^{p-1}$ , где  $x \geq 0$ . В силу соотношения на  $p$  и  $q$  эта же кривая является графиком функции  $x = y^{q-1}$ . Пусть  $S_1$  — площадь фигуры, ограниченной этой кривой, осью  $OX$  и прямой  $x = a$ , а  $S_2$  — площадь фигуры, ограниченной той же кривой, осью  $OY$  и прямой  $y = b$ . Тогда нетрудно видеть, что

$$ab \leq S_1 + S_2 = \int_0^a x^{p-1} dx + \int_0^b y^{q-1} dy = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Заметим, что равенство достигается тогда и только тогда, когда  $b = a^{p-1}$ . Данным фактом мы воспользуемся ниже.  $\square$

**13.2.** Заметим, что если хотя бы один интеграл в правой части неравенства, скажем первый, равен нулю, то  $f(x) = 0$  п.в. на  $A$ . В этом случае  $f(x)g(x) = 0$  п.в. на  $A$ , и неравенство принимает вид  $0 \leq 0$ . Пусть теперь

$$\int_A |f(x)|^p d\mu = a^p > 0 \quad \text{и} \quad \int_A |g(x)|^q d\mu = b^q > 0.$$

Обозначим  $\varphi(x) = \frac{1}{a} f(x)$  и  $\psi(x) = \frac{1}{b} g(x)$ . Тогда

$$\int_A |\varphi(x)|^p d\mu = \int_A |\psi(x)|^q d\mu = 1.$$

Применяя результат задачи 13.1, получаем, что

$$\int_A |\varphi(x)\psi(x)| d\mu \leqslant \int_A \frac{|\varphi(x)|^p}{p} d\mu + \int_A \frac{|\psi(x)|^q}{q} d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

откуда вытекает неравенство Гёльдера.  $\square$

**13.3.** При  $p = 1$  утверждение следует из свойств интеграла Лебега (задача 10.23). Пусть  $p > 1$ . Так как

$$|f(x) + g(x)|^p \leqslant 2^p \max(|f(x)|^p, |g(x)|^p) \leqslant 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$

при всех  $x \in A$ , то  $|f(x) + g(x)|^p \in L(A)$ . Заметим, что

$$|f(x) + g(x)|^p \leqslant |f(x) + g(x)|^{p-1} |f(x)| + |f(x) + g(x)|^{p-1} |g(x)|$$

для каждого  $x \in A$ . Поскольку  $(p-1)q = p$ , то, применяя неравенство Гёльдера, получаем, что

$$\begin{aligned} \int_A |f(x) + g(x)|^p d\mu &\leqslant \left( \int_A |f(x) + g(x)|^p d\mu \right)^{1/q} \times \\ &\quad \times \left( \left( \int_A |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p} + \left( \int_A |g(x)|^p d\mu \right)^{1/p} \right). \end{aligned}$$

Если

$$a = \int_A |f(x) + g(x)|^p d\mu = 0,$$

то справедливость неравенства Минковского очевидна. В противном случае поделим обе части последнего неравенства на  $a^{1/q}$  и получим неравенство Минковского.  $\square$

**13.4.** Множество  $\widehat{L}_p(A)$  является линейным пространством (см. задачу 10.21 и начало решения задачи 13.3). Так как для функций  $f$  и  $g$ , равных нулю п.в., их сумма тоже равна нулю п.в., то  $J_0(A)$  — его подпространство, т. е. фактор-пространство определено. Из свойств интеграла Лебега ясно, что если  $f(x) = g(x)$  п.в., то  $\|f\|_p = \|g\|_p$ , т. е. норма определена корректно. Отсюда же вытекает, что  $\|f\|_p = 0$  тогда и только тогда, когда  $f(x) = 0$  п.в., т. е.  $f(x) = 0$  в смысле  $L_p(A)$ . Неотрицательность нормы очевидна из свойств интеграла Лебега. Далее,  $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$  для каждого элемента  $f(x) \in L_p(A)$  и любого числа  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Наконец, неравенство треугольника в  $L_p$  — это неравенство Минковского (с точностью до замены функций на класс эквивалентных функций).  $\square$

**13.5.** Линейность  $L_\infty(A)$  очевидна. Ясно также, что  $\|f\|_\infty \geq 0$ , что  $\|f\|_\infty = 0$  тогда и только тогда, когда  $f(x) = 0$  в  $L_\infty$ , и что  $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \|f\|_\infty$  для любого элемента  $f(x) \in L_\infty(A)$  и любого числа  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Пусть теперь  $f(x)$  и  $g(x)$  из  $L_\infty(A)$ ,  $a = \|f\|_\infty$  и  $b = \|g\|_\infty$ . Тогда  $\mu(\{x \in A : |f(x)| > a\}) = 0$  и  $\mu(\{x \in A : |g(x)| > b\}) = 0$ . Следовательно,  $\mu(\{x \in A : |f(x) + g(x)| > a + b\}) = 0$ , откуда следует, что  $\|f + g\|_\infty \leq a + b$ .  $\square$

**13.6.** Положим  $A_\alpha = \{x \in A : |f(x)| > \alpha\}$ . Пусть  $\mu A_\alpha = 0$ . Возьмём функцию  $g$ , равную нулю на  $A_\alpha$  и совпадающую с  $f$  вне этого множества. Тогда  $g \sim f$  и  $g(x) \leq \alpha$  всюду на  $A$ . Обратно, если нашлась такая функция  $g \sim f$ , что  $g(x) \leq \alpha$  всюду на  $A$ , то  $A_\alpha \subseteq \{x : g(x) \neq f(x)\}$ , и потому  $\mu A_\alpha = 0$ . Таким образом, если хотя бы одна из указанных в условии величин конечна, то конечна и вторая, и они равны.  $\square$

**13.7.** Пусть вначале  $\alpha + \beta > 0$  и  $\alpha|f(x)|^p = \beta|g(x)|^q$  п.в. на  $A$ . Предположим, что  $\beta > 0$ . Тогда

$$\int_A |f(x)g(x)| d\mu = \int_A \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/q} |f(x)|^{p-1} |f(x)| d\mu = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/q} \|f\|_p^p.$$

С другой стороны,

$$\|f\|_p \cdot \|g\|_q = \|f\|_p \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/q} \cdot \|f\|_p^{\frac{p}{q}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/q} \cdot \|f\|_p^p,$$

поэтому в неравенстве Гёльдера имеет место равенство. Пусть теперь

$$\int_A |f(x)g(x)| d\mu = \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Будем считать, что обе функции не эквивалентны нулю на  $A$ , иначе доказывать нечего. Из доказательства неравенства Гёльдера (см. решения задач 13.1 и 13.2), следует, что  $\frac{|g(x)|}{b} = \left(\frac{|f(x)|}{a}\right)^{p-1}$  п.в. на  $A$  при  $a = \|f\|_p > 0$  и  $b = \|g\|_q > 0$ . Поэтому  $a^p |g(x)|^q = b^q |f(x)|^p$  п.в. на  $A$ .  $\square$

**13.8.** Пусть вначале  $\alpha + \beta > 0$  и  $\alpha f(x) = \beta g(x)$  п.в. на  $A$ . Можно считать, что  $\beta > 0$ . Тогда

$$\|f + g\|_p = \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) \|f\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Пусть теперь  $\|f + g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$ . В этом случае (см. решения задач 13.3 и 13.7) имеем  $\alpha_1 |f(x)|^p = \beta_1 |f(x) + g(x)|^p$  и  $\alpha_2 |g(x)|^p = \beta_2 |f(x) + g(x)|^p$  п.в. на  $A$ , где  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \geq 0$ ,  $\alpha_1 + \beta_1 > 0$  и  $\alpha_2 + \beta_2 > 0$ . Отсюда непосредственно следует утверждение задачи.  $\square$

**13.9.** Пусть  $a = \|g\|_\infty$ . Тогда  $|f(x)g(x)| \leq a|f(x)|$  п.в. на  $A$ . Поэтому  $f(x)g(x) \in L(A)$  и

$$\int_A |f(x)g(x)| d\mu \leq a \int_A |f(x)| d\mu = \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty.$$

□

**13.10.** Если  $p_2 = \infty$ , то утверждение выполняется при  $C(p_1, p_2, A) = (\mu(A))^{1/p_1}$ . В противном случае согласно неравенству Гёльдера получаем

$$\|f\|_{p_1} = \left( \int_A |f(x)|^{p_1} \cdot 1 d\mu \right)^{1/p_1} \leq \left( \int_A |f(x)|^{p_2} d\mu \right)^{1/p_2} (\mu(A))^{\frac{p_2-p_1}{p_1 p_2}}.$$

□

**13.11.** Пусть  $A_n = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$  при  $n \in \mathbb{N}$  и

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/p}}{\ln^2(n+1)} \chi_{A_n}(x).$$

Заметим, что

$$|f(x)|^s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{s}{p}}}{\ln^{2s}(n+1)} \chi_{A_n}(x)$$

при всех  $s \in [1, \infty)$ . Следовательно,

$$\int_A |f(x)|^p d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln^{2p}(n+1)} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^{2p}(n+1)} < \infty.$$

В то же время для любого  $r > p$  выполнены равенства

$$\int_A |f(x)|^r d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{r/p-1}}{(n+1)\ln^{2r}(n+1)} = \infty.$$

□

**З а м е ч а н и е.** В задаче 13.11, так же как и в задачах 13.12–13.14, можно также подобрать ответ в виде  $f(x) = x^a \ln^c(x+b)\chi_E(x)$ .

**13.12.** Определим множества  $A_n = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$  для  $n \in \mathbb{N}$ . Пусть вначале  $p < \infty$ . Тогда положим

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{1/p} \chi_{A_n}(x).$$

Получим, что

$$\int_A (f(x))^p d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} n\mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty.$$

С другой стороны, для любого  $r \in [1, p)$  имеем

$$\int_A (f(x))^r d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n^{1-r/p}} < \infty.$$

Если  $p = \infty$ , то положим

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(n+1) \chi_{A_n}(x).$$

Ясно, что  $f(x) \notin L_{\infty}((0, 1))$ , но для любого  $r \in [1, \infty)$  выполнены условия

$$\int_A (f(x))^r d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^r(n+1)}{n(n+1)} < \infty.$$

□

**13.13.** Если  $p = \infty$ , то положим  $f(x) \equiv 1$  на  $(1, \infty)$ . Ясно, что  $f(x) \in L_{\infty}((1, \infty))$ , но  $f(x) \notin L_p((1, \infty))$  ни при каком  $p < \infty$ . Пусть теперь  $1 < p < \infty$ . Определим функцию

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/p} \ln(n+1)} \chi_{(n, n+1)}(x).$$

Заметим, что

$$\int_{(1, \infty)} (f(x))^p d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p(n+1)} < \infty,$$

поэтому  $f(x) \in L_p((1, \infty))$ . Пусть  $1 \leq r < p$ . Тогда

$$\int_{(1, \infty)} (f(x))^r d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{r}{p}} \ln^r(n+1)} = \infty.$$

□

**13.14.** Если  $p = 1$ , то можно использовать пример из задачи 13.11. Если  $p = \infty$ , то положим  $f(x) \equiv 1$  на  $(0, \infty)$ . Нетрудно видеть, что  $f(x) \in L_{\infty}((0, \infty))$ , но  $f(x) \notin L_p((0, \infty))$  ни при каком  $p < \infty$ .

Пусть теперь  $1 < p < \infty$ . Тогда (см. задачу 13.11) найдём такую функцию  $g(x) \in L_p((0, 1))$ , что  $g(x) \notin L_r((0, 1))$  при каждом  $r > p$ . Положим  $g(x) = 0$  при  $x \geq 1$ . Далее, найдём функцию (см. задачу 13.13)

$h(x) \in L_p((1, \infty))$ , не принадлежащую ни одному из  $L_r((1, \infty))$  при  $r \in [1, p)$ . Пусть  $h(x) = 0$  для  $x \in (0, 1]$  и  $f(x) = g(x) + h(x)$ . Если  $r > p$ , то  $f(x) \notin L_r((0, \infty))$ , поскольку  $g(x) \notin L_r((0, \infty))$ . Если  $r \in [1, p)$ , то  $f(x) \notin L_r((0, \infty))$ , поскольку  $h(x) \notin L_r((0, \infty))$ .  $\square$

**13.15.** Положим  $A_1 = \{x : |f(x)| > 1\}$  и  $A_2 = \{x : |f(x)| \leq 1\}$ . Тогда  $A = A_1 \sqcup A_2$ . Заметим, что если  $s < r < p < \infty$ , то на множестве  $A_1$  выполнено неравенство  $|f(x)|^r \leq |f(x)|^p$ , а на множестве  $A_2$  — неравенство  $|f(x)|^r \leq |f(x)|^s$ . Поэтому при  $p < \infty$  выполнены оценки

$$\begin{aligned} \int_A |f(x)|^r d\mu &= \int_{A_1} |f(x)|^r d\mu + \int_{A_2} |f(x)|^r d\mu \leq \\ &\leq \int_{A_1} |f(x)|^p d\mu + \int_{A_2} |f(x)|^s d\mu \leq \int_A |f(x)|^p d\mu + \int_A |f(x)|^s d\mu < \infty. \end{aligned}$$

Если же  $p = \infty$ , то по неравенству Чебышёва  $\mu A_1 < \infty$ , и выполняются оценки

$$\begin{aligned} \int_A |f(x)|^r d\mu &= \int_{A_1} |f(x)|^r d\mu + \int_{A_2} |f(x)|^r d\mu \leq \\ &\leq \mu A_1 (\|f\|_\infty)^r + \int_{A_2} |f(x)|^s d\mu \leq \mu A_1 (\|f\|_\infty)^r + \int_A |f(x)|^s d\mu < \infty. \end{aligned}$$

$\square$

**13.16.** Пусть для простоты  $1 < s < p < \infty$ . Тогда (см. задачу 13.11) найдётся такая функция  $g(x) \in L_p((0, 1))$ , что  $g(x) \notin L_r((0, 1))$  для каждого  $r > p$ . Положим  $g(x) = 0$  при  $x \geq 1$ . Затем найдём функцию (см. задачу 13.13)  $h(x) \in L_s((1, \infty))$ , не принадлежащую ни одному из  $L_r((1, \infty))$ ,  $r \in [1, s)$ . Положим  $h(x) = 0$  при  $x \in (0, 1]$  и  $f(x) = g(x) + h(x)$ . Тогда, аналогично решению задачи 13.14, показывается, что  $f(x)$  — подходящая функция.  $\square$

**13.17.** Пусть вначале

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = a < \infty.$$

Это означает, что существует такая последовательность  $p_n \uparrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f\|_{p_n} = a.$$

Для любого  $\varepsilon > 0$  и для каждого  $n$  по неравенству Чебышёва имеем

$$\mu(\{x \in A : |f(x)| > a + \varepsilon\}) = \mu(\{x \in A : |f(x)|^{p_n} > (a + \varepsilon)^{p_n}\}) \leq$$

$$\leq \frac{1}{(a + \varepsilon)^{p_n}} \|f\|_{p_n}^{p_n} = \left( \frac{\|f\|_{p_n}}{(a + \varepsilon)} \right)^{p_n} \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Отсюда следует, что  $\|f\|_\infty \leq a + \varepsilon$ , поэтому  $\|f\|_\infty \leq a$ . Следовательно, если  $\|f\|_\infty = \infty$ , то  $\|f\|_p \rightarrow \infty$  при  $p \rightarrow \infty$ . Если  $\|f\|_\infty < \infty$ , то для любого  $p \geq p_0$  получаем

$$\|f\|_p = \left( \int_A |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \|f\|_{p_0}^{\frac{p_0}{p}} \cdot \|f\|_\infty^{\frac{p-p_0}{p}},$$

откуда вытекает, что

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty.$$

Утверждение задачи следует из полученных неравенств.  $\square$

**13.18.** Заметим (см. задачу 13.10), что множество  $\{p \in [1, \infty] : \psi(p) < \infty\}$  либо пусто, либо является полуинтервалом  $[1, \alpha)$ , либо является отрезком  $[1, \alpha]$  (возможно,  $\alpha = \infty$ ). Из решения задачи 13.10 также следует, что если  $1 \leq r \leq s$  и  $\psi(s) < \infty$ , то  $\psi(r) \leq \psi(s)$ .  $\square$

**13.19.** Выберем такую последовательность  $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ , что  $\|f_n - f_{n_k}\|_p < 1/2^k$  при  $n \geq n_k$ . Предположим вначале, что  $\mu(A) < \infty$ . Тогда (см. задачу 13.10) выполнены оценки  $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_1 < C/2^k$ , где величина  $C$  зависит от  $p$  и  $\mu(A)$ . Рассмотрим сумму

$$\Phi(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|.$$

По теореме Б. Леви (задача 10.34)

$$\int_A \Phi(x) d\mu < \infty,$$

поэтому функция  $\Phi(x)$  конечна п.в. на  $A$ . Тогда ряд

$$f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$$

абсолютно сходится, а значит, и сходится п.в. на  $A$ . Но его  $N$ -я частичная сумма совпадает с  $f_{n_{N+1}}(x)$  при каждом  $N$ . Поэтому, если положить

$$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$$

в точках, где ряд сходится и  $f(x) = 0$  в остальных точках, то мы получаем утверждение задачи для случая  $\mu(A) < \infty$ . В общем случае пусть

$$A = \bigcup_{l=1}^{\infty} A_l,$$

где  $\mu(A_l) < \infty$  при  $l \in \mathbb{N}$ . Из вышеизложенного следует, что при каждом  $l$  существует конечная измеримая функция  $g_l(x)$  на  $A_l$ , для которой  $f_{n_k}(x) \rightarrow g_l(x)$  при  $k \rightarrow \infty$  п.в. на  $A_l$ . Полагая  $f(x) = g_l(x)$  при  $x \in A_l$ , где  $l \in \mathbb{N}$ , получим требуемое утверждение.  $\square$

**13.20.** Пусть  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  — фундаментальная последовательность в  $L_p(A)$ . Используя задачу 13.19, найдём подпоследовательность  $f_{n_k}(x)$ , которая сходится п.в. на  $A$  к конечной измеримой функции  $f(x)$ . Заметим, что числа  $\int_A |f(x)|^p d\mu$  ограничены в совокупно-

сти в силу фундаментальности последовательности  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ . Но  $|f_{n_k}(x)|^p \rightarrow |f(x)|^p$  при  $k \rightarrow \infty$  п.в. на  $A$ , и тогда по теореме Фату (см. задачу 10.35)  $f(x) \in L_p(A)$ . Пусть дано  $\varepsilon > 0$ . Найдём такое  $K_0$ , что для любых  $q, r > K_0$  выполнено неравенство  $\|f_q - f_r\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$ . Так как  $|f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x)|^p \rightarrow |f_{n_k}(x) - f(x)|^p$  при  $l \rightarrow \infty$  п.в. на  $A$ , то по теореме Фату  $\|f_{n_k} - f\|_p \leq \frac{\varepsilon}{2}$  при  $n_k > K_0$ . Отсюда следует, что  $\|f_r - f\|_p < \varepsilon$  при  $r > K_0$ .  $\square$

**13.21.** Пусть  $a_{m,n} = \|f_n - f_m\|_\infty$  при  $m, n \in \mathbb{N}$  и

$$A_{m,n} = \{x \in A: |f_n(x) - f_m(x)| > a_{m,n}\}.$$

По определению нормы в пространстве  $L_\infty(A)$  имеем:  $\mu(A_{m,n}) = 0$  для каждого  $m$  и  $n$ . Заметим, что последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  равномерно фундаментальна на множестве

$$B = A \setminus \bigcup_{m,n=1}^\infty A_{m,n}.$$

Как известно из курса математического анализа, в этом случае последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  равномерно сходится на  $B$  к некоторой функции  $f(x)$ , которая измерима на  $B$ . Пусть  $f(x) = 0$  при  $A \setminus B$ . Так как  $\mu(A \setminus B) = 0$ , то тем самым утверждение задачи доказано.  $\square$

**13.22.** Пусть дано  $\varepsilon > 0$ . В силу неравенства Чебышёва (см. задачу 10.51) получаем оценку

$$\begin{aligned} \mu(\{x \in A: |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) &= \mu(\{x \in A: |f_n(x) - f(x)|^p > \varepsilon^p\}) \leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int_A |f_n(x) - f(x)|^p d\mu \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

**13.23.** Утверждение немедленно вытекает из задачи 13.22 и теоремы Рисса (см. задачу 9.19).  $\square$

**13.24.** Пусть  $f_n(x) = n^3 \chi_{\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)}(x)$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Ясно, что  $f_n(x) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  для каждого  $x \in (0, 1)$ , но  $\|f_n\|_1 = \frac{n^3}{n(n+1)} \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

**13.25.** Ясно, что  $|f_n(x) - f(x)| \Rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ , поэтому  $|f_n(x) - f(x)|^p \Rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ . Более того,  $|f_n(x) - f(x)|^p \leqslant 2^p |F(x)|^p \in L(A)$  при всех  $x \in A$  и при любом  $n$ . Применяя задачу 10.38, получаем сходимость в  $L_p$ .  $\square$

**13.26.** В силу результата задачи 9.19 (теорема Ф. Рисса) найдётся подпоследовательность  $\{f_{n_k}(x)\}$ , сходящаяся к  $f(x)$  при  $k \rightarrow \infty$  п.в. на  $A$ . Тогда  $|f_{n_k}(x)|^p \rightarrow |f(x)|^p$  при  $k \rightarrow \infty$  п.в. на  $A$ , и по теореме Фату (см. задачу 10.35)  $\|f\|_p \leqslant C$ . Пусть дано произвольное  $\varepsilon > 0$ . Возьмём такое  $\delta > 0$ , что  $\delta^{1/r-1/p} < \frac{\varepsilon}{4(C+1)}$ . Рассмотрим измеримое множество  $B \subseteq A$  с  $\mu(B) < \delta$ . Тогда (см. задачу 13.10)

$$\left( \int_B |f_n(x)|^r d\mu \right)^{1/r} \leqslant \left( \int_A |f_n(x)|^p d\mu \right)^{1/p} \cdot (\mu(B))^{1/r-1/p} \leqslant C \delta^{1/r-1/p} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Аналогично,

$$\left( \int_B |f(x)|^r d\mu \right)^{1/r} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Найдём теперь такое  $N$ , что при  $n \geqslant N$  для множеств

$$A_n = \left\{ x \in A : |f_n(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{2(\mu(A) + 1)^{1/r}} \right\}$$

выполнены неравенства  $\mu(A_n) < \delta$ . Тогда для таких  $n$  получаем оценки

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_r &= \left( \int_A |f_n(x) - f(x)|^r d\mu \right)^{1/r} \leqslant \left( \int_{A \setminus A_n} |f_n(x) - f(x)|^r d\mu \right)^{1/r} + \\ &+ \left( \int_{A_n} |f_n(x)|^r d\mu \right)^{1/r} + \left( \int_{A_n} |f(x)|^r d\mu \right)^{1/r} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \end{aligned}$$

$\square$

**13.27.** Пусть

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^k f_n(x)$$

при  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда по неравенству Минковского

$$\|S_m - S_k\|_p = \left\| \sum_{n=k+1}^m f_n(x) \right\|_p \leq \sum_{n=k+1}^m \|f_n(x)\|_p$$

для каждого  $m > k \geq 1$ . Отсюда следует, что последовательность  $\{S_k\}_{k=1}^\infty$  фундаментальна в  $L_p(A)$ , поэтому (см. задачи 13.20 и 13.21) существует  $L_p$ -предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(x) = f(x) \in L_p(A).$$

Аналогично, если рассмотреть последовательность

$$Q_k(x) = \sum_{n=1}^k |f_n(x)|,$$

где  $k \in \mathbb{N}$ , на произвольном множестве конечной меры  $B \subseteq A$ , то с учётом задачи 13.10 мы получим, что она сходится в  $L_1(B)$  к некоторой функции  $F(x)$ , а тогда по теореме Б. Леви п.в. на  $B$  эта последовательность сходится. Поэтому ряд

$$\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$$

абсолютно сходится п.в. на  $A$ . Наконец, так как

$$\left| \sum_{n=1}^k f_n(x) \right|^p \rightarrow |f(x)|^p$$

при  $k \rightarrow \infty$  п.в. на  $A$  и так как

$$\left\| \sum_{n=1}^k f_n(x) \right\|_p \leq \sum_{n=1}^\infty \|f_n(x)\|_p$$

при всех  $k$ , то из теоремы Фату (см. задачу 10.35) получаем утверждение задачи.  $\square$

**13.28.** Пусть вначале  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ . Для любого  $\varepsilon > 0$  выберем такое  $N$ , что при каждом  $n \geq N$  множество  $A_n = \{x \in A : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2(\mu(A) + 1)}\}$  имеет меру  $\mu(A_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ . При таких  $n$  имеем

$$\begin{aligned} \int_A \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|} d\mu &= \int_{A_n} \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|} d\mu + \\ &+ \int_{A \setminus A_n} \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|} d\mu \leq \mu(A_n) + \frac{\varepsilon}{2(\mu(A) + 1)} \mu(A \setminus A_n) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Пусть теперь

$$\int_A \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|} d\mu \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда по неравенству Чебышёва для любого  $\varepsilon \in (0, 1)$  выполнена оценка

$$\begin{aligned} \mu \left( \{x \in A : \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|} > \varepsilon\} \right) &= \\ &= \mu \left( \{x \in A : |f_n(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}\} \right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int_A \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|} dx \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $n \rightarrow \infty$ , откуда следует, что  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ .  $\square$

**13.29.** Пусть  $f(x) = 0$  и  $f_n(x) = \frac{1}{n} \chi_{(-n,n)}(x)$  для  $x \in \mathbb{R}$  и  $n \in \mathbb{N}$ .

Тогда  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно на  $\mathbb{R}$ , поэтому  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $\mathbb{R}$ . В то же время

$$\int_A \frac{|f_n(x)|}{1 + |f_n(x)|} d\mu = 2n \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{2n}{n+1} \not\rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

**13.30.** Ясно, что  $\rho(f, g) = \rho(g, f)$  и  $\rho(f, g) \geqslant 0$  при всех  $f, g \in L$ . Если  $\rho(f, g) = 0$ , то (см. задачу 10.52)  $f(x) = g(x)$  п.в. на  $A$ , т.е.  $f = g$  в  $L$ . Докажем неравенство треугольника. Заметим, что если  $a, b$  и  $c$  — неотрицательные числа и  $a \leqslant b + c$ , то

$$\frac{a}{1+a} \leqslant \frac{b+c}{1+b+c} \leqslant \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \rho(f, g) &= \int_A \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} d\mu \leqslant \int_A \frac{|f(x) - h(x)|}{1 + |f(x) - h(x)|} d\mu + \\ &\quad + \int_A \frac{|h(x) - g(x)|}{1 + |h(x) - g(x)|} d\mu = \rho(f, h) + \rho(h, g) \end{aligned}$$

для любых функций  $f, g$  и  $h$  из  $L$ .  $\square$

**13.31.** Предположим, что такая метрика  $\rho(f, g)$  существует. Рассмотрим последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  конечных измеримых функций на  $[0, 1]$ , которая сходится по мере к 0 при  $n \rightarrow \infty$  на  $[0, 1]$ , но расходится в каждой точке (см. задачу 9.18). Тогда существуют подпоследовательность  $\{g_k(x) = f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$  и число  $\varepsilon > 0$ , для которых  $\rho(g_k, 0) \geqslant \varepsilon$

при всех  $k$ . Но  $g_k(x) \Rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $[0, 1]$ , и по теореме Рисса (задача 9.19) существует подпоследовательность  $\{g_{k_l}(x)\}_{l=1}^{\infty}$ , которая сходится к 0 п.в. на  $[0, 1]$ . Тогда по предположению  $\rho(g_{k_l}, 0) \rightarrow 0$  при  $l \rightarrow \infty$ , что противоречит выбору последовательности  $\{n_k\}$ .  $\square$

**Замечание.** Аналогично доказывается, что сходимость почти всюду на отрезке не может быть задана никакой топологией.

**13.32.** Заметим, что в силу результата задач 13.2 и 13.9 функции  $f(x)g(x)$  и  $f_n(x)g_n(x)$  принадлежат  $L_1(A)$  при всех  $n$ . При этом

$$\|f_n g - fg\|_1 = \int_A |f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| d\mu \leq \|f_n - f\|_p \|g\|_q \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

**13.33.** Заметим, что в силу результата задач 13.2 и 13.9 функция  $f(x)g(x)$  и все функции  $f_n(x)g_n(x)$  принадлежат  $L_1(A)$ . Так как  $g_n \rightarrow g$  при  $n \rightarrow \infty$  в  $L_q(A)$ , то существует такое  $C > 0$ , что  $\|g_n\|_q \leq C$  для всех  $n$ . Следовательно (см. задачу 13.32),

$$\begin{aligned} \|f_n g_n - fg\|_1 &\leq \|f_n g_n - f g_n\|_1 + \|g_n f - fg\|_1 \leq \|f_n - f\|_p \|g_n\|_q + \\ &+ \|g_n - g\|_q \|f\|_p \leq C \|f_n - f\|_p + \|f\|_p \|g_n - g\|_q \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

**13.34.** Заметим, что  $\Phi(u) \rightarrow 0$  при  $u \rightarrow 0_+$ . Далее, из задачи 13.22 следует, что  $\Phi(|f_n(x) - f(x)|) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ . Пусть заданы  $\varepsilon > 0$  и  $\gamma > 0$ . Положим  $\delta = \Phi(\varepsilon) > 0$ . Затем найдём такое  $N$ , что

$$\mu(B_n) \equiv \mu(\{x \in A : \Phi(|f_n(x) - f(x)|) \geq \delta\}) < \gamma$$

при  $n \geq N$ . Пусть  $A_n = \{x \in A : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}$  для таких  $n$ . Тогда  $A_n \subseteq B_n$  при  $n \geq N$ , поэтому  $\mu(A_n) < \gamma$ .  $\square$

**13.35.** Если  $\|f\|_p = 0$ , то утверждение очевидно. Пусть  $\|f\|_p > 0$ . Применяя неравенство Гёльдера, получаем, что

$$\left| \int_A f(x)g(x) d\mu \right| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \leq \|f\|_p$$

для любой функции  $g(x) \in L_q(A)$  с  $\|g\|_q \leq 1$ . С другой стороны, пусть

$$g_0(x) = \frac{|f(x)|^{p-1} \operatorname{sgn} f(x)}{\|f\|_p^{p-1}}.$$

Ясно, что  $g_0(x)$  — измеримая функция на  $A$ . Далее, так как  $(p - 1)q = p$ , то

$$\|g_0\|_q^q = \int_A \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} d\mu = 1.$$

Наконец,

$$\int_A f(x)g_0(x) d\mu = \frac{1}{\|f\|_p^{p-1}} \int_A |f(x)|^p d\mu = \|f\|_p.$$

□

**13.36.** Так как

$$\int_A f(x)g(x) d\mu \leq \int_A |f(x)g(x)| d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q = \|f\|_p,$$

то из условий следует (см. задачу 13.7), что  $f(x)g(x) = |f(x)g(x)|$  п.в. на  $A$  и что существуют такие  $\alpha > 0$  и  $\beta > 0$ , что  $\alpha|f(x)|^p = \beta|g(x)|^q$  п.в. на  $A$ . Так как  $\|f\|_p > 0$ , то  $\beta > 0$ . Поэтому  $|g(x)| = \gamma|f(x)|^{p/q} = \gamma|f(x)|^{p-1}$ , где  $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$ . Поскольку  $\|g\|_q = 1$ , то  $\gamma = \frac{1}{\|f\|_p^{p-1}}$ . Наконец,

$\operatorname{sgn} g(x) = \operatorname{sgn} f(x)$  п.в. на  $A$ . Таким образом, мы однозначно восстановили функцию  $g$ . □

**13.37.** Ясно, что если  $g(x) \in L_\infty(A)$  и  $\|g\|_\infty \leq 1$ , то

$$\left| \int_A f(x)g(x) d\mu \right| \leq \|f\|_1.$$

Для  $g_0(x) = \operatorname{sgn} f(x) \in L_\infty(A)$  имеем

$$\int_A f(x)g_0(x) d\mu = \int_A |f(x)| d\mu = \|f\|_1.$$

□

**13.38.** Положим  $f(x) = g_1(x) = \chi_{(0,\frac{1}{2})}(x)$  и  $g_2(x) = 1$  на  $(0, 1)$ . □

**13.39.** Если  $\|f\|_\infty = 0$ , то утверждение очевидно. Пусть  $a = \|f\|_\infty > 0$ . Заметим, что

$$\left| \int_A f(x)g(x) d\mu \right| \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_1 \leq \|f\|_\infty$$

для любой функции  $g(x) \in L_1(A)$  с  $\|g\|_1 \leq 1$ . Пусть дано некоторое  $\varepsilon > 0$  и  $A_\varepsilon = \{x \in A : |f(x)| > a - \varepsilon\}$ . Тогда  $\mu(A_\varepsilon) > 0$ . Можно считать также, что  $\mu(A_\varepsilon) < \infty$ , иначе вместо него рассмотрим измеримое множество  $B_\varepsilon \subset A_\varepsilon$  с  $0 < \mu(B_\varepsilon) < \infty$ . Пусть теперь

$g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\mu(A_\varepsilon)} \chi_{A_\varepsilon}(x) \operatorname{sgn} f(x)$ . Заметим, что  $g_\varepsilon(x) \in L_1(A)$  и  $\|g_\varepsilon\|_1 = 1$ . Далее,

$$\int_A f(x) g_\varepsilon(x) d\mu = \frac{1}{\mu(A_\varepsilon)} \int_{A_\varepsilon} |f(x)| d\mu \geq \frac{a - \varepsilon}{\mu(A_\varepsilon)} \mu(A_\varepsilon) = a - \varepsilon.$$

Так как  $\varepsilon > 0$  произвольно, то точная верхняя грань равна  $a$ .  $\square$

**13.40.** Пусть  $f(x) = x$  на  $(0, 1)$ . Тогда  $\|f\|_\infty = 1$ . Пусть  $g(x) \in L_1((0, 1))$  и  $0 < \|g\|_1 \leq 1$ . Выберем  $\gamma \in (0, 1)$  так, что (см. задачу 10.67)

$$\int_{(0,1-\gamma)} |g(x)| d\mu > \frac{1}{2} \|g\|_1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_{(0,1)} f(x) g(x) d\mu \right| &\leq \int_{(0,1-\gamma)} x |g(x)| d\mu + \int_{(1-\gamma,1)} |g(x)| d\mu \leq \\ &\leq (1 - \gamma) \int_{(0,1-\gamma)} |g(x)| d\mu + \int_{(1-\gamma,1)} |g(x)| d\mu < \|g\|_1 - \frac{\gamma}{2} \|g\|_1 < 1. \end{aligned}$$

$\square$

**13.41.** Положим  $g_1(x) = 2\chi_{(0,\frac{1}{2})}(x)$ ,  $g_2(x) = 2\chi_{(\frac{1}{2},1)}(x)$  и  $f(x) = 1$  на  $(0, 1)$ .  $\square$

**13.42.** Докажем вначале, что  $f(x)$  конечна п.в. на  $A$ . Если  $|f(x)| = \infty$  на множестве  $E$  с  $\mu(E) > 0$ , то можно выбрать измеримое множество  $E_1 \subseteq E$  с  $0 < \mu(E_1) < \infty$ . Пусть  $g(x) = \chi_{E_1}(x) \in L_q(A)$ . Тогда  $f(x)g(x) \notin L(A)$ , и мы приходим к противоречию. Итак,  $f(x)$  конечна п.в. на  $A$ . Представим теперь  $A$  в виде

$$A = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad \text{где } \mu(A_k) < \infty \text{ для всех } k.$$

Обозначим

$$B_n = \bigsqcup_{k=1}^n A_k, \quad \text{где } n \in \mathbb{N}.$$

Предположим, что  $f(x) \notin L_p(A)$ , и определим множества  $E(n) = \{x \in B_n : |f(x)| \leq n\}$  для  $n \in \mathbb{N}$ . Пусть также  $f_n(x) = f(x)\chi_{E(n)}(x)$  при всех  $n$ . По предположению (см. задачу 10.32)  $\|f_n\|_p \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Поэтому мы можем выбрать такую возрастающую последовательность натуральных чисел  $\{n_l\}_{l=1}^{\infty}$ , что

$$c_l = \int_{E(n_{l+1}) \setminus E(n_l)} |f(x)|^p d\mu > 2^l$$

при  $l \in \mathbb{N}$ , где  $n_1 = 1$ . Определим функции

$$g_l(x) = \frac{|f(x)|^{p-1} \operatorname{sgn} f(x)}{l^{\frac{p-1}{p}} c_l^{\frac{p}{p}}} \chi_{E(n_{l+1}) \setminus E(n_l)}(x)$$

при  $l \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\|g_l\|_q = \frac{c_l^{1/q}}{l^{\frac{p-1}{p}}} = \frac{1}{l^2}$ . Обозначим

$$g(x) = \sum_{l=1}^{\infty} g_l(x).$$

В силу результата задачи 13.27 функция  $g(x)$  принадлежит  $L_q(A)$ . Ясно, что  $f(x)g_l(x)$  — измеримые неотрицательные функции на  $A$  для каждого  $l$ , поэтому по теореме Б. Леви

$$\begin{aligned} \int_A f(x)g(x) d\mu &= \sum_{l=1}^{\infty} \int_A f(x)g_l(x) d\mu = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^{\frac{p-1}{p}}} \int_{E(n_{l+1}) \setminus E(n_l)} |f(x)|^p d\mu = \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{c_l^{1/p}}{l^2} \geq \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2^{l/p}}{l^2} = \infty. \end{aligned}$$

Полученное противоречие доказывает, что  $f(x) \in L_p(A)$ .  $\square$

**13.43.** Достаточно взять  $g(x) \equiv 1$ .  $\square$

**13.44.** Аналогично решению задачи 13.42 показывается, что  $f(x)$  конечна п.в. на  $A$ . Предположим, что  $f(x) \notin L_{\infty}(A)$ . Тогда можно выбрать такую последовательность непересекающихся множеств  $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$  с  $0 < \mu(A_k) < \infty$ , что  $|f(x)| > k^2$  при  $x \in A_k$ , где  $k \in \mathbb{N}$ . Возьмём  $g_k(x) = \frac{1}{k^2 \mu(A_k)} \chi_{A_k}(x) \operatorname{sgn} f(x)$  при каждом  $k$ , и пусть

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x).$$

Из задачи 13.27 следует, что  $g(x) \in L_1(A)$ . Ясно, что  $f(x)g_k(x)$  — измеримые неотрицательные функции на  $A$  для каждого  $k$ , поэтому с учётом теоремы Б. Леви получаем, что

$$\begin{aligned} \int_A f(x)g(x) d\mu &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_A f(x)g_k(x) d\mu = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \mu(A_k)} \int_{A_k} |f(x)| d\mu \geq \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty. \end{aligned}$$

Полученное противоречие доказывает, что  $f(x) \in L_1(A)$ .  $\square$

**13.45.** Пусть вначале  $f(x)$  — простая функция. Тогда

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{A_k}(x),$$

где  $0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n$ , а измеримые множества конечной меры  $A_k$  попарно не пересекаются. Заметим, что

$$(f(x))^p = \sum_{k=1}^n c_k^p \chi_{A_k}(x)$$

и

$$F(t) = \begin{cases} \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n) & \text{при } 0 < t < c_1, \\ \mu(A_2) + \dots + \mu(A_n) & \text{при } c_1 \leq t < c_2, \\ \dots & \dots \\ \mu(A_n) & \text{при } c_{n-1} \leq t < c_n, \\ 0 & \text{при } t \geq c_n. \end{cases}$$

Полагая  $c_0 = 0$ , получаем, что

$$\begin{aligned} p \int_{(0, \infty)} t^{p-1} F(t) d\mu_1 &= p \sum_{k=1}^n \left( \sum_{r=k}^n \mu(A_r) \right) \int_{c_{k-1}}^{c_k} t^{p-1} dt = \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{r=k}^n \mu(A_r) \right) \times (c_k^p - c_{k-1}^p) = \sum_{k=1}^n c_k^p \mu(A_k) = \int_A (f(x))^p d\mu, \end{aligned}$$

и мы доказали в этом случае требуемое равенство. В общем случае построим (см. задачу 9.29) такую последовательность  $h_n(x)$  простых неотрицательных функций, что  $h_n(x) \uparrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ . Применив теорему Б. Леви, получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A (h_n(x))^p d\mu = \int_A (f(x))^p d\mu.$$

Далее, последовательность  $\{F_{h_n}(t)\}_{n=1}^{\infty}$  неубывающая для каждого  $t \in (0, \infty)$ , и (см. задачу 7.51)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{h_n}(t) = F_f(t)$$

для любого  $t \in (0, \infty)$ . Поэтому, вновь применяя теорему Б. Леви, получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(0, \infty)} t^{p-1} F_{h_n}(t) d\mu_1 = \int_{(0, \infty)} t^{p-1} F_f(t) d\mu_1.$$

В то же время из предыдущих рассуждений следует, что

$$\int_A (h_n(x))^p d\mu = p \int_{(0, \infty)} t^{p-1} F_{h_n}(t) d\mu_1.$$

Из трёх полученных равенств следует утверждение задачи.  $\square$

**13.46.** Утверждение следует из задачи 13.45.  $\square$

**13.47.** Пусть  $f(x) \in L(A_1)$ . Тогда функции  $f_+(x)$  и  $f_-(x)$  — из  $L(A_1)$ . Заметим, что

$$\mu_1(\{x \in A_1 : f_+(x) > t\}) = \mu_2(\{y \in A_2 : g_+(y) > t\})$$

для каждого  $t \geq 0$ . С другой стороны, при всех  $t \geq 0$  выполнено равенство

$$\{x \in A_1 : f_-(x) > t\} = \{x \in A_1 : f(x) < -t\} =$$

$$= A_1 \setminus \{x \in A_1 : f(x) \geq -t\} = A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in A_1 : f(x) > -t - \frac{1}{n} \right\},$$

где указанное счётное пересечение является пересечением вложенных множеств. Аналогичное равенство верно для функции  $g$ . Так как  $\mu_1(A_1) = \mu_2(A_2) < \infty$ , то по свойствам меры мы получаем, что

$$\mu_1(\{x \in A_1 : f_-(x) > t\}) = \mu_2(\{y \in A_2 : g_-(y) > t\}).$$

Отсюда следует, что (см. задачу 13.46)  $g_+(x), g_-(x) \in L(A_1)$  и что

$$\int_{A_1} f_+(x) d\mu_1 = \int_{A_2} g_+(y) d\mu_2, \quad \int_{A_1} f_-(x) d\mu_1 = \int_{A_2} g_-(y) d\mu_2.$$

Из полученных формул следует утверждение задачи.  $\square$

**13.48.** Пусть  $f(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{(1, \infty)}(x)$  и  $g(x) = \frac{1}{x^2} \chi_{(1, \infty)}(x) + \frac{1}{x} \chi_{(-\infty, 0)}(x)$ . Ясно, что  $f(x) \in L(\mathbb{R})$ ,  $g(x) \notin L(\mathbb{R})$  и

$$\mu(\{x \in \mathbb{R} : f(x) > t\}) = \mu(\{x \in \mathbb{R} : g(x) > t\})$$

для любого  $t \geq 0$ . Но при  $t < 0$  выполнены равенства

$$\mu(\{x \in \mathbb{R} : f(x) > t\}) = \infty = \mu(\{x \in \mathbb{R} : g(x) > t\}).$$

$\square$

**13.49.** Пусть вначале  $g(x)$  — простая функция. Тогда

$$g(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{A_k}(x),$$

где  $0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n$ , а измеримые множества конечной меры  $A_k$  попарно не пересекаются. Получим, что  $F(y) = 0$  при  $y \geq c_n$  и

$$F(y) = \int_{\bigsqcup_{k=i}^n A_k} f(x) d\mu$$

при  $c_{i-1} < y < c_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$  и  $c_0 = 0$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{(0,\infty)} F(y) d\mu_1 &= \sum_{i=1}^n \left( (c_i - c_{i-1}) \sum_{k=i}^n \int_{A_k} f(x) d\mu \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \int_{A_i} f(x) d\mu = \int_A f(x) g(x) d\mu. \end{aligned}$$

В общем случае построим (см. задачу 9.29) такую последовательность  $g_n(x)$  простых неотрицательных функций, что  $g_n(x) \uparrow g(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $A$ . Так как

$$A_y(g) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_y(g_n)$$

и  $A_y(g_1) \subseteq A_y(g_2) \subseteq \dots$ , то по теореме Б. Леви

$$F_n(y) \equiv \int_{A_y(g_n)} f(x) d\mu \uparrow F(y)$$

при  $n \rightarrow \infty$  для каждого  $y \in (0, \infty)$ . Так как  $f_n(x)g(x) \uparrow f(x)g(x)$ , то, вновь применяя теорему Б. Леви, получаем, что

$$\begin{aligned} \int_{(0,\infty)} F(y) d\mu_1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(0,\infty)} F_n(y) d\mu_1 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f(x) g_n(x) d\mu = \int_A f(x) g(x) d\mu. \end{aligned}$$

□

**13.50.** Ясно, что достаточно доказать утверждение для неотрицательных функций  $f(x)$ . Пусть последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  простых неотрицательных функций на  $[a, b]$  такова, что  $f_n(x) \uparrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$

на  $[a, b]$ . Тогда, применяя теорему Лебега (см. задачу 10.37), получаем, что

$$\|f - f_n\|_p^p = \int_{[a,b]} |f(x) - f_n(x)|^p d\mu \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Отсюда следует, что достаточно доказать утверждение для простых  $f(x)$ . Но простая функция является линейной комбинацией характеристических функций измеримых множеств. Поэтому достаточно доказать утверждение для  $f(x) = \chi_A(x)$ , где  $A \subseteq [a, b]$  измеримое. По определению измеримого множества существует такое множество

$$A_1 = \bigsqcup_{q=1}^m \prod_{i=1}^n (a_i(q), b_i(q)),$$

что  $\mu(A \Delta A_1) < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$ . Отсюда следует, что

$$\|\chi_A - \chi_{A_1}\|_p = (\mu(A \Delta A_1))^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь при достаточно малых  $\delta > 0$  рассмотрим непрерывные функции  $h_{i,q,\delta}(x_i)$ , равные 1 при  $x_i \in (a_i(q) + \delta, b_i(q) - \delta)$ , равные нулю при  $x_i \notin (a_i(q), b_i(q))$  и линейные на оставшихся интервалах, где  $q = 1, 2, \dots, m$  и  $i = 1, 2, \dots, n$ . Положим

$$h_\delta(x) = \sum_{q=1}^m \prod_{i=1}^n h_{i,q,\delta}(x_i) \in C([a, b]).$$

Заметим, что  $h_\delta(x) \uparrow \chi_{A_1}(x)$  всюду. По теореме Лебега при достаточно малом  $\delta > 0$  выполнено неравенство  $\|\chi_{A_1} - h_\delta\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$ . Поэтому  $\|\chi_A - h_\delta\|_p < \varepsilon$ , откуда следует утверждение задачи.  $\square$

**13.51.** Пусть даны  $f(x) \in L_p([a, b])$  и  $\varepsilon > 0$ . Тогда (см. задачу 13.50) существует такая функция  $g(x) \in C([a, b])$ , что  $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$ . По теореме Вейерштрасса существует такой многочлен  $q(x)$ , что

$$\max_{x \in [a, b]} |g(x) - q(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(\mu([a, b]))^{1/p}}.$$

Тогда  $\|g - q\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$ , поэтому  $\|f - q\|_p < \varepsilon$ .  $\square$

**13.52.** Пусть вначале  $n = 1$ . Тогда в силу результата задачи 13.51 множество всех многочленов всюду плотно в  $L_p([a, b])$ . Но тогда счётное множество всех многочленов с рациональными коэффициентами

также всюду плотно в  $L_p([a, b])$ . Действительно, если даны два многочлена

$$P(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k \quad \text{и} \quad Q(x) = \sum_{k=0}^n d_k x^k,$$

то имеет место оценка

$$\sup_{[a,b]} |P(x) - Q(x)| \leq \max \{1, |a|^n, |b|^n\} \sum_{k=0}^n |c_k - d_k|.$$

Поэтому, заменяя коэффициенты многочлена достаточно близкими рациональными числами, получим достаточно близкий в метрике пространства  $L_p([a, b])$  многочлен с рациональными коэффициентами.

При  $n > 1$  можно провести аналогичное доказательство с использованием многомерных аналогов теоремы Вейерштрасса. Мы проведём другое рассуждение.

Как показано в решении задачи 13.50, любую функцию из  $L_p$  можно сколь угодно точно приблизить в  $L_p([a, b])$  функцией вида

$$f(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{E_k}(x), \tag{i}$$

где  $E_k$  — измеримые множества. Обозначим через  $W$  совокупность всех множеств вида  $B = \bigcup_{k=1}^n [a_k, b_k]$ , где  $a_k \in \mathbb{Q}^n$  и  $b_k \in \mathbb{Q}^n$ . Нетрудно видеть, что совокупность  $W$  счётна и для любого измеримого  $A$  при каждом  $\varepsilon > 0$  найдётся такое  $B \in W$ , что  $\mu(A \Delta B) < \varepsilon^p$ , т. е.  $\|\chi_A - \chi_B\|_p < \varepsilon$ . Поэтому любую функцию вида (i) можно сколь угодно точно приблизить в метрике  $L_p$  функцией вида

$$g(x) = \sum_{k=1}^n q_j \chi_{B_j}(x), \quad q_j \in \mathbb{Q}, \quad B_j \in W,$$

а множество таких функций счётно.  $\square$

**13.53.** Пусть даны  $f(x) \in L_p(\mathbb{R})$  и  $\varepsilon > 0$ . Тогда в силу теоремы Лебега (см. задачу 10.37) найдётся такое  $N$ , что

$$\left( \int_{|x|>N} |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Применяя задачу 13.50, найдём такую функцию  $h(x) \in C([-N, N])$ , что

$$\left( \int_{[-N,N]} |f(x) - h(x)|^p d\mu \right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Выберем  $\delta > 0$  так, чтобы  $\max(|h(-N)|, |h(N)|)\delta^{1/p} < \frac{\varepsilon}{6}$ , и определим функцию  $g(x) \in C(\mathbb{R})$ , совпадающую с  $h(x)$  при  $x \in [-N, N]$ ,  $g(x) = 0$  для  $|x| \geq N + \delta$  и линейную на оставшихся интервалах. Тогда  $g(x) \in C_0(\mathbb{R})$  и

$$\left( \int_{|x| \leq N} |g(x)|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left( \int_{N \leq |x| \leq N+\delta} |g(x)|^p d\mu \right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Из полученных оценок вытекает, что  $\|f - g\|_p < \varepsilon$ .  $\square$

**13.54.** Пусть  $P_{n,k}$  — множество функций, равных многочлену с рациональными коэффициентами степени не выше  $k$  на  $[-n, n]$  и нулю при  $|x| > n$ , где  $n \in \mathbb{N}$  и  $k \in \mathbb{N}$ . Ясно, что множество

$$P = \bigcup_{n,k=1}^{\infty} P_{n,k}$$

счётно. Пусть теперь даны функция  $f(x) \in L_p(\mathbb{R}^1)$  и число  $\varepsilon > 0$ . В силу результата задачи 13.53 найдётся такая функция  $g(x) \in C_0(\mathbb{R})$ , что  $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$ . Выберем такое  $n$ , что  $g(x) = 0$  при  $|x| \geq n$ . По теореме Вейерштрасса найдётся такой многочлен  $q_1(x)$ , что

$$\max_{x \in [-n, n]} |g(x) - q_1(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(2n)^{1/p}}.$$

Можно считать (см. решение задачи 13.52), что  $q_1(x)$  имеет рациональные коэффициенты. Обозначим через  $q(x)$  произведение  $q_1(x)$  на индикатор отрезка  $[-n, n]$ . Тогда  $q(x) \in P$  и  $\|g - q\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$ , так что  $\|f - q\|_p < \varepsilon$ .  $\square$

**13.55.** Ясно, что  $\rho(A, B) \geq 0$  и  $\rho(A, B) = \rho(B, A)$  для любых множеств  $A$  и  $B$  из  $M$ . Далее, так как  $A \Delta B \subseteq (A \Delta C) \cup (B \Delta C)$  для любых множеств  $A, B$  и  $C$  из  $M$ , то  $\rho(A, B) \leq \rho(A, C) + \rho(B, C)$ .  $\square$

**13.56.** Пусть вначале пространство  $L_p(X)$  сепарабельно. Тогда его подмножество  $\{\chi_A(x)\}_{A \in M}$  также сепарабельно. Поскольку  $\mu(A \Delta B) = \|\chi_A - \chi_B\|_p^p$  для любых множеств  $A$  и  $B$  из  $M$ , то пространство  $(M, \rho)$  сепарабельно. Обратно, пусть пространство  $(M, \rho)$  сепарабельно. Тогда сепарабельно и множество всех простых функций. Но простые функции всюду плотны в  $L_p(X)$ , так что и всё пространство  $L_p(X)$  сепарабельно.  $\square$

**13.57.** Пусть  $f_t(x) = \chi_{[0,t]}(x)$  для каждого  $t \in [0, 1]$ . Множество таких функций имеет мощность континуума, но если  $t_1 \neq t_2$ , то

$\|f_{t_1} - f_{t_2}\|_\infty = 1$ . Поэтому  $L_\infty([0, 1])$  — несепарабельное пространство.  $\square$

**13.58.** Пусть  $\alpha = \inf_{c \in \mathbb{R}} \|f - c\|_p$ . Тогда найдётся последовательность вещественных чисел  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ , для которой  $\|f - c_n\|_p < \alpha + \frac{1}{n}$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Она ограничена, так как

$$|c_n| = \frac{\|c_n\|_p}{(\mu(A))^{1/p}} \leqslant \frac{\|f\|_p + \|f - c_n\|_p}{(\mu(A))^{1/p}} \leqslant \frac{\|f\|_p + \alpha + 1}{(\mu(A))^{1/p}}$$

при всех  $n$ . Поэтому можно выбрать такую подпоследовательность  $\{c_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ , что существует  $\lim_{k \rightarrow \infty} c_{n_k} = c_0$ . Тогда  $c_{n_k} \rightarrow c_0$  при  $k \rightarrow \infty$  в  $L_p(A)$  и, следовательно,

$$\|f - c_0\|_p = \lim_{k \rightarrow \infty} \|f - c_{n_k}\|_p = \alpha.$$

$\square$

**13.59.** Предположим, что существуют два различных вещественных числа  $c_1, c_2$ , для которых

$$\|f - c_1\|_p = \|f - c_2\|_p = \inf_{c \in \mathbb{R}} \|f - c\|_p = \alpha.$$

Пусть  $c_3 = \frac{c_1 + c_2}{2}$ . Тогда

$$\|f - c_3\|_p = \left\| \frac{1}{2}(f - c_1) + \frac{1}{2}(f - c_2) \right\|_p \leqslant \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha.$$

Отсюда следует, что  $\|f - c_3\|_p = \alpha$ . Поэтому в предыдущей оценке имеет место равенство. Тогда в силу результата задачи 13.8 существуют такие неотрицательные  $\beta$  и  $\gamma$ , что  $\beta + \gamma > 0$  и  $\beta(f(x) - c_1) = \gamma(f(x) - c_2)$  п.в. на  $A$ . Поскольку  $c_1 \neq c_2$ , то  $\beta \neq \gamma$ , а тогда п.в. выполнено равенство  $f(x) = \frac{\beta c_1 - \gamma c_2}{\beta - \gamma} = c_4$ . Но ясно, что в этом случае  $c_4$  — единственное число, для которого  $\|f - c_4\|_p = 0 = \inf_{c \in \mathbb{R}} \|f - c\|_p$ . Мы получили противоречие.  $\square$

**13.60.** Пусть  $f(x) = \chi_{(0, \frac{1}{2})}(x) - \chi_{(\frac{1}{2}, 1)}(x)$ . Тогда  $\|f - c\|_1 = 1$  для любого  $c \in [-1, 1]$  и  $\|f - c\|_1 > 1$  при  $|c| > 1$ .  $\square$

**13.61.** Пусть

$$b_1 = \inf \{b \in \mathbb{R}: \mu(\{x \in A: f(x) > b\}) = 0\}$$

и

$$b_2 = \sup \{b \in \mathbb{R}: \mu(\{x \in A: f(x) < b\}) = 0\}.$$

Ясно, что  $\|f\|_\infty = \max(|b_1|, |b_2|)$ , и для любого  $c \in \mathbb{R}$  имеем:  $\|f - c\|_\infty = \max(|b_1 - c|, |b_2 - c|)$ . Поэтому

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \|f - c\|_\infty = \frac{b_1 - b_2}{2} = \left\| f - \frac{b_1 + b_2}{2} \right\|_\infty$$

и искомое число  $c_0 = \frac{b_1 + b_2}{2}$  единственno.  $\square$

**13.62.** Пусть дано  $\varepsilon > 0$ . Используя задачу 13.50, найдём такую функцию  $g(x) \in C([a, b])$ , что  $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$ . По теореме Кантора найдётся такое  $\delta > 0$ , что  $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)^{1/p}}$  для любых  $x, y \in [a, b]$  при  $|x - y| \leq \delta$ . Тогда при  $0 \leq h \leq \delta$  получаем, что

$$\begin{aligned} \left( \int_{[a,b-h]} |f(x+h) - f(x)|^p d\mu \right)^{1/p} &\leq 2\|f - g\|_p + \\ &+ \left( \int_{[a,b-h]} |g(x+h) - g(x)|^p d\mu \right)^{1/p} < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3(b-a)^{1/p}} \cdot (b-a)^{1/p} = \varepsilon, \end{aligned}$$

откуда следует утверждение задачи.  $\square$

**13.63.** Пусть вначале  $p > 1$  и, как обычно,  $q = \frac{p}{p-1}$ . Возьмём некоторое число  $h \in (0, b-a)$ . Тогда для любого натурального  $n$  по неравенствам Гёльдера и Минковского получаем

$$\begin{aligned} \int_{[a,b-h]} |f(x+h) - f(x)| d\mu &\leq (b-a)^{1/q} \|f(x+h) - f(x)\|_{L_p([a,b-h])} \leq \\ &\leq (b-a)^{1/p} \sum_{k=1}^n \left\| f\left(x + \frac{kh}{n}\right) - f\left(x + \frac{(k-1)h}{n}\right) \right\|_{L_p([a,b-h])} \leq \\ &\leq (b-a)^{1/q} n \omega\left(f; \frac{h}{n}\right)_p \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Поэтому

$$\int_{[a,b-h]} |f(x+h) - f(x)| d\mu(x) = 0$$

для любого  $h \in [0, b-a]$ . Поскольку функция

$$g(x, h) = \begin{cases} f(x+h) - f(x), & a \leq x \leq b \text{ и } 0 \leq h \leq b-x, \\ 0 & — \text{иначе} \end{cases}$$

измерима на  $[a, b] \times [0, b - a]$ , то в силу результата задачи 12.14 и теоремы Фубини имеют место равенства

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{[0, b-a)} \left( \int_{[a, b-h]} |f(x+h) - f(x)| d\mu(x) \right) d\mu(h) = \\ &= \int_{[a, b]} \left( \int_{[0, b-x]} |f(x+h) - f(x)| d\mu(h) \right) d\mu(x), \quad (\text{ii}) \end{aligned}$$

откуда следует, что для почти всех  $x \in [a, b]$  выполнено равенство

$$\int_{[a, b-x]} |f(x+h) - f(x)| d\mu(h) = 0. \quad (\text{iii})$$

Для  $p = 1$  равенство (iii) можно получитьще проще. Используя теорему Фубини (задача 12.4), получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{[0, b-a]} \int_{[a, b-h]} |f(x+h) - f(x)| d\mu(x) d\mu(h) = \\ &= \int_{[a, b]} \int_{[0, b-x]} |f(x+h) - f(x)| d\mu(h) d\mu(x). \end{aligned}$$

Поэтому для почти всех  $x \in [a, b]$  выполнено (iii).

В обоих случаях из условия (iii) вытекает, что  $f(x+h) = f(x)$  для почти всех  $x \in [a, b]$  и почти всех  $h \in [0, b-x]$ . Положим  $y_n = a + \frac{b-a}{2n}$  для каждого натурального  $n$ . Тогда найдутся такие точки  $x_n \in [a, y_n]$ , что  $f(x) = f(x_n)$  для почти всех  $x \in (x_n, b]$ . Обозначим через  $E_n$  множество тех точек  $x$  из  $(x_n, b]$ , где равенство  $f(x) = f(x_n)$  справедливо. Поскольку  $\mu([y_1, b] \setminus E_n) = 0$  при каждом  $n \in \mathbb{N}$ , то пересечение всех множеств  $E_n$  непусто, а тогда все значения  $f(x_n)$  совпадают и функция

$f(x)$  постоянна на множестве  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ , где  $\mu([a, b] \setminus E) = 0$ .  $\square$

**13.64.** Пусть дано  $\varepsilon > 0$ . Найдём такое  $N$ , что

$$\int_{|x| \geq N} |f(x)| d\mu < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Обозначим через  $g(x)$  ограничение  $f(x)$  на  $[-N-1, N+1]$  и найдём такое  $\delta \in (0, 1)$ , что  $\omega(g; \delta)_1 < \frac{\varepsilon}{3}$ . Теперь, если  $|t| \leq \delta$ , то

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)| d\mu \leq 2 \int_{|x| \geq N} |f(x)| d\mu + \omega(g; \delta)_1 < \varepsilon.$$

$\square$

**13.65.** Пусть  $C = \sup_{\mathbb{R}} |f|$ . Заметим, что  $u(x) = (f * g)(x)$  существует в каждой точке  $x \in \mathbb{R}$ . Тогда (см. задачу 13.64)

$$\begin{aligned} |u(x+h) - u(x)| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}} f(t)(g(x+h-t) - g(x-t)) d\mu(t) \right| \leq \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} |g(x+h-t) - g(x-t)| d\mu(t) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $h \rightarrow 0$  для каждого  $x \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**13.66.** Заметим, что в силу интегрируемости существует повторный интеграл

$$\int_{(-h,h)} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\mu(x) d\mu(t) = 2h \|f\|_1.$$

В силу результата задачи 12.14 и теоремы Фубини (задача 12.4) получаем

$$\begin{aligned} J &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{(-h,h)} f(x+t) d\mu(t) \right| d\mu(x) \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{(-h,h)} |f(x+t)| d\mu(t) d\mu(x) = \\ &= \int_{(-h,h)} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t)| d\mu(x) d\mu(t) = \int_{(-h,h)} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\mu(x) d\mu(t) = 2h \|f\|_1. \end{aligned}$$

В то же время

$$\int_{(-h,h)} f(x+t) d\mu(t) = \int_{(x-h,x+h)} f(t) d\mu(t) = 2h f_h(x).$$

Отсюда следует, что  $J = 2h \|f_h\|_1 \leq 2h \|f\|_1$ . Отметим, что для неотрицательной функции  $f$ , как нетрудно видеть из доказательства, имеет место равенство  $\|f_h\|_1 = \|f\|_1$ .  $\square$

**13.67.** Пусть  $q = \frac{p}{p-1}$ . По неравенству Гёльдера

$$2h |f_h(x)| = \left| \int_{(x-h,x+h)} f(t) d\mu_t \right| \leq (2h)^{1/q} \left( \int_{(x-h,x+h)} |f(t)|^p d\mu_t \right)^{1/p},$$

откуда следует, что

$$|f_h(x)|^p \leq \frac{1}{2h} \int_{(x-h,x+h)} |f(t)|^p d\mu_t = (|f|^p)_h(x).$$

Применяя результат задачи 13.66, получаем, что

$$\|f_h\|_p^p \leq \|(|f|^p)_h\|_1 \leq \||f|^p\|_1 = \|f\|_p^p.$$

□

**13.68.** Пусть дано  $\varepsilon > 0$ . Тогда (см. задачу 13.53) существует такая функция  $g(x) \in C_0(\mathbb{R})$ , что  $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$ . Так как  $g(x) \in C_0(\mathbb{R})$ , то в силу её равномерной непрерывности  $g_h(x) \rightarrow g(x)$  при  $h \rightarrow 0_+$  равномерно на любом отрезке. Но существует такое  $N$ , что  $g(x) = g_h(x) = 0$  при  $|x| \geq N$  и  $h \in (0, 1)$ . Следовательно, можно найти такое  $h_0$ , что  $\|g - g_h\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$  при  $0 < h < h_0$ . Тогда при таких  $h$ , учитывая, что  $(f - g)_h = f_h - g_h$ , получаем (см. задачи 13.66, 13.67)

$$\|f - f_h\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - g_h\|_p + \|f_h - g_h\|_p \leq 2\|f - g\|_p + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

□

**13.69.** По теореме Фубини

$$\begin{aligned} \|f_k\|_1 &= \int_{(0,1)} |f_k(t)| d\mu(t) = k \sum_{i=1}^k \int_{\left(\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right)} \left| \int_{\left(\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right)} f(x) d\mu(x) \right| d\mu(t) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^k \int_{\left(\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right)} |f(x)| d\mu(x) = \|f\|_1. \end{aligned}$$

□

**13.70.** По неравенству Гёльдера при  $i = 1, 2, \dots, k$  и  $x \in \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right)$  выполнена оценка

$$|f_k(x)|^p \leq k^p \int_{\left(\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right)} |f(t)|^p d\mu \cdot \frac{1}{k^{p-1}} = k \int_{\left(\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right)} |f(t)|^p d\mu = (|f|^p)_k(x).$$

Используя задачу 13.69, получаем, что

$$\|f_k\|_p^p \leq \|(|f|^p)_k\|_1 \leq \||f|^p\|_1 = \|f\|_p^p.$$

□

**13.71.** Пусть дано  $\varepsilon > 0$ . Тогда (см. задачу 13.50) существует такая функция  $g(x) \in C([0, 1])$ , что  $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$ . Поскольку  $g(x) \in C([0, 1])$ , то  $g_k(x) \rightarrow g(x)$  при  $k \rightarrow \infty$  равномерно на  $[0, 1]$ . Следовательно, можно

найти такое  $k_0$ , что  $\|g - g_k\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$  при  $k \geq k_0$ . Тогда для таких  $k$  получаем (см. задачи 13.69, 13.70)

$$\|f - f_k\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - g_k\|_p + \|g_k - f_k\|_p \leq 2\|f - g\|_p + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

□

**13.72.** Доказательство такое же, как для мер (см. решение задачи 6.13). □

**13.73.** Заметим, прежде всего, что  $\gamma(A \sqcup B) \leq \gamma(A) + \gamma(B)$ . Предположим, что  $\gamma(A) = \infty$ . Тогда существует такое множество  $B_1 \subset A$ ,  $B_1 \in M$ , что  $\Phi(B_1) > 1$ . Пусть  $A_1 = A \setminus B_1$ . Если  $\gamma(A_1) = \infty$ , то существует такое множество  $B_2 \subset A_1$ ,  $B_2 \in M$ , что  $\Phi(B_2) > 2$ . При этом полагаем  $A_2 = A_1 \setminus B_2$ . В противном случае  $\gamma(B_1) = \infty$  и можно выбрать такое  $B_2 \subset B_1$ ,  $B_2 \in M$ , что  $\Phi(B_2) > 2$ . При этом полагаем  $A_2 = B_1 \setminus B_2$ . Продолжая этот процесс, мы получим один из двух вариантов.

1. Бесконечное число раз реализуется случай  $B_k \subseteq A_{k-1}$ . Тогда для таких  $k$  множества  $B_{k-1}$  не пересекаются со всеми последующими  $B_l$  и будет построена такая последовательность  $\{B_{k_i}\}_{i=1}^{\infty} \subset M$ , что  $B_{k_i} \cap B_{k_j} = \emptyset$  при  $i \neq j$  и  $\Phi(B_{k_i}) > 1$  при всех  $i$ . При этом

$$\Phi\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} B_{k_i}\right) = \infty,$$

что противоречит условию.

2. Начиная с некоторого номера  $k = k_0$  реализуется случай  $B_k \subseteq B_{k-1}$ . Тогда будет построена такая последовательность  $\{B_i\}_{i_0}^{\infty} \subset M$ , что  $B_{i_0} \supseteq B_{i_0+1} \supseteq \dots$  и  $\Phi(B_i) > i$  при всех  $i \geq i_0$ . В этом случае (см. задачу 13.72)

$$\Phi\left(\bigcap_{i=i_0}^{\infty} B_i\right) > n$$

для любого натурального  $n$ , и мы вновь пришли к противоречию. □

**13.74.** Если для любого  $D \subset A$ ,  $D \in M$ , имеем  $\Phi(D) \leq 0$ , то  $A$  отрицательно. Пусть это не так. Тогда (см. задачу 13.73)  $0 < \gamma(A) < \infty$ . Возьмём такое множество  $B_1 \subset A$ ,  $B_1 \in M$ , что  $\Phi(B_1) > \frac{\gamma(A)}{2}$ , и обозначим  $A_1 = A \setminus B_1$ . Тогда  $\Phi(A_1) < \Phi(A)$  и  $\gamma(A_1) < \frac{\gamma(A)}{2}$ . Если  $\gamma(A_1) = 0$ , то можно взять  $B = A_1$ , иначе мы повторим предыдущую операцию. Продолжая этот процесс, мы получим один из двух случаев: либо на некотором шаге мы найдём отрицательное подмножество  $B \subset A$ ,  $B \in M$ , либо мы построим такую последовательность множеств

из  $M$ :  $A \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$ , что  $\Phi(A_{j+1}) < \Phi(A_j)$  и

$$\gamma(A_j) \leq \frac{\gamma(A)}{2^j} \text{ при } j \in \mathbb{N}.$$

В этом случае положим

$$B = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Заметим, что в силу результата задачи 13.72 имеет место оценка  $\Phi(B) \leq \Phi(A) < 0$ , в частности,  $B$  непусто, и так как  $\gamma(B) \leq \gamma(A_j)$  при всех  $j$ , то из предыдущих выкладок следует, что не существует множества  $D \subset B$ ,  $D \in M$ , с  $\Phi(D) > 0$ .  $\square$

**13.75.** Пусть  $M_- = \{A \in M : A \text{ отрицательно}\}$ , и пусть  $\alpha = \inf_{A \in M_-} \Phi(A)$ . Если  $M_- = \emptyset$ , то можно взять  $A_+ = X$  и  $A_- = \emptyset$ . Иначе

$\alpha < 0$ , и пусть  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  — такая последовательность множеств из  $M_-$ , что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(A_n) = \alpha$ . Обозначим

$$A_- = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in M_-.$$

Тогда  $\Phi(A_-) \leq \Phi(A_n)$  при всех натуральных  $n$ , откуда следует, что  $\Phi(A_-) = \alpha$  (заметим, что поэтому  $\alpha > -\infty$ ). Докажем, что множество  $A_+ = X \setminus A_-$  положительно. Если это не так, то существует множество  $D \subset A_+$ ,  $D \in M$  с  $\Phi(D) < 0$ . В силу результата задачи 13.74 отсюда следует, что существует отрицательное множество  $B \subset D$  с  $\Phi(B) < 0$ . Но в этом случае множество  $E = A_- \sqcup B$  отрицательно и  $\Phi(E) < \Phi(A_-) = \alpha$ , что противоречит определению  $\alpha$ .  $\square$

**13.76.** Рассмотрим  $\sigma$ -алгебру всех измеримых по Лебегу относительно классической меры подмножеств отрезка  $[0, 2]$  и на ней — функцию множества

$$\Phi(A) = \int_A (x - 1) d\mu.$$

В силу результата задачи 10.42 это заряд. В то же время нетрудно видеть, что отрезок  $[0, 2]$  допускает два разложения Хана:

$$[0, 2] = [0, 1] \sqcup [1, 2] = [0, 1] \sqcup (1, 2],$$

где первые множества отрицательны, а вторые — положительны.  $\square$

**13.77.** Заметим, что  $E \cap (A_+ \setminus B_+) \subseteq A_+$  и  $E \cap (A_+ \setminus B_+) \subseteq B_-$ . Отсюда следует, что  $\Phi(E \cap (A_+ \setminus B_+)) = 0$ . Аналогично,  $\Phi(E \cap (B_+ \setminus A_+)) = 0$ . Следовательно,

$$\Phi(E \cap A_+) = \Phi(E \cap (A_+ \cap B_+)) = \Phi(E \cap B_+).$$

Второе равенство доказывается аналогично.  $\square$

**13.78.** Пусть  $B \in M$ ,  $\mu(B) = 0$  и  $X = A_+ \sqcup A_-$  — разложение Хана относительно заряда  $\Phi$ . Тогда  $\mu(B \cap A_+) = 0$ , откуда следует, что  $\Phi_+(B) = \Phi(B \cap A_+) = 0$ . Аналогично,  $\Phi_-(B) = 0$ .  $\square$

**13.79.** Пусть  $X = A_+(i) \sqcup A_-(i)$  — разложение Хана относительно функции  $\psi_i$ , где  $i \in \mathbb{N}$ . Без ограничения общности можно считать, что  $A_+(1) \subseteq A_+(2) \subseteq \dots$  Обозначим

$$D_+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_+(i) \quad \text{и} \quad D_- = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_-(i).$$

Ясно, что  $X = D_+ \sqcup D_-$ . Мы получили, что  $\psi_i(D_-) < 0$  для каждого  $i$ , т. е.  $\Phi(D_-) \leq \frac{1}{i} \mu(D_-)$ , откуда следует, что  $\Phi(D_-) = 0$ . Тогда  $\Phi(D_+) > 0$  и, следовательно,  $\mu(D_+) > 0$ . Поэтому (см. задачу 6.17) существует такое  $n$ , что  $\mu(A_+(n)) > 0$ . Но по определению множество  $A_+(n)$  положительно относительно  $\psi_n$ .  $\square$

**13.80.** В силу результата задачи 13.78 достаточно доказать утверждение для случая, когда  $\Phi$  —  $\sigma$ -аддитивная мера. Обозначим

$$F = \left\{ f(x) \in L(X) : f(x) \geq 0 \text{ на } X; \int_A f d\mu \leq \Phi(A) \text{ при всех } A \in M \right\},$$

и пусть

$$S = \sup_{f(x) \in F} \int_X f(x) d\mu \leq \Phi(X).$$

Тогда существует такая последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq F$ , что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu = S.$$

Пусть  $g_n(x) = \max_{1 \leq k \leq n} f_k(x)$  для  $n \in \mathbb{N}$  и  $x \in X$ . Тогда (см. задачу 8.40)  $g_n(x)$  измерима на  $X$ . Так как

$$g_n(x) \leq \sum_{k=1}^n f_k(x) \in L(X),$$

то  $g_n(x) \in L(X)$  при всех  $n$ . Ясно, что  $g_n(x)$  — неотрицательная функция на  $X$ . Далее,

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) \chi_{E_k}(x), \quad \text{где } X = \bigsqcup_{k=1}^n E_k.$$

Отсюда следует, что для каждого  $A \in M$

$$\int_A g_n(x) d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{E_k \cap A} f_k(x) d\mu \leq \sum_{k=1}^n \Phi(E_k \cap A) = \Phi(A),$$

поэтому  $g_n(x) \in F$ . Заметим, что последовательность  $\{g_n(x)\}_{n=1}^\infty$  — неубывающая на  $X$ . Определим функцию  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$ . Так как

$$\int_X g_n(x) d\mu \leq S \quad \text{при } n \in \mathbb{N},$$

то по теореме Б. Леви (см. задачу 10.33)  $f(x)$  конечна п.в. на  $X$ ,  $f(x) \in F$  и

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu \leq \int_X f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n(x) d\mu \leq S,$$

откуда следует, что

$$\int_X f(x) d\mu = S.$$

Рассмотрим теперь  $\sigma$ -аддитивную функцию  $\lambda$  на  $M$ , определённую формулой

$$\lambda(A) = \Phi(A) - \int_A f(x) d\mu.$$

Эта функция неотрицательна (т. е. является  $\sigma$ -аддитивной мерой) и абсолютно непрерывна относительно меры  $\mu$ . Предположим, что  $\lambda \not\equiv 0$ . Тогда в силу результата задачи 13.79 существуют такое число  $n$  и такое множество  $B \in M$ , что  $\mu(B) > 0$  и для любого  $A \subseteq B$ ,  $A \in M$ , выполнено неравенство  $\left(\lambda - \frac{1}{n} \mu\right)(A) \geq 0$ . Тогда  $\frac{1}{n} \mu(A) \leq \lambda(A)$ . Определим функцию  $h(x) = f(x) + \frac{1}{n} \chi_B(x)$  при  $x \in X$ . Для любого  $A \in M$  получаем

$$\begin{aligned} \int_A h(x) d\mu &= \int_A f(x) d\mu + \frac{1}{n} \mu(A \cap B) \leq \\ &\leq \int_{A \setminus B} f(x) d\mu + \Phi(A \cap B) \leq \Phi(A \setminus B) + \Phi(A \cap B) = \Phi(A). \end{aligned}$$

Следовательно,  $h(x) \in F$ , но

$$\int_X h(x) d\mu = \int_X f(x) d\mu + \frac{1}{n} \mu(B) > S.$$

Полученное противоречие показывает, что  $\lambda \equiv 0$  на  $M$ , что эквивалентно утверждению задачи.  $\square$

**13.81.** Пусть  $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$ , где  $\mu(E_n) < \infty$  при  $n \in \mathbb{N}$ . В силу результата задачи 13.80 для каждого  $n$  существует такая функция  $f_n(x) \in L(E_n)$ , что для любого множества  $A \in M_n = \{B \cap E_n : B \in M\}$  выполнено условие

$$\Phi(A) = \int_A f_n(x) d\mu.$$

Заметим, что  $f_n(x)$  неотрицательна на  $E_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Продолжим  $f_n(x)$  нулём на  $X \setminus E_n$  и положим

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Тогда

$$\int_X f(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f_n(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(E_n) = \Phi(X) < \infty,$$

поэтому  $f(x) \in L(X)$ . Но для произвольного  $A \in M$

$$\Phi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(A \cap E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A \cap E_n} f(x) d\mu = \int_A f(x) d\mu.$$

$\square$

**13.82.** Обозначим

$$X_1 = \{x \in X : f(x) > g(x)\} \quad \text{и} \quad X_2 = \{x \in X : f(x) < g(x)\}.$$

Тогда

$$\int_{X_1} (f(x) - g(x)) d\mu = 0.$$

Поэтому  $\mu(X_1) = 0$ . Аналогично,  $\mu(X_2) = 0$ , так что  $f(x) = g(x)$  п.в. на  $X$ .  $\square$

**13.83.** Пусть

$$\Phi(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{1}{2} \in A, \\ 0 & \text{— иначе.} \end{cases}$$

Ясно, что  $\Phi$  —  $\sigma$ -аддитивная мера на  $M$ . Предположим, что существует такая функция  $f(x) \in L((0, 1))$ , что

$$\Phi(A) = \int_A f(x) d\mu$$

для любого  $A \in M$ . Тогда

$$\int_A f(x) d\mu = 0$$

для любого  $A \in M$ , для которого  $\frac{1}{2} \notin A$ . Отсюда следует, что  $f(x) = 0$  п.в. на  $[0, 1]$ , а потому  $\Phi(A) \equiv 0$ , и мы пришли к противоречию.  $\square$

**13.84.** Предположим, что такая функция  $f$  существует. Так как заряд  $\Phi$  не является абсолютно непрерывным, то найдётся такое множество  $A$ , что  $\mu A = 0$ , но  $\Phi(A) \neq 0$ . В то же время согласно свойствам интеграла Лебега интеграл по множеству нулевой меры всегда равен нулю. Таким образом,

$$\int_A f(x) d\mu = 0 \neq \Phi(A),$$

и мы пришли к противоречию.  $\square$

## Г л а в а 14

# ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

В этой главе мы будем рассматривать конечные вещественнонозначные функции на отрезке  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Для любого разбиения  $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$  отрезка  $[a, b]$  обозначим

$$V_T(f) = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

Вариацией функции  $f$  на отрезке  $[a, b]$  называется величина  $V_a^b(f) = \sup_T V_T(f)$  (точная верхняя грань берётся по всем разбиениям отрезка). Если она конечна, то мы скажем, что  $f(x)$  — *функция ограниченной вариации на  $[a, b]$* . Множество всех функций ограниченной вариации на этом отрезке будет обозначаться через  $V([a, b])$ .

Пусть  $0 < \alpha \leqslant 1$ . Через  $\text{Lip}(\alpha, [a, b])$  обозначим класс вещественнонозначных функций на  $[a, b]$ , для которых существует такая положительная постоянная  $C = C(f)$ , что для любых  $x$  и  $y$  из  $[a, b]$  выполнено неравенство  $|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|^\alpha$ .

Мы будем также использовать обозначения для односторонних пределов функции:

$$f(x+0) = \lim_{t \rightarrow 0_+} f(x+t) \quad \text{и} \quad f(x-0) = \lim_{t \rightarrow 0_-} f(x+t).$$

Если в некоторой точке разрыва  $t$  функции  $f(x)$  существуют и конечны оба этих значения, то будем называть  $t$  *точкой разрыва первого рода*.

Пусть на отрезке  $[a, b]$  заданы попарно различные точки  $\{x_k\}$  (конечный или счётный набор) и даны такие вещественные числа  $\{a_k\}$  и  $\{b_k\}$ , что при каждом  $k$  выполнено условие  $|a_k| + |b_k| > 0$ , но в то же время

$$\sum_k (|a_k| + |b_k|) < \infty.$$

Тогда функция

$$s(x) = \sum_k a_k \chi_{(x_k, b]}(x) + \sum_k b_k \chi_{[x_k, b)}(x)$$

называется *функцией скачков* (с соответствующими параметрами  $\{x_k\}$ ,  $\{a_k\}$  и  $\{b_k\}\}$ ).

## ЗАДАЧИ

**14.1.** Пусть  $f(x)$  — монотонная функция на  $[a, b]$ . Доказать, что  $f(x) \in V([a, b])$ , и найти её вариацию.

**14.2.** Пусть  $f(x) \in V([a, b])$ . Доказать, что  $f(x)$  ограничена на  $[a, b]$ .

**14.3.** Пусть  $f(x) \in V([a, b])$  и  $c \in (a, b)$ . Доказать, что  $f(x) \in V([a, c])$ ,  $f(x) \in V([c, b])$  и  $V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$ .

**14.4.** Пусть  $a < c < b$  и функция  $f(x) \in V([a, c]) \cap V([c, b])$ . Доказать, что  $f(x) \in V([a, b])$  и  $V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$ .

**14.5.** Пусть  $f(x) \in V([a, b])$ . Доказать, что  $f_1(x) = V_a^x(f)$  — неубывающая функция на  $[a, b]$ .

**14.6.** Пусть  $f(x) \in V([a, b])$ . Доказать, что её можно представить в виде  $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ , где  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  — неубывающие функции на  $[a, b]$ .

**14.7.** Пусть  $f(x) \in V([a, b])$ . Доказать, что её можно представить в виде  $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ , где  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  — строго возрастающие функции на  $[a, b]$ .

**14.8.** Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x = a \in [0, 1], \\ 0 & \text{при } x \in [0, 1] \setminus \{a\}. \end{cases}$$

Представить  $f(x)$  в виде разности двух неубывающих на  $[0, 1]$  функций.

**14.9.** Пусть  $f(x) = \sin x$  на  $[0, 2\pi]$ . Представить  $f(x)$  в виде разности двух неубывающих на  $[0, 2\pi]$  функций.

**14.10.** Пусть  $f(x) \in V([a, b])$ . Доказать, что  $f(x)$  — неубывающая функция на  $[a, b]$  тогда и только тогда, когда  $V_a^b(f) = f(b) - f(a)$ .

**14.11.** Пусть  $f(x)$  — конечная функция на  $[a, b]$ . Доказать, что  $f(x) \in V([a, b])$  тогда и только тогда, когда существует такая неубывающая функция  $g(x)$  на  $[a, b]$ , что  $|f(x) - f(y)| \leq g(y) - g(x)$  для любого отрезка  $[x, y] \subseteq [a, b]$ .

**14.12.** Пусть  $f(x)$  — конечная функция на  $[a, b]$ , а  $\varphi(x)$  — строго возрастающая непрерывная функция на  $[a, b]$ , причём  $\varphi(a) = a$  и  $\varphi(b) = b$ . Доказать, что  $f(x) \in V([a, b])$  тогда и только тогда, когда  $g(x) = f(\varphi(x)) \in V([a, b])$ .

**14.13.** Построить конечную функцию  $f(x) \notin V([0, 1])$  и строго возрастающую функцию  $\varphi(x)$ , для которых  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(1) = 1$  и  $g(x) = f(\varphi(x)) \in V([0, 1])$ .

**14.14.** Пусть  $f(x), g(x) \in V([a, b])$ . Доказать, что  $f(x) + g(x) \in V([a, b])$  и  $V_a^b(f + g) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g)$ .

**14.15.** Построить такие функции  $f(x), g(x) \in V([0, 1])$ , что  $V_0^1(f + g) < V_0^1(f) + V_0^1(g)$ .

**14.16.** Пусть  $f(x) \in V([a, b])$  и  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Доказать, что  $\alpha f(x) \in V([a, b])$  и  $V_a^b(\alpha f) = |\alpha| V_a^b(f)$ .

**14.17.** Пусть  $f(x)$  — конечная функция на  $[a, b]$ . Доказать, что  $f(x) \in V([a, b])$  тогда и только тогда, когда её можно представить в виде  $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ , где  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  — неубывающие функции на  $[a, b]$ .

**14.18.** Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  из  $V([a, b])$ . Доказать, что  $f(x) \cdot g(x) \in V([a, b])$  и

$$V_a^b(fg) \leq \sup_{x \in [a, b]} |g(x)| \cdot V_a^b(f) + \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| V_a^b(g).$$

**14.19.** Построить такие возрастающие функции  $f(x)$  и  $g(x)$  на некотором  $[a, b]$ , что  $f(x) \cdot g(x)$  — немонотонная функция на  $[a, b]$ .

**14.20.** Пусть  $f(x) \in V([a, b])$  и  $|f(x)| \geq C > 0$  при  $x \in [a, b]$ . Доказать, что  $\frac{1}{f(x)} \in V([a, b])$ .

**14.21.** Пусть  $f(x), g(x) \in V([a, b])$  и  $|f(x)| \geq C > 0$  при  $x \in [a, b]$ . Доказать, что  $\frac{g(x)}{f(x)} \in V([a, b])$ .

**14.22.** Построить положительные функции  $f(x), g(x) \in V([0, 1])$ , для которых  $\frac{g(x)}{f(x)} \notin V([0, 1])$ .

**14.23.** Пусть  $f(x), g(x) \in V([a, b])$ . Доказать, что  $h(x) = \max(g(x), f(x)) \in V([a, b])$ .

**14.24.** Пусть  $f(x) \in V([a, b])$ . Доказать, что  $|f(x)| \in V([a, b])$  и  $V_a^b(|f|) \leq V_a^b(f)$ .

**14.25.** Построить  $f(x) \notin V([0, 1])$ , для которой  $|f(x)| \in V([a, b])$ .

**14.26.** Пусть  $f(x) \in C([a, b])$  и  $|f(x)| \in V([a, b])$ . Доказать, что  $f(x) \in V([a, b])$  и  $V_a^b(|f|) = V_a^b(f)$ .

**14.27.** Пусть  $f(x) \in \text{Lip}(1, [a, b])$ . Доказать, что  $f(x) \in V([a, b])$ .

**14.28.** Пусть  $0 < \alpha < 1$ . Построить такую функцию  $f(x) \in \text{Lip}(\alpha, [0, 1])$ , что  $f(x) \notin V([0, 1])$ .

**14.29.** Построить функцию

$$f(x) \in \left( \bigcap_{\alpha \in (0, 1)} \text{Lip}(\alpha, [0, 1]) \right) \setminus V([0, 1]).$$

**14.30.** Построить функцию  $f(x) \in V([0, 1]) \cap C([0, 1])$ , не принадлежащую классу  $\text{Lip}(\alpha, [0, 1])$  ни при каком  $\alpha \in (0, 1]$ .

**14.31.** Пусть  $f(x) \in V([a, b])$ ,  $g(x)$  — функция на  $\mathbb{R}$ , и существует такое  $C > 0$ , что  $|g(x) - g(y)| \leq C|x - y|$  для любых  $x, y \in \mathbb{R}$ . Доказать, что  $g(f(x)) \in V([a, b])$ .

**14.32.** Для данного  $\alpha \in (0, 1)$  построить такие функции  $f(x) \in V([0, 1])$  и  $g(x)$  на  $\mathbb{R}$ , что существует  $C > 0$ , для которого  $|g(x) - g(y)| \leq C|x - y|^\alpha$  при всех  $x, y \in \mathbb{R}$ , но  $g(f(x)) \notin V([a, b])$ .

**14.33.** Пусть  $f(x)$  дифференцируема на  $[a, b]$  и  $f'(x)$  ограничена на  $[a, b]$ . Доказать, что  $f(x) \in V([a, b])$ .

**14.34.** Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin x^\beta & \text{при } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

где  $\alpha \in \mathbb{R}$  и  $\beta \geq 0$ . Найти, при каких  $\alpha$  и  $\beta$  функция  $f(x)$  принадлежит классу  $V([0, 1])$ .

**14.35.** Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin x^\beta & \text{при } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

где  $\alpha \in \mathbb{R}$  и  $\beta < 0$ . Найти, при каких  $\alpha$  и  $\beta$  функция  $f(x)$  принадлежит классу  $V([0, 1])$ .

**14.36.** Пусть  $f(x) \in V([a, b])$ . Доказать, что  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$  всюду, кроме не более чем счётного множества точек, в которых она имеет разрывы первого рода.

**14.37.** Пусть  $f(x) \in V([a, b])$  и непрерывна в точке  $x_0 \in [a, b]$ . Доказать, что функция  $f_1(x) = V_a^x(f)$  также непрерывна в точке  $x_0$ .

**14.38.** Пусть  $f(x) \in V([a, b])$  и функция  $f_1(x) = V_a^x(f)$  непрерывна в точке  $x_0 \in [a, b]$ . Доказать, что  $f(x)$  также непрерывна в точке  $x_0$ .

**14.39.** Пусть  $f(x) \in V([a, b]) \cap C([a, b])$ . Доказать, что её можно представить в виде  $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ , где  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  — неубывающие непрерывные функции на  $[a, b]$ .

**14.40.** Доказать, что функция скачков корректно определена и является функцией ограниченной вариации на отрезке, где она задана.

**14.41.** Пусть  $f(x) \in V([a, b])$  и  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  — множество всех точек разрыва  $f(x)$  на  $[a, b]$ . Определим функцию  $s(x)$  следующим образом:  $s(x) = 0$  при  $x = a$  и

$$s(x) = \sum_{k : x_k < x} (f(x_k + 0) - f(x_k - 0)) + (f(x) - f(x - 0))$$

для  $x \in (a, b]$ . Доказать, что  $s(x)$  — корректно определённая функция скачков.

**14.42.** Пусть  $s(x)$  — функция скачков:

$$s(x) = \sum_k a_k \chi_{(x_k, b]}(x) + \sum_k b_k \chi_{[x_k, b]}(x).$$

Доказать, что  $s(x)$  непрерывна всюду, кроме точек  $\{x_k\}$ . Более того, если  $a_k = 0$ , то  $s(x)$  непрерывна в точке  $x_k$  справа, а если  $b_k = 0$ , то  $s(x)$  непрерывна в точке  $x_k$  слева.

**14.43.** Пусть  $f(x) \in V([a, b])$  и  $s(x)$  — соответствующая функция скачков (см. задачу 14.41). Доказать, что  $g(x) = f(x) - s(x) \in V([a, b]) \cap C([a, b])$ .

**14.44.** Пусть дано полукольцо  $S = \{\{a, b\}: -\infty < a \leq b < \infty\} \cup \{\emptyset\}$ ,  $g(x)$  — неубывающая функция на  $\mathbb{R}$ , а функция  $m: S \rightarrow [0, \infty)$  определена формулами  $m((a, b)) = g(b - 0) - g(a + 0)$ ,  $m([a, b]) = g(b + 0) - g(a - 0)$ ,  $m([a, b)) = g(b - 0) - g(a - 0)$  и  $m((a, b]) = g(b + 0) - g(a + 0)$ . Доказать, что  $m$  является  $\sigma$ -аддитивной мерой на  $S$  (мера Стильтьеса).

**14.45.** Пусть  $f(x)$  — неубывающая функция на  $[a, b]$ ,  $s(x)$  — соответствующая функция скачков (см. задачу 14.41) и  $g(x) = f(x) - s(x)$ . Доказать, что  $g(x)$  — также неубывающая функция на  $[a, b]$ .

**14.46.** Пусть  $\{t_n\}_{n=1}^\infty$  — не более чем счётное множество на  $[0, 1]$ . Построить неубывающую функцию  $f(x)$  на  $[0, 1]$ , множество точек разрыва которой совпадает с  $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ .

**14.47.** Пусть  $f(x)$  — строго возрастающая функция на  $[a, b]$ , дано множество  $E \subseteq (a, b)$  и существует такое число  $p \geq 0$ , что

$$\underline{f}'(x) = \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \leq p$$

для любого  $x \in E$ . Доказать, что  $\mu^*(f(E)) \leq p\mu^*(E)$ , где  $\mu^*$  — классическая верхняя мера Лебега.

**14.48.** Пусть  $f(x)$  — строго возрастающая функция на  $[a, b]$ , которая непрерывна в каждой точке множества  $E \subseteq (a, b)$ . Пусть также существует такое число  $q > 0$ , что

$$\bar{f}'(x) = \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq q$$

при всех  $x \in E$ . Доказать, что  $\mu^*(f(E)) \geq q\mu^*(E)$ , где  $\mu^*$  — классическая верхняя мера Лебега.

**14.49.** Пусть  $f(x)$  — неубывающая функция на  $[a, b]$ . Доказать, что конечная  $f'(x)$  существует п.в. на  $(a, b)$ .

**14.50.** Пусть  $f(x)$  — неубывающая функция на  $[a, b]$ . Доказать, что  $f'(x) \in L((a, b))$  и

$$\int_{(a,b)} f'(x) d\mu \leq f(b) - f(a).$$

**14.51.** Пусть  $f(x) \in V([a, b])$ . Доказать, что конечная  $f'(x)$  существует п.в. на  $(a, b)$  и  $f'(x) \in L((a, b))$ .

**14.52.** Построить непрерывную монотонную функцию  $f(x)$  на  $[0, 1]$ , для которой

$$\int_{(0,1)} f'(x) d\mu < f(1) - f(0).$$

**14.53.** Пусть дано множество  $A \subset (a, b)$ , причём  $\mu(A) = 0$ , где  $\mu$  — классическая мера Лебега. Построить непрерывную неубывающую функцию  $f(x)$  на  $[a, b]$ , для которой  $f'(x) = \infty$  при всех  $x \in A$ .

**14.54.** Пусть  $f(x)$  — неубывающая непрерывная функция на  $[a, b]$ , а множество  $A \subset [a, b]$  таково, что  $\mu(f(A)) = 0$ , где  $\mu$  — классическая мера Лебега. Пусть также  $B = \{t \in A : f'(t) = 0\}$ . Доказать, что множество  $A \setminus B$  измеримо и  $\mu(A \setminus B) = 0$ .

**14.55. Малая теорема Фубини.** Пусть  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  — последовательность неубывающих функций на  $[a, b]$ , ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

сходится всюду на  $[a, b]$  и  $f(x)$  — сумма этого ряда. Доказать, что

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$$

п.в. на  $[a, b]$ .

**14.56.** Построить такую последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  непрерывных неубывающих функций на  $[-1, 1]$ , что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

сходится равномерно на  $[-1, 1]$  к функции  $f(x)$  и

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(0) = 0,$$

но  $f'(0) = \infty$ .

**14.57.** Пусть  $s(x)$  — функция скачков. Доказать, что  $s'(x) = 0$  п.в. на  $[a, b]$ .

**14.58.** Пусть дана последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset V([a, b])$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(a)| < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} V_a^b(f_n) < \infty.$$

Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

сходится к некоторой функции  $f(x) \in V([a, b])$  равномерно на  $[a, b]$ , и что

$$V_a^b(f) \leq \sum_{n=1}^{\infty} V_a^b(f_n).$$

**14.59.** Пусть  $h(x)$  — функция скачков,

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k g_k(x),$$

где

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$$

и  $g_k(x) = \chi_{[c_k, b]}(x)$ , где все  $c_k \in [a, b]$ , функции  $g_k(x)$  попарно различны и не постоянны на  $[a, b]$ . Доказать, что  $V_a^b(h) = \alpha < \infty$ .

**14.60.** Назовём функцию  $f(x) \in V([a, b])$  *сингулярной*, если  $f(x) \in C([a, b]) \cap V([a, b])$ ,  $f(x) \not\equiv C$  на  $[a, b]$ , но  $f'(x) = 0$  п.в. на  $[a, b]$ . Построить строго возрастающую сингулярную функцию  $f(x)$  на  $[0, 1]$ .

**14.61.** (Лемма к теореме Хелли (задача 14.62).) Пусть  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  — такая последовательность неубывающих функций на  $[a, b]$ , что  $|f_n(x)| \leq C$  для некоторого  $C > 0$  и всех  $x \in [a, b]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Доказать, что существует подпоследовательность  $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ , которая сходится всюду на  $[a, b]$  к некоторой неубывающей функции на  $[a, b]$ .

**14.62. Вторая теорема Хелли.** Пусть  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  — последовательность функций из  $V([a, b])$ , причём  $|f_n(x)| \leq C$  и  $V_a^b(f_n) \leq C$  для некоторого  $C > 0$  при всех  $x \in [a, b]$  и  $n \in \mathbb{N}$ . Доказать, что существует подпоследовательность  $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ , сходящаяся всюду на  $[a, b]$  к некоторой функции  $f(x) \in V([a, b])$ .

**14.63.** Пусть  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset V([a, b])$  и для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $N$ , что  $V_a^b(f_n - f_m) < \varepsilon$  при всех  $n, m \geq N$ . Доказать, что

существует такая функция  $f(x) \in V([a, b])$ , что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_a^b(f_n - f) = 0.$$

**14.64.** Пусть  $f(x) \in C([a, b])$ . Для заданного разбиения  $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$  отрезка  $[a, b]$  определим отрезки  $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$  и значения  $M_k = \max_{x \in \Delta_k} f(x)$  и  $m_k = \min_{x \in \Delta_k} f(x)$  для  $k = 1, 2, \dots, n$ . Пусть

$$\Omega_T(f) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k).$$

Доказать, что

$$V_a^b(f) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} V_T(f) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \Omega_T(f)$$

(здесь вариация может быть конечной или бесконечной).

**14.65.** Построить функцию  $f(x) \notin V([0, 1])$  и последовательность  $\{T_i\}_{i=1}^\infty$  разбиений отрезка  $[0, 1]$ , для которых  $\lambda(T_i) \rightarrow 0$  при  $i \rightarrow \infty$  и  $V_{T_i}(f) = 0$  при всех  $i$ .

**14.66.** Пусть  $f(x) \in C([a, b])$  и  $g(y)$  — её индикаториса Банаха (см. задачу 8.52). Доказать, что

$$V_a^b(f) = \int_{\mathbb{R}} g(y) d\mu,$$

где  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $\mathbb{R}$ .

**14.67.** Пусть  $f(x) \in V([a, b])$  и  $f(x) = \psi(x) + s(x)$ , где  $s(x)$  — функция скачков для  $f(x)$  (см. задачу 14.41). Доказать, что  $V_a^b(f) = V_a^b(\psi) + V_a^b(s)$ .

**14.68.** Пусть  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty \subset V([a, b])$  — последовательность функций скачков. Пусть также  $f(x) \in V([a, b])$ ,  $f(a) = 0$  и  $V_a^b(f - f_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Доказать, что  $f(x)$  — также функция скачков.

**14.69.** Пусть  $f(x) \in C([a, b]) \cap V([a, b])$ . Доказать, что существует разложение  $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ , где  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  — неотрицательные неубывающие непрерывные функции на  $[a, b]$ , причём  $V_a^b(f) = V_a^b(f_1) + V_a^b(f_2)$ .

**14.70.** Пусть  $f(x) \in V([a, b])$ . Доказать, что существует разложение  $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ , где  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  — неотрицательные неубывающие функции на  $[a, b]$ , и  $V_a^b(f) = V_a^b(f_1) + V_a^b(f_2)$ .

## РЕШЕНИЯ

**14.1.** Без ограничения общности можно считать, что  $f(x)$  — неубывающая функция на  $[a, b]$ . Тогда  $V_T(f) = f(b) - f(a)$  для любого разбиения  $T$  отрезка  $[a, b]$ . Следовательно,  $V_a^b(f) = f(b) - f(a) < \infty$ .  $\square$

**14.2.** Для любого  $x \in [a, b]$  имеем

$$|f(x)| \leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| \leq |f(a)| + V_a^b(f) = C(f).$$

$\square$

**14.3.** Пусть  $T_1 = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k = c\}$  и  $T_2 = \{c = y_0 < y_1 < \dots < y_{m-1} < y_m = b\}$  — разбиения отрезков  $[a, c]$  и  $[c, b]$  соответственно. Тогда  $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < y_1 < \dots < y_m = b\}$  — разбиение отрезка  $[a, b]$ . Следовательно,  $V_T(f) = V_{T_1}(f) + V_{T_2}(f)$ . Так как разбиения  $T_1$  и  $T_2$  произвольны, то  $f(x) \in V([a, c])$ ,  $f(x) \in V([c, b])$  и  $V_a^c(f) + V_c^b(f) \leq V_a^b(f)$ . С другой стороны, пусть  $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$  — разбиение отрезка  $[a, b]$ . Определим новое разбиение  $T'$ :  $T' \equiv T$ , если  $T$  содержит точку  $c$ , и

$$T' = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < c < x_{k+1} < \dots < x_{n-1} < x_n = b\},$$

если  $c \in (x_k, x_{k+1})$  для некоторого  $k$ . Заметим, что разбиение  $T'$  является объединением разбиений  $T_1$  и  $T_2$  отрезков  $[a, c]$  и  $[c, b]$  соответственно. Следовательно,

$$V_T(f) \leq V_{T'}(f) = V_{T_1}(f) + V_{T_2}(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

Так как  $T$  произвольно, то отсюда следует утверждение задачи.  $\square$

**14.4.** Пусть  $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$  — некоторое разбиение  $[a, b]$ . Определим новое разбиение  $T'$ :  $T' \equiv T$ , если  $T$  содержит точку  $c$ , и

$$T' = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < c < x_{k+1} < \dots < x_{n-1} < x_n = b\},$$

если  $c \in (x_k, x_{k+1})$  при некотором  $k$ . Заметим, что разбиение  $T'$  является объединением разбиений  $T_1$  и  $T_2$  отрезков  $[a, c]$  и  $[c, b]$  соответственно. Следовательно,

$$V_T(f) \leq V_{T'}(f) = V_{T_1}(f) + V_{T_2}(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

Так как  $T$  произвольно, то  $f(x) \in V([a, b])$ . Равенство для вариаций следует из задачи 14.3.  $\square$

**14.5.** Пусть  $a \leq x < y \leq b$ . Тогда (см. задачу 14.3)  $f_1(y) - f_1(x) = V_x^y(f) \geq 0$ .  $\square$

**14.6.** Пусть  $f_1(x) = V_a^x(f)$  и  $f_2(x) = f_1(x) - f(x)$ . Тогда (см. задачу 14.5)  $f_1(x)$  — неубывающая функция на  $[a, b]$ . При этом для любых  $a \leq x < y \leq b$  имеем (учитывая результат задачи 14.3):

$$f_2(y) - f_2(x) = V_x^y(f) - (f(y) - f(x)) \geq 0.$$

□

**14.7.** Из задачи 14.6 следует, что существует представление  $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ , где  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  — неубывающие функции на  $[a, b]$ . Тогда  $f(x) = (f_1(x) + x) - (f_2(x) + x)$ , где  $f_1(x) + x$  и  $f_2(x) + x$  — строго возрастающие функции на  $[a, b]$ . □

**14.8.** Положим, например,  $f_1(x) = \chi_{[a, 1]}(x)$  и  $f_2(x) = \chi_{(a, 1]}(x)$ . □

**14.9.** Положим, например,

$$f_1(x) = \begin{cases} \sin x & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{при } \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{2}, \\ 2 + \sin x & \text{при } \frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi \end{cases}$$

и

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1 - \sin x & \text{при } \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{2}, \\ 2 & \text{при } \frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi. \end{cases}$$

□

**14.10.** Ясно, что если  $f(x)$  — неубывающая функция на  $[a, b]$ , то  $V_T(f) = f(b) - f(a)$  для любого разбиения  $T$  отрезка  $[a, b]$ . Поэтому  $V_a^b(f) = f(b) - f(a)$ . Пусть теперь  $f(x) \in V([a, b])$  и  $V_a^b(f) = f(b) - f(a)$ . Предположим, что существуют такие точки  $a \leq x < y \leq b$ , что  $f(y) < f(x)$ . Тогда

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= V_a^b(f) \geq (f(x) - f(a)) + (f(x) - f(y)) + (f(b) - f(y)) = \\ &= f(b) - f(a) + 2(f(x) - f(y)) > f(b) - f(a), \end{aligned}$$

и мы пришли к противоречию. □

**14.11.** Если существует такая функция  $g(x)$ , то для любого разбиения  $T$  отрезка  $[a, b]$  имеем:  $V_T(f) \leq g(b) - g(a)$ , поэтому  $f(x) \in V([a, b])$ . Если  $f(x) \in V([a, b])$ , то можно взять (см. задачу 14.5)  $g(x) = V_a^x(f)$ . □

**14.12.** Пусть  $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  — разбиение отрезка  $[a, b]$ . Тогда  $T_\varphi = \{a = \varphi(x_0) < \varphi(x_1) < \dots < \varphi(x_n) = b\}$  — также разби-

ение  $[a, b]$  и  $V_T(f(\varphi)) = V_{T_\varphi}(f)$ . Поэтому  $V_a^b(f(\varphi)) \leq V_a^b(f)$ . Заметим, что функция  $\psi(x) = \varphi^{-1}(x)$  — строго монотонная и непрерывная на  $[a, b]$ , причём  $\psi(a) = a$  и  $\psi(b) = b$ . Повторяя предыдущие рассуждения, получаем, что  $V_a^b(f) = V_a^b(f(\varphi(\psi))) \leq V_a^b(f(\varphi))$ . Окончательно:  $V_a^b(f(\varphi)) = V_a^b(f)$ .  $\square$

**14.13.** Пусть  $h(x) \notin V\left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]\right)$  (например,  $h(x)$  неограничена на этом отрезке),  $f(x) = h(x)$  при  $x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$  и  $f(x) = 0$  при  $x \in [0, 1] \setminus \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$ . Тогда  $f(x) \notin V([0, 1])$ . Положим  $\varphi(0) = 0$  и  $\varphi(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$  при  $x \in (0, 1]$ . Тогда  $\varphi(x)$  — строго возрастающая функция на  $[0, 1]$ ,  $\varphi(1) = 1$  и  $f(\varphi(x)) \equiv 0 \in V([0, 1])$  на  $[0, 1]$ .  $\square$

**14.14.** Для любого разбиения  $T$  отрезка  $[a, b]$  имеем:  $V_T(f + g) \leq V_T(f) + V_T(g)$ . Поэтому  $V_a^b(f + g) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g) < \infty$ .  $\square$

**14.15.** Пусть  $f(x) = x$  и  $g(x) = -x$  для  $x \in [0, 1]$ . Тогда  $V_0^1(f) = V_0^1(g) = 1$ , но  $V_0^1(f + g) = V_0^1(0) = 0$ .  $\square$

**14.16.** Для любого разбиения  $T$  отрезка  $[a, b]$  имеем:  $V_T(\alpha f) = |\alpha|V_T(f)$ . Поэтому  $V_a^b(\alpha f) = |\alpha|V_a^b(f)$ .  $\square$

**14.17.** Если  $f(x) \in V([a, b])$ , то (см. задачу 14.6) существует разложение  $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ , где  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  — неубывающие функции на  $[a, b]$ . Обратное утверждение следует из задач 14.1, 14.14 и 14.16.  $\square$

**14.18.** Пусть  $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$  — некоторое разбиение отрезка  $[a, b]$ . Так как согласно задаче 14.2 функции  $f$  и  $g$  ограничены, то

$$\begin{aligned} V_T(f \cdot g) &= \sum_{k=1}^n |f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})||g(x_k)| + \sum_{k=1}^n |g(x_k) - g(x_{k-1})||f(x_{k-1})| \leq \\ &\leq V_T(f) \cdot \sup_{x \in [a, b]} |g(x)| + \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \cdot V_T(g) \leq \\ &\leq V_a^b(f) \cdot \sup_{x \in [a, b]} |g(x)| + \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \cdot V_a^b(g), \end{aligned}$$

откуда следует утверждение задачи.

**14.19.** Пусть  $f(x) = g(x) = x$  на отрезке  $[-1, 1]$ . Ясно, что они строго возрастают на этом отрезке, но  $f(x) \cdot g(x) = x^2$  — немонотонная функция на  $[-1, 1]$ .  $\square$

**14.20.** Пусть  $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$  — разбиение отрезка  $[a, b]$ . Тогда

$$\begin{aligned} V_T \left( \frac{1}{f} \right) &= \sum_{k=1}^n \left| \frac{1}{f(x_k)} - \frac{1}{f(x_{k-1})} \right| = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{|f(x_k) - f(x_{k-1})|}{|f(x_k)| \cdot |f(x_{k-1})|} \leqslant \frac{1}{C^2} V_T(f) \leqslant \frac{1}{C^2} V_a^b(f). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $\frac{1}{f(x)} \in V([a, b])$ , и что  $V_a^b(\frac{1}{f}) \leqslant \frac{1}{C^2} V_a^b(f)$ .  $\square$

**14.21.** Утверждение немедленно следует из задач 14.20 и 14.18.  $\square$

**14.22.** Пусть  $g(x) = 1$  на  $[0, 1]$  и

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in (0, 1], \\ 1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Тогда  $f(x)$  и  $g(x)$  — положительные функции на  $[0, 1]$ , принадлежащие  $V([0, 1])$ , но  $\frac{g(x)}{f(x)}$  — неограниченная функция на  $[0, 1]$ , поэтому (см. задачу 14.2)  $\frac{g(x)}{f(x)} \notin V([0, 1])$ .  $\square$

**14.23.** Заметим, что для любых  $\alpha$  и  $\beta$  из  $[a, b]$  выполнена оценка

$$\begin{aligned} |\max(f(\beta), g(\beta)) - \max(f(\alpha), g(\alpha))| &\leqslant \\ &\leqslant \max(|f(\beta) - f(\alpha)|, |g(\beta) - g(\alpha)|). \end{aligned}$$

Поэтому для любого разбиения  $T$  отрезка  $[a, b]$  имеем:  $V_T(h) \leqslant V_T(f) + V_T(g)$ . Следовательно,  $V_a^b(h) \leqslant V_a^b(f) + V_a^b(g) < \infty$ .  $\square$

**14.24.** Для любых  $\alpha, \beta \in [a, b]$  имеем:  $||f(\beta)| - |f(\alpha)|| \leqslant |f(\beta) - f(\alpha)|$ . Поэтому для любого разбиения  $T$  отрезка  $[a, b]$  получаем, что  $V_T(|f|) \leqslant V_T(f)$ . Следовательно,  $V_a^b(|f|) \leqslant V_a^b(f) < \infty$ .  $\square$

**14.25.** Пусть  $f(x) = 1$  для рациональных  $x \in [0, 1]$  и  $f(x) = -1$  для иррациональных  $x \in [0, 1]$ . Ясно, что  $f(x) \notin V([0, 1])$ , но  $|f(x)| = 1 \in V([0, 1])$ .  $\square$

**14.26.** Пусть  $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$  — разбиение отрезка  $[a, b]$ ,  $\Gamma = \{k \in [1, n]: \operatorname{sgn}(f(x_k) \cdot f(x_{k-1})) = -1\}$  и  $\Phi = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \Gamma$ . Заметим, что если  $k \in \Gamma$ , то в силу непрерывности функции  $f$  существует такая точка  $y_k \in (x_{k-1}, x_k)$ , что  $f(y_k) = 0$ . Добавим к  $T$  все точки  $\{y_k\}_{k \in \Gamma}$  и обозначим новое разбиение через  $T'$ . Тогда

$$V_T(f) \leqslant V_{T'}(f) = \sum_{k \in \Phi} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sum_{k \in \Gamma} (|f(x_k)| + |f(x_{k-1})|) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k \in \Phi} (|f(x_k)| - |f(x_{k-1})|) + \sum_{k \in \Gamma} (|f(x_k)| - |f(y_k)|) + ||f(x_{k-1})| - \\
&\quad - |f(y_k)|| = V_{T'}(|f|) \leq V_a^b(|f|).
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $f(x) \in V([a, b])$  и  $V_a^b(f) \leq V_a^b(|f|)$ . Обратное неравенство доказано в задаче 14.24.  $\square$

**14.27.** Пусть  $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$  — некоторое разбиение отрезка  $[a, b]$ . Тогда

$$V_T(f) = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq C \sum_{k=1}^n |x_k - x_{k-1}| = C(b - a).$$

$\square$

**14.28.** Пусть  $\beta = \frac{1-\alpha}{2-\alpha}$ . Тогда  $\beta > 0$ . Нетрудно проверить, что  $(1-\alpha)(1-\beta) = \beta$ . Положим

$$c_0 = \left( \sum_{k=1}^{\infty} k^{-(1+\beta)} \right)^{-1} \quad \text{и} \quad x_l = c_0 \cdot \sum_{k=l}^{\infty} k^{-(1+\beta)}$$

при каждом  $l \in \mathbb{N}$ . Определим функцию  $f(x)$  на  $[0, 1]$  следующим образом:  $f(0) = 0$ ,  $f(x_l) = \frac{(-1)^l}{l}$  при  $l \in \mathbb{N}$  и  $f(x)$  линейна и непрерывна на каждом отрезке  $[x_{l+1}, x_l]$  при  $l \in \mathbb{N}$ . Ясно, что если  $T(l) = \{0 < x_l < x_{l-1} < \dots < x_1 = 1\}$ , то

$$V_{T(l)} \geq \sum_{k=1}^l \frac{1}{k} \rightarrow \infty$$

при  $l \rightarrow \infty$ . Поэтому  $f(x) \notin V([0, 1])$ . Пусть теперь  $0 < x < y \leq 1$ . Тогда найдутся такие натуральные числа  $n \leq m$ , что  $x \in [x_{n+1}, x_n]$  и  $y \in [x_{m+1}, x_m]$ . Если  $n = m$ , то

$$0 < y - x \leq x_n - x_{n+1} = c_0 n^{-(1+\beta)}$$

и

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= (y - x) \cdot \frac{|f(x_n) - f(x_{n+1})|}{|x_n - x_{n+1}|} \leq (y - x) \cdot \frac{2n^{1+\beta}}{c_0 n} \leq \\
&\leq \frac{2}{c_0} |x - y|^{\alpha} |x_n - x_{n+1}|^{1-\alpha} n^{\beta} \leq \frac{2}{c_0} |x - y|^{\alpha} c_0^{1-\alpha} n^{\beta - (1-\alpha)(1+\beta)} = \\
&= \frac{2}{c_0^{\alpha}} |x - y|^{\alpha}.
\end{aligned}$$

Если  $n = m + 1$ , то  $x_n = x_{m+1}$ , и по доказанному

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f(x_n)| + |f(x_{m+1}) - f(y)| \leq \\ &\leq \frac{2}{c_0^\alpha} (|x - x_n|^\alpha + |x_{m+1} - y|^\alpha) \leq \frac{4}{c_0^\alpha} |x - y|^\alpha. \end{aligned}$$

Если же  $n \geq m + 2$ , то мы найдём такие точки  $z \in [x_n, x_{n-1}]$  и  $t \in [x_{m+2}, x_{m+1}]$ , что  $f(z) = f(t) = 0$  (если  $n = m + 2$ , то  $z = t$ ). Тогда, согласно предыдущим рассуждениям,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(t)| + |f(t) - f(y)| \leq \\ &\leq \frac{4}{c_0^\alpha} (|x - z|^\alpha + |t - y|^\alpha) \leq \frac{8}{c_0^\alpha} |x - y|^\alpha. \end{aligned}$$

Теперь, если взять  $C = \frac{8}{c_0^\alpha}$ , то  $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$  при  $0 < x < y \leq 1$ . Так как  $f(x)$  непрерывна в точке 0, то неравенство выполнено и при  $x = 0$ .  $\square$

**14.29.** Положим

$$c_0 = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \ln^2(k+1)} \right)^{-1} \quad \text{и} \quad x_l = c_0 \cdot \sum_{k=l}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \ln^2(k+1)}$$

при каждом  $l \in \mathbb{N}$ . Определим функцию  $f(x)$  на  $[0, 1]$  следующим образом:  $f(0) = 0$ ,  $f(x_l) = \frac{(-1)^l}{l}$  при  $l \in \mathbb{N}$  и  $f(x)$  линейна на каждом отрезке  $[x_{l+1}, x_l]$ , где  $l \in \mathbb{N}$ . Ясно, что если  $T(l) = \{0 < x_l < x_{l-1} < \dots < x_1 = 1\}$ , то

$$V_{T(l)} \geq \sum_{k=1}^l \frac{1}{k} \rightarrow \infty$$

при  $l \rightarrow \infty$ . Поэтому  $f(x) \notin V([0, 1])$ . Пусть теперь  $\alpha \in (0, 1)$  и  $0 < x < y \leq 1$ . Тогда существуют такие натуральные числа  $n$  и  $m$ , где  $n \leq m$ , что  $x \in [x_{n+1}, x_n]$  и  $y \in [x_{m+1}, x_m]$ . Если  $n = m$ , то

$$0 < y - x \leq x_n - x_{n+1} = c_0 \frac{1}{n \ln^2(n+1)}$$

и

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= (y - x) \cdot \frac{|f(x_n) - f(x_{n+1})|}{|x_n - x_{n+1}|} \leq \\ &\leq \frac{2}{c_0} |x - y| \ln^2(n+1) \leq C(\alpha) |x - y|^\alpha, \end{aligned}$$

где положительная величина  $C(\alpha)$  зависит только от  $\alpha$ . Здесь мы воспользовались тем, что

$$\ln^2(n+1) \cdot |x-y|^{1-\alpha} \leq \ln^2(n+1) \frac{c_0}{n^{1-\alpha} \ln^{2(1-\alpha)}(n+1)} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Если  $n = m + 1$ , то по доказанному

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f(x_n)| + |f(x_{m+1}) - f(y)| \leq \\ &\leq C(\alpha)(|x - x_n|^\alpha + |x_{m+1} - y|^\alpha) \leq 2C(\alpha)|x - y|^\alpha. \end{aligned}$$

Если  $n \geq m + 2$ , то мы найдём такие точки  $z \in [x_n, x_{n-1}]$  и  $t \in [x_{m+2}, x_{m+1}]$ , что  $f(z) = f(t) = 0$  (если  $n = m + 2$ , то  $z = t$ ). Тогда, согласно предыдущим выкладкам,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(t)| + |f(t) - f(y)| \leq \\ &\leq 2C(\alpha)(|x - z|^\alpha + |t - y|^\alpha) \leq 4C(\alpha)|x - y|^\alpha. \end{aligned}$$

Если теперь взять  $C = 4C(\alpha)$ , то  $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$  при  $0 < x < y \leq 1$ . Так как  $f(x)$  непрерывна в точке 0, то неравенство выполнено и при  $x = 0$ .  $\square$

**14.30.** Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln \frac{2}{x}} & \text{при } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Ясно, что  $f(x) \in C([0, 1])$  и  $f(x)$  — возрастающая функция на  $[0, 1]$ , поэтому  $f(x) \in V([0, 1])$ . В то же время для любого  $\alpha \in (0, 1]$  выполнено равенство

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|f(x) - f(0)|}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^\alpha \ln \frac{2}{x}} = \infty,$$

поэтому  $f(x) \notin \text{Lip}(\alpha, [0, 1])$ .  $\square$

**14.31.** Для любого разбиения  $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  имеем

$$\begin{aligned} V_T(g(f)) &= \sum_{k=1}^n |g(f(x_k)) - g(f(x_{k-1}))| \leq \\ &\leq C \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq CV_a^b(f), \end{aligned}$$

откуда следует утверждение задачи.  $\square$

**14.32.** Пусть  $g(x) = |x|^\alpha$ . Пусть  $f(0) = 0$ ,  $f\left(\frac{1}{2n-1}\right) = 0$ ,  $f\left(\frac{1}{2n}\right) = n^{-1/\alpha}$  при  $n \in \mathbb{N}$  и  $f(x)$  линейна на отрезках  $\left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$  для всех  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$V_0^1(f) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{\alpha}} < \infty.$$

Заметим, что  $g\left(f\left(\frac{1}{2n}\right)\right) = \frac{1}{n}$  и  $g\left(f\left(\frac{1}{2n-1}\right)\right) = 0$  для любого натурального  $n$ , поэтому  $g(f(x)) \notin V([0, 1])$ . Наконец, пусть  $0 \leq x < y < \infty$ . Если  $x < \frac{y}{2}$ , то

$$|g(x) - g(y)| \leq g(y) = y^\alpha = 2^\alpha \left(\frac{y}{2}\right)^\alpha < 2^\alpha |x - y|^\alpha.$$

Если  $x \geq \frac{y}{2}$ , то  $|x - y|^{1-\alpha} \leq x^{1-\alpha}$ , и потому

$$|g(x) - g(y)| \leq \max_{t \in [x, y]} |g'(t)| |y - x| \leq \frac{\alpha}{x^{1-\alpha}} |y - x|^\alpha x^{1-\alpha} = \alpha |x - y|^\alpha.$$

Так как функция  $g(x)$  чётна, то она удовлетворяет наложенным в условиях требованиям и на всём  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**14.33.** По теореме Лагранжа имеем:  $|f(x) - f(y)| \leq \sup_{t \in [x, y]} |f'(t)| \times |x - y|$  при всех  $x$  и  $y$  из  $[a, b]$ . Поэтому  $f(x) \in \text{Lip}(1, [a, b])$ . В силу результата задачи 14.27 при этом  $f(x) \in V([a, b])$ .  $\square$

**14.34.** Если  $\beta > 0$ , то в силу результата задачи 14.12 (применённой к функции  $\varphi(x) = x^{\frac{1}{\beta}}$ ) получаем, что  $f(x) \in V([0, 1])$  тогда и только тогда, когда функция

$$g(x) = \begin{cases} x^{\alpha/\beta} \sin x & \text{при } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

принадлежит  $V([0, 1])$ . Положим  $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$ . Если  $\gamma < -1$ , то  $g(x)$  неограничена на  $[0, 1]$ , и поэтому (см. задачу 14.2)  $f(x) \notin V([0, 1])$ . Так как

$$g_{-1}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

— ограниченная единицей и убывающая функция на  $(0, 1]$  и поскольку  $g(x) = g_{-1}(x)x^{\gamma+1}$  при  $\gamma > -1$ , то (см. задачу 14.18)  $f(x) \in V([0, 1])$  при  $\gamma \geq -1$ , т. е. при  $\alpha + \beta \geq 0$ . Если  $\beta = 0$  и  $\alpha < 0$ , то  $f(x)$  неограничена на  $[0, 1]$ , и поэтому (см. задачу 14.2)  $f(x) \notin V([0, 1])$ . Если  $\beta = 0$  и  $\alpha \geq 0$ , то  $f(x)$  — неубывающая функция на  $[0, 1]$ , поэтому  $f(x) \in V([0, 1])$ .

Следовательно,  $f(x) \in V([0, 1])$  тогда и только тогда, когда  $\alpha + \beta \geqslant 0$ .  $\square$

**14.35.** Применяя задачу 14.12 к функции  $\varphi(x) = x^{-1/\beta}$ , получаем, что  $f(x) \in V([0, 1])$  тогда и только тогда, когда функция

$$g(x) = \begin{cases} x^{-\alpha/\beta} \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

принадлежит  $V([0, 1])$ . Положим  $\gamma = -\frac{\alpha}{\beta}$ . Если  $\gamma < 0$ , то  $g(x)$  неограничена на  $[0, 1]$ , и поэтому (см. задачу 14.2)  $g(x) \notin V([0, 1])$ . При  $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$  для любого натурального  $N$  имеем

$$V_0^1(f) \geqslant \sum_{n=1}^N \left| f\left(\frac{1}{2\pi n - \pi/2}\right) - f\left(\frac{1}{2\pi n}\right) \right| = \sum_{n=1}^N \left(2\pi n - \frac{\pi}{2}\right)^{-\gamma} \rightarrow \infty$$

при  $N \rightarrow \infty$ . Поэтому в данном случае  $g(x) \notin V([0, 1])$ .

Пусть теперь  $\gamma \in (1, 2]$ . Докажем, что в этом случае  $g(x) \in V([0, 1])$ . Заметим, что

$$g'(x) = \gamma x^{\gamma-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\gamma-2} \cos \frac{1}{x}.$$

Возьмём разбиение  $T = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1\}$  отрезка  $[0, 1]$ . Можно считать, что разбиение удовлетворяет условию  $x_k \leqslant 2x_{k-1}$  при всех  $k \geqslant 2$ , иначе добавим к нему достаточное количество дополнительных точек. При этом условии верна оценка  $x_k - x_{k-1} \leqslant x_{k-1}$ , и мы получаем, что

$$\begin{aligned} V_T(g) &= \sum_{k=1}^n |g(x_k) - g(x_{k-1})| = |g(x_1)| + \sum_{k=2}^n |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leqslant \\ &\leqslant x_1^\gamma + \sum_{k=2}^n |x_k - x_{k-1}| \cdot \max_{t \in [x_{k-1}, x_k]} |g'(t)| \leqslant x_1^\gamma + \sum_{k=2}^n (x_k - x_{k-1}) \times \\ &\quad \times (2 + x_{k-1}^{\gamma-2}) \leqslant 3 + 2^{2-\gamma} \sum_{k=2}^n (x_k - x_{k-1}) \cdot x_k^{\gamma-2} \leqslant \\ &\leqslant 3 + 2 \sum_{k=2}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} x^{\gamma-2} dx = 3 + 2 \int_{x_1}^1 x^{\gamma-2} dx \leqslant 3 + \frac{2}{\gamma-1}, \end{aligned}$$

откуда следует, что в этом случае  $g(x) \in V([0, 1])$ . Так как  $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} x^{\gamma-2}$  при  $\gamma > 2$ , то мы получаем (см. задачу 14.18), что  $g(x) \in V([0, 1])$  и при  $\gamma > 2$ . Следовательно,  $f(x) \in V([0, 1])$  тогда и только тогда, когда  $\gamma > 1$ , т. е. при  $\alpha + \beta > 0$ .  $\square$

**14.36.** В силу результата задачи 14.6 достаточно доказать утверждение для монотонных функций. Но для них оно уже доказано в задаче 2.4.  $\square$

**14.37.** Пусть дано  $\varepsilon > 0$ . Рассмотрим разность  $f_1(x_0 + h) - f_1(x_0)$ . Пусть  $x_0 < b$  и  $h > 0$  (остальные случаи рассматриваются аналогично). Возьмём такое разбиение  $T = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  отрезка  $[x_0, b]$ , что  $V_T(f) > V_{x_0}^b(f) - \frac{\varepsilon}{2}$ . Выберем  $\delta > 0$  так, чтобы  $\delta < x_1 - x_0$ , и если  $0 < h < \delta$ , то  $|f(x_0 + h) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ . При таких  $h$  получаем

$$\begin{aligned} f_1(x_0 + h) - f_1(x_0) &= V_{x_0}^{x_0+h}(f) = V_{x_0}^b(f) - V_{x_0+h}^b(f) < V_T(f) - \\ &- V_{x_0+h}^b(f) + \frac{\varepsilon}{2} \leq |f(x_0 + h) - f(x_0)| + |f(x_0 + h) - f(x_1)| + \\ &+ \sum_{k=2}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| - V_{x_0+h}^b(f) + \frac{\varepsilon}{2} \leq |f(x_0 + h) - f(x_0)| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

 $\square$ 

**14.38.** Утверждение немедленно вытекает из неравенства

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| \leq V_{x_0}^{x_0+h}(f) = f_1(x_0 + h) - f_1(x_0)$$

при  $h > 0$  и аналогичного неравенства при  $h < 0$ .  $\square$

**14.39.** Утверждение вытекает из представления (см. задачу 14.6)  $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ , где  $f_1(x) = V_a^x(f)$ , и задачи 14.37.  $\square$

**14.40.** По определению

$$s(x) = \sum_{k : x_k < x} a_k + \sum_{k : x_k \leq x} b_k.$$

Из условия

$$\sum_k (|a_k| + |b_k|) < \infty$$

следует, что ряды в первой формуле абсолютно сходятся и их можно переставлять как угодно. В частности, функция определена корректно. Положим  $s(x) = s_1(x) + s_2(x)$ , где  $s_1$  — сумма положительных слагаемых, а  $s_2(x)$  — сумма отрицательных слагаемых из формулы для  $s(x)$ . Функции  $s_1(x)$  и  $s_2(x)$  по построению монотонны, а тогда их сумма — функция ограниченной вариации.  $\square$

**14.41.** Указанную функцию можно переписать в виде

$$s(x) = \sum_{k : x_k < x} (f(x_k + 0) - f(x_k)) + \sum_{k : x_k \leq x} (f(x_k) - f(x_k - 0)).$$

Но нетрудно видеть, что при любом конечном  $N$  выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^N \left( |f(x_k + 0) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x_k - 0)| \right) \leq V_a^b(f).$$

Отсюда следует ограниченность суммы всего ряда, которая и означает корректность определения.  $\square$

**14.42.** Как было отмечено в решении задачи 14.41,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( |f(x_k + 0) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x_k - 0)| \right) \leq V_a^b(f) < \infty.$$

Предположим, что  $f(x)$  непрерывна в некоторой точке  $t \in [a, b]$ . Без ограничения общности можно считать, что  $t \in (a, b)$ . Для заданного  $\varepsilon > 0$  найдём такое  $\delta > 0$ , что

$$\sum_{k: x_k \in [t-\delta, t+\delta]} \left( |f(x_k + 0) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x_k - 0)| \right) < \varepsilon.$$

Такое  $\delta$  можно найти, так как если  $\delta < |t - x_k|$  при  $k \leq N$ , то все  $x_k$ , попавшие в указанный отрезок, относятся к остатку сходящегося ряда. Но тогда  $|s(t+h) - s(t)| < \varepsilon$  при  $h \in [-\delta, \delta]$ . Остальные утверждения задачи доказываются аналогично.  $\square$

**14.43.** В силу результата задачи 14.41 функция  $g(x)$  — ограниченной вариации на  $[a, b]$ . При этом в силу результата задачи 14.42 функция  $g(x)$  непрерывна в каждой точке непрерывности  $f(x)$ . Пусть  $t$  — точка разрыва  $f(x)$ . Тогда (см. задачу 14.36) существуют  $f(t+0)$  и  $f(t-0)$ . Заметим, что по определению  $s(t) - s(t-0) = f(t) - f(t-0)$  и  $s(t+0) - s(t) = f(t+0) - f(t-0) - f(t) + f(t-0) = f(t+0) - f(t)$ . Поэтому  $g(t-0) = g(t) = g(t+0)$ , т. е.  $g(x)$  непрерывна в точке  $t$ .  $\square$

**14.44.** Тот факт, что  $m$  — мера, проверяется так же, как в задаче 6.12. Покажем, что для любого промежутка  $I = [a, b]$  и для любого  $\delta > 0$  найдётся такой интервал  $(c, d) \supseteq I$ , что  $m((c, d)) < m(I) + \delta$ . Если  $b \in I$ , то возьмём  $d = b$ , иначе по определению правого предела найдётся такое число  $d > b$ , что  $g(b+0) \leq g(d) < g(b+0) + \frac{\delta}{2}$ . Если  $a \in I$ , то возьмём  $c = a$ , иначе по определению левого предела найдётся такое число  $c < a$ , что  $g(a-0) - \frac{\delta}{2} < g(c) \leq g(a-0)$ . Построенный интервал  $(c, d)$  подходящий. Аналогично показывается, что для любого промежутка  $I = [a, b]$  и для любого  $\delta > 0$  найдётся такой отрезок

$(x, y) \subseteq I$ , что  $m((x, y)) > m(I) - \delta$ . Теперь  $\sigma$ -аддитивность меры  $m$  устанавливается по той же схеме, что и в решении задачи 6.21.

□

**14.45.** Ясно, что так как  $f(x)$  — неубывающая функция на  $[a, b]$ , то для любых  $a \leq y < z \leq b$  имеем

$$\begin{aligned} f(z) - f(y) &\geq \sum_{k:x_k \in (y, z)} (f(x_k + 0) - f(x_k - 0)) + f(y + 0) - f(y) + \\ &\quad + f(z) - f(z - 0) = s(z) - s(y), \end{aligned}$$

откуда следует утверждение задачи. □

**14.46.** Пусть  $f(0) = 0$  и

$$f(x) = \sum_{k:t_k \leq x} 2^{-k}$$

при  $x \in (0, 1]$ . Ясно, что  $f(x)$  — корректно определённая неубывающая функция на  $[0, 1]$ . Если  $x_0 \in [0, 1] \setminus \{t_n\}_{n=1}^\infty$ , то  $f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0)$  (см. решение задачи 14.42), поэтому  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ . Пусть  $x = t_n$  при некотором  $n$ . Если  $t_n > 0$ , то  $f(t_n) - f(t_n - 0) = 2^{-n}$ , поэтому  $f(x)$  разрывна в этой точке. Если  $t_n = 0$ , то  $f(t_n + 0) - f(t_n) = 2^{-n}$ , и  $f(x)$  вновь разрывна в этой точке. □

**14.47.** Пусть  $p_0 > p$  и  $\varepsilon > 0$  произвольны. Опираясь на определение внешней меры, выберем такое открытое множество  $G \subseteq (a, b)$ , что  $E \subseteq G$  и  $\mu(G) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$ . Для любого  $x \in E$  существует такая последовательность чисел  $\{h_n = h_n(x)\}_{n=1}^\infty$ , что  $h_n \neq 0$ ,  $h_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и

$$\frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n} \leq p_0$$

при всех  $n$ . Можно считать  $h_n(x)$  столь малыми, что  $[x, x + h_n(x)] \subseteq G$ . При  $h_n(x) > 0$  обозначим  $d_n(x) = [x, x + h_n(x)]$  и  $D_n(x) = [f(x), f(x + h_n(x))]$  для  $x \in E$  и  $n \in \mathbb{N}$ . При  $h_n(x) < 0$  обозначим  $d_n(x) = [x + h_n(x), x]$  и  $D_n(x) = [f(x + h_n(x)), f(x)]$  для  $x \in E$  и  $n \in \mathbb{N}$ . Так как  $f(x)$  строго возрастает, то отрезки  $D_n(x)$  невырожденные. Поскольку  $\mu(D_n(x)) \leq p_0 |h_n(x)|$  для всех  $x$  и всех  $n$ , то система отрезков  $D = \{D_n(x)\}_{n=1, x \in E}^\infty$  покрывает  $f(E)$  в смысле Витали. Применяя теорему Витали (см. задачу 7.105), выберем такую последовательность непересекающихся отрезков  $\{D_{n_k}(x_k)\}_{k=1}^\infty \subseteq D$ , что

$$\mu^*\left(f(E) \setminus \bigcup_{k=1}^\infty D_{n_k}(x_k)\right) = 0.$$

В силу возрастания функции  $f$  отрезки  $\{d_{n_k}(x_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset G$  также не пересекаются. Следовательно,

$$\begin{aligned}\mu^*(f(E)) &\leq \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} D_{n_k}(x_k)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_{n_k}(x_k)) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k + h_{n_k}) - f(x_k)| \leq p_0 \sum_{k=1}^{\infty} |h_{n_k}(x_k)| = p_0 \sum_{k=1}^{\infty} \mu(d_{n_k}(x_k)) = \\ &= p_0 \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} d_{n_k}(x_k)\right) \leq p_0 \mu(G) \leq p_0(\mu^*(E) + \varepsilon).\end{aligned}$$

Так как  $p_0 > p$  и  $\varepsilon > 0$  произвольны, то тем самым утверждение задачи доказано.  $\square$

**14.48.** Пусть даны  $q_0 \in (0, q)$  и  $\varepsilon > 0$ . Возьмём такое открытое множество  $G \supseteq f(E)$ , что  $\mu(G) \leq \mu^*(f(E)) + \varepsilon$ . Для любого  $x \in E$  существует такая последовательность положительных чисел  $\{h_n = h_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ , что  $h_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и

$$\frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n} \geq q_0$$

для всех  $n$ . Пусть для простоты  $h_n(x) > 0$  для всех  $x \in E$  и всех  $n \in \mathbb{N}$ . Обозначим  $d_n(x) = [x, x + h_n(x)]$  и  $D_n = [f(x), f(x + h_n(x))]$  для  $x \in E$  и  $n \in \mathbb{N}$ . Так как  $f(x)$  непрерывна всюду на  $E$ , то можно считать, что все  $D_n(x)$  вложены в  $G$ . Система отрезков  $\{d_n(x)\}_{n=1, x \in E}^{\infty}$  покрывает  $E$  в смысле Витали. Применяя теорему Витали (см. задачу 7.105), выберем последовательность непересекающихся отрезков  $\{d_{n_k}(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ , для которой

$$\mu^*\left(E \setminus \bigsqcup_{k=1}^{\infty} d_{n_k}(x_k)\right) = 0.$$

Так как функция  $f(x)$  строго возрастает, то отрезки  $\{D_{n_k}(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$  также попарно не пересекаются. Тогда

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &\leq \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} d_{n_k}(x_k)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(d_{n_k}(x_k)) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} h_{n_k}(x_k) \leq \frac{1}{q_0} \sum_{k=1}^{\infty} (f(x_k + h_{n_k}) - f(x_k)) = \frac{1}{q_0} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_{n_k}(x_k)) = \\ &= \frac{1}{q_0} \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} D_{n_k}(x_k)\right) \leq \frac{1}{q_0} \mu(G) \leq \frac{1}{q_0} (\mu^*(f(E)) + \varepsilon).\end{aligned}$$

Поскольку  $q_0 \in (0, q)$  и  $\varepsilon > 0$  произвольны, то утверждение задачи доказано.  $\square$

**14.49.** Пусть  $g(x) = f(x) + x$  при  $x \in [a, b]$ . Тогда  $g(x)$  — строго возрастающая функция на  $[a, b]$ . Пусть  $E$  — множество всех точек непрерывности функции  $g(x)$  на  $[a, b]$ . Тогда  $[a, b] \setminus E$  не более чем счётно. Обозначим через  $\mathbb{Q}_+$  множество всех положительных рациональных чисел, положим  $E_\infty = \{x \in E : g'(x) = \infty\}$  и  $E_{p,q} = x \in E : g'(x) < p < q < \bar{g}'(x)\}$  для всех таких  $p, q \in \mathbb{Q}_+$ , что  $p < q$ . Заметим, что  $g'(x) \geq 1$  при всех  $x$ . Предположим, что  $\mu^*(E_\infty) = a > 0$ . Тогда в силу результата задачи 14.48 получим:  $\mu^*(g(E_\infty)) > ra$  для любого  $r < \infty$ , что невозможно. Следовательно,  $E_\infty$  измеримо и  $\mu(E_\infty) = 0$ . Далее, в силу результата задач 14.47 и 14.48 получаем

$$q\mu^*(E_{p,q}) \leq \mu^*(g(E_{p,q})) \leq p\mu^*(E_{p,q})$$

при всех  $p < q$ , что возможно только в случае, когда  $\mu^*(E_{p,q}) = 0$ . Заметим, что множество всех точек интервала  $(a, b)$ , где  $g'(x)$  не существует, можно представить в виде

$$A = ((a, b) \setminus E) \cup E_\infty \cup \left( \bigcup_{p,q \in \mathbb{Q}_+: p < q} E_{p,q} \right).$$

Из предыдущих рассуждений следует, что  $\mu(A) = 0$ , поэтому функция  $g(x)$  дифференцируема п.в. на  $(a, b)$ . Следовательно, и функция  $f(x) = g(x) - x$  дифференцируема п.в. на  $(a, b)$ .  $\square$

**14.50.** Заметим, что в силу результата задачи 14.49 производная  $f'(x)$  существует п.в. на  $(a, b)$ . Продолжим функцию  $f(x)$  на  $\mathbb{R}$ : пусть  $f(x) = f(a)$  при  $x < a$  и  $f(x) = f(b)$  при  $x > b$ . Определим функции  $F_n(x) = n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x))$  при  $x \in [a, b]$  и  $n \in \mathbb{N}$ . Эти функции неотрицательны, и  $F_n(x) \rightarrow f'(x)$  п.в. на  $(a, b)$ , по крайней мере во всех точках дифференцируемости. Более того,

$$\begin{aligned} (L) \int_{(a,b)} F_n(x) d\mu &= (\mathcal{R}) \int_a^b F_n(x) dx = n \left( \int_a^b f\left(x + \frac{1}{n}\right) dx - \int_a^b f(x) dx \right) = \\ &= n \left( - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x) dx + \int_b^{b+\frac{1}{n}} f(b) dx \right) \leq f(b) - f(a). \end{aligned}$$

По теореме Фату получаем, что  $f'(x) \in L((a, b))$ , и что

$$\int_{(a,b)} f'(x) d\mu \leq f(b) - f(a).$$

$\square$

**14.51.** Утверждение вытекает из задач 14.6 (о разложении функции ограниченной вариации в разность монотонных) и 14.50.  $\square$

**14.52.** Если  $f(x)$  — функция Кантора на  $[0, 1]$ , то (см. задачу 8.33)  $f'(x) = 0$  п.в. на  $[0, 1]$ , откуда следует, что

$$\int_{(0,1)} f'(x) d\mu = 0.$$

В то же время  $f(1) - f(0) = 1$ .  $\square$

**14.53.** Пусть  $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$  — такая последовательность открытых множеств, что  $G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset A$  и  $\mu(G_n) < 2^{-n}$  при каждом  $n$ . Пусть при этом

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \chi_{G_n}(x).$$

Так как

$$\int_{(a,b)} g(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \mu(G_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} < \infty,$$

то  $g(x) \in L((a, b))$ . Поэтому можно определить для  $x \in [a, b]$  функцию

$$f(x) = \int_{[a,x]} g(t) d\mu.$$

Ясно, что  $f(x)$  — неубывающая функция на  $[a, b]$ , и в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега (задача 10.67)  $f(x) \in C([a, b])$ . Пусть  $x \in A$ . Тогда  $x \in G_n$  для всех  $n$ . Так как множества  $G_n$  открыты, то существует такая последовательность положительных чисел  $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ , что  $x + h \in G_n$  при  $|h| \leq h_n$  для  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда для любого  $n$  при  $|h| \leq h_n$  получаем

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_{(x,x+h)} g(t) d\mu \geq \frac{1}{h} \int_{(x,x+h)} n^2 \chi_{G_n}(t) d\mu \geq n^2.$$

Отсюда следует, что  $f'(x) = \infty$  всюду на  $A$ .  $\square$

**14.54.** Пусть  $D_n = \left\{ x \in A \setminus B : \bar{f}'(x) \geq \frac{1}{n} \right\}$  для  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда в силу результата задачи 14.48 получаем, что  $\mu^*(f(D_n)) \geq \frac{1}{n} \mu^*(D_n)$ . Так как  $D_n \subseteq A$ , то  $\mu^*(D_n) \leq n \mu^*(f(A)) = 0$ . Но  $A \setminus B = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ . Поэтому множество  $A \setminus B$  измеримо и  $\mu(A \setminus B) = 0$ .  $\square$

**14.55.** Заметим, что  $f(x)$  — также неубывающая функция на  $[a, b]$ , поэтому  $f'(x)$  существует п.в. на  $[a, b]$  (см. задачу 14.51). Поскольку

$$g_k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} f_n(x)$$

— неубывающая функция на  $[a, b]$  при каждом  $k$ , дифференцируемая во всех точках дифференцируемости функции  $f$ , то

$$f'(x) = \sum_{n=1}^k f'_n(x) + g'_k(x) \geq \sum_{n=1}^k f'_n(x)$$

для  $k \in \mathbb{N}$ . Отсюда следует, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$$

сходится п.в. на  $[a, b]$ . Более того,  $g'_1(x) \geq g'_2(x) \geq \dots \geq 0$  п.в. на  $[a, b]$  и (см. задачу 14.50)

$$\int_{(a,b)} g'_k(x) d\mu \leq g_k(b) - g_k(a) = \sum_{n=k}^{\infty} f_n(b) - \sum_{n=k}^{\infty} f_n(a) \rightarrow 0$$

при  $k \rightarrow \infty$ . По теореме Б. Леви  $g'_k(x) \downarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$  п.в. на  $[a, b]$ . Если сходимость имеет место в точке  $x_0 \in (a, b)$ , то

$$f'(x_0) - \sum_{n=1}^k f'_n(x_0) = g'_{k+1}(x_0) \rightarrow 0$$

при  $k \rightarrow \infty$ , т. е. сумма ряда равна  $f'(x_0)$ .  $\square$

**14.56.** Все функции  $f_n(x)$  будут нечётны, поэтому мы построим их на  $[0, 1]$ . Определим вспомогательные функции  $g_n$ :  $g_n(x) = 0$  при  $0 \leq x \leq 2^{-n-1}$ ,  $g_n(x) = 2^{n+1}\sqrt{x}(x - 2^{-n-1})$  при  $2^{-n-1} < x < 2^{-n}$  и  $g_n(x) = \sqrt{x}$  при  $2^{-n} \leq x \leq 1$ . Теперь положим  $f_n(x) = \frac{1}{n^2}g_n(x)$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Ясно, что все  $f_n(x)$  — непрерывные неубывающие функции на  $[0, 1]$  и  $f'_n(0) = 0$  для всех  $n$ . Более того, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

сходится равномерно на  $[0, 1]$ . Пусть теперь  $h \in (2^{-n}, 2^{-n+1}]$  при некотором  $n$ . Тогда

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{f(h)}{h} \geq \frac{g_n(h)}{n^2 h} = \frac{1}{n^2 \sqrt{h}} \geq \frac{2^{n/2}}{4n^2} \rightarrow \infty$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Поэтому  $f'(0) = \infty$ .  $\square$

**14.57.** Без ограничения общности можно считать, что  $s(x)$  — неубывающая функция на  $[a, b]$ . Заметим, что

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k g_k(x),$$

где все  $a_k \geq 0$ ,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$$

и  $g_k(x) = \chi_{[c_k, b]}(x)$  (все  $c_k \in [a, b]$ , а функции  $g_k(x)$  попарно различны). Тогда в силу результата задачи 14.55 получаем, что

$$s'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k g'_k(x) = 0$$

п.в. на  $[a, b]$ .  $\square$

**14.58.** Заметим, что в каждой точке  $x \in [a, b]$  выполнено неравенство  $|f_n(x)| \leq |f_n(a)| + V_a^b(f_n)$  для  $n \in \mathbb{N}$  и что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(a)| + \sum_{n=1}^{\infty} V_a^b(f_n) < \infty.$$

По теореме Вейерштрасса ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

равномерно на  $[a, b]$  сходится к некоторой функции  $f(x)$ . Пусть

$$g_k(x) = \sum_{n=1}^k f_n(x)$$

для  $k \in \mathbb{N}$ , а  $T$  — некоторое разбиение отрезка  $[a, b]$  из  $N$  точек. Тогда для достаточно больших  $k$  имеет место неравенство  $\sup_x |f(x) - g_k(x)| < \varepsilon/(2N)$  и в силу результата задачи 14.14 получаем

$$V_T(f) \leq V_T(g_k) + \varepsilon \leq V_a^b(g_k) + \varepsilon \leq \sum_{n=1}^k V_a^b(f_n) + \varepsilon \leq \sum_{n=1}^{\infty} V_a^b(f_n) + \varepsilon.$$

Отсюда следует утверждение задачи.  $\square$

**14.59.** В силу результата задачи 14.58 величина  $V_a^b(h)$  не превосходит  $\alpha$ . Пусть дано  $\varepsilon > 0$ . Найдём такое  $N$ , что

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ясно, что если

$$h_l(x) = \sum_{k=1}^l a_k g_k(x)$$

для  $l \in \mathbb{N}$ , то

$$V_a^b(h_l) = \sum_{k=1}^l |a_k|.$$

Отсюда следует (см. задачу 14.58), что

$$\begin{aligned} V_a^b(h) &\geq V_a^b(h_N) - V_a^b(h - h_N) \geq \sum_{k=1}^N |a_k| - \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \geq \\ &\geq \alpha - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \alpha - \varepsilon. \end{aligned}$$

Но  $\varepsilon > 0$  произвольно, и потому  $V_a^b(h) \geq \alpha$ .  $\square$

**14.60.** Пусть  $\varphi(x)$  — функция Кантора на  $[0, 1]$  (см. решение задачи 4.19),  $g_0(x) = \varphi(x)$  при  $x \in [0, 1]$ ,  $g_0(x) = 0$  при  $x < 0$  и  $g_0(x) = 1$  при  $x > 1$ . Пусть  $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$  — множество всех интервалов из  $[0, 1]$  с рациональными концами. Для  $I_n = (a, b)$  определим функции  $f_n(x) = \frac{1}{n^2} g_0\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ . Затем определим функцию

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Ясно, что  $f(x)$  корректно определена и непрерывна на  $[0, 1]$ . Так как каждая функция  $f_n(x)$  неубывающая на  $[0, 1]$ , то в силу результата задачи 14.55

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = 0$$

п.в. на  $[0, 1]$ . Далее, пусть  $0 \leq y < z \leq 1$ . Найдём такие рациональные  $a$  и  $b$ , что  $y < a < b < z$ . Пусть  $(a, b) = I_r$ . Тогда

$$f(z) - f(y) \geq f(b) - f(a) \geq f_n(b) - f_n(a) = \frac{1}{n^2}.$$

Отсюда следует, что  $f(x)$  — строго возрастающая на  $[0, 1]$ .  $\square$

**14.61.** Пусть  $E = \{x_r\}_{r=1}^{\infty}$  — некоторое всюду плотное множество на  $[a, b]$ , причём  $x_1 = a$  и  $x_2 = b$ . Так как  $|f_n(x_1)| \leq C$  при всех  $n$ , то существует подпоследовательность  $F^{(1)} = \{f_l^{(1)}(x)\}_{l=1}^{\infty}$ , которая сходится в точке  $x_1$ . Поскольку последовательность  $F^{(1)}$  равномерно ограничена в точке  $x_2$ , то существует её подпоследовательность  $F^{(2)} = \{f_l^{(2)}(x)\}_{l=1}^{\infty}$ , которая сходится и в  $x_2$ , и т. д. Положим

$f_{n_k}(x) = f_k^{(k)}(x)$  при  $k \in \mathbb{N}$ . Заметим, что эта последовательность сходится в каждой точке  $x_r$ . Пусть

$$\psi(x_r) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x_r) \quad \text{для } r \in \mathbb{N}.$$

Тогда функция  $\psi(x)$  неубывающая на  $E$ . Положим

$$g(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{если } x \in E, \\ \sup_{x_k < x} \psi(x), & \text{если } x \in [a, b] \setminus E. \end{cases}$$

Ясно, что  $g(x)$  — неубывающая функция на  $[a, b]$  и  $f_{n_k}(x) \rightarrow g(x)$  при  $k \rightarrow \infty$  на  $E$ . Множество  $A$  точек разрыва функции  $g(x)$  не более чем счётно. Пусть  $t \notin A \cup E$ . Для заданного  $\varepsilon > 0$  найдём такие  $x_i < t < x_j$ , что  $g(x_j) - g(x_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Далее, существует такое  $N$ , что

$$|f_{n_k}(x_i) - g(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |f_{n_k}(x_j) - g(x_j)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при  $k \geq N$ . Отсюда следует, что

$$g(t) - \varepsilon < f_{n_k}(x_i) \leq f_{n_k}(t) \leq f_{n_k}(x_j) < g(t) + \varepsilon,$$

т. е.  $|f_{n_k}(t) - g(t)| < \varepsilon$  при  $k \geq N$ . Поэтому  $f_{n_k}(x) \rightarrow g(x)$  при  $k \rightarrow \infty$  на  $[a, b] \setminus A$ . Так как множество  $A$  не более чем счётно, а последовательность  $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$  равномерно ограничена, то мы можем применить к ней описанный выше диагональный процесс и выделить подпоследовательность, сходящуюся всюду на  $[a, b]$ . Нетрудно видеть, что предельная функция  $f(x)$  будет неубывающей на  $[a, b]$ .  $\square$

**14.62.** Пусть  $g_i(x) = V_a^x(f_i)$  и  $h_i(x) = g_i(x) - f_i(x)$  при  $x \in [a, b]$  и  $i \in \mathbb{N}$ . Тогда все  $g_i(x)$  и все  $h_i(x)$  — неубывающие функции на  $[a, b]$ , причём  $|g_i(x)| \leq C$  и  $|h_i(x)| \leq 2C$  для всех  $x \in [a, b]$  и всех  $i$ . В силу 14.61 существует подпоследовательность  $\{g_{i_l}(x)\}_{l=1}^{\infty}$ , которая сходится на  $[a, b]$  к некоторой неубывающей функции  $g(x)$ . Затем применим задачу 14.61 к последовательности  $\{h_{i_l}(x)\}_{l=1}^{\infty}$  и найдём подпоследовательность  $\{h_{j_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ,  $\{j_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \{i_l\}_{l=1}^{\infty}$ , которая сходится на  $[a, b]$  к некоторой неубывающей функции  $h(x)$ . Но тогда  $f_{j_k}(x) \rightarrow g(x) - h(x) \in V([a, b])$  при  $k \rightarrow \infty$  всюду на  $[a, b]$ .  $\square$

**14.63.** Рассмотрим вначале функции  $g_i(x) = f_i(x) - f_i(a)$ . Тогда существует такое  $i_0$ , что  $V_a^b(g_i - g_{i_0}) \leq 1$  при  $i \geq i_0$ . Поэтому  $V_a^b(g_i) \leq V_a^b(g_{i_0}) + 1$  при  $i \geq i_0$ . К тому же,

$$|g_i(x)| \leq V_a^b(g_i) + |g_i(a)| = V_a^b(g_i) \leq V_a^b(g_{i_0}) + 1$$

для всех  $x \in [a, b]$  и всех  $i \geq i_0$ . Применяя задачу 14.62, найдём такую подпоследовательность  $\{g_{i_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ , что  $g_{i_n}(x) \rightarrow f(x) \in V([a, b])$  при

$n \rightarrow \infty$  на  $[a, b]$ . Пусть  $\varepsilon > 0$  и  $N$  таковы, что  $V_a^b(f_n - f_m) < \varepsilon$  при  $n, m \geq N$ . Тогда для любого разбиения  $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$  отрезка  $[a, b]$  и для любого  $m \geq N$  имеем

$$V_T(f_m - f) = \lim_{n \rightarrow \infty} V_T(f_m - f_{i_n}) \leq \varepsilon.$$

Поэтому  $V_a^b(f_m - f) \leq \varepsilon$  при  $m \geq N$ .  $\square$

**14.64.** Ясно, что  $V_T(f) \leq \Omega_T(f) \leq V_a^b(f)$  для любого  $T$ . Возьмём произвольное  $\alpha < V_a^b(f)$  и найдём такое разбиение  $T_1 = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = b\}$  отрезка  $[a, b]$ , что  $V_{T_1}(f) > \alpha$ . Так как  $f(x) \in C([a, b])$ , то можно найти такое  $\delta \in \left(0, \frac{\lambda(T_1)}{4}\right)$ , что если  $y, z \in [a, b]$  и  $|y - z| \leq \delta$ , то

$$|f(y) - f(z)| < \frac{V_{T_1}(f) - \alpha}{4m},$$

где  $m$  — число точек в  $T_1$ . Предположим, что разбиение  $T = \{a = y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1} < y_n = b\}$  отрезка  $[a, b]$  таково, что  $\lambda(T) < \delta$ . Заметим, что существуют такие числа  $n_1 < n_2 < \dots < n_{m-1}$ , что  $y_{n_k} \leq x_k < y_{n_{k+1}}$  при  $k = 1, 2, \dots, m-1$ . Если разбиение  $T_2$  — объединение разбиений  $T$  и  $T_1$ , то

$$\begin{aligned} V_T(f) &= V_{T_2}(f) - \sum_{k=1}^{m-1} (|f(x_k) - f(y_{n_k})| + |f(x_k) - f(y_{n_{k+1}})| - \\ &\quad - |f(y_{n_{k+1}}) - f(y_{n_k})|) \geq V_{T_2}(f) - 2m \frac{V_{T_1}(f) - \alpha}{4m} \geq \\ &\geq V_{T_1}(f) - \frac{V_{T_1}(f) - \alpha}{2} > \alpha. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\liminf_{\lambda(T) \rightarrow 0} V_T(f) \geq \alpha.$$

Так как  $\alpha < V_a^b(f)$  произвольно, то утверждение задачи тем самым доказано.  $\square$

**14.65.** Пусть  $f(x)$  — функция Дирихле, т. е.  $f(x) = 1$  в рациональных точках  $x \in [0, 1]$  и  $f(x) = 0$  в иррациональных точках  $x \in [0, 1]$ . Ясно, что  $f(x) \notin V([0, 1])$ . Пусть  $T_i = \left\{0 = x_0 < \frac{1}{i} < \frac{2}{i} < \dots < x_i = 1\right\}$ . Тогда  $V_{T_i}(f) = 0$  при всех  $i$  и  $\lambda(T_i) = \frac{1}{i} \rightarrow 0$  при  $i \rightarrow \infty$ .  $\square$

**14.66.** Для произвольного натурального  $n$  рассмотрим множества

$$\Delta_{k,n} = \left[ a + \frac{(k-1)(b-a)}{2^n}, a + \frac{k(b-a)}{2^n} \right)$$

при  $k = 1, 2, \dots, 2^n - 1$  и  $\Delta_{2^n, n} = \left[ a + \frac{(2^n - 1)(b - a)}{2^n}, b \right]$ . Обозначим  $m_{k,n} = \inf_{x \in \Delta_{k,n}} f(x)$  и  $M_{k,n} = \sup_{x \in \Delta_{k,n}} f(x)$ . Пусть

$$g_{k,n}(y) = \begin{cases} 1, & \text{если существует такое } x \in \Delta_{k,n}, \text{ что } f(x) = y, \\ 0 & \text{— иначе} \end{cases}$$

и

$$g_n(y) = \sum_{k=1}^{2^n} g_{k,n}(y)$$

при каждом  $n$ . Ясно, что  $g_{n+1}(y) \geq g_n(y)$  для любого  $n$  и для любого  $y \in \mathbb{R}$ . В решении задачи 8.52 было доказано, что  $g_n(y) \rightarrow g(y)$  при  $n \rightarrow \infty$  для любого  $y \in \mathbb{R}$ . Заметим также (см. задачу 14.64), что

$$\int_{\mathbb{R}} g_n(y) d\mu = \sum_{k=1}^{2^n} (M_{k,n} - m_{k,n}) \rightarrow V_a^b(f)$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Применяя теорему Б. Леви, получаем утверждение задачи.  $\square$

**14.67.** В силу результата задачи 14.43 функция  $\psi(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ . Согласно задаче 14.14, имеет место неравенство  $V_a^b(f) \leq V_a^b(\psi) + V_a^b(s)$ . Пусть задано  $\varepsilon > 0$ . Заметим, что (см. задачу 14.57)

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k g_k(x),$$

где

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$$

и  $g_k(x) = \chi_{[c_k, b]}(x)$  (все  $c_k \in [a, b]$  и функции  $g_k(x)$  попарно различны). Тогда (см. задачу 14.59)

$$V_a^b(s) = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \equiv \alpha.$$

Выберем такое  $N$ , что

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Обозначим

$$s_N(x) = \sum_{k=1}^N a_k g_k(x).$$

Положим  $\lambda_1 = \frac{1}{5} \min_{1 \leq j < k \leq N, c_k \neq c_j} |c_k - c_j|$ . Заметим, что если разбиение  $T$  содержит все точки  $\{c_k\}_{k=1}^N$  и  $\lambda(T) < \lambda_1$ , то  $V_T(s_N) = V_a^b(s_N) > \alpha - \frac{\varepsilon}{8}$ . Пусть  $\lambda_2 > 0$  таково, что (см. задачу 14.64) если  $T$  — разбиение отрезка  $[a, b]$  и  $\lambda(T) < \lambda_2$ , то  $V_T(\psi) \geq V_a^b(\psi) - \frac{\varepsilon}{8} \equiv \beta - \frac{\varepsilon}{8}$ . При этом можно считать  $\lambda_2 > 0$  столь малым, что если  $y, z \in [a, b]$  и  $|y - z| \leq \lambda_2$ , то  $|\psi(y) - \psi(z)| < \frac{\varepsilon}{8N}$ . Пусть теперь разбиение  $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  отрезка  $[a, b]$  содержит все точки  $\{c_k\}_{k=1}^N$  и  $\lambda(T) < \min(\lambda_1, \lambda_2)$ . Пусть  $c_k = x_{n_k}$  при  $k = 1, 2, \dots, N$  (если  $c_k = c_j$  при  $k \neq j$ , то число таких точек будет меньшим). Заметим, что (см. задачу 14.59)

$$V_T(f) \geq V_T(\psi + s_N) - V_T(s - s_N) \geq V_T(\psi + s_N) - \frac{\varepsilon}{8}.$$

Обозначим через  $W$  множество всех  $n_k$  и  $n_k + 1$ , где  $k = 1, 2, \dots, N$ , и пусть  $U$  — множество всех таких натуральных  $l \in [1, n]$ , что  $l \notin W$ . Если  $l \in U$ , то  $|s_N(x_l) - s_N(x_{l-1})| = 0$ . Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} V_T(\psi + s_N) &= \\ &= \sum_{l \in U} |\psi(x_l) - \psi(x_{l-1})| + \sum_{l \in W} |(\psi + s_N)(x_l) - (\psi + s_N)(x_{l-1})| \geq \\ &\geq \sum_{l=1}^n |\psi(x_l) - \psi(x_{l-1})| + \sum_{l=1}^n |s_N(x_l) - s_N(x_{l-1})| - \\ &- 2 \sum_{l \in W} |\psi(x_l) - \psi(x_{l-1})| \geq \beta - \frac{\varepsilon}{8} + \alpha - \frac{\varepsilon}{8} - 2 \cdot 2N \cdot \frac{\varepsilon}{8N} = \alpha + \beta - \frac{3\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $V_T(f) \geq \alpha + \beta - \varepsilon$ , и, поскольку  $\varepsilon > 0$  произвольно, то  $V_a^b(f) \geq V_a^b(\psi) + V_a^b(s)$ .  $\square$

**14.68.** Пусть  $f(x) = \psi(x) + s(x)$ , где  $s(x)$  — функция скачков. Тогда  $\psi(x) \in C([a, b]) \cap V([a, b])$ ,  $\psi(a) = 0$  и (см. задачу 14.67)  $V_a^b(f - f_n) = V_a^b(\psi) + V_a^b(s - f_n)$  для каждого  $n$ . Поэтому  $V_a^b(\psi) = 0$  и, следовательно,  $\psi(x) \equiv 0$ .  $\square$

**14.69.** В силу результата задачи 14.39 существует разложение  $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ , где  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  — неубывающие непрерывные функции на  $[a, b]$ . Заметим, что  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  порождают некоторые  $\sigma$ -аддитивные меры  $\nu_1$  и  $\nu_2$ , которые являются продолжениями по Лебегу мер Стильеса, определённых в задаче 14.44 (такие меры мы будем называть мерами Лебега–Стильеса). Обозначим через  $M_1$  и  $M_2$   $\sigma$ -алгебры, на которых определены эти меры. Тогда заряд  $\nu = \nu_1 - \nu_2$  определён на  $\sigma$ -алгебре  $M = M_1 \cap M_2$ . Заметим, что  $M$  содержит все борелевские подмножества  $[a, b]$ . Пусть  $\nu = \nu_+ - \nu_-$  — разложение Жордана

заряда  $\nu$  (см. задачу 13.77). Определим функции  $g_1(x) = \nu_+([a, x])$  и  $g_2(x) = \nu_-([a, x])$  при  $x \in [a, b]$ . Тогда  $g_1(x)$  и  $g_2(x)$  — неотрицательные неубывающие функции на  $[a, b]$ .

Докажем их непрерывность. Непрерывность справа следует из  $\sigma$ -аддитивности мер  $\nu_\pm$ . Далее, как показано в задаче 13.77, существует разложение Хана  $[a, b] = E_+ \sqcup E_-$ , где  $E_+$  положительно относительно  $\nu$  и  $E_-$  отрицательно относительно  $\nu$ ,  $\nu_+(A) = \nu(A \cap E_+)$  и  $\nu_-(A) = \nu(A \cap E_-)$  для всех  $A \in M$ . Если бы функции  $g_1$  и  $g_2$  были обе разрывны в точке  $x_0$ , то это означало бы, что одновременно  $\nu_+(\{x_0\}) > 0$  и  $\nu_-(\{x_0\}) > 0$ , но такое невозможно, поскольку точка  $x_0$  принадлежит только одному из множеств  $E_+$  или  $E_-$ . Наконец, так как  $g_1(x) - g_2(x) = \nu([a, x]) = f(x) - f(a)$  и  $f(x) \in C([a, b])$ , то в фиксированной точке не может быть разрыва только у одной из функций  $g_1$  и  $g_2$ . Следовательно,  $g_1(x)$  и  $g_2(x)$  непрерывны на  $[a, b]$ .

Пусть дано  $\varepsilon > 0$ . Выберем такое множество

$$B_+ = \bigsqcup_{k=1}^n [a_k, b_k],$$

что  $(\nu_+ + \nu_-)(B_+ \triangle E_+) < \frac{\varepsilon}{4}$ . Положим  $B_- = [a, b] \setminus B_+$ . Тогда  $\nu_+(B_+ \triangle E_+) < \frac{\varepsilon}{4}$  и  $\nu_-(B_+ \triangle E_+) < \frac{\varepsilon}{4}$ . Следовательно,  $\nu_+(B_- \triangle E_-) < \frac{\varepsilon}{4}$  и  $\nu_-(B_- \triangle E_-) < \frac{\varepsilon}{4}$ . Пусть  $T$  — разбиение отрезка  $[a, b]$ , состоящее из всех точек  $a_k, b_k$  при  $k = 1, 2, \dots, n$  и точек  $a$  и  $b$ . Тогда мы получим, что

$$\begin{aligned} V_T(f) &\geq \nu(B_+) - \nu(B_-) = \nu_+(B_+) - \nu_-(B_+) + \nu_-(B_-) - \nu_+(B_-) \geq \\ &\geq \nu_+(E_+) - \nu_+(B_+ \triangle E_+) - \nu_-(B_+ \triangle E_+) - \nu_-(E_+) + \\ &\quad + \nu_-(E_-) - \nu_-(B_- \triangle E_-) - \nu_+(E_-) - \nu_+(B_- \triangle E_-) \geq \\ &\geq \nu_+(E_+) + \nu_-(E_-) - 4 \frac{\varepsilon}{4} = \nu_+([a, b]) + \nu_-([a, b]) - \varepsilon = \\ &= V_a^b(g_1) + V_a^b(g_2) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Так как  $\varepsilon > 0$  произвольно, то отсюда следует, что  $V_a^b(f) \geq V_a^b(g_1) + V_a^b(g_2)$ . Обратное неравенство следует из простейших свойств вариаций.  $\square$

**14.70.** Возьмём разложение  $f(x) = \psi(x) + s(x)$ , где  $s(x)$  — функция скачков и  $\psi(x) \in C([a, b]) \cap V([a, b])$ . Тогда (см. задачу 14.67)  $V_a^b(f) = V_a^b(\psi) + V_a^b(s)$  и (см. задачу 14.69) существует разложение  $\psi(x) = \psi_1(x) - \psi_2(x)$ , где  $\psi_1(x)$  и  $\psi_2(x)$  — неотрицательные неубывающие непрерывные функции на  $[a, b]$ , причём  $V_a^b(f) = V_a^b(\psi_1) + V_a^b(\psi_2)$ .

Имеем

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k g_k(x),$$

где

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$$

и  $g_k(x) = \chi_{[c_k, b]}(x)$  (все  $c_k \in [a, b]$  и функции  $g_k(x)$  попарно различны).

Обозначим

$$s_1(x) = \sum_{k: a_k \geq 0} a_k g_k(x)$$

и

$$s_2(x) = - \sum_{k: a_k < 0} a_k g_k(x).$$

Тогда  $s_1(x)$  и  $s_2(x)$  — неубывающие неотрицательные функции на  $[a, b]$ , и (см. задачу 14.59)

$$V_a^b(s) = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = V_a^b(s_1) + V_a^b(s_2).$$

Пусть  $f_1(x) = \psi_1(x) + s_1(x)$  и  $f_2(x) = \psi_2(x) + s_2(x)$ . Эти функции — неотрицательные и неубывающие на  $[a, b]$ ,  $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$  и (см. задачу 14.67)

$$\begin{aligned} V_a^b(f) &= V_a^b(\psi) + V_a^b(s) = V_a^b(\psi_1) + V_a^b(\psi_2) + \\ &\quad + V_a^b(s_1) + V_a^b(s_2) = V_a^b(f_1) + V_a^b(f_2). \end{aligned}$$

□

## Г л а в а 15

### АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

В этой главе мы будем рассматривать конечные вещественнонзначающие функции на отрезке  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Через  $\Omega([a; b])$  будем обозначать множество всех конечных систем попарно непересекающихся интервалов  $S = \{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n$ , принадлежащих  $[a, b]$ . Для системы  $S \in \Omega([a, b])$  положим

$$\Theta(S) = \sum_{k=1}^n |b_n - a_n| \quad \text{и} \quad \Upsilon(f; S) = \sum_{k=1}^n |f(b_n) - f(a_n)|.$$

Скажем, что функция  $f(x)$  *абсолютно непрерывна на*  $[a, b]$  ( $f(x) \in AC([a, b])$ ), если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что для любой системы  $S \in \Omega([a; b])$  с  $\Theta(S) < \delta$  выполнено неравенство  $\Upsilon(f; S) < \varepsilon$ .

Как обычно, через  $L([a, b])$  обозначается множество функций, интегрируемых относительно классической меры Лебега на  $[a, b]$ . В этой главе выражение «п.в. на  $[a, b]$ » всегда будет относиться к классической мере Лебега на  $[a, b]$ .

Скажем, что конечная функция  $f(x)$  на  $[a, b]$  *обладает N- свойством Лузина* на этом отрезке, если для любого измеримого относительно классической меры Лебега  $\mu$  множества  $E \subset [a, b]$  с  $\mu(E) = 0$  множество  $f(E)$  измеримо и  $\mu(f(E)) = 0$ .

Напомним, что функция  $f(x)$  называется сингулярной на отрезке  $[a, b]$ , если  $f(x) \in C([a, b])$  и  $f(x) \in V([a, b])$ ,  $f(x) \not\equiv C$  на  $[a, b]$ , но  $f'(x) = 0$  п.в. на  $[a, b]$ .

Пусть  $E \subseteq \mathbb{R}$  — измеримое относительно классической меры Лебега  $\mu$  множество. Точка  $x \in \mathbb{R}$  называется его *точкой плотности*, если

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{\mu([x-h, x+h] \cap E)}{2h} = 1$$

Пусть  $f(x) \in L((a, b))$ . Точка  $t \in (a, b)$  называется *точкой Лебега функции*  $f(x)$ , если величина  $f(t)$  конечна и

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{(t, t+h)} |f(u) - f(t)| d\mu(u) = 0.$$

## ЗАДАЧИ

- 15.1.** Пусть  $f(x) \in AC([a, b])$ . Доказать, что  $f(x) \in C([a, b])$ .
- 15.2.** Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  — функции из  $AC([a, b])$  и  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$ . Доказать, что  $\alpha f(x) + \beta g(x) \in AC([a, b])$ .
- 15.3.** Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  — функции из  $AC([a, b])$ . Доказать, что  $f(x) \cdot g(x) \in AC([a, b])$ .

- 15.4.** Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  — функции из  $AC([a, b])$  и  $g(x) \neq 0$  на  $[a, b]$ . Доказать, что  $\frac{f(x)}{g(x)} \in AC([a, b])$ .

- 15.5.** Пусть  $f(x) \in AC([a, b])$ . Доказать, что  $|f(x)| \in AC([a, b])$ .
- 15.6.** Пусть  $f(x) \in C([a, b])$  и  $|f(x)| \in AC([a, b])$ . Доказать, что  $f(x) \in AC([a, b])$ .

Замечание. Первое условие существенно, см. задачу 14.25 и её решение.

- 15.7.** Пусть  $f(x) \in AC([a, b])$ . Доказать, что  $f(x) \in V([a, b])$ .
- 15.8.** Построить функцию  $f(x) \in C([0, 1]) \cap V([0, 1])$ , не принадлежащую классу  $AC([0, 1])$ .

- 15.9.** Пусть  $f(x) \in AC([a, b])$  и  $f_1(x) = V_a^x(f)$  для  $x \in [a, b]$ . Доказать, что  $f_1(x) \in AC([a, b])$ .

- 15.10.** Пусть  $f(x) \in AC([a, b])$ . Доказать, что существует представление  $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ , где  $f_1(x) \in AC([a, b])$  и  $f_2(x) \in AC([a, b])$  — неубывающие функции на  $[a, b]$ .

- 15.11.** Пусть  $f(x) \in AC([a, b])$ . Доказать, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что для любой счётной системы попарно непересекающихся интервалов  $S = \{(a_k, b_k)\}_{k=1}^\infty$  из  $[a, b]$  с

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k - a_k| < \delta \quad \text{выполнено неравенство} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Замечание. Тривиальным образом выполнено обратное утверждение.

- 15.12.** Пусть  $f(x) \in L([a, b])$  и

$$F(x) = \int_{[a,x]} f(t) d\mu \quad \text{при } x \in [a, b].$$

Доказать, что  $F(x) \in AC([a, b])$ .

- 15.13.** Пусть  $f(x) \in \text{Lip}(1; [a, b])$ . Доказать, что  $f(x) \in AC([a, b])$ .
- 15.14.** Построить функцию  $f(x) \in AC([0, 1])$ , не принадлежащую  $\text{Lip}(\alpha; [a, b])$  ни при каком  $\alpha \in (0, 1]$ .

**15.15.** Пусть  $f(x)$  — конечная функция на  $[a, b]$  и для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что для любой конечной системы  $S = \{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n$  интервалов из  $[a, b]$ , удовлетворяющей условию

$$\sum_{k=1}^n |b_k - a_k| < \delta, \quad \text{выполнено неравенство} \quad \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Доказать, что  $f(x) \in \text{Lip}(1; [a, b])$ .

**15.16.** Пусть  $f(x) \in AC([a, b])$  и  $g(x) \in \text{Lip}(1; [c, d])$ , где  $f([a, b]) \subseteq [c, d]$ . Доказать, что  $g(f(x)) \in AC([a, b])$ .

**15.17.** Пусть  $g(x)$  — конечная функция на  $[c, d]$ , причём для любого  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  и для любой  $f(x) \in AC([a, b])$ , переводящей  $[a, b]$  в  $[c, d]$ , выполнено условие  $g(f(x)) \in AC([a, b])$ . Доказать, что  $g(x) \in \text{Lip}(1; [c, d])$ .

**15.18.** Пусть  $f(x) \in AC([a, b])$ ,  $g(x)$  — неубывающая функция на  $[c, d]$ ,  $g(x) \in AC([c, d])$ ,  $g(c) = a$  и  $g(d) = b$ . Доказать, что  $f(g(x)) \in AC([c, d])$ .

**15.19.** Построить такие функции  $f(x), g(x) \in AC([0, 1])$ , что  $f([0, 1]) \subseteq [0, 1]$ , но  $f(g(x)) \notin BV([0, 1])$ . (Согласно задаче 15.7, тем более  $f(g(x)) \notin AC([0, 1])$ .)

**15.20.** Построить такую функцию  $g(x)$  на  $\mathbb{R}$ , что для любого отрезка  $[a, b]$  и для любой функции  $f(x) \in AC([a, b])$  выполнено условие  $g(f(x)) \in AC([a, b])$ , но не существует такого  $C > 0$ , что  $|g(x) - g(y)| \leq C|x - y|$  при всех  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**15.21.** Пусть  $f(x) \in AC([a, b])$ . Доказать, что  $f(x)$  обладает  $N$ -свойством Лузина на  $[a, b]$ .

**15.22.** Пусть  $f(x) \in C([a, b])$ . Доказать, что  $f(E)$  измеримо (относительно классической меры Лебега) для любого измеримого (в том же смысле)  $E \subset [a, b]$  тогда и только тогда, когда  $f(x)$  обладает  $N$ -свойством Лузина на  $[a, b]$ .

**15.23. Теорема Банаха–Зарецкого.** Пусть  $f(x) \in C([a, b]) \cap V([a, b])$  и  $f(x)$  обладает  $N$ -свойством Лузина на  $[a, b]$ . Доказать, что  $f(x) \in AC([a, b])$ .

**15.24.** Пусть  $f(x) \in L([a, b])$ ,  $F(x) = \int_{[a, x]} f(t) d\mu$  при  $x \in [a, b]$  и

$$M(x; f) = \limsup_{h \rightarrow 0} \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \right|$$

для  $x \in (a, b)$ . Определим множества

$$E_\lambda = \{x \in (a, b) : M(x; f) > \lambda\} \quad \text{при } \lambda > 0.$$

Доказать, что  $\mu(E_\lambda) \leq \frac{4}{\lambda} \|f\|_1$ .

**15.25.** Пусть  $f(x) \in L([a, b])$  и  $F(x) = \int\limits_{[a,x]} f(t) d\mu$  для  $x \in [a, b]$ .

Доказать, что  $F'(x) = f(x)$  п.в. на  $[a, b]$ .

**15.26.** Пусть дана функция  $F(x) \in AC([a, b])$ . Доказать, что п.в. на  $(a, b)$  существует производная  $F'(x) = f(x) \in L([a, b])$  и что

$$F(x) = \int\limits_{[a,x]} f(t) d\mu + F(a) \quad \text{для всех } x \in [a, b].$$

**15.27.** Пусть  $f(x) \in AC([a, b])$  и  $f'(x) = 0$  п.в. на  $[a, b]$ . Доказать, что  $f(x) \equiv C$  на  $[a, b]$ .

**15.28.** Пусть  $f(x)$  — неубывающая функция на  $[a, b]$  и

$$\int\limits_{[a,b]} f'(t) d\mu = f(b) - f(a).$$

Доказать, что  $f(x) \in AC([a, b])$ .

**15.29.** Пусть даны неубывающая на  $[a, b]$  функция  $f(x) \in AC([a, b])$  и измеримое (относительно классической меры Лебега  $\mu$ ) множество  $A \subseteq [a, b]$ . Доказать, что

$$\mu(f(A)) = \int\limits_A f'(t) d\mu.$$

**15.30.** Пусть дана строго возрастающая на  $[a, b]$  функция  $f(x) \in C([a, b])$  и  $A = \{x \in [a, b] : f'(x) = \infty\}$ . Доказать, что  $f(x) \in AC([a, b])$  тогда и только тогда, когда  $\mu(f(A)) = 0$ .

**15.31.** Пусть дана строго возрастающая на  $[a, b]$  функция  $f(x) \in C([a, b])$ ,  $f(a) = c$ ,  $f(b) = d$ ,  $A = \{x \in [a, b] : f'(x) = 0\}$  и  $g(y) = f^{-1}(y)$  на  $[c, d]$ . Доказать, что  $g(y) \in AC([c, d])$  тогда и только тогда, когда  $\mu(A) = 0$ .

**15.32.** Пусть  $g(x)$  — конечная функция на  $[a, b]$ ,  $\underline{g}'(x) \geq 0$  п.в. на  $[a, b]$  и  $\underline{g}'(x) > -\infty$  при всех  $x \in [a, b]$ . Доказать, что  $g(x)$  — неубывающая функция на  $[a, b]$ .

**15.33.** Пусть функция  $f(x)$  на  $[a, b]$  такова, что конечная производная  $f'(x)$  существует всюду на  $[a, b]$  и  $f'(x) \in L((a, b))$ . Доказать, что  $f(x) \in AC([a, b])$ .

**15.34.** Построить такую функцию  $f(x)$  на  $[0, 1]$ , что конечная производная  $f'(x)$  существует п.в. на  $[a, b]$  и  $f'(x) \in L((a, b))$ , но  $f(x) \notin AC([a, b])$ .

**15.35.** Построить такую функцию  $f(x)$  на  $[0, 1]$ , что конечная производная  $f'(x)$  существует всюду на  $[0, 1]$ , но  $f'(x) \notin L((0, 1))$ .

**15.36.** Пусть функция  $f(x)$  на  $[a, b]$  такова, что конечная производная  $f'(x)$  существует всюду на  $[a, b]$ . Доказать, что  $f(x)$  обладает  $N$ -свойством Лузина на  $[a, b]$ .

**15.37.** Доказать, что  $f(x) \in \text{Lip}(1; [a, b])$  тогда и только тогда, когда

$$f(x) = C + \int_{[a, x]} g(t) d\mu$$

для всех  $x \in [a, b]$ , где  $g(t)$  — ограниченная измеримая функция на  $[a, b]$ .

**15.38.** Пусть  $f(x) \in V([a, b])$ . Доказать, что её модуль непрерывности в  $L_1$  (см. задачу 13.62) удовлетворяет условию  $\omega(f; \delta)_1 = O(\delta)$  при  $\delta \rightarrow 0_+$ .

**15.39.** Пусть  $f(x) \in L_1([a, b])$  и  $\omega(f; \delta)_1 = O(\delta)$  при  $\delta \rightarrow 0_+$ . Доказать, что  $f(x)$  эквивалентна некоторой функции ограниченной вариации на  $[a, b]$ .

**15.40. Интегрирование по частям в интеграле Лебега.** Пусть даны функции  $F(x), G(x) \in AC([a, b])$ . Доказать, что

$$\int_{[a, b]} F(x)G'(x) d\mu = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_{[a, b]} G(x)F'(x) d\mu.$$

**15.41. Замена переменной в интеграле Лебега.** Пусть  $f(x) \in L((a, b))$ , а функция  $G(y) \in AC([c, d])$  строго возрастает на  $[c, d]$ , причём  $G(c) = a$ ,  $G(d) = b$  и обратная функция  $G^{-1}(x)$  принадлежит  $AC([a, b])$ . Доказать, что  $f(G(y))G'(y) \in L((c, d))$  и

$$\int_{[a, b]} f(x) d\mu = \int_{[c, d]} f(G(y))G'(y) d\mu.$$

**15.42. Замена переменной в интеграле Лебега.** Пусть  $f(x) \in L((a, b))$ , а функция  $G(y) \in AC([c, d])$  строго возрастает на  $[c, d]$ , причём  $G(c) = a$  и  $G(d) = b$ . Доказать, что  $f(G(y))G'(y) \in L((c, d))$  и

$$\int_{[a, b]} f(x) d\mu = \int_{[c, d]} f(G(y))G'(y) d\mu.$$

**15.43.** Пусть  $E \subseteq \mathbb{R}$  — измеримое относительно классической меры Лебега  $\mu$  множество. Доказать, что почти все точки  $E$  являются его точками плотности.

**15.44.** Пусть  $E \subseteq \mathbb{R}$  — измеримое множество, а  $x_0$  — его точка плотности (см. задачу 15.43). Доказать, что для произвольной последо-

вательности  $\{I_k = [a_k, b_k]\}_{k=1}^{\infty}$  такой, что  $x_0 \in I_k$  при всех  $k$  и  $\mu(I_k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , выполнено равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu(I_k \cap E)}{\mu(I_k)} = 1.$$

**15.45.** Пусть  $f(x) \in L((a, b))$ . Доказать, что почти все точки  $t \in (a, b)$  являются точками Лебега функции  $f$ .

**15.46.** Пусть  $f(x) \in L([a, b])$ ,  $F(x) = \int_{[a, x]} f(t) d\mu$  при  $x \in [a, b]$  и  $t \in (a, b)$  — точка Лебега функции  $f(x)$ . Доказать, что  $F'(t) = f(t)$ .

**15.47.** Построить такую функцию  $f(x) \in L((-1, 1))$ , что  $f(0) = 0$  и

$$\frac{1}{h} \int_{(0, h)} |f(u)| d\mu \rightarrow \infty$$

при  $h \rightarrow 0$ , но если  $F(x) = \int_{[-1, x]} f(t) d\mu$  на  $[-1, 1]$ , то существует  $F'(0) = 0$ .

**15.48.** Пусть  $f(x) \in L((a, b))$ ,  $t \in (a, b)$  и  $f(x)$  непрерывна в точке  $t$ . Доказать, что  $t$  — точка Лебега функции  $f(x)$ .

**15.49.** Пусть  $p > 1$  и  $f(x) \in L_p((a, b))$ . Доказать, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{(t, t+h)} |f(u) - f(t)|^p d\mu(u) = 0$$

для почти всех  $t \in (a, b)$ .

**15.50.** Пусть  $f(x) \in L((a, b))$  и  $t \in (a, b)$  — точка разрыва первого рода для  $f(x)$ , причём  $f(t+0) \neq f(t-0)$ . Доказать, что  $t$  — не точка Лебега  $f(x)$ .

**15.51.** Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin x^\beta & \text{при } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

где  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Найти, при каких  $\alpha$  и  $\beta$  выполнено условие  $f(x) \in AC([0, 1])$ .

**15.52.** Пусть  $f(x) \in AC([a, b])$ . Доказать, что

$$V_a^b(f) = \int_{(a, b)} |f'(x)| d\mu.$$

**15.53.** Пусть  $f(x) \in C([a, b]) \cap V([a, b])$ . Доказать, что существует единственное представление  $f(x) = g(x) + h(x)$ , где  $g(x) \in AC([a, b])$ ,  $h(x)$  — сингулярная функция на  $[a, b]$  либо  $h(x) \equiv 0$  на  $[a, b]$  и  $f(a) = g(a)$ .

**15.54.** Пусть  $f(x)$  — неубывающая функция на  $[a, b]$  и  $f(x) = g(x) + h(x)$ , где  $g(x) \in AC([a, b])$ ,  $h(x)$  — сингулярная функция на  $[a, b]$  либо  $h(x) \equiv 0$  на  $[a, b]$ . Доказать, что  $g(x)$  и  $h(x)$  — неубывающие функции на  $[a, b]$ .

**15.55.** Пусть  $f(x)$  — сингулярная функция на  $[a, b]$ . Доказать, что её можно представить в виде  $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ , где  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  — неотрицательные неубывающие сингулярные функции на  $[a, b]$  и  $V_a^b(f) = V_a^b(f_1) + V_a^b(f_2)$ .

**15.56.** Пусть  $f(x)$  — сингулярная функция на  $[a, b]$ . Доказать, что её можно представить в виде  $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ , где  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  — строго возрастающие сингулярные функции на  $[a, b]$ .

**15.57.** Пусть  $f(x)$  — сингулярная функция на  $[a, b]$ . Доказать, что для любого  $\gamma > 0$  существует такое открытое множество

$$G = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) \subset [a, b] \quad \text{с} \quad \mu(G) = \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \gamma,$$

что

$$V_a^b(f) = \sum_{k=1}^{\infty} V_{a_k}^{b_k}(f).$$

**15.58.** Пусть  $f(x) \in C([a, b]) \cap V([a, b])$  и  $f(x) = g(x) + h(x)$ , где  $g(x) \in AC([a, b])$ ,  $h(x)$  — сингулярная функция на  $[a, b]$  либо  $h(x) \equiv 0$  на  $[a, b]$ . Доказать, что  $V_a^b(f) = V_a^b(g) + V_a^b(h)$ .

**15.59.** Пусть  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset AC([a, b])$ ,  $f(x) \in V([a, b])$ ,  $f(a) = 0$  и  $V_a^b(f - f_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Доказать, что  $f(x) \in AC([a, b])$ .

**15.60.** Пусть  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  — последовательность сингулярных функций на  $[a, b]$ . Пусть  $f(x) \in V([a, b])$ ,  $f(a) = 0$  и  $V_a^b(f - f_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Доказать, что  $f(x)$  — сингулярная функция на  $[a, b]$  либо нуль.

**15.61.** Пусть  $f(x) \in AC([a, b])$  и невозрастающая функция  $g(x)$  на  $[a, b]$  такова, что  $\mu(\{x \in [a, b]: f(x) > t\}) = \mu(\{x \in [a, b]: g(x) > t\})$  для всех  $t \in \mathbb{R}$ . Доказать, что  $g(x) \in AC([a, b])$ .

## РЕШЕНИЯ

**15.1.** Если подставить в определение абсолютной непрерывности системы  $S$ , состоящие из одного интервала, то мы получим определение непрерывности функции.  $\square$

**15.2.** Пусть дано  $\varepsilon > 0$ . Найдём такое  $\delta > 0$ , что для любой системы  $S \in \Omega([a; b])$  с  $\Theta(S) < \delta$  выполнены неравенства  $\Upsilon(f; S) < \frac{\varepsilon}{2|\alpha| + 1}$  и  $\Upsilon(g; S) < \frac{\varepsilon}{2|\beta| + 1}$ . Тогда для любой системы  $S \in \Omega([a; b])$  с  $\Theta(S) < \delta$  получаем

$$\Upsilon(\alpha f + \beta g; S) \leq |\alpha| \Upsilon(f; S) + |\beta| \Upsilon(g; S) < \varepsilon.$$

□

**15.3.** В силу результата задачи 15.1 функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны на  $[a, b]$ . Тогда существует такая постоянная  $C > 0$ , что  $|f(x)| \leq C$  и  $|g(x)| \leq C$  на  $[a, b]$ . Для данного  $\varepsilon > 0$  найдём такое  $\delta > 0$ , что для любой системы  $S \in \Omega([a; b])$  с  $\Theta(S) < \delta$  выполнены неравенства  $\Upsilon(f; S) < \frac{\varepsilon}{2C + 1}$  и  $\Upsilon(g; S) < \frac{\varepsilon}{2C + 1}$ . Заметим, что для любого интервала  $(c, d) \subseteq [a, b]$

$$\begin{aligned} |f(c)g(c) - f(d)g(d)| &\leq |f(c)||g(c) - g(d)| + |g(d)||f(c) - f(d)| \leq \\ &\leq C(|f(c) - f(d)| + |g(c) - g(d)|). \end{aligned}$$

Поэтому для любой системы  $S \in \Omega([a; b])$  с  $\Theta(S) < \delta$  получаем

$$\Upsilon(f \cdot g; S) \leq C(\Upsilon(f; S) + \Upsilon(g; S)) < \varepsilon.$$

□

**15.4.** В силу результата задачи 15.3 достаточно доказать, что  $\frac{1}{g(x)} \in AC([a, b])$ . Так как (см. задачу 15.1)  $g(x) \in C([a, b])$ , то существует такое число  $C > 0$ , что  $|g(x)| \geq C$  на  $[a, b]$ . Для данного  $\varepsilon > 0$  найдём такое  $\delta > 0$ , что для любой системы  $S \in \Omega([a; b])$  с  $\Theta(S) < \delta$  выполнено неравенство  $\Upsilon(g; S) < C^2\varepsilon$ . Заметим, что для любого интервала  $(c, d) \subseteq [a, b]$  имеем

$$\left| \frac{1}{g(c)} - \frac{1}{g(d)} \right| = \frac{|g(c) - g(d)|}{|g(c)g(d)|} \leq \frac{|g(c) - g(d)|}{C^2}.$$

Поэтому для любой системы  $S \in \Omega([a; b])$  с  $\Theta(S) < \delta$  выполнена оценка

$$\Upsilon\left(\frac{1}{g}; S\right) \leq \frac{\Upsilon(g; S)}{C^2} < \varepsilon.$$

□

**15.5.** Для данного  $\varepsilon > 0$  найдём такое  $\delta > 0$ , что для произвольной системы  $S \in \Omega([a; b])$  с  $\Theta(S) < \delta$  имеем:  $\Upsilon(f; S) < \varepsilon$ . Заметим, что для любого интервала  $(c, d) \subseteq [a, b]$  выполнено неравен-

ство  $\|f(c)| - |f(d)\| \leq |f(c) - f(d)|$ . Поэтому для любой системы  $S \in \Omega([a; b])$  с  $\Theta(S) < \delta$  выполнены оценки

$$\Upsilon(|f|; S) \leq \Upsilon(f; S) < \varepsilon.$$

□

**15.6.** Для данного  $\varepsilon > 0$  найдём такое  $\delta > 0$ , что для любой системы  $S \in \Omega([a; b])$  с  $\Theta(S) < \delta$  выполнено неравенство  $\Upsilon(|f|; S) < \varepsilon$ . Пусть  $S = \{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n$  — такая система. Пусть  $K_+ = \{k \in [1, n] : f(a_k)f(b_k) \geq 0\}$  и  $K_- = ([1, n] \cap \mathbb{N}) \setminus K_+$ . В силу непрерывности функции  $f$  для любого  $k \in K_-$  существует такое  $c_k \in (a_k, b_k)$ , что  $f(c_k) = 0$ . Рассмотрим систему непересекающихся интервалов

$$S_1 = \{(a_k, b_k)\}_{k \in K_+} \cup \{(a_k, c_k)\}_{k \in K_-} \cup \{(c_k, b_k)\}_{k \in K_-}.$$

Ясно, что  $\Theta(S_1) \leq \Theta(S) < \delta$ . При этом для любого интервала  $(d, e)$  из  $S_1$  имеем:  $|f(d) - f(e)| = ||f(d)| - |f(e)||$ . Тогда

$$\Upsilon(f; S) \leq \Upsilon(f; S_1) = \Upsilon(|f|; S_1) < \varepsilon.$$

□

**15.7.** Пусть  $\delta > 0$  таково, что для любой системы  $S \in \Omega([a; b])$  с  $\Theta(S) < \delta$  справедливо неравенство  $\Upsilon(f; S) < 1$ . Возьмём такое натуральное  $N$ , что  $\frac{b-a}{N} < \delta$ . Обозначим  $y_l = a + \frac{l(b-a)}{N}$  для  $l = 0, 1, 2, \dots, N$ . На каждом отрезке  $[y_l, y_{l+1}]$  по определению вариации имеет место оценка  $V_{y_l}^{y_{l+1}}(f) < 1$ . Но вариация аддитивна как функция отрезка (см. задачу 14.4). Следовательно,  $V_a^b(f) \leq N$ . □

**15.8.** Пусть  $P$  — канторово замкнутое множество на  $[0, 1]$  (см. задачу 2.22), а  $f(x)$  — канторова функция на  $[0, 1]$  (см. решение задачи 4.19). Тогда  $f(x)$  монотонна на  $[0, 1]$  и  $f(x) \in C([0, 1])$ . Так как  $\mu(P) = 0$  и  $P$  замкнуто, то (см. задачу 7.38)  $P$  измеримо по Жордану на  $[0, 1]$  и  $\mu_J(P) = 0$ . Поэтому для любого  $\delta > 0$  существует такая конечная система  $S = \{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n$  интервалов из  $[a, b]$ , что

$$P \subset \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta.$$

Более того (см. задачу 7.5), можно считать, что интервалы из  $S$  попарно не пересекаются. Предположим, что  $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_n < b_n$ . Тогда по определению функции Кантора имеем:  $a_1 = 0$ ,  $b_n = 1$  и  $f(a_k) = f(b_{k-1})$  для  $k = 2, 3, \dots, n$ . Поэтому  $\Upsilon(f; S) = 1$ . Это означает, что  $f(x) \notin AC([0, 1])$ . □

**15.9.** Для данного  $\varepsilon > 0$  найдём такое  $\delta > 0$ , что для любой системы  $S \in \Omega([a; b])$  с  $\Theta(S) < \delta$  выполнено неравенство  $\Upsilon(f; S) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Пусть  $S = \{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n \in \Omega([a; b])$ . Для любого  $k \in [1, n]$  зафиксируем такое разбиение  $T_k = \{a_k = z_{k,0} < z_{k,1} < \dots < z_{k,l_k} = b_k\}$ , что  $V_{T_k}(f) > V_{a_k}^{b_k}(f) - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$ . Тогда  $S_1 = \{(z_{k,l-1}, z_{k,l})\}_{k=1, l=1}^{n, l_k}$  принадлежит  $\Omega([a; b])$  и  $\Theta(S_1) < \delta$ . Следовательно,

$$\Upsilon(f_1; S) = \sum_{k=1}^n V_{a_k}^{b_k}(f) < \sum_{k=1}^n V_{T_k}(f) + \frac{\varepsilon}{2} = \Upsilon(f; S_1) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

□

**15.10.** Применяя задачу 14.6, получаем, что  $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ , где  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  — неубывающие функции на  $[a, b]$  и  $f_1(x) = V_a^x(f)$  при  $x \in [a, b]$ . Тогда в силу результата задачи 15.9  $f_1(x) \in AC([a, b])$ , а в силу результата задачи 15.2 — и  $f_2(x) \in AC([a, b])$ . □

**15.11.** Для данного  $\varepsilon > 0$  найдём такое  $\delta > 0$ , что для любой системы  $S \in \Omega([a; b])$  с  $\Theta(S) < \delta$  выполнено условие  $\Upsilon(f; S) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Пусть система  $S = \{(a_k, b_k)\}_{k=1}^\infty$  такова, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k - a_k| < \delta.$$

Тогда для любого  $N$  получаем: так как  $\{(a_n, b_n)\}_{k=1}^N \in \Omega([a, b])$ , то

$$\sum_{k=1}^N |f(b_k) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(b_k) - f(a_k)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

□

**15.12.** Пусть  $\varepsilon > 0$ . Тогда в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега (задача 10.67) существует такое  $\delta > 0$ , что для любого измеримого множества  $A \subset [a, b]$  при  $\mu(A) < \delta$  выполнена оценка

$$\int_A |f(x)| d\mu < \varepsilon.$$

Рассмотрим систему  $S \in \Omega([a; b])$  с  $\Theta(S) < \delta$ . Тогда

$$\Upsilon(F; S) = \sum_{k=1}^n \left| \int_{(a_k, b_k)} f(x) d\mu \right| \leq \int_{\bigsqcup_{k=1}^n (a_k, b_k)} |f(x)| d\mu < \varepsilon.$$

□

**15.13.** Пусть  $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$  для всех  $x, y \in [a, b]$ . Для заданного  $\varepsilon > 0$  возьмём  $\delta = \frac{\varepsilon}{C+1}$ . Тогда для любой системы  $S \in \Omega([a; b])$  с  $\Theta(S) < \delta$  получим, что  $\Upsilon(f; S) \leq C \cdot \Theta(S) < \varepsilon$ .  $\square$

**15.14.** Пусть  $g(x) = \frac{2}{x \ln^2 \frac{2}{x}}$  на  $(0, 1]$ ,  $f(x) = \frac{1}{\ln \frac{2}{x}}$  на  $(0, 1]$  и  $f(0) = g(0) = 0$ . Заметим, что  $g(x) \in L([0, 1])$  в силу результата задачи 11.4,  $g(x) > 0$  на  $(0, 1]$  и

$$f(x) = \int_{[0, x]} g(t) d\mu(t) \quad \text{при } x \in [0, 1].$$

Поэтому (см. задачу 15.12)  $f(x) \in AC([0, 1])$ . Возьмём теперь любое  $\alpha \in (0, 1]$ . Тогда

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t^\alpha} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^\alpha \ln \frac{2}{t}} = \infty,$$

откуда следует, что  $f(x) \notin \text{Lip}(\alpha, [0, 1])$ .  $\square$

**15.15.** Предположим, что  $f(x) \notin \text{Lip}(1, [a, b])$ . Тогда для любого  $m \in \mathbb{N}$  существуют такие точки  $x_m, y_m \in [a, b]$ , что  $\frac{|f(x_m) - f(y_m)|}{|x_m - y_m|} > m$ .

Положим  $\gamma_m = |x_m - y_m|$ . Докажем, что для каждого  $m$  и для любого  $\gamma \in (0, \gamma_m)$  существуют такие точки  $x_m(\gamma), y_m(\gamma) \in [0, 1]$ , что  $\frac{\gamma}{2} \leq |x_m(\gamma) - y_m(\gamma)| < \gamma$  и  $\frac{|f(x_m(\gamma)) - f(y_m(\gamma))|}{|x_m(\gamma) - y_m(\gamma)|} > m$ . Пусть  $[c, d] = [x_m, y_m]$ ,  $l$  — минимальное натуральное число, большее, чем  $\frac{d-c}{\gamma}$ , а  $z_j = c + \frac{j(d-c)}{l}$  при  $j = 0, 1, \dots, l$ . Предположим, что  $|f(z_j) - f(z_{j-1})| \leq m|z_j - z_{j-1}|$  для всех  $j$ . Тогда

$$|f(d) - f(c)| \leq \sum_{j=1}^l |f(z_j) - f(z_{j-1})| \leq \sum_{j=1}^l m|z_j - z_{j-1}| = m(d-c),$$

и мы пришли к противоречию. Поэтому существует такое  $j_0 \in [1, l]$ , что  $|f(z_{j_0}) - f(z_{j_0-1})| > m|z_{j_0} - z_{j_0-1}|$ . Так как  $\frac{\gamma}{2} \leq |z_{j_0} - z_{j_0-1}| < \gamma$ , то можно взять  $x_m(\gamma) = z_{j_0-1}$  и  $y_m(\gamma) = z_{j_0}$ . Выберем такое  $\delta > 0$ , что для любой конечной системы  $S = \{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n$  интервалов из  $[a, b]$  с

$$\sum_{k=1}^n |b_k - a_k| < \delta \quad \text{выполнено} \quad \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < 1.$$

Затем зафиксируем  $m > \frac{2}{\delta}$ , и пусть  $\gamma < \gamma_m$  таково, что  $N = \frac{\delta}{\gamma}$  — целое число. Возьмём систему из  $N$  одинаковых интервалов  $(x_m(\gamma), y_m(\gamma))$ . Тогда  $N|x_m(\gamma) - y_m(\gamma)| < N\gamma = \delta$ , но

$$\sum_{i=1}^N |f(x_m(\gamma)) - f(y_m(\gamma))| = N|f(x_m(\gamma)) - f(y_m(\gamma))| \geq N \frac{\gamma}{2} m = \frac{\delta}{2} m > 1.$$

Полученное противоречие доказывает, что  $f \in \text{Lip}(1, [a, b])$ .  $\square$

**15.16.** Пусть  $C > 0$  таково, что  $|g(y) - g(z)| \leq C|y - z|$  для любых  $y, z \in [c, d]$ . Для заданного  $\varepsilon > 0$  найдём такое  $\delta > 0$ , что для любого  $S \in \Omega([a; b])$  с  $\Theta(S) < \delta$  выполнена оценка  $\Upsilon(g; S) < \frac{\varepsilon}{2C + 1}$ . Тогда, если  $S$  — такая система, то

$$\Upsilon(g(f); S) \leq C\Upsilon(f; S) < \varepsilon.$$

$\square$

**15.17.** Полагая  $f(x) = x$  на  $[c, d]$ , получим, что  $g(x) \in AC([c, d])$ . Предположим, что  $g(x) \notin \text{Lip}(1; [c, d])$ . Тогда из решения задачи 15.15 следует, что существует последовательность невырожденных отрезков  $\{[a_k, b_k]\}_{k=1}^\infty$  из  $[c, d]$ , для которой  $|g(b_k) - g(a_k)| > k^4|b_k - a_k|$  и  $d_k = b_k - a_k < k^{-4}$  для  $k \in \mathbb{N}$ . Заметим, что из этой последовательности можно выбрать такую подпоследовательность  $\{[a_{k_i}, b_{k_i}]\}_{i=1}^\infty$ , что существует  $\alpha \in [a, b]$ , для которого  $|\alpha - a_{k_i}| \leq \frac{1}{i^2}$  при  $i \in \mathbb{N}$ . Без ограничения общности будем считать, что  $k_i = i$  для всех  $i$  и либо все  $a_i$  больше  $\alpha$ , либо все  $a_i$  меньше  $\alpha$ . Тогда  $e_i = |a_i - a_{i+1}| \leq \frac{1}{i^2}$  при всех  $i$ . Пусть  $r_k = \min \{p: pd_k > \frac{1}{k^2}\}$  при  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$\sum_{k=1}^\infty (e_k + 2d_k r_k) = Y < \infty$$

и можно определить числа  $x_m$  следующим образом:  $x_1 = 0$ ,

$$x_m = \sum_{k=1}^{m-1} (e_k + 2d_k r_k)$$

для  $m = 2, 3, \dots$  и  $y_m = x_m + d_m r_m$  для всех  $m$ . Заметим, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m = Y.$$

Построим функцию  $f(x)$  на  $[0, Y]$  следующим образом. Если  $m$  — натуральное число,  $x = x_m + 2ld_m$ , где  $l$  — целое число из отрезка  $[0, r_m]$ , то пусть  $f(x) = a_m$ . Если  $x = x_m + (2l - 1)d_m$ , где  $1 \leq l \leq r_m$ ,

то пусть  $f(x) = b_m$ . Доопределим  $f(x)$  по линейности на каждом отрезке  $[x_m + qd_m, x_m + (q+1)d_m]$  при  $m \in \mathbb{N}$  и  $0 \leq q \leq 2r_m - 1$ , и на каждом отрезке  $[y_m, x_{m+1}]$ , где  $m \in \mathbb{N}$ . Наконец, пусть  $f(Y) = \alpha$ . Тогда  $f(x) \in \text{Lip}(1, [0, Y])$  (с константой 1). В то же время

$$V_0^Y(g(f)) \geq \sum_{m=1}^{\infty} 2r_m |g(b_m) - g(a_m)| \geq \sum_{m=1}^{\infty} 2r_m m^4 d_m \geq \sum_{m=1}^{\infty} 2m^2 = \infty.$$

Это означает, что  $g(f(x)) \notin V([0, Y])$ , и мы пришли к противоречию.  $\square$

**15.18.** Для заданного  $\varepsilon > 0$  найдём такое  $\delta > 0$ , что для любой системы  $S \in \Omega([a; b])$  с  $\Theta(S) < \delta$  выполнено неравенство  $\Upsilon(f; S) < \varepsilon$ . Затем найдём такое  $\gamma > 0$ , что для любой конечной системы  $S' \in \Omega([c; d])$  с  $\Theta(S) < \gamma$  выполнено неравенство  $\Upsilon(g; S') < \delta$ . Пусть  $S' = \{(c_k, d_k)\}_{k=1}^n$  — такая система. Тогда невырожденные интервалы из системы  $g(S') = \{(g(c_k), g(d_k))\}_{k=1}^n$  попарно не пересекаются и  $\Theta(g(S')) < \delta$ . Следовательно,

$$\Upsilon(f(g); S') = \Upsilon(f; g(S')) < \varepsilon.$$

$\square$

**15.19.** Пусть  $g(x) = \sqrt{x}$  на  $[0, 1]$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(\frac{1}{2n}) = 0$  для  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(\frac{1}{2n-1}) = \frac{1}{n^2}$  при  $n \in \mathbb{N}$  и  $f(x)$  продолжена по линейности на каждый отрезок  $[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$  для  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$g(x) = \int_{(0,x)} \frac{1}{2\sqrt{t}} d\mu \quad \text{при } x \in [0, 1],$$

поэтому (см. задачу 15.12)  $g(x) \in AC([0, 1])$ . Далее,  $f(x) \in \text{Lip}(1; [0, 1])$ , поэтому (см. задачу 15.13)  $f(x) \in AC([0, 1])$ . В то же время  $g(f(\frac{1}{2n})) = 0$  и  $g(f(\frac{1}{2n-1})) = \frac{1}{n}$  для  $n \in \mathbb{N}$ , откуда следует, что  $g(f(x)) \notin V([0, 1])$ .  $\square$

**15.20.** Пусть  $g(x) = x^2$ . Тогда  $\frac{g(x) - g(0)}{x} = x \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow \infty$ . В то же время, если  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  и  $f(x) \in AC([a, b])$ , то (см. задачу 15.3)  $f^2(x) = g(f(x)) \in AC([a, b])$ .  $\square$

**15.21.** Пусть  $E \subset [a, b]$  и  $\mu(E) = 0$ . Для заданного  $\varepsilon > 0$  найдём такое  $\delta > 0$ , что (см. задачу 15.11) для любой счётной системы

$\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{\infty}$  попарно непересекающихся интервалов из  $[a, b]$  с

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \delta$$

имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Далее, существует открытое множество  $G \supset E$  с  $\mu(G) < \delta$ . Получаем

$$G = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k).$$

Пусть  $f([a_k, b_k]) = [c_k, d_k] = [f(x_k), f(y_k)]$  для всех  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда соответствующие интервалы  $\{(\min(x_k, y_k), \max(x_k, y_k))\}_{k=1}^{\infty}$  попарно не пересекаются и

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) = \mu(G) < \delta.$$

В то же время

$$f(E) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} [c_k, d_k].$$

Отсюда следует, что

$$\mu^*(f(E)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (d_k - c_k) = \sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k) - f(y_k)| < \varepsilon.$$

Так как  $\varepsilon > 0$  произвольно, то тем самым  $\mu^*(f(E)) = 0$ .  $\square$

**15.22.** Пусть вначале  $f(x) \in C([a, b])$  и обладает  $N$ -свойством Лузина на этом отрезке. Пусть  $E \subseteq [a, b]$  — измеримое относительно классической меры Лебега  $\mu$  множество. Тогда (см. задачу 7.65)

$$E = \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \right) \sqcup P,$$

где все  $F_k$  замкнуты, и  $\mu(P) = 0$ . В этом случае

$$f(E) = \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} f(F_k) \right) \cup f(P).$$

Так как  $f(x)$  непрерывна, то она переводит компакт в компакт (см. задачу 4.14) т. е. множества  $f(F_k)$  замкнуты. Так как  $f(x)$  обладает  $N$ -свойством Лузина, то  $f(P)$  измеримо. Следовательно, множество  $f(E)$  измеримо.

Пусть теперь функция  $f(x) \in C([a, b])$  такова, что для любого измеримого  $E \subseteq [a, b]$  множество  $f(E)$  также измеримо. Предположим, что существует такое измеримое множество  $E_0 \subset [a, b]$  с  $\mu(E_0) = 0$ , что  $\mu(f(E_0)) > 0$ . Из задачи 7.90 следует, что существует неизмеримое множество  $B \subset f(E_0)$ . Рассмотрим множество

$$f^{-1}(B) \cap E_0 = \{x \in E_0 : f(x) \in B\} = A \subset E_0.$$

Тогда  $A$  измеримо, но  $f(A) = B$  не измеримо. Мы пришли к противоречию.  $\square$

**15.23.** Предположим, что утверждение неверно. Тогда существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что для любого натурального  $n$  существует система  $S_n = \{d_{i,n} = (a_{i,n}, b_{i,n})\}_{i=1}^{i_n} \in \Omega([a, b])$  с  $\Theta(S_n) < \frac{1}{n^2}$ , для которой

$$\Upsilon(f; S_n) > \varepsilon_0.$$

Положим  $m_{i,n} = \inf_{x \in d_{i,n}} f(x)$  и  $M_{i,n} = \sup_{x \in d_{i,n}} f(x)$ . Пусть

$$E_n = \bigcup_{i=1}^{i_n} d_{i,n}$$

при  $n \in \mathbb{N}$  и

$$A = \bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{n=r}^{\infty} E_n.$$

Тогда  $\mu(A) = 0$ , откуда в силу условия (N) следует, что  $\mu(f(A)) = 0$ .

Пусть  $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$  и  $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ . Рассмотрим функции

$$L_{i,n}(y) = \begin{cases} 1, & \text{если уравнение } f(x) = y \text{ имеет корень на } d_{i,n}, \\ 0 & \text{— иначе,} \end{cases}$$

для  $n \in \mathbb{N}$ ,  $i = 1, 2, \dots, i_n$  и  $y \in [m, M]$  и функции

$$g_n(y) = \sum_{i=1}^{i_n} L_{i,n}(y).$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} g_n(y) d\mu = \sum_{i=1}^{i_n} (M_{i,n} - m_{i,n}) \geq \sum_{i=1}^{i_n} |f(b_{i,n}) - f(a_{i,n})| > \varepsilon_0.$$

Заметим, что если  $g(y)$  — индикаториса Банаха функции  $f(x)$  (см. задачу 8.52), то для любого  $n$  выполнено неравенство  $g_n(y) \leq g(y)$ . Положим  $D = \{y \in \mathbb{R} : g(y) = \infty\}$  и  $Z = \{y \in \mathbb{R} : g_n(y) \not\rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty\}$ .

Так как  $g(y) \in L(\mathbb{R})$  (см. задачу 14.66), то  $\mu(D) = 0$ . Пусть  $y \in Z \setminus D$ . Тогда найдётся такая подпоследовательность  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ , что  $g_{n_k}(y) \geq 1$  при  $k \in \mathbb{N}$ . Следовательно, для любого  $k$  существует такое  $x_k \in E_{n_k}$ , что  $f(x_k) = y$ . Поскольку  $y \notin D$ , то  $g(y) < \infty$ , т. е. уравнение имеет конечное число различных корней. Поэтому существует корень  $x_0$ , который принадлежит бесконечному числу множеств из последовательности  $\{E_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ . Тогда  $x_0 \in A$ , а  $y \in f(A)$ . Следовательно,  $\mu(Z) \leq \mu(f(A)) + \mu(D) = 0$ . Мы доказали, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(y) = 0$  для почти всех  $y \in [m, M]$ . Так как  $|g_n(y)| \leq g(y) \in L(\mathbb{R})$  при каждом  $y \in \mathbb{R}$  для любого  $n$ , то по теореме Лебега получаем,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(y) d\mu = 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что  $f \in AC([a, b])$ .  $\square$

**15.24.** Докажем вначале, что множество  $E_{\lambda}$  измеримо. Пусть

$$E_{\lambda, h} = \left\{ x \in (a, b) : x + h \in (a, b) \text{ и } \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \right| > \lambda + \frac{1}{m} \right\},$$

тогда

$$E_{\lambda} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{0 < |h| < \frac{1}{n}} E_{\lambda, h}.$$

Так как для всех  $h \neq 0$  функция  $\Phi(x, h) = \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \right|$  непрерывна относительно  $x$ , то множества  $E_{\lambda, h}$  открыты. Тогда множество  $E_{\lambda}$  — борелевское и, следовательно, измеримо. Заметим, что для любого  $x \in E_{\lambda}$  существует такая последовательность  $\{h_r(x)\}_{r=1}^{\infty}$ , сходящаяся к 0, что  $\Phi(x, h_r(x)) > \lambda$ , при всех  $r$  и всех  $x \in E_{\lambda}$ . Это означает, что отрезки  $\{[x - |h_m(x)|, x + |h_m(x)|]\}_{m=1, x \in E_{\lambda}}^{\infty}$  покрывают  $E_{\lambda}$  в смысле Витали. В силу теоремы Витали (задача 7.106) существует такая конечная система попарно непересекающихся отрезков  $\{I_i\}_{i=1}^n = \{[x_i - |h_{m_i}|, x_i + |h_{m_i}|]\}_{i=1}^n$ , что

$$\sum_{i=1}^n 2|h_{m_i}| > \frac{1}{2} \mu(E_{\lambda}).$$

Действительно, при  $\mu E_{\lambda} = 0$  утверждение очевидно, а в противном случае согласно этой задаче можно выбрать отрезки так, чтобы

$$\mu^* \left( E_{\lambda} \setminus \bigsqcup_{i=1}^N I_i \right) < \frac{1}{2} \mu^*(E_{\lambda}).$$

В силу измеримости здесь можно заменить внешнюю меру Лебега на меру Лебега, а затем воспользоваться аддитивностью меры.

С другой стороны,

$$\sum_{i=1}^n |h_{m_i}| \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda} \left| \int_{[x_i, x_i + h_{m_i}]} f(t) d\mu \right| \leq \frac{1}{\lambda} \int_{[a,b]} |f(t)| d\mu,$$

откуда следует утверждение задачи.  $\square$

**15.25.** В силу результата задачи 13.50 существует такая последовательность  $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^\infty$  непрерывных на  $[a, b]$  функций, что  $\|\varphi_i - f\|_1 < \frac{1}{i^4}$  для  $i \in \mathbb{N}$ . Пусть

$$\psi_i(x) = f(x) - \varphi_i(x) \quad \text{и} \quad \Psi_i(x) = \int_{[a,x]} |f(t) - \varphi_i(t)| d\mu \quad \text{при } i \in \mathbb{N}.$$

Пусть, к тому же,

$$A_i = \left\{ x \in (a, b) : M(x, \psi_i) > \frac{1}{i^2} \right\}$$

и

$$B_i = \left\{ x \in (a, b) : |\psi_i(x)| > \frac{1}{i^2} \right\}.$$

В силу результата задачи 15.24 при каждом  $i$  получаем оценку

$$\mu(A_i) \leq \frac{4}{\frac{1}{i^2}} \frac{1}{i^4} = \frac{4}{i^2}.$$

Далее, по неравенству Чебышёва

$$\mu(B_i) \leq \frac{1}{\frac{1}{i^2}} \frac{1}{i^4} = \frac{1}{i^2}.$$

Обозначим

$$Q = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=k}^{\infty} (A_i \cup B_i).$$

Для каждого  $k > 1$  получаем

$$\mu(Q) \leq \mu \left( \bigcup_{i=k}^{\infty} (A_i \cup B_i) \right) \leq \sum_{i=k}^{\infty} (\mu(A_i) + \mu(B_i)) \leq \sum_{i=k}^{\infty} \frac{5}{i^2} \leq \frac{5}{k-1}.$$

Отсюда следует, что  $\mu(Q) = 0$ . Пусть теперь  $E = (a, b) \setminus Q$  и  $x \in E$ . Тогда существует такое  $i = i(x)$ , что  $x \notin A_j \cup B_j$  при  $j > i$ . Для заданного

$\varepsilon > 0$  зафиксируем  $k > \max\left(i, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$ . Поскольку  $\varphi_k(x) \in C([a, b])$ , то найдётся такое  $\delta > 0$ , что

$$\left| \frac{1}{h} \int_{[x, x+h]} \varphi_k(t) d\mu(t) - \varphi_k(x) \right| < \varepsilon,$$

и так как  $\Psi_k$  есть неопределённый интеграл, то в силу результата задачи 15.12

$$\left| \frac{\Psi_k(x+h) - \Psi_k(x)}{h} \right| \leq \frac{2}{k^2}$$

при  $0 < |h| < \delta$ . Тогда для таких  $h$  получаем

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} \int_{[x, x+h]} f(t) d\mu - f(x) \right| &\leq \left| \frac{1}{h} \int_{[x, x+h]} (f(t) - \varphi_k(t)) d\mu(t) \right| + \\ &+ |f(x) - \varphi_k(x)| + \left| \frac{1}{h} \int_{[x, x+h]} \varphi_k(t) d\mu - \varphi_k(x) \right| < \frac{2}{k^2} + \frac{1}{k^2} + \varepsilon < 4\varepsilon, \end{aligned}$$

откуда следует утверждение задачи.  $\square$

**15.26.** Из задачи 15.10 следует, что  $F(x)$  можно представить как разность двух неубывающих абсолютно непрерывных функций на  $[a, b]$ . Поэтому достаточно доказать утверждение для неубывающей функции  $F(t)$ . Определим меру Стильтсеса  $m_F([c, d]) = F(d) - F(c)$  на полуокольце полуинтервалов  $\{[c, d] \subseteq [a, b]\}$  и рассмотрим её продолжение по Лебегу  $\nu$ , определённое на  $\sigma$ -алгебре  $M_\nu$ . Пусть  $\mu$  — классическая мера Лебега, определённая на  $\sigma$ -алгебре  $\mathfrak{M}_\mu$  подмножеств  $[a, b]$ . Тогда на  $\sigma$ -алгебре  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\mu \cap \mathfrak{M}_\nu$  определены две меры:  $\mu$  и  $\nu$ . Предположим, что  $E \in \mathfrak{M}$  и  $\mu(E) = 0$ . Для заданного  $\varepsilon > 0$  найдём такое  $\delta > 0$ , что (см. задачу 15.11) для любой счётной системы  $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^\infty$  попарно непересекающихся интервалов из  $[a, b]$  с

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \delta$$

выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon.$$

Заметим, что  $E$  можно покрыть счётным набором полуинтервалов  $\{[a_i, b_i]\}_{i=1}^\infty$  с

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu([a_i, b_i]) = \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < \delta.$$

Можно считать (см. задачу 7.4), что эти полуинтервалы попарно не пересекаются. Так как  $F(x)$  неубывающая, то мы получаем, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \nu([a_i, b_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} (F(b_i) - F(a_i)) < \varepsilon.$$

Таким образом,  $\nu(E) = 0$ , т. е. мера  $\nu$  абсолютно непрерывна относительно меры  $\mu$ . Тогда по теореме Радона–Никодима существует такая функция  $f(x)$ , интегрируемая по Лебегу на  $[a, b]$  по классической мере Лебега  $\mu$ , что

$$\nu(E) = \int_E f(t) d\mu \quad \text{для любого } E \in \mathfrak{M}.$$

В частности,

$$\nu([a, x)) = F(x) - F(a) = \int_{[a, x)} f(t) d\mu = \int_{[a, x]} f(t) d\mu$$

при  $a \leq x \leq b$ . Наконец, из задачи 15.25 следует, что  $F'(x) = f(x)$  п.в. на  $[a, b]$ .  $\square$

**15.27.** В силу результата задачи 15.26 для всех  $x \in [a, b]$  выполнено равенство  $f(x) = f(a)$ .  $\square$

**15.28.** Заметим вначале, что для любого  $[c, d] \subset [a, b]$  в силу результата задачи 14.50 выполняется оценка

$$\int_{[c, d]} f'(t) d\mu \leq f(d) - f(c).$$

Предположим, что

$$\int_{[a, c_0]} f'(t) d\mu < f(c_0) - f(a)$$

для некоторого  $c_0 \in [a, b]$ . При этом, в силу результата задачи 14.50,

$$\int_{[c_0, b]} f'(t) d\mu \leq f(b) - f(c_0)$$

и, складывая, мы получаем, что

$$\int_{[a, b]} f'(t) d\mu < f(b) - f(a).$$

Полученное противоречие показывает, что

$$f(x) = f(a) + \int_{[a,x]} f'(t) d\mu$$

для всех  $x \in [a, b]$ . Следовательно (см. задачу 15.12),  $f(x) \in AC([a, b])$ .  $\square$

**15.29.** Заметим вначале, что в силу результатов задач 15.21 и 15.22 множество  $f(A)$  измеримо. Пусть  $\nu$  — мера, определённая в решении задачи 15.26, заданная на  $\sigma$ -алгебре  $M_\nu$ . Заметим, что  $A = B \cup C$ , где  $B$  — борелевское множество, а  $\mu(C) = 0$ . Следовательно,  $B \in M_\nu$ , и, как было показано в решении задачи 15.26,  $C \in M_\nu$ . Поэтому  $A \in M_\nu$  и из определения меры  $\nu$  следует, что

$$\mu(f(A)) = \nu(A) = \int_A f'(t) d\mu.$$

$\square$

**15.30.** Если  $f(x) \in AC([a, b])$ , то согласно результату задачи 14.49  $\mu(A) = 0$ , а тогда (см. задачу 15.21)  $\mu(f(A)) = 0$ . Пусть теперь  $f(x) \in C([a, b])$ ,  $f(x)$  — строго возрастающая функция на  $[a, b]$  и  $\mu(f(A)) = 0$ . Определим множества  $A_n = \{x \in [a, b] : f'(x) \leq n\}$  для  $n \in \mathbb{N}$ . Возьмём измеримое  $B \subset [a, b]$  с  $\mu(B) = 0$ . Обозначим  $B_n = B \cap A_n$  для каждого  $n$  и  $B_\infty = B \cap A$ . Тогда

$$f(B) = \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} f(B_n) \right) \cup f(B_\infty).$$

Так как  $f(B_\infty) \subseteq f(A)$ , то  $\mu(f(B_\infty)) = 0$ . Но в силу результата задачи 14.47 получаем, что  $\mu^*(f(B_n)) \leq n\mu^*(B_n) = 0$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Поэтому  $\mu(f(B)) = 0$ . Теперь утверждение задачи следует из теоремы Банаха–Зарецкого (см. задачу 15.23).  $\square$

**15.31.** Заметим, что если  $B = f(A)$ , то  $B = \{y \in [c, d] : g'(y) = \infty\}$  и  $g(B) = A$ . Применяя задачу 15.30, получим нужное утверждение.  $\square$

**15.32.** Пусть  $E = \{x \in [a, b] : g'(x) < 0\}$ . Тогда  $\mu(E) = 0$ . Найдём такую функцию  $\psi(x)$  (см. задачу 14.53), что она не убывает на  $[a, b]$  и  $\psi'(x) = \infty$  для всех  $x \in E$ . Теперь для произвольного  $\varepsilon > 0$  рассмотрим функцию  $h(x) = h_\varepsilon(x) = g(x) + \varepsilon\psi(x)$ . Ясно, что  $h'(x) \geq 0$  при всех  $x \in [a, b]$ . Предположим, что существуют такие  $a \leq c < d \leq b$ , что  $h(c) > h(d)$ . Найдём такое  $\gamma > 0$ , что  $h(c) > h(d) + \gamma(d - c)$ , и рассмотрим функцию  $y(x) = h(x) + \gamma x$  на  $[a, b]$ . Тогда  $y'(x) \geq \gamma$  для каждого  $x \in [a, b]$  и  $y(c) > y(d)$ . Поэтому можно построить такую по-

следовательность вложенных отрезков  $\{[c_n, d_n]\}_{n=1}^{\infty}$ , что  $y(c_n) > y(d_n)$  и  $d_n - c_n = \frac{d - c}{2^n}$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Если

$$\{x_0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [c_n, d_n],$$

то  $y(x_0) - y(c_n) < 0$  или  $y(d_n) - y(x_0) < 0$  для каждого  $n$ . Следовательно,  $y'(x_0) \leq 0$ , и мы пришли к противоречию. Это означает, что  $h(x)$  — неубывающая функция на  $[a, b]$ . Так как  $\varepsilon > 0$  произвольно, то  $g(x)$  — также неубывающая функция на  $[a, b]$ .  $\square$

**15.33.** Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  определим функцию

$$h_n(x) = \begin{cases} f'(x), & \text{если } f'(x) \leq n, \\ n & \text{— иначе.} \end{cases}$$

Ясно, что  $|h_n(x)| \leq |f'(x)|$  для всех  $x \in [a, b]$ , поэтому  $h_n(x) \in L((a, b))$ . Пусть

$$g_n(x) = f(x) - \int_{[a,x]} h_n(t) d\mu$$

для всех  $n$ . Тогда (см. задачу 15.25) п.в. на  $[a, b]$  существует  $g'_n(x) = f'(x) - h_n(x) \geq 0$ . С другой стороны, так как  $h_n(x) \leq n$  на  $[a, b]$ , то

$$g'_n(x) \geq f'(x) - n > -\infty$$

для всех  $x \in [a, b]$ . Применяя задачу 15.32, получаем, что  $g_n(x)$  — неубывающая функция на  $[a, b]$ , поэтому

$$f(x) - f(a) \geq \int_{[a,x]} h_n(t) d\mu$$

для любого  $x \in [a, b]$ . Это неравенство выполнено при всех  $n$ , поэтому в силу теоремы Лебега (задача 10.37) с мажорантой  $|f'|$  получаем, что

$$f(x) - f(a) \geq \int_{[a,x]} f'(t) d\mu$$

для всех  $x \in [a, b]$ . Рассматривая функцию  $-f(x)$  вместо  $f(x)$ , получаем, что

$$f(x) - f(a) \leq \int_{[a,x]} f'(t) d\mu$$

для всех  $x \in [a, b]$ . Поэтому

$$f(x) = f(a) + \int_{[a,x]} f'(t) d\mu$$

всюду на  $[a, b]$ . В силу результата задачи 15.12 получаем, что  $f(x) \in AC([a, b])$ .  $\square$

**15.34.** В качестве примера можно взять функцию Кантора (см. задачу 4.19 и решение задачи 15.8).  $\square$

**15.35.** Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2}, & \text{если } x \in (0, 1], \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Ясно, что  $f'(0) = 0$  и  $f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \sin \frac{1}{x^2}$  при  $x \in (0, 1]$ , поэтому конечная производная  $f'(x)$  существует всюду на  $[0, 1]$ . При этом  $2x \cos \frac{1}{x^2}$  — ограниченная измеримая функция на  $(0, 1]$ , поэтому она интегрируема по Лебегу. В то же время (см. задачу 11.10 (в))  $\frac{2}{x} \sin \frac{1}{x^2} \notin L((0, 1))$ . Поэтому  $f'(x) \notin L((0, 1))$ .  $\square$

**15.36.** Пусть

$$F_n = \{x \in [a, b] : |f(x) - f(y)| \leq n|x - y| \text{ для всех } y \in [a, b]\}$$

при  $n \in \mathbb{N}$ . Так как  $f'(x)$  всюду конечна, то

$$[a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Так как  $f(x) \in C([a, b])$  как всюду дифференцируемая функция, то каждое множество  $F_n$  замкнуто. При этом точки  $a$  и  $b$  лежат в  $F_n$  для  $n \geq n_0$ . Как следствие,

$$[a, b] \setminus F_n = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (c_{n_k}, d_{n_k})$$

при  $n \geq n_0$ . Теперь для  $n \geq n_0$  определим функцию  $g_n$ :  $g_n(x) = f(x)$  при  $x \in F_n$ ,  $g_n(x)$  продолжена по линейности на отрезки  $[c_{n_k}, d_{n_k}]$  для  $k \in \mathbb{N}$ . Ясно, что  $|g_n(x) - g_n(y)| \leq n|x - y|$  при всех  $x, y \in [a, b]$ . В силу результата задачи 15.13 функция  $g_n(x)$  принадлежит  $AC([a, b])$ . Пусть

$A \subset [a, b]$  — измеримое множество и  $\mu(A) = 0$ . Обозначим  $A_n = A \cap F_n$  при  $n \geq n_0$ . Тогда

$$f(A) = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} f(A_n) \subseteq \bigcup_{n=n_0}^{\infty} g_n(A_n).$$

Так как  $\mu(A_n) = 0$  при  $n \geq n_0$  и  $g_n(x) \in AC([a, b])$ , то мы получаем, что  $\mu(g_n(A_n)) = 0$  при  $n \geq n_0$ . Поэтому  $\mu(f(A)) = 0$ .  $\square$

**15.37.** Если  $f(x) \in \text{Lip}(1; [a, b])$ , то  $f(x) \in AC([a, b])$ , откуда следует (см. задачу 15.26), что

$$f(x) = f(a) + \int_{[a, x]} f'(t) d\mu \quad \text{для всех } x \in [a, b].$$

Заметим также, что поскольку  $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$  при всех  $x, y \in [a, b]$ , то  $|f'(x)| \leq C$  в каждой точке, где производная существует. Поэтому  $|f'(x)| \leq C$  п.в. на  $[a, b]$ . Предположим теперь, что

$$f(x) = C + \int_{[a, x]} g(t) d\mu$$

на  $[a, b]$ , где  $g(t)$  — измеримая функция и  $|g(x)| \leq C$  на  $[a, b]$ . Тогда для любых  $a \leq x < y \leq b$  получаем

$$|f(x) - f(y)| \leq \left| \int_{[x, y]} g(t) d\mu \right| \leq C|x - y|.$$

$\square$

**15.38.** Достаточно доказать утверждение для неубывающих функций  $f(x)$ . Заметим (см. задачу 14.1), что существует  $C > 0$ , для которого  $|f(x)| \leq C$  на  $[a, b]$ . Тогда для любого  $h$  получаем

$$\begin{aligned} \int_{[a, b-h]} |f(x+h) - f(x)| d\mu &= \int_{[a, b-h]} (f(x+h) - f(x)) d\mu = \\ &= \int_{[a+h, b]} f(t) d\mu - \int_{[a, b-h]} f(t) d\mu = \int_{[b-h, b]} f(t) d\mu - \int_{[a, a+h]} f(t) d\mu \leq 2Ch. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\omega(f; \delta)_1 = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \int_{[a, b-h]} |f(x+h) - f(x)| d\mu = O(\delta)$$

при  $\delta \rightarrow 0_+$ .  $\square$

**15.39.** Предположим, что  $\omega(f; t)_1 \leq Kt$  при  $t > 0$ . Зафиксируем некоторое  $\delta > 0$  и рассмотрим функции

$$f_n(x) = n \int_{(0, \frac{1}{n})} f(x+h) d\mu(h)$$

при  $x \in [a, b - \delta]$  и  $n > \frac{1}{\delta}$ . Поскольку

$$f_n(x) = n \int_{(a, x + \frac{1}{n})} f(t) d\mu(t) - n \int_{(a, x)} f(t) d\mu(t),$$

то в силу результата задачи 15.12 функции  $f_n$  абсолютно непрерывны на  $[a, b - \delta]$ . Для указанных  $n$  при  $0 < t \leq \delta$  получаем

$$\begin{aligned} & \int_{[a, b - 2\delta]} |f_n(x+t) - f_n(x)| d\mu(x) = \\ &= n \int_{[a, b - 2\delta]} \left| \int_{(0, \frac{1}{n})} (f(x+t+h) - f(x+h)) d\mu(h) \right| d\mu(x) \leq \\ &\leq n \int_{[a, b - 2\delta]} \int_{(0, \frac{1}{n})} |f(x+t+h) - f(x+h)| d\mu(h) d\mu(x) = \\ &= n \int_{(0, \frac{1}{n})} \int_{[a, b - 2\delta]} |f(x+t+h) - f(x+h)| d\mu(x) d\mu(h) \leq \\ &\leq n \int_{(0, \frac{1}{n})} \int_{[a, b - t]} |f(x+t) - f(x)| d\mu(x) d\mu(h) \leq Kt. \end{aligned}$$

Так как  $f_n(x) \in AC([a, b - \delta])$  для  $n > \frac{1}{\delta}$ , то по теореме Фату (см. задачу 10.35)

$$\int_{[a, b - 2\delta]} |f'_n(x)| d\mu \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[a, b - 2\delta]} k \left| f_n \left( x + \frac{1}{k} \right) - f_n(x) \right| d\mu \leq K.$$

Как следствие, для любого разбиения  $T = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b - 2\delta\}$  отрезка  $[a, b - 2\delta]$  с  $\lambda(T) < \delta$  при  $n > \frac{1}{\delta}$  получаем

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^m |f_n(x_r) - f_n(x_{r-1})| &= \sum_{r=1}^m \left| \int_{(x_{r-1}, x_r)} f'_n(t) d\mu \right| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{r=1}^m \int_{[x_{r-1}, x_r]} |f'_n(t)| d\mu = \int_{[a, b - 2\delta]} |f'_n(t)| d\mu \leqslant K. \end{aligned}$$

Заметим, что  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  п.в. на  $[a, b - \delta]$ . Обозначим соответствующее множество через  $E$ . Тогда  $\mu([a, b - 2\delta] \setminus E) = 0$ , и для любой системы непересекающихся интервалов  $\{(a_l, b_l)\}_{l=1}^q$  с концами из  $E$  выполнена оценка

$$\sum_{l=1}^q |f(b_l) - f(a_l)| \leqslant K.$$

Пусть теперь  $x \in [a, b - 2\delta] \setminus E$ . Если предположить, что не существует

$$\lim_{t \rightarrow x+0, t \in E} f(t),$$

то мы придём к противоречию с предыдущим неравенством. Аналогично, если  $x \in (a, b - 2\delta] \setminus E$ , то существует

$$\lim_{t \rightarrow x-0, t \in E} f(t).$$

Тогда можно определить функцию  $g(x)$ :  $g(x) = f(x)$  на  $E$  и  $g(x) = \lim_{t \rightarrow x+0, t \in E} f(t)$  для  $x \in [a, b - 3\delta] \setminus E$ . Ясно, что  $g(x)$  эквивалентна  $f(x)$  на  $[a, b - 3\delta]$  и  $V_a^{b-3\delta}(g) \leqslant K$ . Но  $K$  — фиксированное, а  $\delta > 0$  — произвольно.  $\square$

**15.40.** В силу результата задачи 15.3 функция  $F(x)G(x)$  абсолютно непрерывна на  $[a, b]$ . Тогда, применяя задачу 15.26, получаем

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_{[a, b]} (FG)'(x) d\mu.$$

Наконец, заметим, что

$$(F(x)G(x))' = F(x)G'(x) + F'(x)G(x)$$

п.в. на  $[a, b]$ .  $\square$

**15.41.** Обозначим

$$F(x) = \int_{[a, x]} f(t) d\mu \in AC([a, b]).$$

Тогда в силу результата задачи 15.18 функция  $H(y) = F(G(y))$  абсолютно непрерывна на  $[c, d]$ . Применяя задачу 15.26, получим, что  $H'(y) \in L([c, d])$  и

$$\int_{[a,b]} f(x) d\mu = F(b) - F(a) = H(d) - H(c) = \int_{[c,d]} H'(y) d\mu.$$

Пусть  $A$  — множество точек  $x \in [a, b]$ , где  $F'(x)$  не существует или  $F'(x) \neq f(x)$ . Поскольку  $G^{-1}(x) \in AC([a, b])$  и  $\mu(A) = 0$ , то  $\mu(G^{-1}(A)) = 0$ . Поэтому

$$H'(y) = F'(G(y))G'(y) = f(G(y))G'(y)$$

при почти всех  $y \in [c, d]$ , откуда следует утверждение задачи.  $\square$

**15.42.** Пусть  $S$  — полукольцо всех промежутков из отрезка  $[a, b]$  и  $E = [a', b'] = [G(\alpha), G(\beta)] \in S$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} \chi_E(x) d\mu &= \mu(E) = G(\beta) - G(\alpha) = \int_{[\alpha,\beta]} G'(y) d\mu = \\ &= \int_{[c,d]} \chi_E(G(y))G'(y) d\mu \end{aligned}$$

и аналогичные неравенства выполнены для интервалов и полуинтервалов, откуда следует, что для функций вида  $\chi_E(x)$ , где  $E \in S$ , утверждение задачи верно. Так как интеграл Лебега линеен, то утверждение выполнено и для характеристических функций множеств  $E \in R(S)$ . Пусть дана последовательность измеримых подмножеств отрезка  $[a, b]$ :  $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$ ,

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

и для функций  $\chi_{E_i}(x)$ , где  $i \in \mathbb{N}$ , утверждение задачи справедливо. Тогда, так как  $\chi_{E_i}(G(y))G'(y) \uparrow \chi_E(G(y))G'(y)$  при  $i \rightarrow \infty$  п.в. на  $[c, d]$ , то функция  $\chi_E(G(y))G'(y)$  измерима и по теореме Б. Леви (см. задачу 10.32) равенство

$$\int_{[a,b]} \chi_E(x) d\mu = \mu(E) = \int_{[c,d]} \chi_E(G(y))G'(y) d\mu \quad (\text{i})$$

выполнено для  $\chi_E(x)$ . Аналогично, если

$$E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i,$$

где  $E_i$  — такие измеримые подмножества  $[a, b]$ , что  $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots$ , и утверждение задачи выполнено для каждой  $\chi_{E_i}(x)$ , то оно верно и для функции  $\chi_E(x)$ . Если  $E \subseteq [a, b]$  — измеримо по Лебегу, то (см. задачу 7.45)

$$E = \left( \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{i,j} \right) \setminus E_0 \equiv F(E) \setminus E_0,$$

где  $E_{i,j} \in R(S)$ , для каждого  $i$   $E_{i,1} \subseteq E_{i,2} \subseteq \dots$ ; если

$$E_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{i,j}$$

то  $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots$  и  $\mu(E_0) = 0$ . Можно считать, что  $E_0 \subset F(E)$ . Если  $E$  измеримо, то, как мы показали, утверждение задачи верно для характеристической функции  $F(E)$ . Предположим, что измеримое  $E$  удовлетворяет условию  $\mu(E) = 0$ . Тогда  $\mu(F(E)) = 0$ . При каждом  $y$  функция  $\chi_{F(E)}(G(y))G'(y)$  неотрицательна и

$$\int_{[c,d]} \chi_{F(E)}(G(y))G'(y) d\mu = 0,$$

поэтому  $\chi_{F(E)}(G(y))G'(y) = 0$  для почти всех  $y \in [c, d]$ . Но тогда  $\chi_E(G(y))G'(y) = 0$  для почти всех  $y \in [c, d]$  и, поскольку классическая мера Лебега полна, то эта функция измерима на  $[c, d]$  и выполнено равенство (i). Поэтому для любого измеримого  $E \subseteq [a, b]$  утверждение верно для функций  $\chi_{F(E)}(x)$  и  $\chi_{E_0}(x)$ , а значит,

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} \chi_E(x) d\mu &= \int_{[a,b]} \chi_{F(E)}(x) d\mu = \int_{[c,d]} \chi_{F(E)}(G(y))G'(y) d\mu = \\ &= \int_{[c,d]} \chi_{F(E)}(G(y))G'(y) d\mu + \int_{[c,d]} \chi_{E_0}(G(y))G'(y) d\mu = \\ &= \int_{[c,d]} \chi_E(G(y))G'(y) d\mu. \end{aligned}$$

Это означает, что утверждение верно для характеристической функции произвольного измеримого множества  $E \subseteq [a, b]$ . Тогда в силу линейности интеграла Лебега оно верно для любой простой функции. Пусть  $f(x)$  — неотрицательная измеримая функция на  $[a, b]$ . Тогда (см. задачу 9.29) можно построить последовательность простых неотрицательных функций  $f_n(x) \uparrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $[a, b]$ . Заметим, что  $f_n(G(y))G'(y) \uparrow f(G(y))G'(y)$  при  $n \rightarrow \infty$  п.в. на  $[c, d]$ . Поэтому функция

ция  $f(G(y))G'(y)$  измерима, и по теореме Б. Леви (см. задачу 10.32) получаем

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} f(x) d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} f_n(x) d\mu = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[c,d]} f_n(G(y))G'(y) d\mu = \int_{[c,d]} f(G(y))G'(y) d\mu. \end{aligned}$$

Наконец, произвольную функцию  $f(x) \in L([a,b])$  можно представить как разность двух неотрицательных функций из  $L([a,b])$ , для каждой из которых утверждение уже доказано.  $\square$

**15.43.** Достаточно рассмотреть случай  $E \subseteq [a,b]$ . Положим

$$F(x) = \int_{[a,x]} \chi_E(t) d\mu \quad \text{для } x \in [a,b].$$

Тогда в силу результата задачи 15.26 п.в. на  $[a,b]$  выполнено равенство  $F'(x) = \chi_E(x)$ . Как следствие,  $F'(x) = 1$  для почти всех  $x \in E$ . Но в каждой точке  $x$ , где  $F'(x) = 1$ , получим

$$1 = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\mu([x-h, x+h] \cap E)}{2h}.$$

$\square$

**15.44.** Пусть для краткости  $x_0 = 0$ . Возьмём  $\varepsilon > 0$  и найдём такое  $h = h_\varepsilon > 0$ , что если  $0 < t < h$ , то

$$\frac{\mu([-t, t] \cap E)}{2t} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует, что  $\mu([0, t] \cap E) > \mu([-t, t] \cap E) - t > t - \varepsilon t$ , и, следовательно,

$$\frac{\mu([0, t] \cap E)}{t} > 1 - \varepsilon \quad \text{и, аналогично,} \quad \frac{\mu([-t, 0] \cap E)}{t} > 1 - \varepsilon.$$

Если  $k_0$  таково, что  $b_k - a_k < h$  при  $k \geq k_0$ , то при таких  $k$  получим:  $\mu([0, b_k] \cap E) \geq (1 - \varepsilon)b_k$  и  $\mu([a_k, 0] \cap E) \geq -(1 - \varepsilon)a_k$ . Тогда  $\mu(I_k \cap E) \geq (b_k - a_k)(1 - \varepsilon)$ .  $\square$

**15.45.** Пусть  $r$  — рациональное число. Тогда  $|f(x) - r| \in L((a, b))$ . Поэтому п.в. на  $(a, b)$  существует (см. задачу 15.25)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{[x, x+h]} |f(u) - r| d\mu(u) = |f(x) - r|.$$

Пусть  $E(r)$  — множество, где предыдущее равенство нарушено, и пусть  $\mathbb{Q} = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Если

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(r_n),$$

то  $\mu(E) = 0$ . Пусть теперь  $t \in [a, b] \setminus E$  и выбрано  $\varepsilon > 0$ . Найдём такое  $n$ , что  $|f(t) - r_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ . По неравенству треугольника

$$||f(u) - r_n| - |f(u) - f(t)|| < \frac{\varepsilon}{3}$$

для всех конечных  $f(u)$ , поэтому для достаточно малых  $h \neq 0$  получаем

$$\left| \frac{1}{h} \int_{[t,t+h]} |f(u) - r_n| d\mu(u) - \frac{1}{h} \int_{[t,t+h]} |f(u) - f(t)| d\mu(u) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Так как  $t \notin E$ , то существует такое  $\delta > 0$ , что при  $0 < |h| < \delta$  выполнено неравенство

$$\left| \frac{1}{h} \int_{[t,t+h]} |f(u) - r_n| d\mu(u) - |f(t) - r_n| \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

откуда следует, что

$$\left| \frac{1}{h} \int_{[t,t+h]} |f(u) - f(t)| d\mu(u) \right| < \varepsilon.$$

□

**15.46.** Утверждение задачи непосредственно вытекает из неравенства

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(t+h) - F(t)}{h} - f(t) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_{[t,t+h]} (f(u) - f(t)) d\mu(u) \right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{|h|} \int_{[t,t+h]} |f(u) - f(t)| d\mu(u). \end{aligned}$$

□

**15.47.** Мы построим функцию  $f(x)$  на  $(0, 1)$ , а затем продолжим её на  $(-1, 1)$  до чётной функции. Пусть  $E(n) = (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$  при  $n \in \mathbb{N}$  и

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{2n}} \chi_{E(2n-1)}(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{2n}} \chi_{E(2n)}(x).$$

Так как множество  $f((0, 1))$  счётно и  $\mu(E(n)) = \frac{1}{n(n+1)}$ , то (см. задачу 10.30)

$$\int_{(0,1)} |f(u)| d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n-1}{2n(2n-1)\sqrt{2n}} + \frac{2n+1}{2n(2n+1)\sqrt{2n}} \right) < \infty.$$

Если  $x \in (0, 1]$ , то мы найдём такое натуральное  $n$ , что  $\frac{1}{2n+1} < x \leq \frac{1}{2n-1}$ . Ясно, что

$$\begin{aligned} |F(x) - F(0)| &= \left| \int_{[0,x]} f(t) d\mu \right| = \left| \int_{[\frac{1}{2n+1}, x]} f(t) d\mu \right| \leq \\ &\leq \int_{[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n-1}]} 2\sqrt{n} d\mu = \frac{4\sqrt{n}}{4n^2 - 1}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\left| \frac{F(x) - F(0)}{x} \right| \leq \frac{4\sqrt{n}(2n+1)}{4n^2 - 1} = \frac{4\sqrt{n}}{2n-1} \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ , т. е. при  $x \rightarrow 0_+$ . Таким образом, существует  $F'(0) = 0$ . В то же время если  $n \in \mathbb{N}$  и  $x \in \left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n-1}\right]$ , то

$$\int_{[0,x]} |f(t)| d\mu \geq \frac{1}{2} \int_{[0,x]} \sqrt{n} d\mu = \frac{x\sqrt{n}}{2},$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{x} \int_{[0,x]} |f(t)| d\mu \rightarrow \infty$$

при  $x \rightarrow 0_+$ .  $\square$

**15.48.** Пусть  $\varepsilon > 0$ . Найдём такое  $\delta > 0$ , что  $|f(t+h) - f(t)| < \varepsilon$  при  $|h| < \delta$ . Тогда

$$\frac{1}{h} \int_{[t,t+h]} |f(u) - f(t)| d\mu \leq \frac{\varepsilon h}{h} = \varepsilon,$$

если  $0 < |h| < \delta$ .  $\square$

**15.49.** Пусть вначале функция  $f(x)$  неотрицательна на  $(a, b)$ . Зададим, что для любых чисел  $0 \leq a \leq b < \infty$  выполнено неравенство

ство  $b^p - a^p \geq (b-a)^p$  (это следует, например, из того, что функция  $g(t) = pt^{p-1}$  возрастает на  $[0, +\infty)$ ). Как следствие (см. задачу 15.45),

$$\frac{1}{h} \int_{(t,t+h)} |f(u) - f(t)|^p d\mu(u) \leq \frac{1}{h} \int_{(t,t+h)} |f^p(u) - f^p(t)| d\mu(u) \rightarrow 0$$

при  $h \rightarrow 0$  для почти всех  $t \in (a, b)$ . В общем случае пусть  $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ , где  $f_+(x) = \max(f(x), 0)$ . Тогда  $f_+(x), f_-(x) \in L_p((a, b))$ . При этом

$$|f(u) - f(t)|^p \leq 2^p(|f_+(u) - f_+(t)|^p + |f_-(u) - f_-(t)|^p)$$

для всех  $t, u \in (a, b)$ . Следовательно, утверждение задачи справедливо и в этом случае.  $\square$

**15.50.** Пусть  $\alpha = f(t-0)$  и  $\beta = f(t+0)$ . Если  $f(t) \neq \beta$ , то для достаточно малых  $h > 0$  получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{[t,t+h]} |f(u) - f(t)| d\mu(u) &\geq -\frac{1}{h} \int_{[t,t+h]} |f(u) - \beta| d\mu(u) + \\ &+ \frac{1}{h} \int_{[t,t+h]} |f(t) - \beta| d\mu(u) \geq \frac{|f(t) - \beta|}{2} > 0. \end{aligned}$$

Аналогично, если  $f(t) \neq \alpha$ , то для достаточно малых по модулю  $h < 0$  получим

$$\frac{1}{h} \int_{[t,t+h]} |f(u) - f(t)| d\mu(u) \geq \frac{|f(t) - \alpha|}{2} > 0.$$

Но при  $\alpha \neq \beta$  хотя бы один из этих случаев имеет место.  $\square$

**15.51.** Поскольку для любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  и для всех  $\delta \in (0, 1)$  функция  $f(x)$  принадлежит  $\text{Lip}(1; [\delta, 1])$ , и тем более абсолютно непрерывна (см. задачу 15.13), то для любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  функция  $f(x)$  обладает  $N$ -свойством Лузина на  $[0, 1]$  (см. задачу 15.21). Нетрудно видеть, что

$$f(x) \in C([0, 1]) \iff \begin{cases} \alpha + \beta > 0, & \text{если } \beta \geq 0, \\ \alpha > 0, & \text{если } \beta < 0. \end{cases}$$

С другой стороны (см. задачи 14.34, 14.35),

$$f(x) \in V([0, 1]) \iff \begin{cases} \alpha + \beta \geq 0, & \text{если } \beta \geq 0, \\ \alpha + \beta > 0, & \text{если } \beta < 0. \end{cases}$$

Теперь из теоремы Банаха–Зарецкого (см. задачу 15.23) следует, что  $f(x) \in AC([a, b])$  тогда и только тогда, когда  $\alpha + \beta > 0$ .  $\square$

**15.52.** В силу результата задачи 15.26

$$f(x) = f(a) + \int_{(a,x)} f'(t) d\mu$$

при  $x \in [a, b]$ . Отсюда следует, что для любого разбиения  $T = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$  выполнено неравенство

$$V_T(f) = \sum_{k=1}^n \left| \int_{(x_{k-1}, x_k)} f'(t) d\mu \right| \leq \int_{(a,b)} |f'(t)| d\mu,$$

поэтому

$$V_a^b(f) \leq \int_{(a,b)} |f'(t)| d\mu.$$

Возьмём произвольное  $\varepsilon > 0$ . Тогда (см. задачу 10.67) существует такое  $\delta > 0$ , что если  $A \subset (a, b)$  — измеримое множество и  $\mu(A) < \delta$ , то  $\int_A |f'(t)| d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$ . Пусть  $E_+ = \{x \in (a, b) : f'(x) \geq 0\}$  и  $E_- = (a, b) \setminus E_+$ .

Тогда существует такое множество

$$B = \bigsqcup_{l=1}^r (a_l, b_l),$$

что

$$\mu(B \triangle E_+) = \mu((a, b) \setminus B) \triangle E_- < \delta.$$

Можно считать, что  $a_1 < b_1 < a_2 < \dots < b_r$ . Возьмём разбиение  $T(1) = \{a \leq a_1 < b_1 < a_2 < \dots < b_r \leq b\}$ , где формально  $b_0 = a$  и  $a_{r+1} = b$ . Тогда

$$\begin{aligned} V_{T(1)}(f) &= \sum_{l=1}^r \left| \int_{(a_l, b_l)} f'(t) d\mu \right| + \sum_{l=1}^{r+1} \left| \int_{(b_{l-1}, a_l)} f'(t) d\mu \right| \geq \left| \int_B f'(t) d\mu \right| + \\ &+ \left| \int_{(a,b) \setminus B} f'(t) d\mu \right| \geq \left| \int_{E_+} f'(t) d\mu \right| - \int_{E_+ \triangle B} |f'(t)| d\mu + \left| \int_{E_-} f'(t) d\mu \right| - \\ &- \int_{E_- \triangle ((a,b) \setminus B)} |f'(t)| d\mu > \int_{(a,b)} |f'(t)| d\mu - \varepsilon. \end{aligned}$$

Так как  $\varepsilon > 0$  произвольно, то

$$V_a^b(f) \geq \int_{(a,b)} |f'(t)| d\mu,$$

откуда следует утверждение задачи.  $\square$

**15.53.** Пусть

$$g(x) = f(a) + \int_{(a,x)} f'(t) d\mu$$

для  $x \in [a, b]$ . Ясно, что  $g(a) = f(a)$  и (см. задачу 15.12) функция  $g(x)$  абсолютно непрерывна на  $[a, b]$ . Обозначим  $h(x) = f(x) - g(x) \in C([a, b]) \cap V([a, b])$ . Так как в силу результата задачи 15.25 равенство  $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$  выполнено п.в. на  $[a, b]$ , то мы доказали существование искомого представления.

Предположим, что  $g_1(x) + h_1(x) = g_2(x) + h_2(x)$ , где  $g_1(x)$  и  $g_2(x)$  из  $AC([a, b])$ , функции  $h_1(x)$  и  $h_2(x)$  сингулярные на  $[a, b]$  и  $g_1(a) = g_2(a)$ . Тогда  $g'_1(x) - g'_2(x) = 0$  п.в. на  $[a, b]$ , откуда следует (см. задачу 15.27), что  $g_1(x) - g_2(x) \equiv C$  на  $[a, b]$ . Но так как  $g_1(a) = g_2(a)$ , то тогда  $g_1(x) \equiv g_2(x)$  на  $[a, b]$ , а тогда и  $h_1(x) \equiv h_2(x)$  на  $[a, b]$ .  $\square$

**15.54.** Так как (см. задачу 15.53) представление  $f(x) = g(x) + h(x)$ , где  $g(x) \in AC([a, b])$ ,  $h(x)$  — сингулярная функция на  $[a, b]$  или  $h(x) \equiv 0$  на  $[a, b]$  и  $f(a) = g(a)$ , единственно, то в нашем случае

$$g(x) = C + \int_{(a,x)} f'(t) d\mu$$

при  $x \in [a, b]$ . Так как  $f'(x) \geq 0$  п.в. на  $(a, b)$ , то  $g(x)$  — неубывающая функция на  $[a, b]$ . При этом для  $a \leq x < y \leq b$  в силу результата задачи 14.50 получим, что

$$g(y) - g(x) = \int_{(a,x)} f'(t) d\mu \leq f(y) - f(x),$$

откуда следует, что  $h(y) - h(x) \geq 0$ .  $\square$

**15.55.** Как было доказано в решении задачи 14.69, функция  $f(x)$  порождает  $\sigma$ -аддитивную функцию множества  $\nu(\nu([a, x])) = f(x) - f(a)$  для всех  $x \in [a, b]$ , определённую на некоторой  $\sigma$ -алгебре  $M$ , содержащей все борелевские подмножества  $[a, b]$ . Пусть  $\nu = \nu_+ - \nu_-$  — её разложение Жордана (см. задачу 13.77). Определим функции  $f_1(x) = \nu_+([a, x])$  и  $f_2(x) = \nu_-([a, x])$  для  $x \in [a, b]$ . Ясно, что  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  — неотрицательные неубывающие функции на  $[a, b]$ . Согласно результату задачи 13.77, существует разложение Хана  $[a, b] = E_+ \sqcup E_-$ , где  $E_+$  — положительно относительно  $\nu$ , а  $E_-$  — отрицательно относительно  $\nu$ ,  $\nu_+(A) = \nu(A \cap E_+)$  и  $\nu_-(A) = \nu(A \cap E_-)$  для всех  $A \in M$ . В решении задачи 14.69 было доказано, что  $V_a^b(f) = V_a^b(f_1) + V_a^b(f_2)$ . Предположим, например, что  $f_1(x)$  — несингулярная функция на  $[a, b]$ . Тогда (см. задачи 15.53 и 15.54)  $f_i(x) = g_i(x) + h_i(x)$  для  $i = 1, 2$ , где  $g_i(x) \in AC([a, b])$ ,  $h_i(x)$  — сингулярные функции на  $[a, b]$ ,  $g_i(x)$

и  $h_i(x)$  — неубывающие функции на  $[a, b]$ , и  $g_i(a) = f_i(a)$  для  $i = 1, 2$ , причём  $g_1(x) \not\equiv C$  на  $[a, b]$ . Положим  $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$ . Заметим, что на борелевской  $\sigma$ -алгебре выполнено равенство  $\nu_+ = \nu_+(1) + \nu_+(2)$ , где  $\nu_+(1)$  — мера, порождённая  $g_1(x)$ , а  $\nu_+(2)$  — мера, порождённая  $h_1(x)$ . Согласно задаче 15.29 получаем, что

$$0 = \nu_+(1)(E_-) = \mu(g_1(E_-)) = \int_{E_-} g'_1(t) d\mu.$$

Так как  $g'_1(t) \geq 0$  п.в. на  $[a, b]$ , то  $g'_1(t) = 0$  п.в. на  $E_-$ . Совершенно аналогично,  $g'_2(t) = 0$  п.в. на  $E_+$ . Так как  $f(x) = (g_1(x) - g_2(x)) + (h_1(x) - h_2(x))$ , то  $0 = f'(t) = g'_1(t) - g'_2(t)$  п.в. на  $E_+$ . Поэтому  $g'(t) = 0$  п.в. на  $[a, b]$ , а тогда  $g'_1(t) = 0$  п.в. на  $[a, b]$ , откуда следует, что  $g_1(x) \equiv C$  на  $[a, b]$ . Полученное противоречие доказывает сингулярность функций  $f_1$  и  $f_2$ .  $\square$

**15.56.** Из задачи 15.55 следует, что  $f(x) = g_1(x) - g_2(x)$ , где  $g_1(x)$  и  $g_2(x)$  — неотрицательные неубывающие сингулярные функции на  $[a, b]$ . Пусть (см. задачу 14.60)  $\psi(x)$  — строго возрастающая сингулярная функция на  $[a, b]$ . Тогда  $f_i(x) = g_i(x) + \psi(x)$  для  $i = 1, 2$  — подходящие функции.  $\square$

**15.57.** Заметим, что если  $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$  на  $[a, b]$ , где все три функции из  $V([a, b])$  и  $V_a^b(f) = V_a^b(f_1) + V_a^b(f_2)$ , то для любого  $[c, d] \subset [a, b]$  выполнено равенство  $V_c^d(f) = V_c^d(f_1) + V_c^d(f_2)$ . Отсюда и из задачи 15.55 следует, что достаточно доказать утверждение для неубывающих функций  $f(x)$ . Пусть  $A = [a, b] \setminus \{x \in [a, b] : f'(x) = 0\}$ . Тогда  $\mu(A) = 0$ . Следовательно, для данного  $\gamma > 0$  существует такое открытое множество

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) \subset [a, b] \quad \text{с} \quad \mu(G) < \gamma,$$

что  $A \subset G$ . Для произвольного  $\varepsilon > 0$  рассмотрим функцию  $g(x) = g_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon x$ . Это строго возрастающая функция на  $[a, b]$ . Имеем

$$\begin{aligned} V_a^b(f) &= f(b) - f(a) = g(b) - g(a) - \varepsilon(b - a) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (g(b_k) - g(a_k)) + \mu(g([a, b] \setminus G)) - \varepsilon(b - a). \end{aligned}$$

Из задачи 14.47 следует, что  $\mu(g([a, b] \setminus G)) \leq \varepsilon \mu([a, b] \setminus G)$ . При этом

$$g(b_k) - g(a_k) = f(b_k) - f(a_k) + \varepsilon(b_k - a_k) = V_{a_k}^{b_k}(f) + \varepsilon(b_k - a_k)$$

для всех  $k$ . Следовательно,

$$V_a^b(f) \leq \sum_{k=1}^{\infty} V_{a_k}^{b_k}(f).$$

Обратное неравенство очевидно.  $\square$

**15.58.** Предположим вначале, что  $f(x)$  — неубывающая функция на  $[a, b]$ . Тогда (см. задачу 15.54)  $g(x)$  и  $h(x)$  — также неубывающие функции на  $[a, b]$ . Заметим, что  $g'(x) = f'(x) \geq 0$  п.в. на  $[a, b]$  и (см. задачу 15.52)

$$V_a^b(g) = \int_{(a,b)} g'(x) d\mu = \int_{(a,b)} f'(x) d\mu.$$

Для заданного  $\varepsilon > 0$  выберем такое  $\delta > 0$ , что если измеримое множество  $A$  содержится в  $[a, b]$  и  $\mu(A) < \delta$ , то  $\int_A g'(x) d\mu < \frac{\varepsilon}{5}$ . Затем (см. задачу 15.57) найдём такое открытое множество

$$G = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) \subset [a, b] \quad \text{с} \quad \mu(G) < \delta,$$

что

$$V_a^b(h) = \sum_{k=1}^{\infty} V_{a_k}^{b_k}(h).$$

Затем зафиксируем такое  $K$ , что

$$\sum_{k=K+1}^{\infty} V_{a_k}^{b_k}(h) < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Построим теперь разбиение  $T$  отрезка  $[a, b]$ . Пусть  $T$  содержит все точки  $\{a_k, b_k\}_{k=1}^K$  и точки  $a$  и  $b$ . Можно считать, что  $a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < \dots < b_K \leq b$ . Затем добавим к  $T$  такие точки  $\{y_{j,l}\}$ , где

$$a = y_{0,0} < y_{0,1} < \dots < y_{0,m(0)} = a_1;$$

$$b_1 = y_{1,0} < y_{1,1} < \dots < y_{1,m(1)} = a_2;$$

...

$$b_K = y_{K,0} < y_{K,1} < \dots < y_{K,m(K)} = b,$$

что

$$\sum_{l=1}^{m(i)} |g(y_{i,l}) - g(y_{i,l-1})| > V_{b_i}^{a_{i+1}}(g) - \frac{\varepsilon}{5(K+1)}$$

для  $i = 0, 1, 2, \dots, K$ , где  $b_0 = a$  и  $a_{K+1} = b$ . Тогда мы получим, что

$$\begin{aligned} V_T(f) &= \sum_{k=1}^K |f(b_k) - f(a_k)| + \sum_{i=0}^K \sum_{l=1}^{m(i)} |f(y_{i,l}) - f(y_{i,l-1})| \geqslant \\ &\geqslant \sum_{k=1}^K |h(b_k) - h(a_k)| - \sum_{k=1}^K |g(b_k) - g(a_k)| + \\ &+ \sum_{i=0}^K \sum_{l=1}^{m(i)} |g(y_{i,l}) - g(y_{i,l-1})| - \sum_{i=0}^K V_{b_i}^{a_{i+1}}(h) \geqslant \\ &\geqslant V_a^b(h) - \frac{\varepsilon}{5} - \int_G g'(x) d\mu + \sum_{i=0}^K V_{b_i}^{a_{i+1}}(g) - \frac{\varepsilon}{5} - \sum_{i=0}^K V_{b_i}^{a_{i+1}}(h) \geqslant \\ &\geqslant V_a^b(h) - \frac{4\varepsilon}{5} + V_a^b(g) - \int_G g'(x) d\mu \geqslant V_a^b(g) + V_a^b(h) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Так как  $\varepsilon > 0$  произвольно, то мы получаем, что  $V_a^b(f) \geqslant V_a^b(g) + V_a^b(h)$ . Но поскольку обратное неравенство очевидно, то тем самым в случае неубывающей функции  $f(x)$  утверждение доказано. В общем случае (см. задачу 14.69) существует представление  $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ , где  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  — неотрицательные неубывающие непрерывные функции на  $[a, b]$  и  $V_a^b(f) = V_a^b(f_1) + V_a^b(f_2)$ . Заметим, что (см. задачу 15.53)  $f_i(x) = g_i(x) + h_i(x)$ , где  $g_i(x) \in AC([a, b])$ , а  $h_i(x)$  — сингулярные функции на  $[a, b]$  либо  $h(x) \equiv 0$  на  $[a, b]$  при  $i = 1, 2$ . Согласно предыдущим рассуждениям,  $V_a^b(f_i) = V_a^b(g_i) + V_a^b(h_i)$  для  $i = 1, 2$ . Поэтому

$$f(x) = (g_1(x) - g_2(x)) + (h_1(x) - h_2(x))$$

и

$$V_a^b(f) = V_a^b(g_1) + V_a^b(g_2) + V_a^b(h_1) + V_a^b(h_2).$$

Из задачи 15.53 также следует, что  $g(x) = g_1(x) - g_2(x) + C$  и  $h(x) = h_1(x) - h_2(x) - C$  на  $[a, b]$ , где  $C$  — некоторая постоянная. Отсюда вытекает, что  $V_a^b(g) \leqslant V_a^b(g_1) + V_a^b(g_2)$  и что  $V_a^b(h) \leqslant V_a^b(h_1) + V_a^b(h_2)$ . Следовательно,  $V_a^b(f) \geqslant V_a^b(g) + V_a^b(h)$ . Обратное неравенство очевидно.  $\square$

**15.59.** Пусть  $f(x) = s(x) + g(x) + h(x)$ , где  $s(x)$  — функция скачков,  $g(x) \in AC([a, b])$  и  $h(x)$  — сингулярная функция на  $[a, b]$  или нуль. Тогда (см. задачи 15.58 и 14.67)

$$V_a^b(f - f_n) = V_a^b(s) + V_a^b(h) + V_a^b(f_n - g).$$

Отсюда следует, что  $V_a^b(s) = V_a^b(h) = 0$ , что эквивалентно утверждению задачи.  $\square$

**15.60.** Доказательство аналогично решению задачи 15.59.  $\square$

**15.61.** Пусть задано  $\varepsilon > 0$ . Найдём такое  $\delta > 0$ , что для любой системы  $S \in \Omega([a; b])$  с  $\Theta(S) < \delta$  выполнено неравенство  $\Upsilon(f; S) < \varepsilon$ . Рассмотрим конечную систему  $S = \{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n \in \Omega([a; b])$  с  $\Theta(S) < \delta$ . Пусть  $g(b_i) < g(a_i)$  для некоторого  $i$ . Рассмотрим множество  $A_i = \{x \in [a, b] : g(b_i) < f(x) < g(a_i)\}$ . Так как функция  $f$  непрерывна, то  $A_i$  открыто, поэтому

$$A_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} (c_{i,j}, d_{i,j}), \quad \text{где} \quad \sum_{j=1}^{\infty} (d_{i,j} - c_{i,j}) = b_i - a_i.$$

Заметим, что для любого  $j$  значения  $f(c_{i,j})$  и  $f(d_{i,j})$  совпадает либо с  $g(b_i)$ , либо с  $g(a_i)$ . Докажем, что существует  $j = j(i)$ , для которого  $|f(c_{i,j}) - f(d_{i,j})| = |g(b_i) - g(a_i)|$ . Предположим, что это не так. Тогда положим

$$\Gamma_1 = \{j : f(c_{i,j}) = f(d_{i,j}) = g(b_i)\}$$

и

$$\Gamma_2 = \{j : f(c_{i,j}) = f(d_{i,j}) = g(a_i)\}.$$

По предположению  $\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2 = \mathbb{N}$  и оба множества не пусты (иначе  $f(x) > g(b_i)$  либо  $f(x) < g(a_i)$  для всех  $x \in [a, b]$ , что невозможно). Предположим для определённости, что  $1 \in \Gamma_1$  и  $2 \in \Gamma_2$ , и что  $c_{i,1} < d_{i,1} < c_{i,2} < d_{i,2}$ . Обозначим  $t = d_{i,1}$  и  $s = c_{i,2}$ . Пусть

$$\gamma = \inf \{c_{i,j} \in [t, s] : j \in \Gamma_2\}.$$

Тогда  $f(\gamma) = g(a_i)$  по определению множества  $\Gamma_2$ . Пусть

$$\varphi = \sup \{d_{i,j} \in [t, \gamma] : j \in \Gamma_1\}.$$

Ясно, что  $f(\varphi) = g(b_i)$  по определению множества  $\Gamma_1$ , поэтому равенство  $\gamma = \varphi$  невозможно. Следовательно,  $\varphi < \gamma$ ,  $f(\varphi) = g(b_i)$ ,  $f(\gamma) = g(a_i)$ , и если  $x \in (\varphi, \gamma)$ , то  $f(x) \notin (g(b_i), g(a_i))$ . Так как  $f(x) \in C([a, b])$ , то это невозможно, и мы пришли к противоречию. Следовательно, существует такое  $j(i)$ , что  $|f(c_{i,j(i)}) - f(d_{i,j(i)})| = |g(b_i) - g(a_i)|$ . Заметим, что система  $S_1 = \{(c_{i,j(i)}, d_{i,j(i)})\}_{i=1}^n$  состоит из непересекающихся интервалов и  $\Theta(S_1) < \delta$ . Поэтому  $\Upsilon(g; S) = \Upsilon(f; S_1) < \varepsilon$ .  $\square$

## Г л а в а 16

### ИНТЕГРАЛ РИМАНА–СТИЛЬЕСА

В этой главе мы будем рассматривать конечные вещественнозначные функции на отрезке  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Напомним, что разбиение  $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$  отрезка  $[a, b]$  с точками  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$  для  $k = 1, 2, \dots, n$  называется разбиением с отмеченными точками. Как обычно,  $\lambda(T) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - x_{k-1}|$ .

Пусть на отрезке  $[a, b]$  даны две функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$ . Для каждого разбиения  $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$  отрезка  $[a, b]$  с отмеченными точками определим интегральную сумму Римана–Стильеса:

$$S_T(f; \varphi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})).$$

Если существует конечный  $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S_T(f; \varphi)$ , то мы скажем, что функция  $f(x)$  интегрируема по Риману–Стильесу на  $[a, b]$  по  $\varphi(x)$  ( $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([a, b])$ ). В этом случае мы будем использовать обозначение

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S_T(f; \varphi) = (\mathcal{R}-\mathcal{S}) \int_a^b f(x) d\varphi(x) = \int_a^b f(x) d\varphi(x).$$

Если  $\varphi(x)$  — неубывающая функция на  $[a, b]$ , а  $f(x)$  — конечная функция на  $[a, b]$ , то мы будем использовать следующие обозначения. Для любого разбиения  $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$  отрезка  $[a, b]$  определим значения

$$m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \quad \text{и} \quad M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

при  $k = 1, 2, \dots, n$ . В случае, когда либо все  $m_k$  и  $M_k$  конечны (т. е.  $f(x)$  ограничена на  $[a, b]$ ), либо некоторые из  $m_k$  или  $M_k$  бесконечны, но  $\varphi(x_{k-1}) = \varphi(x_k)$  для этих  $k$ , положим

$$S_T(f; \varphi) = \sum_{k=1}^n m_k(\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1}))$$

и

$$\bar{S}_T(f; \varphi) = \sum_{k=1}^n M_k(\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})),$$

считая, что  $\infty \cdot 0 = 0$ . В противном случае  $\underline{S}_T(f; \varphi)$  и  $\bar{S}_T(f; \varphi)$  не определены.

### ЗАДАЧИ

**16.1.** Пусть  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([a, b])$ ,  $g(x) \in \mathcal{R}_\varphi([a, b])$  и  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Доказать, что  $\alpha f(x) + \beta g(x) \in \mathcal{R}_\varphi([a, b])$  и

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) d\varphi(x) = \alpha \int_a^b f(x) d\varphi(x) + \beta \int_a^b g(x) d\varphi(x).$$

**16.2.** Пусть  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([a, b])$ ,  $f(x) \in \mathcal{R}_\psi([a, b])$  и  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Доказать, что  $f(x) \in \mathcal{R}_{\alpha\varphi+\beta\psi}([a, b])$  и что

$$\int_a^b f(x) d(\alpha\varphi(x) + \beta\psi(x)) = \alpha \int_a^b f(x) d\varphi(x) + \beta \int_a^b f(x) d\psi(x).$$

**16.3.** Пусть  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([a, b])$ . Доказать, что  $\varphi(x) \in \mathcal{R}_f([a, b])$  и что

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) = f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a) - \int_a^b \varphi(x) df(x).$$

**16.4.** Пусть  $\varphi(x)$  — неубывающая функция на  $[a, b]$ . Доказать, что конечная функция  $f(x)$  принадлежит  $\mathcal{R}_\varphi([a, b])$  тогда и только тогда, когда существует такое  $\delta > 0$ , что для любого разбиения  $T$  отрезка  $[a, b]$  с  $\lambda(T) < \delta$  существуют  $\underline{S}_T(f; \varphi)$  и  $\bar{S}_T(f; \varphi)$ , и

$$u = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} (\bar{S}_T(f; \varphi) - \underline{S}_T(f; \varphi)) = 0.$$

**16.5.** Пусть  $f(x) \in C([a, b])$  и  $\varphi(x) \in V([a, b])$ . Доказать, что  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([a, b])$ .

**16.6.** Пусть  $\varphi(x) \in V([a, b])$ ,  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([a, b])$  и  $|f(x)| \leq C$  при  $x \in [a, b]$ . Доказать, что

$$\left| \int_a^b f(x) d\varphi(x) \right| \leq CV_a^b(\varphi).$$

**16.7.** Пусть  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  — неубывающие функции на  $[a, b]$  и  $f(x) \in \mathcal{R}_{\varphi_1+\varphi_2}([a, b])$ . Доказать, что  $f(x) \in \mathcal{R}_{\varphi_1}([a, b])$  и  $f(x) \in \mathcal{R}_{\varphi_2}([a, b])$ .

**16.8.** Пусть  $\varphi(x)$  — неубывающая функция на  $[a, b]$ ,  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([a, b])$  и  $f(x) \geq 0$  на  $[a, b]$ . Доказать, что

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) \geq 0.$$

**16.9.** Пусть  $\varphi(x)$  — неубывающая функция на  $[a, b]$ ,  $f(x), g(x) \in \mathcal{R}_\varphi([a, b])$  и  $f(x) \geq g(x)$  на  $[a, b]$ . Доказать, что

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) \geq \int_a^b g(x) d\varphi(x).$$

**16.10.** Пусть  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  — последовательность непрерывных на  $[a, b]$  функций,  $f(x) \in C([a, b])$ ,  $\varphi(x) \in V([a, b])$  и  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно на  $[a, b]$ . Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) d\varphi(x) = \int_a^b f(x) d\varphi(x).$$

**16.11.** Пусть  $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$  — последовательность функций из  $V([a, b])$  и  $\varphi(x) \in V([a, b])$ ,  $f(x) \in C([a, b])$  и  $V_a^b(\varphi_n - \varphi) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) d\varphi_n(x) = \int_a^b f(x) d\varphi(x).$$

**16.12.** Пусть функция  $f(x)$  ограничена на  $[a, b]$ ,  $c_0 = \|f\|_\infty$  (см. задачу 13.5),  $\varphi(x) \in V([a, b])$  и  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([a, b])$ . Доказать, что

$$\left| \int_a^b f(x) d\varphi(x) \right| \leq c_0 V_a^b(\varphi).$$

**16.13.** Пусть  $D(x)$  — функция Дирихле на  $[0, 1]$  (см. решение задачи 4.24) и  $\varphi(x) \not\equiv C$  на  $[0, 1]$ . Доказать, что  $D(x) \notin \mathcal{R}_\varphi([0, 1])$ .

**16.14.** Построить такие функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  на  $[0, 1]$ , что  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([0, 1])$ , но обе функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  неограничены на  $[0, 1]$ .

**16.15.** Пусть  $\varphi(x)$  — конечная функция на  $[a, b]$  и  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([a, b])$ . Доказать, что существуют такие  $C > 0$  и  $\rho > 0$ , что если  $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$  — разбиение  $[a, b]$  с  $\lambda(T) < \rho$ ,

$$\Gamma = \{i : \varphi(x) \text{ непостоянна на } [x_{i-1}, x_i]\}$$

и

$$J = \bigcup_{i \in \Gamma} [x_{i-1}, x_i],$$

то  $|f(x)| \leq C$  при  $x \in J$ .

**16.16.** Пусть  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([a, b])$ ,  $c \in [a, b]$  и  $\varphi(x)$  разрывна в точке  $c$ . Доказать, что  $f(x)$  непрерывна в точке  $c$ .

**16.17.** Пусть  $a < c < b$  и  $\varphi(x) = \chi_{[c, b]}(x)$ . Доказать, что конечная на  $[a, b]$  функция  $f(x)$  принадлежит  $\mathcal{R}_\varphi(x)$  тогда и только тогда, когда  $f(x)$  непрерывна в точке  $c$  и в случае интегрируемости

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) = f(c).$$

**16.18.** Пусть  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$  — последовательность точек из  $[a, b]$ ,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| < \infty,$$

определенны функции  $\varphi_k(x) = \chi_{(x_k, b]}(x)$  и  $\psi_k(x) = \chi_{[x_k, b]}(x)$  для  $k \in \mathbb{N}$  и задана функция скачков

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \varphi_k(x) + b_k \psi_k(x)).$$

Пусть  $f(x)$  — ограниченная функция на  $[a, b]$ , непрерывная в точках  $x_k$  при  $k \in \mathbb{N}$ . Доказать, что  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([a, b])$  и что

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)(a_k + b_k).$$

**16.19.** Пусть  $f(x) \in C([a, b])$ ,  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  — функции ограниченной вариации на  $[a, b]$ , множество  $A = \{x \in [a, b] : \varphi_1(x) \neq \varphi_2(x)\}$  не более чем счётно и  $A \subset (a, b)$ . Доказать, что

$$\int_a^b f(x) d\varphi_1(x) = \int_a^b f(x) d\varphi_2(x).$$

**16.20.** Пусть  $\varphi(x) \in V([a, b])$  и  $\psi(x) = V_a^x(\varphi)$  на  $[a, b]$ . Доказать, что конечная на  $[a, b]$  функция  $f(x)$  принадлежит  $\mathcal{R}_\varphi([a, b])$  тогда и только тогда, когда  $f(x) \in \mathcal{R}_\psi([a, b])$ .

**16.21.** Пусть  $\varphi(x) \in V([a, b])$  и

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) = 0$$

для любой функции  $f(x) \in C([a, b])$ . Доказать, что  $\varphi(x) = \varphi(a)$  всюду на  $[a, b]$ , кроме, быть может, не более чем счётного множества.

**16.22.** Построить три функции  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  на  $[0, 1]$ , для которых  $\varphi(x) = \psi(x)$  при  $x \neq y_0$ , где  $y_0 \in [0, 1]$  — некоторая точка, но  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([0, 1]) \setminus \mathcal{R}_\psi([0, 1])$ .

**16.23.** Построить такие функции  $f(x) \in C([0, 1])$  и  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  из  $V([0, 1])$  на  $[0, 1]$ , что  $\varphi(x) = \psi(x)$  при  $x \neq 1$ , но

$$\int_0^1 f(x) d\varphi(x) \neq \int_0^1 f(x) d\psi(x).$$

**16.24.** Пусть  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([a, b])$  и  $a < c < b$ . Доказать, что  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([a, c])$ ,  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([c, b])$  и

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) = \int_a^c f(x) d\varphi(x) + \int_c^b f(x) d\varphi(x).$$

**16.25.** Построить такие функции  $f(x) \in C([-1, 1])$  и  $\varphi(x) \in V([-1, 1])$ , что  $f(x)\chi_{[0,1]}(x) \notin \mathcal{R}_\varphi([-1, 1])$ .

**16.26.** Построить ограниченную функцию  $f(x)$  на  $[-1, 1]$  и функцию  $\varphi(x) \in V([-1, 1])$ , для которых  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([-1, 0])$  и  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([0, 1])$ , но  $f(x) \notin \mathcal{R}_\varphi([-1, 1])$

**16.27.** Построить конечную функцию  $f(x)$  на  $[-1, 1]$  и непрерывную функцию  $\varphi(x) \in V([-1, 1])$ , для которых  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([-1, 0])$  и  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([0, 1])$ , но  $f(x) \notin \mathcal{R}_\varphi([-1, 1])$

**16.28.** Пусть  $f(x)$  — ограниченная функция на  $[a, b]$ ,  $a < c < b$ , функция  $\varphi(x)$  непрерывна в точке  $c$ , функция  $f(x)$  из  $\mathcal{R}_\varphi([a, c])$  и в то же время из  $\mathcal{R}_\varphi([c, b])$ . Доказать, что  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([a, b])$ .

**16.29.** Пусть

$$\varphi(x) \in A = \{g(x) \in V([a, b]): g(x-0) = g(x) \text{ на } (a, b)\}$$

и  $B = \{f(x) \in C([a, b]) : \|f\|_C \leq 1\}$ . Доказать, что

$$L = \sup_{f(x) \in B} \int_a^b f(x) d\varphi(x) = V_a^b(\varphi).$$

**16.30.** Пусть  $f(x) \in C([a, b])$ . Доказать, что (см. задачу 16.29)

$$J = \sup_{\varphi(x) \in A : V_a^b(\varphi) \leq 1} \int_a^b f(x) d\varphi(x) = \|f\|_C.$$

**16.31. Первая теорема Хелли.** Пусть  $f(x) \in C([a, b])$ , а  $\{\varphi_n(x)\}$  — последовательность функций из  $V([a, b])$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = \varphi(x)$  для всех  $x \in [a, b]$  и существует такая постоянная  $C > 0$ , что  $V_a^b(\varphi_k) \leq C$  при всех  $k$ . Доказать, что существует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) d\varphi_k(x) = \int_a^b f(x) d\varphi(x).$$

**16.32.** Пусть  $\alpha > 0$ ,  $\varphi(x) = x^\alpha$  на  $[0, 1]$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  и

$$f(x) = \begin{cases} x^\beta, & \text{если } x \in (0, 1], \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Доказать, что  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([0, 1])$  тогда и только тогда, когда  $\beta \geq 0$ .

**16.33.** Пусть  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha, & \text{если } x \in (0, 1], \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \varphi(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & \text{если } x \in (0, 1], \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Найти все такие  $\alpha$ , что  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([0, 1])$ .

**16.34. Вторая теорема о среднем.** Пусть  $g(x)$  — монотонная неотрицательная функция на  $[a, b]$  и  $f(x) \in \mathcal{R}([a, b])$ . Доказать, что:

$$1) \quad \left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq g(a) \sup_{c \in [a, b]} \left| \int_a^c f(x) dx \right|,$$

если  $g(x)$  — невозрастающая функция на  $[a, b]$ ;

$$2) \quad \left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq g(b) \sup_{c \in [a, b]} \left| \int_c^b f(x) dx \right|,$$

если  $g(x)$  — неубывающая функция на  $[a, b]$ .

**16.35.** Пусть  $\varphi(x) \in V([0, 2\pi])$ . Доказать, что

$$\left| \int_0^{2\pi} \varphi(x) \cos nx \, dx \right| \leq \frac{1}{n} V_0^{2\pi}(\varphi)$$

для всех  $n \in \mathbb{N}$ .

**16.36.** Доказать, что существует функция  $\varphi(x) \in V([0, 2\pi])$ , для которой

$$\left| \int_0^{2\pi} \varphi(x) \cos nx \, dx \right| = \frac{1}{n} V_0^{2\pi}(\varphi)$$

для бесконечного множества натуральных чисел  $n$ .

**16.37.** Пусть  $\varphi(x) \in V([0, 2\pi])$ . Доказать, что

$$\left| \int_0^{2\pi} \varphi(x) \sin nx \, dx \right| \leq \frac{2}{n} V_0^{2\pi}(\varphi)$$

для всех  $n \in \mathbb{N}$ .

**16.38.** Доказать, что существует такая функция  $\varphi(x) \in V([0, 2\pi])$ , что

$$\left| \int_0^{2\pi} \varphi(x) \sin nx \, dx \right| = \frac{2}{n} V_0^{2\pi}(\varphi)$$

для бесконечного множества натуральных чисел  $n$ .

**16.39.** Пусть  $\varphi(x) \in V([0, 2\pi])$  и  $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$ . Доказать, что

$$\left| \int_0^{2\pi} \varphi(x) \sin nx \, dx \right| \leq \frac{1}{n} V_0^{2\pi}(\varphi)$$

для всех  $n \in \mathbb{N}$ .

**16.40.** Построить такую функцию  $\varphi(x) \in V([0, 2\pi])$ , что  $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$  и

$$\left| \int_0^{2\pi} \varphi(x) \sin nx \, dx \right| = \frac{1}{n} V_0^{2\pi}(\varphi)$$

для бесконечного множества натуральных чисел  $n$ .

**16.41.** Пусть  $f(x) \in C([a, b])$  и  $\varphi(x) \in V([a, b])$ . Доказать, что

$$F(x) = \int_a^x f(t) d\varphi(t) \in V([a, b])$$

и что функция  $F(x)$  непрерывна в каждой точке непрерывности  $\varphi(x)$ .

**16.42.** Пусть  $f(x) \in C([0, 2])$  и  $\varphi(x) \in V([0, 1])$ . Доказать, что

$$F(x) = \int_0^1 f(x+t) d\varphi(t) \in C([0, 1]).$$

**16.43.** Пусть  $\varphi(x) \in V([a, b])$  и для любой функции  $f(x) \in C([a, b])$ , удовлетворяющей условию  $f(x) \geq 0$  на  $[a, b]$ , выполнено неравенство

$$\int_a^b f(t) d\varphi(t) \geq 0.$$

Доказать, что функцию  $\varphi(x)$  можно изменить на не более чем счётном множестве так, чтобы она стала неубывающей на  $[a, b]$ .

**16.44.** Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  из  $C([a, b])$  и  $\varphi(x) \in V([a, b])$ . Положим

$$\psi(x) = \int_a^x f(t) d\varphi(t).$$

Доказать, что

$$\int_a^b g(t) d\psi(t) = \int_a^b f(t)g(t) d\varphi(t).$$

**16.45.** Пусть  $f(x) \in C([a, b])$ , а функция  $\varphi(x)$  такова, что  $\varphi'(x)$  существует всюду на  $[a, b]$ , причём  $\varphi'(x) \in \mathcal{R}([a, b])$ . Доказать, что  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([a, b])$  и

$$\int_a^b f(t) d\varphi(t) = \int_a^b f(x)\varphi'(x) dx.$$

**16.46.** Пусть  $f(x) \in C([a, b])$  и  $\varphi(x) \in AC([a, b])$ . Доказать, что

$$\int_a^b f(t) d\varphi(t) = (L) \int_{(a,b)} f(x)\varphi'(x) d\mu,$$

где  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $(a, b)$ .

**16.47.** Пусть  $f(x) \in V([a, b])$  и  $\varphi(x) \in AC([a, b])$ . Доказать, что

$$\int_a^b f(t) d\varphi(t) = (L) \int_{(a, b)} f(x) \varphi'(x) d\mu,$$

где  $\mu$  — классическая мера Лебега на  $(a, b)$ .

**16.48.** Пусть

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in [0, \frac{\pi}{2}), \\ 2, & \text{если } x = \frac{\pi}{2} \text{ или } x = \pi, \\ x - \frac{\pi}{2}, & \text{если } x \in (\frac{\pi}{2}, \pi). \end{cases}$$

Найти

$$\int_0^{\pi} \sin x d\varphi(x).$$

**16.49.** Найти

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} (x + 2) d(e^x \operatorname{sgn}(\sin x)).$$

**16.50.** Найти

$$I = \int_0^{\pi} (x - 1) d(\cos x \operatorname{sgn} x).$$

**16.51.** Пусть  $g(x)$  — функция Кантора на  $[0, 1]$  (см. решение задачи 4.19). Найти

$$I = \int_0^1 x dg(x).$$

**16.52.** Пусть  $g(x)$  — функция Кантора на  $[0, 1]$  (см. решение задачи 4.19). Найти

$$I = \int_0^1 x^3 dg(x).$$

**16.53.** Пусть  $g(x)$  — функция Кантора на  $[0, 1]$  (см. решение задачи 4.19). Найти

$$I = \int_0^1 g(1 - x) dg(x).$$

## РЕШЕНИЯ

**16.1.** Для любого разбиения  $T$  отрезка  $[a, b]$  с отмеченными точками имеем

$$S_T(\alpha f + \beta g; \varphi) = \alpha S_T(f; \varphi) + \beta S_T(g; \varphi),$$

откуда следует утверждение задачи.  $\square$

**16.2.** Для любого разбиения  $T$  отрезка  $[a, b]$  с отмеченными точками имеем

$$S_T(f; \alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha S_T(f; \varphi) + \beta S_T(f; \psi),$$

откуда следует утверждение задачи.  $\square$

**16.3.** Пусть  $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$  — разбиение отрезка  $[a, b]$  с отмеченными точками  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  при  $i = 1, 2, \dots, n$ . Тогда

$$\begin{aligned} S_T(\varphi; f) &= \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i)(f(x_i) - f(x_{i-1})) = \\ &= - \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)(\varphi(\xi_{i+1}) - \varphi(\xi_i)) + \varphi(\xi_n)f(x_n) - \varphi(\xi_1)f(x_0) = \\ &= f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a) - f(b)(\varphi(b) - \varphi(\xi_n)) - f(a)(\varphi(\xi_1) - \varphi(a)) - \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)(\varphi(\xi_{i+1}) - \varphi(\xi_i)) = f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a) - S_{T_1}(f; \varphi), \end{aligned}$$

где

$$T_1 = \{a \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi_{n-1} \leq \xi_n \leq b\}$$

— разбиение отрезка  $[a, b]$  с отмеченными точками  $x_i \in [\xi_i, \xi_{i+1}]$  при  $i = 0, 1, \dots, n$ , и где формально  $\xi_0 = a$  и  $\xi_{n+1} = b$ . Ясно, что  $\lambda(T_1) \leqslant 2\lambda(T) \leqslant 4\lambda(T_1)$ . Следовательно, существует

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S_T(\varphi; f) &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \lim_{\lambda(T_1) \rightarrow 0} S_{T_1}(f; \varphi) = \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x) d\varphi(x). \end{aligned}$$

$\square$

**16.4.** Необходимость условия  $u = 0$  для интегрируемости функции  $f(x)$  очевидна. Предположим теперь, что  $S_T(f; \varphi)$  и  $\bar{S}_T(f; \varphi)$  существуют для каждого разбиения  $T$  отрезка  $[a, b]$  с  $\lambda(T) < \lambda_0$  и что  $u = 0$ . Возьмём некоторое разбиение  $T$  отрезка  $[a, b]$  с  $\lambda(T) < \lambda_0$ . Предположим, что мы добавили к  $T$  новые точки и получили другое разбиение  $T'$ . Тогда  $S_T(f; \varphi) \leq S_{T'}(f; \varphi)$  и  $\bar{S}_T(f; \varphi) \geq \bar{S}_{T'}(f; \varphi)$ .

Как следствие, если даны два разбиения  $T_1$  и  $T_2$  отрезка  $[a, b]$  с  $\lambda(T_1), \lambda(T_2) < \lambda_0$ , а  $T_3$  — разбиение  $[a, b]$ , содержащее все точки из  $T_1$  и  $T_2$ , то

$$\underline{S}_{T_1}(f; \varphi) \leq \underline{S}_{T_3}(f; \varphi) \leq \bar{S}_{T_3}(f; \varphi) \leq \bar{S}_{T_2}(f; \varphi).$$

Следовательно,

$$\alpha = \sup_{T: \lambda(T) < \lambda_0} \underline{S}_T(f; \varphi) \leq \inf_{T: \lambda(T) < \lambda_0} \bar{S}_T(f; \varphi) = \beta.$$

Из условия  $u = 0$  вытекает, что  $\alpha = \beta = I$ . Заметим, что для любого такого разбиения  $T$  отрезка  $[a, b]$  с отмеченными точками, что  $\lambda(T) < \lambda_0$ , выполнено условие

$$\underline{S}_T(f; \varphi) \leq S_T(f; \varphi) \leq \bar{S}_T(f; \varphi).$$

Отсюда следует, что

$$|S_T(f; \varphi) - I| \leq \bar{S}_T(f; \varphi) - \underline{S}_T(f; \varphi).$$

Так как правая часть этого неравенства стремится к нулю при  $\lambda(T) \rightarrow 0$ , то  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([a, b])$ .  $\square$

**16.5.** Поскольку (см. задачу 14.6) существует представление  $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ , где  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  — неубывающие функции на  $[a, b]$ , то в силу результата задачи 16.2 достаточно доказать утверждение в случае, когда  $\varphi(x)$  — неубывающая функция на  $[a, b]$ . Заметим, что в силу ограниченности  $f$  как непрерывной функции числа  $\underline{S}_T(f; \varphi)$  и  $\bar{S}_T(f; \varphi)$  существуют для всех  $T$ . Пусть дано  $\varepsilon > 0$ . Тогда по теореме Кантора найдётся такое  $\delta > 0$ , что если  $x, y \in [a, b]$  и  $|x - y| < \delta$ , то  $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{\varphi(b) - \varphi(a) + 1}$ . При этом для любого разбиения  $T$  отрезка  $[a, b]$  с  $\lambda(T) < \delta$  получим

$$\begin{aligned} \bar{S}_T(f; \varphi) - \underline{S}_T(f; \varphi) &\leq \max_k (M_k - m_k) \cdot (\varphi(b) - \varphi(a)) \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\varphi(b) - \varphi(a) + 1} \cdot (\varphi(b) - \varphi(a)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Применяя задачу 16.4, получаем, что  $f \in \mathcal{R}_\varphi([a, b])$ .  $\square$

**16.6.** Для любого разбиения  $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$  отрезка  $[a, b]$  имеем

$$|S_T(f; \varphi)| \leq C \sum_{k=1}^n |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| \leq CV_a^b(\varphi),$$

откуда мы получаем требуемое неравенство для интеграла Римана–Стилтьеса.  $\square$

**16.7.** Если  $\psi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ , то так как на любом отрезке приращение функций  $\varphi_i$  не больше приращения функции  $\psi$ , то для любого разбиения  $T$  отрезка  $[a, b]$  такого, что значения  $S_T(f; \psi)$  и  $\bar{S}_T(f; \psi)$  существуют, существуют и соответствующие значения для  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$ . При этом

$$\bar{S}_T(f; \psi) - S_T(f; \psi) \geq S_T(f; \varphi_i) - S_T(f; \varphi_i)$$

при  $i = 1, 2$ . Применяя задачу 16.4, получим, что  $f \in \mathcal{R}_{\varphi_i}([a, b])$ ,  $i = 1, 2$ .  $\square$

**16.8.** Для любого разбиения  $T$  отрезка  $[a, b]$  имеем:  $S_T(f; \varphi) \geq 0$ , откуда следует утверждение задачи.  $\square$

**16.9.** Утверждение вытекает из задач 16.8 и 16.1.  $\square$

**16.10.** Существование интегралов вытекает из задачи 16.5, а существование предела и равенство — из задачи 16.6.  $\square$

**16.11.** Существование интегралов вытекает из задачи 16.5, а существование предела и равенство — из задачи 16.6.  $\square$

**16.12.** Пусть  $\Omega_1$  — множество всех разбиений отрезка  $[a, b]$  с отмеченными точками, а  $\Omega_2$  — множество всех таких разбиений отрезка  $[a, b]$  с отмеченными точками  $\{\xi_i\}$ , что  $|f(\xi_i)| \leq \|f\|_\infty$  при всех  $i$ . Так как  $\mu(\{x \in [a, b] : |f(x)| > \|f\|_\infty\}) = 0$ , то множество  $\Omega_2$  содержит разбиения со сколь угодно малым  $\lambda(T)$ . Поскольку  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([a, b])$ , то

$$\lim_{\substack{T \in \Omega_1: \\ \lambda(T) \rightarrow 0}} S_T(f; \varphi) = \lim_{\substack{T \in \Omega_2: \\ \lambda(T) \rightarrow 0}} S_T(f; \varphi).$$

Но если  $T \in \Omega_2$ , то  $|S_T(f; \varphi)| \leq \|f\|_\infty V_a^b(\varphi)$ , откуда следует утверждение задачи.  $\square$

**16.13.** Так как  $\varphi(x) \not\equiv C$  на  $[0, 1]$ , то существуют такие точки  $y$  и  $z$  из  $[0, 1]$ , что  $\varphi(y) \neq \varphi(z)$ . Для заданного  $\lambda_0 > 0$  возьмём такое разбиение  $T = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1\}$  отрезка  $[0, 1]$  с  $\lambda(T) < \lambda_0$ , что  $x_i = y$  и  $x_j = z$ . Затем найдём такие два набора отмеченных точек  $U = \{\xi_k\}_{k=1}^n$  и  $V = \{\tau_k\}_{k=1}^n$ , что  $\xi_k = \tau_k \in [x_{k-1}, x_k]$  при  $k \leq i$  и при  $k > j$ ,  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$  рационально при  $i < k \leq j$  и  $\tau_k \in [x_{k-1}, x_k]$  иррационально при  $i < k \leq j$ . Обозначим разбиение  $T$  с отмеченными точками  $U$  через  $T_1$ , а  $T$  с отмеченными точками  $V$  — через  $T_2$ . Тогда

$$|S_{T_1}(D; \varphi) - S_{T_2}(D; \varphi)| = |\varphi(z) - \varphi(y)| = C > 0.$$

Поскольку  $\lambda_0 > 0$  произвольно, то утверждение задачи тем самым доказано.  $\square$

**16.14.** Пусть  $f(x) = \frac{1}{x - \frac{1}{3}}$  при  $x \in [0, \frac{1}{3})$ ,  $f(x) = 0$  при  $x \in [\frac{1}{3}, 1]$ ,  $\varphi(x) = 0$  при  $x \in [0, \frac{2}{3}]$  и  $\varphi(x) = \frac{1}{x - \frac{2}{3}}$  при  $x \in (\frac{2}{3}, 1]$ . Тогда  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  — две конечные неограниченные функции на  $[0, 1]$ . Но если разбиение  $T$  отрезка  $[0, 1]$  с отмеченными точками таково, что  $\lambda(T) < \frac{1}{3}$ , то  $S_T(f; \varphi) = 0$ , откуда следует, что  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([0, 1])$ .  $\square$

**16.15.** Поскольку  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([a, b])$ , то существуют такие постоянные  $K > 0$  и  $\lambda_0 > 0$ , что для любого разбиения  $T$  отрезка  $[a, b]$  с  $\lambda(T) < \lambda_0$  и для любого выбора отмеченных точек  $|S_T(f; \varphi)| \leq K$ . Возьмём некоторое разбиение  $T_0 = \{a = z_0 < z_1 < \dots < z_{k-1} < z_k = b\}$  отрезка  $[a, b]$  с  $\lambda(T_0) < \lambda_0$  и обозначим

$$\Gamma_0 = \{i : \varphi(x) \not\equiv C_i \text{ на } \Delta_i = [z_{i-1}, z_i]\}$$

и

$$J_0 = \bigcup_{i \in \Gamma_0} [z_{i-1}, z_i].$$

Докажем вначале, что  $f(x)$  ограничена на каждом  $\Delta_i$  при  $i \in \Gamma_0$ . Если  $\varphi(z_i) \neq \varphi(z_{i-1})$ , то это верно, так как тогда имеет место неравенство  $|f(x)| \leq \frac{K}{|\varphi(z_i) - \varphi(z_{i-1})|}$ . Пусть  $\varphi(z_i) = \varphi(z_{i-1})$ . Тогда поскольку  $\varphi$  не постоянна на  $\Delta_i$ , то существует такое  $u \in (z_{i-1}, z_i)$ , что  $\varphi(z_i) \neq \varphi(u)$  и  $\varphi(z_{i-1}) \neq \varphi(u)$ . Добавив точку  $u$  к разбиению  $T_0$ , получим новое разбиение  $W$  с  $\lambda(W) < \lambda_0$  и заметим, что  $f(x)$  должна быть ограничена на  $[z_{i-1}, u]$  и на  $[u, z_i]$ . Поэтому существует такое  $C_0 > 0$ , что  $|f(x)| \leq C_0$  при  $x \in J_0$ .

Теперь мы займёмся построением некоторой окрестности множества, на котором функция  $\varphi$  непостоянна. Построим точки  $\beta_i$  и  $\gamma_i$  следующим образом. Пусть  $i \in \Gamma_0$  и  $i < k$ . Если  $f(x)$  ограничена на  $[z_i, z_i + \frac{\lambda_0}{2}]$ , то возьмём  $\beta_i = z_i$ ,  $\gamma_i = z_i + \frac{\lambda_0}{2}$  и  $C_i = \sup_{x \in [\beta_i, \gamma_i]} |f(x)|$ .

Пусть  $f(x)$  неограничена на этом отрезке. Докажем, что если  $y_i = \frac{z_{i-1} + z_i}{2}$ , то  $\varphi(x)$  постоянна на  $[y_i, z_i]$ . Предположим, что это не так. Тогда возьмём такое разбиение  $T = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{l-1} < t_l = b\}$  отрезка  $[a, b]$  с  $\lambda(T) < \lambda_0$ , что  $t_j \in [y_i, z_i]$ ,  $t_{j+1} = z_i + \frac{\lambda_0}{2}$  и  $\varphi(t_{j+1}) - \varphi(t_j) \neq 0$ . Но в этом случае можно найти такую отмеченную точку  $\xi_j \in [t_j, t_{j+1}]$ , что  $|S_T(f; \varphi)| > K$ , и мы приходим к противоречию. В рассмотренном случае мы возьмём  $\beta_i = y_i$ ,  $\gamma_i = z_i$  и  $C_i = C_0$ . Если  $k \in \Gamma_0$ , то возьмём  $\beta_k = \gamma_k = b$  и  $C_k = C_0$ .

Теперь определим точки  $\alpha_i$  и  $\delta_i$ . Если  $i \in \Gamma_0$ ,  $i > 1$  и  $f(x)$  ограничена на  $[z_{i-1} - \frac{\lambda_0}{2}, z_{i-1}]$ , то возьмём  $\alpha_i = z_{i-1}$ ,  $\delta_i = z_{i-1} - \frac{\lambda_0}{2}$  и  $D_i = \sup_{x \in [\delta_i, \alpha_i]} |f(x)|$ . Если же  $f(x)$  неограничена на этом отрезке, то  $\varphi(x)$  постоянна на  $[z_{i-1} - \frac{\lambda_0}{2}, y_i]$ , и мы возьмём  $\alpha_i = y_i$ ,  $\delta_i = z_{i-1}$  и  $D_i = C_0$ . Если  $1 \in \Gamma_0$ , мы возьмём  $\alpha_1 = \delta_1 = a$  и  $D_1 = C_0$ .

Определим теперь множества

$$A = \bigcup_{i \in \Gamma_0} [\alpha_i, \beta_i], \quad B = \bigcup_{i \in \Gamma_0} [\delta_i, \gamma_i]$$

(здесь по построению  $A \subseteq B$ ) и постоянную  $C = \max_{i \in \Gamma_0} (C_i + D_i + C_0)$ .

Пусть также  $\rho = \frac{1}{2} \min_{1 \leq i \leq k} (z_i - z_{i-1})$  и

$$(a, b) \setminus A = \bigsqcup_l (t_l, s_l).$$

Заметим, что  $|f(x)| \leq C$  на множестве  $B$  и что  $\varphi(x)$  постоянна на каждом  $(t_l, s_l)$  по построению. Пусть теперь  $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = b\}$  — разбиение отрезка  $[a, b]$  с  $\lambda(T) < \rho$  и

$$\Gamma = \{j : \varphi(x) \not\equiv C_j \text{ на } [x_{j-1}, x_j]\}.$$

Зафиксируем  $j \in \Gamma$ . Тогда существует такое  $i \in \Gamma_0$ , что хотя бы одна из точек  $x_{j-1}$  или  $x_j$  принадлежит  $[\alpha_i, \beta_i]$ ; ведь отрезок  $[x_{j-1}, x_j]$  не может лежать целиком в некотором  $[t_l, s_l]$ , на котором  $\varphi$  постоянна. Следовательно,  $[x_{j-1}, x_j] \subset [\delta_i, \gamma_i] \subseteq B$ . Поэтому, если

$$x \in \bigcup_{j \in \Gamma} [x_{j-1}, x_j],$$

то  $|f(x)| \leq C$ .  $\square$

**16.16.** Без ограничения общности можно считать, что  $c \in (a, b)$ . Предположим, что  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  обе разрывны в точке  $c$ . Из задачи 16.15 следует, что  $f(x)$  ограничена в некоторой окрестности точки  $c$ . Рассмотрим её колебание в этой точке:

$$\omega(f; c) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{x, y \in [c-\delta, c+\delta]} |f(x) - f(y)| = \alpha > 0.$$

Предположим вначале, что либо одного из значений  $\varphi(c-0)$  или  $\varphi(c+0)$  не существует, либо  $\varphi(c-0) \neq \varphi(c+0)$ . Тогда существует такое  $\beta > 0$ , что для любого  $\delta > 0$  найдутся такие точки  $d_1 \in [a, c)$  и  $d_2 \in (c, b]$ , что  $d_2 - d_1 < \delta$  и  $|\varphi(d_2) - \varphi(d_1)| > \beta$ . Для заданного  $\delta > 0$  возьмём такое разбиение  $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$

отрезка  $[a, b]$  с  $\lambda(T) < \delta$ , что  $x_{r-1} = d_1$  и  $x_r = d_2$  при некотором  $r$ . Затем найдём такие два набора отмеченных точек  $U = \{\xi_k\}_{k=1}^n$  и  $V = \{\tau_k\}_{k=1}^n$ , что  $\xi_k = \tau_k \in [x_{k-1}, x_k]$  при  $k \neq r$ ,  $\xi_r \in [x_{r-1}, x_r] = [d_1, d_2]$  и  $\tau_r \in [d_1, d_2]$  таковы, что  $|f(\xi_r) - f(\tau_r)| \geq \frac{\alpha}{2}$ . Обозначим  $T$  с отмеченными точками  $U$  через  $T_1$ , а  $T$  с отмеченными точками  $V$  — через  $T_2$ . Тогда

$$|S_{T_1}(f; \varphi) - S_{T_2}(D; \varphi)| = |\varphi(d_2) - \varphi(d_1)| |f(\xi_r) - f(\tau_r)| \geq \frac{\alpha\beta}{2} > 0.$$

Поскольку  $\delta > 0$  произвольно, то мы получаем  $f(x) \notin \mathcal{R}_\varphi([a, b])$ , что противоречит условиям.

Пусть теперь существуют  $\varphi(c - 0) = \varphi(c + 0) \neq \varphi(c)$ . Повторим предыдущие рассуждения, взяв  $d_1 = c$ , если функция  $f(x)$  разрывна в точке  $c$  справа, либо  $d_2 = c$ , если функция  $f(x)$  разрывна в точке  $c$  слева. Мы вновь придём к противоречию. Это означает, что функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $c$ .  $\square$

**16.17.** Необходимость условия следует из задачи 16.16. Если  $f(x)$  непрерывна в точке  $c$ , то для заданного  $\varepsilon > 0$  найдётся такое  $\delta > 0$ , что  $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$  при  $y, z \in [c - \delta, c + \delta]$ . Возьмём разбиение  $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  с отмеченными точками  $\{\xi_i\}_{i=1}^n$  и с  $\lambda(T) < \delta$ . Найдём такое  $r$ , что  $x_{r-1} < c \leq x_r$ . Тогда

$$|S_T(f; \varphi) - f(c)| = |f(\xi_r) - f(c)| < \varepsilon.$$

Поэтому  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([a, b])$  и

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) = f(c).$$

$\square$

**16.18.** Пусть  $|f(x)| \leq C$  на  $[a, b]$  и выбрано  $\varepsilon > 0$ . Найдём такое  $K$ , что

$$\sum_{k=K+1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) < \frac{\varepsilon}{C+1}.$$

Определим функции

$$g_1(x) = \sum_{k=1}^K (a_k \varphi_k(x) + b_k \psi_k(x)) \quad \text{и} \quad g_2(x) = \sum_{k=K+1}^{\infty} (a_k \varphi_k(x) + b_k \psi_k(x)).$$

Для любого разбиения  $T$  отрезка  $[a, b]$  с отмеченными точками имеем

$$S_T(f; \varphi) = S_T(f; g_1) + S_T(f; g_2).$$

Заметим, что

$$|S_T(f; g_2)| \leq C \sum_{k=K+1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) < \varepsilon$$

и что существует (см. задачи 16.2 и 16.17)

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S_T(f; g_1) = \sum_{k=1}^K f(x_k)(a_k + b_k).$$

Утверждение задачи вытекает из этих равенств.  $\square$

**16.19.** Пусть  $\psi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \in V([a, b])$  и  $A = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ . Тогда из предположений следует, что для чисел  $a_k = \varphi_1(x_k) - \varphi_2(x_k)$  имеет место равенство

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (\chi_{[x_k, b]}(x) - \chi_{(x_k, b]}(x)), \quad \text{где} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty.$$

Следовательно (см. задачу 16.18),

$$\int_a^b f(x) d\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)(a_k - a_k) = 0,$$

откуда следует утверждение задачи.  $\square$

**16.20.** Как доказано в задаче 14.70, существует разложение  $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ , где  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  — неотрицательные неубывающие функции на  $[a, b]$  и  $V_a^x(\varphi) = V_a^x(\varphi_1) + V_a^x(\varphi_2)$  для всех  $x \in [a; b]$ . Докажем, что

$$\psi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) - \varphi_1(a) - \varphi_2(a) \tag{i}$$

для всех  $x \in [a, b]$ . Нетрудно видеть, что

$$\psi(x) \leq V_a^x(\varphi_1) + V_a^x(\varphi_2) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) - \varphi_1(a) - \varphi_2(a)$$

всюду на  $[a, b]$ . Предположим, что в некоторой точке  $c \in [a, b]$  неравенство строгое. Тогда

$$\begin{aligned} \psi(b) &= \psi(c) + V_c^b(\varphi) < \\ &< \varphi_1(c) + \varphi_2(c) - \varphi_1(a) - \varphi_2(a) + \varphi_1(b) + \varphi_2(b) - \varphi_1(c) - \varphi_2(c) = \\ &= \varphi_1(b) + \varphi_2(b) - \varphi_1(a) - \varphi_2(a) = V_a^b(\varphi_1) + V_a^b(\varphi_2) = V_a^b(\varphi) = \psi(b), \end{aligned}$$

и мы пришли к противоречию. Поэтому тождество (i) справедливо. Пусть теперь  $f(x) \in \mathcal{R}_\psi([a, b])$ . Тогда (см. задачу 16.7)  $f(x) \in \mathcal{R}_{\varphi_1 - \varphi_1(a)}([a, b])$  и  $f(x) \in \mathcal{R}_{\varphi_2 - \varphi_2(a)}([a, b])$ . Это означает, что  $f(x) \in \mathcal{R}_{\varphi_1}([a, b])$  и  $f(x) \in \mathcal{R}_{\varphi_2}([a, b])$ . Применяя задачу 16.2, получим, что  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([a, b])$ .

Докажем обратное. Пусть  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([a, b])$ . Тогда в силу результата задачи 16.15 существуют такие  $C > 0$  и  $\delta > 0$ , что если мы хотим найти  $S_T(f; \varphi)$  для некоторого разбиения  $T$  с отмеченными точками, удовлетворяющего условию  $\lambda(T) < \delta$ , то можно считать, что  $|f(x)| \leq C$  на  $[a, b]$ . Возьмём разложение  $\varphi(x) = g(x) + s(x)$ , где  $s(x)$  — функция скачков, а  $g(x) \in C([a, b]) \cap V([a, b])$ . Заметим, что (см. задачу 14.67)  $\psi(x) = v_1(x) + v_2(x)$ , где  $v_1(x) = V_a^x(g)$  и  $v_2(x) = V_a^x(s)$  на  $[a, b]$ . При этом (см. задачу 16.16)  $f(x)$  непрерывна в каждой точке разрыва  $\varphi(x)$ . Но функции скачков  $s(x)$  и  $v_2(x)$  имеют разрывы в тех же точках, что и  $\varphi(x)$ . Применяя задачу 16.18, получим, что  $f(x) \in \mathcal{R}_s([a, b])$  и  $f(x) \in \mathcal{R}_{v_2}([a, b])$ . В частности, отсюда следует, что  $f(x) \in \mathcal{R}_g([a, b])$ .

Пусть теперь задано  $\varepsilon > 0$ . Найдём такое  $\gamma > 0$ , что (см. задачу 14.64) для любого разбиения  $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  с  $\lambda(T) < \gamma$  выполнено неравенство

$$0 \leq V_a^b(g) - \sum_{i=1}^n |g(x_i) - g(x_{i-1})| < \frac{\varepsilon}{4C+1}$$

и для любого выбора отмеченных точек выполнено неравенство

$$\left| S_T(f; g) - \int_a^b f(x) dg(x) \right| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Пусть  $\delta_1 = \min(\delta, \gamma)$ , а разбиение  $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  таково, что  $\lambda(T) < \delta_1$ . Пусть, как обычно,

$$M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \quad \text{и} \quad m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

при  $k = 1, 2, \dots, n$ , а

$$\Gamma = \{i \in [1, n] : g(x) \text{ непостоянна на } [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Определим числа

$$d_k = \begin{cases} M_k, & \text{если } g(x_k) - g(x_{k-1}) \geq 0, k \in \Gamma, \\ 0, & \text{если } k \notin \Gamma, \\ m_k, & \text{если } g(x_k) - g(x_{k-1}) < 0, k \in \Gamma, \end{cases}$$

и

$$e_k = \begin{cases} m_k, & \text{если } g(x_k) - g(x_{k-1}) \geq 0, k \in \Gamma, \\ 0, & \text{если } k \notin \Gamma, \\ M_k, & \text{если } g(x_k) - g(x_{k-1}) < 0, k \in \Gamma, \end{cases}$$

при  $k = 1, 2, \dots, n$ . Далее, пусть

$$S_{T,1} = \sum_{k=1}^n d_k(g(x_k) - g(x_{k-1})) \quad \text{и} \quad S_{T,2} = \sum_{k=1}^n e_k(g(x_k) - g(x_{k-1})).$$

Заметим, что можно выбрать отмеченные точки  $U = \{\xi_k\}_{k=1}^n$  и  $V = \{\tau_k\}_{k=1}^n$  так, что если  $T_1$  — разбиение  $T$  с отмеченными точками  $U$ , а  $T_2$  — разбиение  $T$  с отмеченными точками  $V$ , то  $|S_{T_i}(f; g) - S_{T,i}| < \frac{\varepsilon}{8}$  при  $i = 1, 2$ . Отсюда следует, что  $S_{T,1} - S_{T,2} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} \bar{S}_T(f; v_1) - \underline{S}_T(f; v_1) &= \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) V_{x_{k-1}}^{x_k}(g) = \\ &= \sum_{k \in \Gamma} (M_k - m_k) V_{x_{k-1}}^{x_k}(g) = \sum_{k \in \Gamma} (M_k - m_k) (V_{x_{k-1}}^{x_k}(g) - |g(x_k) - \\ &\quad - g(x_{k-1})|) + \\ &+ S_{T,1} - S_{T,2} \leqslant 2C \left( V_a^b(g) - \sum_{k \in \Gamma} |g(x_k) - g(x_{k-1})| \right) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Теперь из задачи 16.4 следует, что  $f(x) \in \mathcal{R}_{v_1}([a, b])$ , откуда вытекает, что  $f(x) \in \mathcal{R}_v([a, b])$ .  $\square$

**16.21.** Рассматривая функцию  $f(x) \equiv 1$  на  $[a, b]$ , найдём, что  $\varphi(b) = \varphi(a)$ . Так как  $\varphi(x) \in V([a, b])$ , то множество её точек разрыва на  $[a, b]$  не более чем счётно. Обозначим его через  $A$  и возьмём точку  $y \in (a, b) \setminus A$ . Выберем  $n_0 > \frac{1}{b-y}$  и для всех  $n \geqslant n_0$  определим функции  $f_n(x)$ . Пусть  $f_n(x) = 1$  на  $[a, y]$ ,  $f_n(x) = 0$  на  $[y + \frac{1}{n}, b]$  и  $f_n(x)$  линейна на  $[y, y + \frac{1}{n}]$ . Ясно, что  $f_n(x) \in C([a, b])$  при всех  $n \geqslant n_0$ . Тогда

$$0 = \int_a^b f_n(x) d\varphi(x) = \int_a^y f_n(x) d\varphi(x) + \int_y^{y + \frac{1}{n}} f_n(x) d\varphi(x) = \varphi(y) - \varphi(a) + c_n,$$

где (см. задачи 16.6 и 14.37)  $|c_n| \leqslant V_y^{y + \frac{1}{n}}(\varphi) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Поэтому  $\varphi(y) = \varphi(a)$ .  $\square$

**16.22.** Пусть  $\varphi(x) \equiv 0$  на  $[0, 1]$  и  $f(x) = \psi(x) = \chi_{\{\frac{1}{2}\}}(x)$ . Тогда  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([0, 1])$ . Так как  $f(x)$  и  $\psi(x)$  обе разрывны в точке  $\frac{1}{2}$ , то в силу результата задачи 16.16 получаем, что  $f(x) \notin \mathcal{R}_\psi([0, 1])$ .  $\square$

**16.23.** Пусть  $\varphi(x) \equiv 0$  на  $[0, 1]$ ,  $f(x) \equiv 1$  на  $[0, 1]$  и  $\psi(x) = \chi_{\{1\}}(x)$ . Тогда

$$\int_0^1 f(x) d\varphi(x) = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^1 f(x) d\psi(x) = 1.$$

□

**16.24.** Пусть задано  $\varepsilon > 0$ . Тогда существует такое  $\delta > 0$ , что для любых двух разбиений  $T_1$  и  $T_2$  отрезка  $[a, b]$  с отмеченными точками, удовлетворяющих условиям  $\lambda(T_i) < \delta$  при  $i = 1, 2$ , выполнено неравенство  $|S_{T_1}(f; \varphi) - S_{T_2}(f; \varphi)| < \varepsilon$ . Возьмём теперь два произвольных разбиения  $T_1(1)$  и  $T_2(1)$  отрезка  $[a, c]$  с отмеченными точками, удовлетворяющие условиям  $\lambda(T_i(1)) < \delta$  при  $i = 1, 2$ , и добавим к каждому из них одно и то же разбиение  $T(2)$  отрезка  $[c, b]$  с отмеченными точками, для которого  $\lambda(T(2)) < \delta$ . Обозначим полученные разбиения через  $T_1$  и  $T_2$ . Но тогда

$$|S_{T_1(1)}(f; \varphi) - S_{T_2(1)}(f; \varphi)| = |S_{T_1}(f; \varphi) - S_{T_2}(f; \varphi)| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([a, c])$ . Аналогично получаем, что  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([c, b])$ . Заметим теперь, что если даны два разбиения:  $T(1)$  для отрезка  $[a, c]$  и  $T(2)$  — для  $[c, b]$  с отмеченными точками, то их можно объединить и получить такое разбиение  $T$  отрезка  $[a, b]$  с отмеченными точками, что  $\lambda(T) = \max(\lambda(T(1)), \lambda(T(2)))$ . При этом

$$S_T(f; \varphi) = S_{T(1)}(f; \varphi) + S_{T(2)}(f; \varphi),$$

откуда следует, что

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) = \int_a^c f(x) d\varphi(x) + \int_c^b f(x) d\varphi(x).$$

□

**16.25.** Пусть  $f(x) \equiv 1$  на  $[-1, 1]$  и  $\varphi(x) = \chi_{[0,1]}(x)$ . Тогда  $f(x) \in C([-1, 1])$  и  $\varphi(x) \in V([-1, 1])$ , но  $f(x)\chi_{[0,1]}(x) = \varphi(x)$  разрывна в точке 0. Поэтому (см. задачу 16.16) функция  $f(x)\chi_{[0,1]}(x)$  не принадлежит классу  $\mathcal{R}_\varphi([-1, 1])$ . □

**16.26.** Пусть  $f(x) = \chi_{(0,1]}(x)$  и  $\varphi(x) = \chi_{[0,1]}(x) \in V([-1, 1])$ . Тогда существуют и равны нулю оба интеграла:

$$\int_{-1}^0 f(x) d\varphi(x) \quad \text{и} \quad \int_0^1 f(x) d\varphi(x)$$

(для каждого из них любая интегральная сумма равна нулю), но так как обе функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  разрывны в точке 0, то (см. задачу 16.16)  $f(x) \notin \mathcal{R}_\varphi([-1, 1])$ .  $\square$

**16.27.** Пусть  $f(x) = \frac{1}{x} \chi_{(0,1]}(x)$  и  $\varphi(x) = x \chi_{[-1,0]}(x) \in C([-1, 1]) \cap V([-1, 1])$ . Ясно, что существуют и равны нулю оба интеграла:

$$\int_{-1}^0 f(x) d\varphi(x) \quad \text{и} \quad \int_0^1 f(x) d\varphi(x).$$

В то же время для любого разбиения  $T$  отрезка  $[-1, 1]$ , не содержащего точку 0, сумма  $\bar{S}_T(f; \varphi)$  не существует. Поэтому  $f(x) \notin \mathcal{R}_\varphi([-1, 1])$ .  $\square$

**16.28.** Пусть  $|f(x)| \leq K$  на  $[a, b]$ ,

$$I_1 = \int_a^c f(x) d\varphi(x), \quad I_2 = \int_c^b f(x) d\varphi(x),$$

а  $\varepsilon > 0$  — заданное число. Тогда можно выбрать такое  $\delta > 0$ , что:

- 1) для любого такого разбиения  $T(1)$  отрезка  $[a, c]$  с отмеченными точками, что  $\lambda(T(1)) < \delta$ , выполнено неравенство  $|S_{T(1)}(f; \varphi) - I_1| < \frac{\varepsilon}{4}$ ;
- 2) для любого такого разбиения  $T(2)$  отрезка  $[c, b]$  с отмеченными точками, что  $\lambda(T(2)) < \delta$ , выполнено неравенство  $|S_{T(2)}(f; \varphi) - I_2| < \frac{\varepsilon}{4}$ ;
- 3) если  $|y - c| < \delta$ , то  $|\varphi(y) - \varphi(c)| < \frac{\varepsilon}{8K + 1}$ .

Рассмотрим теперь такое разбиение  $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  отрезка  $[a, b]$  с отмеченными точками  $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ , что  $\lambda(T) < \delta$ . Если с  $T$  принадлежит  $T$ , то  $T$  — объединение разбиений  $T(1)$  отрезка  $[a, c]$  и  $T(2)$  отрезка  $[c, b]$ , и поэтому  $|S_T(f; \varphi) - (I_1 + I_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$ . В противном случае существует такое  $k \in [1, n]$ , что  $x_{k-1} < c < x_k$ . Определим  $T(1) = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x'_k = c\}$  — разбиение отрезка  $[a, c]$  с отмеченными точками  $\eta_i = \xi_i$  при  $i = 1, 2, \dots, k-1$  и  $\eta_k = c$ . Аналогично  $T(2) = \{c = x'_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b\}$  — разбиение отрезка  $[c, b]$  с отмеченными точками  $\eta_i = \xi_i$  при  $i = k+2, k+3, \dots, n$  и  $\eta_{k+1} = c$ . Заметим, что  $\lambda(T(i)) < \delta$  при  $i = 1, 2$ . Получаем, что

$$\begin{aligned} |S_T(f; \varphi) - (I_1 + I_2)| &\leq |S_{T(1)}(f; \varphi) - I_1| + |S_{T(2)}(f; \varphi) - I_2| + \\ &+ |f(\xi_k)| |\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)| + |f(c)| (|\varphi(x_{k+1}) - \varphi(c)| + |\varphi(c) - \varphi(x_k)|) \leqslant \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + K \frac{2\varepsilon}{8K + 1} + 2K \frac{\varepsilon}{8K + 1} < \varepsilon, \end{aligned}$$

откуда следует утверждение задачи.  $\square$

**16.29.** Из задачи 16.6 следует, что  $L \leq V_a^b(\varphi)$ . Пусть задано  $\varepsilon > 0$ . Выберем такое разбиение  $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  отрезка  $[a, b]$ , что  $|V_a^b(\varphi) - V_T(\varphi)| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Обозначим  $q_k = \operatorname{sgn}(\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1}))$  при  $k = 1, 2, \dots, n$ . Пусть натуральное  $m_0$  таково, что  $\frac{1}{m_0} < \frac{1}{2} \min_{1 \leq k \leq n} |x_k - x_{k-1}|$ . Для каждого  $m \geq m_0$  определим функцию  $f_m(x) = q_k$  на  $[x_{k-1}, x_k - \frac{1}{m}]$ , где  $k = 1, 2, \dots, n-1$ ,  $f_m(x) = q_n$  на  $[x_{n-1}, x_n]$  и продолжим  $f_m(x)$  по линейности на отрезки  $x \in [x_k - \frac{1}{m}, x_k]$  для  $k = 1, 2, \dots, n-1$ . Ясно, что  $f_m(x) \in C([a, b])$  и  $\|f_m\|_C \leq 1$ . Поскольку  $\varphi(x-0) = \varphi(x)$  на  $(a, b)$ , то существует такое  $m_1 > m_0$ , что  $V_{x_k - \frac{1}{m}}^{x_k}(\varphi) < \frac{\varepsilon}{4n}$  и  $|\varphi(x_k - \frac{1}{m}) - \varphi(x_k)| < \frac{\varepsilon}{4n}$  при  $k = 1, 2, \dots, n-1$  и  $m \geq m_1$ . Тогда при  $m \geq m_1$  получаем, что

$$\begin{aligned} L &\geq \int_a^b f_m(x) d\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n-1} q_k \left( \varphi\left(x_k - \frac{1}{m}\right) - \varphi(x_{k-1}) \right) + q_n(\varphi(x_n) - \\ &\quad - \varphi(x_{n-1})) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_k - \frac{1}{m}}^{x_k} f_m(x) d\varphi(x) \geq \sum_{k=1}^n q_k (\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})) - \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n-1} \left| \varphi\left(x_k - \frac{1}{m}\right) - \varphi(x_k) \right| - \sum_{k=1}^{n-1} V_{x_k - \frac{1}{m}}^{x_k}(\varphi) \geq V_T(\varphi) - \frac{\varepsilon}{2} \geq V_a^b(\varphi) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Поскольку  $\varepsilon > 0$  произвольно, то мы получаем утверждение задачи.  $\square$

**16.30.** Из задачи 16.6 следует, что  $J \leq \|f\|_C$ . Пусть  $y \in [a, b]$  таково, что  $\|f\|_C = |f(y)|$ . Если  $y < b$ , то мы рассмотрим функцию  $\varphi(x) = \operatorname{sgn} f(y) \chi_{(y, b]}(x)$ . Ясно, что  $\varphi(x) \in A$  и  $V_a^b(\varphi) \leq 1$ . В то же время

$$J \geq \int_a^b f(x) d\varphi(x) = |f(y)|,$$

откуда следует утверждение задачи. Если  $y = b$ , то аналогично доказывается, что  $J \geq |f(b-\gamma)|$  при любом  $\gamma > 0$ . Так как  $f(x) \in C([a, b])$ , то отсюда следует утверждение задачи.  $\square$

**16.31.** Заметим, что для любого разбиения  $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  выполнено условие

$$\sum_{k=1}^n |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |\varphi_i(x_k) - \varphi_i(x_{k-1})| \leq C,$$

откуда следует, что  $\varphi(x) \in V([a, b])$ , и поэтому (см. задачу 16.5)  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([a, b])$ . Теперь для заданного  $\varepsilon > 0$  выберем такое  $\delta > 0$ , что если  $x, y \in [a, b]$  и  $|x - y| < \delta$ , то  $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3C + 1}$ . Предположим, что разбиение  $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  с отмеченными точками  $\{\xi_k\}_{k=1}^n$  таково, что  $\lambda(T) < \delta$ . Для каждого  $i$  в силу результата задачи 16.6 имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) d\varphi_i(x) - S_T(f; \varphi_i) \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(\xi_k)) d\varphi_i(x) \right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{3C + 1} \cdot V_a^b(\varphi_i) < \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\left| \int_a^b f(x) d\varphi(x) - S_T(f; \varphi) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Но ясно, что если  $T$  фиксировано, то для достаточно больших  $i$  выполнена оценка

$$|S_T(f; \varphi_i) - S_T(f; \varphi)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Следовательно, существует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) d\varphi_k(x) = \int_a^b f(x) d\varphi(x).$$

□

**16.32.** Так как  $\varphi(x)$  — строго возрастающая функция на  $[0, 1]$ , то согласно задаче 16.15 любая функция  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([0, 1])$  ограничена на  $[0, 1]$ . Следовательно, если  $\beta < 0$ , то  $f(x) \notin \mathcal{R}_\varphi([0, 1])$ . Если  $\beta \geqslant 0$ , то  $f(x) \in V([0, 1])$ . Так как  $\varphi(x) \in C([0, 1])$ , то (см. задачу 16.5)  $\varphi(x) \in \mathcal{R}_f([0, 1])$ . Применяя задачу 16.3, получим нужное нам утверждение. □

**16.33.** Если  $\alpha \leqslant 0$ , то обе функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  разрывны в точке 0. Тогда (см. задачу 16.16)  $f(x) \notin \mathcal{R}_\varphi([0, 1])$ . Пусть  $\alpha > 0$ . Для заданного  $\varepsilon > 0$  найдём такое  $\delta > 0$ , что  $\delta^\alpha < \frac{\varepsilon}{4}$ . Затем найдём такое  $n$ , что  $w = \frac{2}{4\pi n + \pi} < \frac{\delta}{2}$ . Пусть  $g_1(x) = \varphi(x)\chi_{[w, 1]}(x)$  и  $g_2(x) = \varphi(x) - g_1(x)$ . Ясно, что  $g_1(x) \in C([0, 1])$ , поэтому  $g_1(x) \in \mathcal{R}_f([0, 1])$ . Отсюда следует, что существует такое  $\gamma > 0$ , что для любых двух разбиений  $T_1$  и  $T_2$  отрезка  $[0, 1]$  с отмеченными точками, удовлетворяющих условию  $\lambda(T_i) < \gamma$  при  $i = 1, 2$ , выполнено неравенство

$|S_{T_1}(g_1; f) - S_{T_2}(g_1; f)| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Пусть теперь  $\gamma_1 = \min(\gamma, \delta)$ . Для любых двух разбиений  $T_1$  и  $T_2$  отрезка  $[0, 1]$  с отмеченными точками таких, что  $\lambda(T_i) < \gamma_1$  при  $i = 1, 2$ , имеем

$$\begin{aligned} |S_{T_1}(\varphi; f) - S_{T_2}(\varphi; f)| &\leq |S_{T_1}(g_1; f) - S_{T_2}(g_1; f)| + |S_{T_1}(g_2; f)| + \\ &+ |S_{T_2}(g_2; f)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2 \sup_{x \in [0, w]} |\varphi(x)| \cdot V_0^\delta(f) \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\delta^\alpha < \varepsilon. \end{aligned}$$

Как следствие,  $\varphi(x) \in \mathcal{R}_f([0, 1])$ . Применяя задачу 16.3, получаем, что  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([a, b])$ . Итак,  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([a, b])$  тогда и только тогда, когда  $\alpha > 0$ .  $\square$

**16.34.** Так как обе оценки устанавливаются одинаковыми рассуждениями, то мы докажем только первую. Заметим, что по критерию Лебега (см. задачу 11.3)  $f(x)g(x) \in \mathcal{R}([a, b])$ . Пусть задано  $\varepsilon > 0$ . Выберем такое  $\delta > 0$ , что для любого разбиения  $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  с отмеченными точками  $\{\xi_k\}_{k=1}^n$  и с  $\lambda(T) < \delta$  выполнена оценка для разности сумм Дарбу:  $\bar{S}(f; T) - \underline{S}(f; T) < \varepsilon$ . Тогда для любого  $c \in [a, b]$  и любого такого разбиения  $T_c$  отрезка  $[a, c]$  с отмеченными точками, что  $\lambda(T_c) < \delta$ , имеем:  $\bar{S}(f; T_c) - \underline{S}(f; T_c) < \varepsilon$ . Следовательно,

$$\left| \int_a^c f(x) dx - S(f; T_c) \right| < \varepsilon.$$

Пусть теперь  $T$  — разбиение отрезка  $[a, b]$  с отмеченными точками  $\{\xi_k\}_{k=1}^n$  и с  $\lambda(T) < \delta$ . Применяя преобразование Абеля, получаем

$$\begin{aligned} |S(fg; T)| &= \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k)g(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| = \\ &= \left| \sum_{k=1}^{n-1} ((g(\xi_k) - g(\xi_{k+1})) \sum_{r=1}^k f(\xi_r)(x_r - x_{r-1})) + \right. \\ &\quad \left. + g(\xi_n) \sum_{r=1}^n f(\xi_r)(x_r - x_{r-1}) \right| < \left( \varepsilon + \sup_{c \in [a, b]} \left| \int_a^c f(x) dx \right| \right) \cdot g(\xi_1). \end{aligned}$$

Так как  $\varepsilon > 0$  произвольно и  $g(\xi_1) \leq g(a)$ , то утверждение задачи тем самым доказано.  $\square$

**16.35.** Пусть вначале  $\varphi(x)$  — неубывающая функция на  $[0, 2\pi]$ . Так как

$$\int_0^{2\pi} \cos nx dx = 0$$

при всех  $n \geq 1$ , то можно считать, что  $\varphi(0) = 0$  и  $V_0^{2\pi}(\varphi) = \varphi(2\pi)$ . Используя задачу 16.34, получаем, что

$$\left| \int_0^{2\pi} \varphi(x) \cos nx dx \right| \leq \varphi(2\pi) \sup_{c \in [0, 2\pi]} \left| \int_c^{2\pi} \cos nx dx \right| \leq \frac{1}{n} V_0^{2\pi}(\varphi).$$

В общем случае существует (см. задачу 14.69) разложение  $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ , где  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  — неубывающие неотрицательные функции на  $[0, 2\pi]$ , причём  $V_0^{2\pi}(\varphi) = V_0^{2\pi}(\varphi_1) + V_0^{2\pi}(\varphi_2)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} \varphi(x) \cos nx dx \right| &\leq \left| \int_0^{2\pi} \varphi_1(x) \cos nx dx \right| + \left| \int_0^{2\pi} \varphi_2(x) \cos nx dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{n} V_0^{2\pi}(\varphi_1) + \frac{1}{n} V_0^{2\pi}(\varphi_2) = \frac{1}{n} V_0^{2\pi}(\varphi). \end{aligned}$$

□

**16.36.** Пусть  $\varphi(x) = \chi_{[0, \frac{\pi}{2}]}(x)$ . Тогда  $V_0^{2\pi}(\varphi) = 1$  и

$$\left| \int_0^{2\pi} \varphi(x) \cos nx dx \right| = \left| \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n}{2} \right| = \frac{1}{n}$$

для нечётных  $n$ . □

**16.37.** Пусть вначале  $\varphi(x)$  — неубывающая функция на  $[0, 2\pi]$ . Так как

$$\int_0^{2\pi} \sin nx dx = 0$$

для всех натуральных  $n$ , то можно считать, что  $\varphi(0) = 0$  и  $V_0^{2\pi}(\varphi) = \varphi(2\pi)$ . В силу результата задачи 16.34 получаем, что

$$\left| \int_0^{2\pi} \varphi(x) \sin nx dx \right| \leq \varphi(2\pi) \sup_{c \in [0, 2\pi]} \left| \int_c^{2\pi} \sin nx dx \right| \leq \frac{2}{n} V_0^{2\pi}(\varphi).$$

В общем случае согласно задаче 14.69 существует разложение  $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ , где  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  — неотрицательные неубывающие функции на  $[0, 2\pi]$  и  $V_0^{2\pi}(\varphi) = V_0^{2\pi}(\varphi_1) + V_0^{2\pi}(\varphi_2)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} \varphi(x) \sin nx dx \right| &\leq \left| \int_0^{2\pi} \varphi_1(x) \sin nx dx \right| + \left| \int_0^{2\pi} \varphi_2(x) \sin nx dx \right| \leq \\ &\leq \frac{2}{n} V_0^{2\pi}(\varphi_1) + \frac{2}{n} V_0^{2\pi}(\varphi_2) = \frac{2}{n} V_0^{2\pi}(\varphi). \end{aligned}$$

□

**16.38.** Пусть  $\varphi(x) = \chi_{[0,\pi]}(x)$ . Тогда  $V_0^{2\pi}(\varphi) = 1$  и

$$\left| \int_0^{2\pi} \varphi(x) \sin nx \, dx \right| = \left| \frac{1 - \cos \pi n}{n} \right| = \frac{2}{n}$$

при нечётных  $n$ .  $\square$

**16.39.** Согласно задачам 16.3 и 16.6 имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} \varphi(x) \sin nx \, dx \right| &= \frac{1}{n} \left| \int_0^{2\pi} \varphi(x) d \cos nx \right| = \\ &= \left| \frac{\varphi(2\pi) - \varphi(0)}{n} - \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \cos nx d\varphi(x) \right| = \frac{1}{n} \left| \int_0^{2\pi} \cos nx d\varphi(x) \right| \leq \frac{1}{n} V_0^{2\pi}(\varphi). \end{aligned}$$

$\square$

**16.40.** Пусть  $\varphi(x) = \chi_{[\frac{\pi}{2}, \pi]}(x)$ . Тогда  $V_0^{2\pi}(\varphi) = 2$  и, если  $n = 2(2k + 1)$ , где  $k \in \mathbb{N}$ , то

$$\left| \int_0^{2\pi} \varphi(x) \sin nx \, dx \right| = \left| \frac{\cos \pi n - \cos \frac{\pi n}{2}}{n} \right| = \frac{2}{n} = \frac{1}{n} V_0^{2\pi}(\varphi).$$

$\square$

**16.41.** Рассмотрим разбиение  $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ . Тогда (см. задачу 16.6)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |F(x_k) - F(x_{k-1})| &= \sum_{k=1}^n \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) d\varphi(t) \right| \leq \\ &\leq \|f\|_C \cdot \sum_{k=1}^n V_{x_{k-1}}^{x_k}(\varphi) = \|f\|_C \cdot V_a^b(\varphi). \end{aligned}$$

Предположим, что  $\varphi(x)$  непрерывна справа в точке  $x_0$ . Тогда (см. задачи 16.6 и 14.37)

$$|F(x_0 + h) - F(x_0)| \leq \left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) d\varphi(t) \right| \leq \|f\|_C \cdot V_{x_0}^{x_0+h}(\varphi) \rightarrow 0$$

при  $h \rightarrow +0$ . Аналогично доказывается непрерывность слева.  $\square$

**16.42.** Из задачи 16.6 следует, что для любых  $x, y \in [0, 1]$  выполнены оценки

$$|F(x) - F(y)| \leqslant le \left| \int_0^1 (f(x+t) - f(y+t)) d\varphi(t) \right| \leqslant \max_{\substack{u, v \in [0, 1]: \\ |u-v|=|x-y|}} |f(u) - f(v)| \cdot V_0^1(\varphi),$$

откуда (с учётом теоремы Кантора) следует утверждение задачи.  $\square$

**16.43.** Пусть  $E$  — множество всех точек непрерывности функции  $\varphi(x)$  на  $(a, b)$ , и  $x, y \in E$ . Пусть  $x < y$ , а натуральное  $n_0$  таково, что  $1/n_0 < \min(x-a, b-y)$ . Тогда при  $n \geq n_0$  определим функцию  $f_n(z) = 1$  при  $z \in [x, y]$ ,  $f_n(z) = 0$  на  $[a, x-1/n] \cup [y+1/n, b]$  и продолжим  $f_n$  по линейности на отрезки  $[x-1/n, x]$  и  $[y, y+1/n]$ . Ясно, что каждая  $f_n(z)$  — неотрицательная непрерывная функция на  $[a, b]$ . Поэтому

$$0 \leq \int_a^b f_n(t) d\varphi(t) = \int_{x-1/n}^x f(t) d\varphi(t) + \int_y^{y+1/n} f(t) d\varphi(t) + \varphi(y) - \varphi(x).$$

Так как (см. задачу 14.37)

$$\left| \int_{x-1/n}^x f(t) d\varphi(t) \right| \leq V_{x-1/n}^x(\varphi) \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ , и, аналогично,

$$\int_y^{y+1/n} f(t) d\varphi(t) \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$ , то мы получаем, что  $\varphi(y) - \varphi(x) \geq 0$ . Заметим, что множество  $A = [a, b] \setminus E$  не более чем счётно. Если  $u \in A$ , то пусть

$$\alpha_u = \inf_{\substack{x \in E: \\ x > u}} \varphi(x) \quad \text{и} \quad \beta_u = \sup_{\substack{x \in E: \\ x < u}} \varphi(x)$$

(при  $x = a$  формально положим  $\beta_a = \alpha_a$ , а при  $x = b$  пусть  $\alpha_b = \beta_b$ .) Ясно, что  $\alpha_u \geq \beta_u$  при всех  $u \in A$ . Определим функцию

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } x \in E, \\ \beta_x, & \text{если } x \in A. \end{cases}$$

Тогда  $\psi(x)$  — неубывающая функция на  $[a, b]$ , а множество

$$\{x \in [a, b]: \psi(x) \neq \varphi(x)\} \subseteq A$$

не более чем счётно.  $\square$

**16.44.** Так как (см. задачу 16.41)  $\psi(x) \in V([a, b])$ , то оба интеграла существуют. Для заданного  $\varepsilon > 0$  выберем такое  $\delta > 0$ , что если  $x, y \in [a, b]$  и  $|x - y| < \delta$ , то  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ . Возьмём такое разбиение  $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$  с отмеченными точками  $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ , что  $\lambda(T) < \delta$ . Тогда

$$\begin{aligned} |S_T(g; \psi) - S_T(fg; \varphi)| &= \\ &= \left| \sum_{k=1}^n g(\xi_k) \left( \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) d\varphi(t) - f(\xi_k)(\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})) \right) \right| \leqslant \\ &\leqslant \|g\|_C \sum_{k=1}^n \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(\xi_k)) d\varphi(t) \right| \leqslant \varepsilon \|g\|_C V_a^b(\varphi), \end{aligned}$$

откуда следует утверждение задачи.  $\square$

**16.45.** Заметим, что (см. задачу 11.1)  $\varphi'(x) \in L((a, b))$ , поэтому (см. задачу 15.33) функция  $\varphi(x)$  принадлежит  $AC([a, b])$ , и тем более принадлежит  $V([a, b])$ . Как следствие,  $f(x) \in \mathcal{R}_\varphi([a, b])$ . По критерию Лебега (см. задачу 11.3)  $f(x)\varphi'(x) \in \mathcal{R}([a, b])$ . Для заданного  $\varepsilon > 0$  выберем такое  $\delta > 0$ , что если  $T$  — разбиение отрезка  $[a, b]$  с отмеченными точками, удовлетворяющее условию  $\lambda(T) < \delta$ , то

$$\left| S_T(f; \varphi) - \int_a^b f(x) d\varphi(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$\left| S(f\varphi'; T) - \int_a^b f(x)\varphi'(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть теперь  $W = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$  — некоторое разбиение отрезка  $[a, b]$  с  $\lambda(W) < \delta$ . Тогда по теореме Лагранжа

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1}) = \varphi'(y_k)(x_k - x_{k-1})$$

при  $k = 1, 2, \dots, n$ , где  $y_k \in (x_{k-1}, x_k)$ . Обозначим через  $T$  разбиение  $W$  с отмеченными точками  $\xi_k = y_k$  при  $k = 1, 2, \dots, n$ . Тогда  $S_T(f; \varphi) = S(f\varphi'; T)$ , откуда следует, что

$$\left| \int_a^b f(x) d\varphi(x) - \int_a^b f(x)\varphi'(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Поскольку  $\varepsilon > 0$  произвольно, утверждение задачи тем самым доказано.  $\square$

**16.46.** Существование обоих интегралов очевидно. Для заданного  $\varepsilon > 0$  выберем такое  $\delta > 0$ , что если  $x, y \in [a, b]$  и  $|x - y| < \delta$ , то

$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ , и если  $T$  — разбиение отрезка  $[a, b]$  с отмеченными точками  $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ , удовлетворяющее условию  $\lambda(T) < \delta$ , то

$$\left| S_T(f; \varphi) - \int_a^b f(x) d\varphi(x) \right| < \varepsilon.$$

Тогда для такого разбиения  $T$  получаем, что

$$\begin{aligned} \left| S_T(f; \varphi) - \int_{(a,b)} f(x) \varphi'(x) d\mu \right| &\leqslant \\ &\leqslant \sum_{k=1}^n \left| f(\xi_k)(\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})) - \int_{(x_{k-1}, x_k)} f(x) \varphi'(x) d\mu \right| = \\ &= \sum_{k=1}^n \left| \int_{(x_{k-1}, x_k)} (f(x) - f(\xi_k)) \varphi'(x) d\mu \right| \leqslant \varepsilon \int_{(a,b)} |\varphi'(x)| d\mu. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left| \int_a^b f(x) d\varphi(x) - \int_{(a,b)} f(x) \varphi'(x) d\mu \right| < C\varepsilon,$$

где  $C = C(\varphi)$ . Поскольку  $\varepsilon > 0$  произвольно, то утверждение тем самым доказано.  $\square$

**16.47.** Существование обоих интегралов очевидно. Для заданного  $\varepsilon > 0$  выберем такое  $\delta > 0$ , что если множество  $A \subset [a, b]$  измеримо и  $\mu(A) < \delta$ , то

$$\int_A |\varphi'(x)| d\mu < \varepsilon,$$

и если  $T$  — разбиение отрезка  $[a, b]$  с отмеченными точками  $\{\xi_k\}_{k=1}^n$ , удовлетворяющее условию  $\lambda(T) < \delta$ , то

$$\left| S_T(f; \varphi) - \int_a^b f(x) d\varphi(x) \right| < \varepsilon.$$

Тогда для такого разбиения  $T$  получаем, что

$$\begin{aligned} \left| S_T(f; \varphi) - \int_{(a,b)} f(x) \varphi'(x) d\mu \right| &\leqslant \\ &\leqslant \sum_{k=1}^n \sup_{x \in (x_{k-1}, x_k)} |f(x) - f(\xi_k)| \int_{(x_{k-1}, x_k)} |\varphi'(x)| d\mu \leqslant \\ &\leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \int_{(x_{k-1}, x_k)} |\varphi'(x)| d\mu \cdot V_a^b(f) < \varepsilon V_a^b(f). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left| \int_a^b f(x) d\varphi(x) - \int_{(a,b)} f(x)\varphi'(x) d\mu \right| < C\varepsilon,$$

где  $C = C(f)$ . Поскольку  $\varepsilon > 0$  произвольно, то утверждение тем самым доказано.  $\square$

**16.48.** Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin x d\varphi(x) &= \int_0^{\pi/2} \sin x dx - \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \sin \pi + \int_{\pi/2}^\pi \sin x dx = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin x dx - \frac{\pi}{2} = 2 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$\square$

**16.49.** Имеем

$$\begin{aligned} I &= (-\pi + 2)(-e^{-\pi}) + \int_{-\pi}^0 (x+2)(-e^x) dx + 4 + \int_0^\pi (x+2)e^x dx - \\ &\quad - (\pi + 2)e^\pi = (-\pi + 2)(-e^{-\pi}) + 4 - (\pi + 2)e^\pi - \\ &\quad - \int_{-\pi}^0 (x+2) de^x + \int_0^\pi (x+2) de^x = (-\pi + 2)(-e^{-\pi}) + 4 - (\pi + 2)e^\pi + \\ &\quad + (-\pi + 2)e^{-\pi} + (\pi + 2)e^\pi - 4 + \int_{-\pi}^0 e^x dx - \int_0^\pi e^x dx = 2 - e^{-\pi} - e^\pi. \end{aligned}$$

$\square$

**16.50.** Имеем

$$I = -1 + \int_0^\pi (x-1) d\cos x = -1 - (\pi - 1) + 1 - \int_0^\pi \cos x dx = 1 - \pi.$$

$\square$

**16.51.** Из определения  $g(x)$  следует, что  $g(x) + g(1-x) = 1$  на  $[0, 1]$ . Поэтому

$$\begin{aligned} I &= g(1) - \int_0^1 g(x) dx = 1 - \int_0^{1/2} g(x) dx + \int_{1/2}^0 g(1-x) dx = \\ &= 1 - \int_0^{1/2} (g(x) + g(1-x)) dx = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$\square$

**16.52.** Из определения  $g(x)$  следует, что  $g\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}g(x)$  и что  $g\left(\frac{2}{3} + \frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}g(x)$  на  $x \in [0, 1]$ . Поэтому для любого натурального  $k$  получаем

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^1 x^k dg(x) = \int_0^{1/3} x^k dg(x) + \int_{2/3}^1 x^k dg(x) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 3^k} \left( \int_0^1 y^k dg(y) + \int_0^1 (y+2)^k dg(y) \right) = \frac{I_k}{3^k} + \frac{1}{2 \cdot 3^k} \sum_{r=1}^k C_k^r 2^r I_{k-r}, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$I_k = \frac{1}{2 \cdot (3^k - 1)} \sum_{r=1}^k C_k^r 2^r I_{k-r}.$$

Ясно, что  $I_0 = 1$  и (см. задачу 16.51)  $I_1 = 1/2$ . Следовательно,

$$I_2 = \frac{1}{16} (2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 4) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

и

$$I = I_3 = \frac{1}{52} \left( 3 \cdot 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} + 8 \right) = \frac{1}{52} \cdot \frac{65}{4} = \frac{5}{16}.$$

□

**16.53.** Заметим, что

$$\int_0^1 g(x) dg(x) = g^2(1) - \int_0^1 g(x) dg(x),$$

откуда следует, что

$$\int_0^1 g(x) dg(x) = \frac{1}{2}.$$

Но  $g(1-x) = 1 - g(x)$  на  $[0, 1]$ , поэтому

$$I = \int_0^1 1 dg(x) - \int_0^1 g(x) dg(x) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

□

## **Список литературы**

1. *Лебег А.* Интегрирование и отыскание примитивных функций. — М.-Л.: ГТТИ, 1934.
2. *Александров П. С., Колмогоров А. Н.* Введение в теорию функций действительного переменного. — М.-Л.: ОНТИ, 1938.
3. *Лузин Н. Н.* Теория функций действительного переменного. — М.: Учпедгиз, 1940.
4. *Сакс С.* Теория интеграла. — М.: ИЛ, 1949.
5. *Халмош П.* Теория меры. — М.: ИЛ, 1953.
6. *Русс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. — М.: ИЛ, 1954.
7. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974.
8. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976.
9. *Толстов Г. П.* Мера и интеграл. — М.: Наука, 1976.
10. *Дьяченко М. И., Ульянов П. Л.* Мера и интеграл. — М.: Факториал, 1998, 2002.
11. *Кириллов А. А., Гвишцани А. Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. — М.: Наука, 1979.
12. *Теляковский С. А.* Сборник задач по теории функций действительного переменного. — М.: Наука, 1980.
13. *Леонтьева Т. А., Панферов В. С., Серов В. С.* Задачи по теории функций действительного пременного. — М.: Изд-во МГУ, 1997.
14. *Оган Ю. С.* Сборник задач по математическому анализу. — М.: Просвещение, 1981.
15. *Макаров Б. М., Голузина М. Г., Лодкин А. А., Подкорытов А. Н.* Избранные задачи по вещественному анализу. — СПб.: Невский диалект, 2004.

## Предметный указатель

- δ-кольцо 85
- σ-алгебра 85
- σ-кольцо 85
- N-свойство Лузина 348
- Абсолютная непрерывность интеграла Лебега** 211
  - меры относительно другой меры 273
  - функции 348
- Аксиома выбора 14
- Алгебра 85
  - борелевская 87
- Вариация функции** 315
- Верхняя мера Жордана 113
  - Лебега 113
- Внутренность множества 31
- Декартово произведение множеств 7
- Единица системы множеств** 85
- Замыкание множества** 31
- Заряд 273
- Измеримое пространство** 160
  - σ-конечное 160
  - конечное 160
- Индикатор 14
- Индикатриса Банаха 166
- Интеграл Лебега от интегрируемой функции 201
  - — неотрицательной функции 201
  - — простой функции 200
- Интегральная сумма Лебега 205
  - Римана 241
  - Римана–Стильеса 385
- Канторово множество замкнутое** 16
  - открытое 16
- Колебание функции 69
- Кольцо 85
- Компакт 68
- Критерий Дарбу 241
  - Лебега 242
- Мажоранта** 206
- Мера 97
  - σ-аддитивная 97
- σ-конечная 97
- Жордана 113
- классическая 100
- конечная 97
- Лебега 113
  - — σ-конечная 114
  - полная 116
  - Стильеса 319
- Метрика 30
- Минимальное σ-кольцо, содержащее систему множеств 87
- кольцо, содержащее систему множеств 87
- Множества с равными мощностями** 13
  - сравнение мощностей 13
  - эквивалентные 13
- Множество всюду плотное** 31
  - второй категории Бэра 31
  - выпуклое 33
  - замкнутое 30
  - измеримое по Жордану 113
    - — — Лебегу 113
  - мощности континуума 13
  - не более чем счётное 13
  - неограниченной расходимости последовательности 68
  - несчётное 13
  - нигде не плотное 31
  - открытое 30
  - отрицательное относительно задания 273
  - первой категории Бэра 31
  - положительное относительно задания 273
  - расходимости последовательности 68
  - совершенное 31
  - сходимости последовательности 68
  - счётное 13
  - типа  $F_\sigma$  30
  - —  $G_\delta$  30
- Модуль непрерывности функции 280
- Непрерывность меры** 99
- Неравенство Гёльдера 273

- Минковского 273
- Чебышёва 209
- Норма 32
- Объединение множеств** 7
  - — дизьюнктное 7
- Окрестность 30
- Пересечение множеств** 7
- Подпокрытие 33
- Покрытие множества 33
  - в смысле Витали 124
  - открытое 33
- Полукольцо 85
  - с единицей 85
- Предел последовательности множеств верхний 7
  - — нижний 7
- Пример Ф. Рисса 189
- Простая функция 200
- Пространство  $l_p$  32, 272
  - банахово 32
  - гильбертово 32
  - квазиметрическое 280
  - метрическое 30
  - дискретное 43
  - полное 31
  - сепарабельное 31
  - нормированное 32
- Разложение Жордана** 282
- Хана 282
- Разность множеств 7
- Расстояние достигается между двумя множествами 31
  - от точки до множества 31
- Свёртка функций** 263
- Сечение множества 32
- Симметрическая разность множеств 7
- Скалярное произведение 32
- Суммы Дарбу 241
- Сходимость по мере 180
  - почти всюду 180
- Теорема Б. Леви для интегрируемых функций** 206
  - — неотрицательных функций 205
    - — рядов 206
  - Банаха–Зарецкого 350
- Больцано–Вейерштрасса 35
- Бэра 42
- Витали 123, 124
- Гейне–Бореля 39
- Егорова 183
- Кантора 70
- Кантора–Бернштейна 17
- Лебега 206
- Лузина 183
  - о среднем вторая 390
- Радона–Никодима 282
- Ф. Рисса 182
- Фату 206
- Фубини 262
- Хелли вторая 322
  - — первая 390
- Тождество параллелограмма 40
- Точка Лебега (функции) 348
  - множества внутренняя 31
  - — изолированная 31
  - — предельная 31
  - — точка конденсации 31
  - — — плотности 348
  - разрыва первого рода 315
- Фундаментальная последовательность** 30
  - по мере 181
- Функции эквивалентные 160
- Функция возрастающая 14
  - Дирихле 79
  - измеримая 160
  - интегрируемая по Лебегу 201
    - — Риману 241
      - — — в несобственном смысле 242
      - — — Риману–Стилтьесу 385
    - Кантора 76
    - непрерывная в точке 68
    - неубывающая 14
    - ограниченной вариации 315
    - полуунпрерывная сверху в точке 69
    - Римана 72
    - сингулярная 321
    - скачков 316
    - характеристическая 14
  - Шар замкнутый** 30
    - открытый 30

Учебное издание

*УЛЬЯНОВ Петр Лаврентьевич  
БАХВАЛОВ Александр Николаевич  
ДЬЯЧЕНКО Михаил Иванович  
КАЗАРЯН Казарос Согомонович  
СИФУЭНТЕС Патрисио*

## **ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ В ЗАДАЧАХ**

Редактор *Н.Б. Бартошевич-Жагель*

Оригинал-макет: *В.В. Худяков*

Оформление переплета: *А.Ю. Алексина*

ЛР №071930 от 06.07.99. Подписано в печать 05.05.05. Формат 60×90/16.  
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 26. Уч.-изд. л. 28,6. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»

МАИК «Наука/Интерperiодика»

117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90

E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;

<http://www.fml.ru>

ISBN 5-9221-0595-7



9 785922 105958

Отпечатано с готовых диапозитивов  
в ОАО «Чебоксарская типография № 1»  
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковleva, 15