1991 г. январь — февраль т. 46, вып. 1 (277)
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТРИВИУМ

В. И. Арнольд

Уровень математической культуры падает; и студенты, и аспиранты, выпускаемые нашими вузами, включая механико-математической факультет МГУ, становятся не менее невежественными, чем профессора и преподаватели. В чем причина этого ненормального явления? В нормальных условиях студенты и аспиранты знают свою науку лучше профессоров, в соответствии с общим принципом распространения знаний: новое побеждает не потому, что старики его выучивают, а потому что приходят новые поколения, которые его знают.

Среди множества причин, вызвавших это ненормальное положение, я хочу выделить те, которые зависят от нас самих, чтобы попытаться исправить то, что в наших силах. Одна из таких причин, по-моему,— наша система экзаменов, специально рассчитанная на систематический выпуск брака, т. е. псевдоученых, которые математику выучивают как марксизм: зубрят наизусть формулировки и ответы на наиболее часто встречающиеся экзаменационные вопросы.

Чем определяется уровень подготовки математика? Ни перечень курсов, ни их программы уровень не определяют. Единственный способ зафиксировать, чему мы действительно научили своих студентов — это перечислить задачи, которые они должны уметь решать в результате обучения.

Речь идет здесь не о каких-либо трудных задачах, а о тех простых вопросах, которые составляют строго необходимый минимум. Этих задач не обязательно должно быть много, но уметь решать их нужно требовать жестко. И. Е. Тамм рассказывал, что, когда он попал во время гражданской войны к махновцам, во время допроса он сказал, что учился на физико-математическом факультете. И он остался жив лишь благодаря тому, что сумел решить задачу из теории рядов, которая была ему тут же предложена, чтобы проверить, правду ли он говорит. Наши студенты должны быть готовы к таким испытаниям!

Во всем мире экзамен по математике — это письменное решение задач. Письменный характер испытаний считается повсюду столь же обязательным признаком демократического общества, как выборы из нескольких кандидатов. Действительно, на устном экзамене студент полностью беззащитен. Мне случалось слышать, принимая экзамены на кафедре дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ, экзаменаторов, которые топили за соседним столом студентов, дававших безукоризненные ответы (возможно, превосходящие уровень понимания преподавателя). Известны и такие случаи, когда топили нарочно (иногда от этого можно спасти, вовремя войдя в аудиторию).

Письменная работа — это документ, и экзаменатор поневоле более объективен при ее проверке (особенно, если, как это и должно бы быть, работа для проверяющего анонимна).

Есть еще одно немаловажное преимущество письменных экзаменов: задачи остаются и могут быть опубликованы или сообщены студентам следующего курса для подготовки к своему экзамену. Кроме того, эти задачи сразу фиксируют и уровень курса, и уровень лектора, который их составил. Его сильные и слабые места сразу видны, специалисты сразу могут оценить преподавателя по тому, чему он хотел научить студентов и чему сумел научить их.

Между прочим, во Франции задачи общего для всей страны Concours général (примерно соответствующего нашей олимпиаде) составляются учителями, посылающими свои задачи в Париж, где из них отбираются лучшие — и министерство получает объективные данные об уровне своих учителей, сравнивая, во-первых, предложенные ими задачи, а, во-вторых, результаты их учеников. У нас же преподаватели оцениваются, как известно, по таким признакам, как внешний вид, быстрота речи и идеологическая «правильность».

Неудивительно, что наши дипломы не хотят признавать (думаю, что в дальнейшем это распространится и на дипломы по математике). Оценки, полученные на не оставляющих следов устных экзаменах, имеют не поддающийся объективному сравнению с чем бы то ни было, крайне расплывчатый и относительный вес, целиком зависящий от реального уровня преподавания и требований в данном вузе. При одних и тех же программах и отметках знания и умения дипломников могут отличаться (в понятном смысле) в десятки раз. К тому же устный экзамен куда легче фальсифицировать (что случается и у нас, на механико-математическом факультете МГУ, где, как некогда сказал один незрячий преподаватель, приходится ставить хорошую отметку студенту «отвечающему очень близко к учебнику», который не может ответить ни на один вопрос).

Сущность и недостатки нашей системы математического образования прекрасно описал Р. Фейнман в своих воспоминаниях («Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман» — глава о преподавании физики в Бразилии, русский перевод которой опубликован в Успехах физических наук, т. 148, в. 3, 1986).

По словам Фейнмана, студенты эти ничего не понимают, но никогда не задают вопросов, делая вид, что понимают все. А если кто-нибудь начинает задавать вопросы, то курс его быстро ставит на место, как зря отнимающего время у диктующего лекцию преподавателя и у записывающих ее студентов. В результате никто не может ничего из выученного применить ни в одном примере. Экзамены же (догматические, вроде наших: сформулируйте определение, сформулируйте теорему) благополучно сдаются. Студенты приходят в состояние «самораспространяющейся псевдообразованности» и могут в дальнейшем подобным же образом учить следующие поколения. Но вся эта деятельность полностью бессмысленна и фактически наши выпуски специалистов в значительной мере являются обманом, липой и приписками: эти так называемые специалисты не в состоянии решить простейших задач, не владеют элементами своего ремесла.

Итак, *чтобы положить конец приписками, нужно зафиксировать не список теорем, а набор задач, которые должны уметь решать студенты. Эти списки задач нужно ежегодно публиковать* (*думаю, список должен содержать задач по десять для каждого семестрового курса*). Тогда мы увидим, чему мы реально учим студентов и насколько это удается. А для того, чтобы студенты научились применять свою науку, *все экзамены нужно проводить только письменно.*

Естественно, задачи от вуза к вузу и от года к году будут меняться. Тогда можно будет сравнивать уровень разных преподавателей и выпусков разных лет. Студент, которому для вычисления с десятипроцентной точностью среднего от сотой степени синуса требуется значительно больше пяти минут, не владеет математикой, даже если он занимался нестандартным анализом, универсальными алгебрами, супермногообразиями или теоремами вложения.

Составление эталонных задач — трудоемкая работа, но я думаю, ее необходимо проделать. В качестве попытки я предлагаю ниже список из ста задач, составленных как математический минимум студента-физика. Эталонные задачи (в отличие от программ) не определены однозначно, и многие, вероятно, со мной не согласятся. Тем не менее я считаю, что начать фиксировать уровень математических требований при помощи письменных экзаменов и эталонных задач необходимо. Хочется надеяться, что в будущем студенты будут получать эталонные задачи по каждому курсу в начале каждого семестра, а начетнически-зубрильные устные экзамены уйдут в прошлое.

1. Нарисовать график производной и график интеграла функции, заданной свободно начерченным графиком.

2. Найти предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \sin x}{\arcsin \operatorname{arctg} x - \operatorname{acrtg} \arcsin x}.$$

3. Найти критические значения и критические точки отображения $z \mapsto z^2 + 2\bar{z}$ (нарисовать ответ).

4. Вычислить сотую производную функции

$$\frac{x^2+1}{x^3-x}.$$

5. Вычислить сотую производную функции

$$\frac{1}{x^2+3x+2}$$

в нуле с относительной погрешностью 10%.

6. Нарисовать на плоскости (x, y) кривую, заданную параметрически:

$$x = 2t - 4t^3, \quad y = t^2 - 3t^4.$$

7. Сколько нормалей к эллипсу можно провести из данной точки плоскости? Исследовать область, в которой число нормалей максимально.

8. Сколько максимумов, минимумов и седел имеет функция $x^4 + y^4 + z^4 + u^4 + v^4$ на поверхности $x + \ldots + v = 0$, $x^2 + \ldots + v^2 = 1$, $x^3 + \ldots + v^3 = C$?

9. Всякий ли положительный многочлен от двух вещественных переменных достигает своей нижней грани на плоскости?

10. Исследовать асимптотики решений y уравнения $x^5 + x^2y^2 = y^6$, стремящихся к 0 при $x \to 0$.

11. Исследовать сходимость интеграла $\displaystyle\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx\,dy}{1+x^4y^4}$.

12. Найти поток векторного поля $\vec{r}/r^3$ через поверхность

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 2.$$

13. Вычислить с относительной погрешностью 5%

$$\int\limits_1^{10} x^x\,dx.$$

14. Вычислить с относительной погрешностью не более 10%

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x^4 + 4x + 4)^{-100} dx.$$

15. Вычислить с относительной погрешностью 10%

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos(100(x^4 - x))\,dx.$$

16. Какую долю от объема пятимерного куба составляет объем вписанного в него шара? А от десятимерного?

17. Найти расстояние от центра тяжести однородного 100-мерного полушара радиуса 1 до центра шара с относительной погрешностью 10%.

18. Вычислить

$$\int \ldots \int e^{-\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} x_i x_j} dx_1 \ldots dx_n.$$

19. Исследовать ход лучей в плоской среде с показателем преломления $n(y) = y^4 - y^2 + 1$, пользуясь законом Спеллиуса $n(y) \sin \alpha = \text{const}$, где α — угол луча с осью y.

20. Найти производную решения уравнения $\ddot{x} = x + A\dot{x}^2$ с начальным условием $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$, по параметру A при $A = 0$.

21. Найти производную решения уравнения $\ddot{x} = \dot{x}^2 + x^3$ с начальным условием $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = A$ по A при $A = 0$.

22. Исследовать границу области устойчивости ($\max \operatorname{Re} \lambda_j < 0$) в пространстве коэффициентов уравнения $\dddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$.

23. Решить квазиоднородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = x + \frac{x^3}{y}.$$

24. Решить квазиоднородное уравнение

$$\ddot{x} = x^5 + x^2\dot{x}.$$

25. Может ли асимптотически устойчивое положение равновесия сделаться неустойчивым по Ляпунову при линеаризации?

26. Исследовать поведение при $t \to +\infty$ решений систем

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 2\sin y - y - x, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 2x - x^3 - x^2 - \varepsilon y, \end{cases}$$

где $\varepsilon \ll 1$.

27. Нарисовать образы решений уравнения

$$\ddot{x} = F(x) - k\dot{x}, \quad F = -dU/dx,$$

на плоскости (x, E), где $E = \dot{x}^2/2 + U(x)$, вблизи невырожденных критических точек потенциала U.

28. Нарисовать фазовый портрет и исследовать его изменение при изменении малого комплексного параметра ε:

$$\dot{z} = \varepsilon z - (1 + i)\, z\, |z|^2 + \bar{z}^4.$$

29. Заряд движется со скоростью 1 по плоскости под действием перпендикулярного ей сильного магнитного поля $B(x, y)$. В какую сторону будет дрейфовать центр ларморовской окружности? Вычислить скорость этого дрейфа (в первом приближении). [Математически речь идет о кривых кривизны NB, где $N \to \infty$.]

30. Найти сумму индексов особых точек векторного поля $z\bar{z}^2 + z^4 + 2\bar{z}^4$, отличных от нуля.

31. Найти индекс особой точки 0 векторного поля с компонентами

$$(x^4 + y^4 + z^4, \quad x^3y - xy^3, \quad xyz^2).$$

32. Найти индекс особой точки 0 векторного поля

$$\operatorname{grad}\,(xy + yz + xz).$$

33. Найти коэффициент зацепления фазовых траекторий уравнения малых колебаний $\ddot{x} = -4x$, $\ddot{y} = -9y$ на поверхности уровня полной энергии.

34. Исследовать особые точки кривой $y = x^3$ на проективной плоскости.

35. Нарисовать геодезические на поверхности

$$(x^2 + y^2 - 2)^2 + z^2 = 1.$$

36. Нарисовать эвольвенты кубической параболы $y = x^3$ (эвольвента — это геометрическое место точек $\vec{r}(s) + (c - s)\dot{\vec{r}}(s)$, где s — длина вдоль кривой $\vec{r}(s)$, c — константа).

37. Доказать, что поверхности в евклидовом пространстве

$$((A - \lambda E)^{-1}x, x) = 1,$$

проходящие через точку x и соответствующие разным значениям λ (A — симметрический оператор без кратных собственных чисел) попарно ортогональны.

38. Вычислить интеграл от гауссовой кривизны поверхности

$$z^4 + (x^2 + y^2 - 1)(2x^2 + 3y^2 - 1) = 0.$$

39. Вычислить интеграл Гаусса

$$\oint\oint \frac{(d\vec{A}, d\vec{B}, \vec{A} - \vec{B})}{|\vec{A} - \vec{B}|^3},$$

где $\vec{A}$ пробегает кривую $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$, $z = 0$, а $\vec{B}$ — кривую $x = 2\cos^2\beta$, $y = \frac{1}{2}\sin\beta$, $z = \sin 2\beta$.

40. Перенести параллельно направленный в Ленинграде (широта 60°) на север вектор с запада на восток вдоль замкнутой параллели.

41. Найти геодезическую кривизну прямой $y = 1$ на верхней полуплоскости с метрикой Лобачевского — Пуанкаре

$$ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2.$$

42. Пересекаются ли в одной точке медианы треугольника на плоскости Лобачевского? А высоты?

43. Найти числа Бетти поверхности $x_1^2 + \ldots + x_k^2 - y_1^2 - \ldots - y_l^2 = 1$ и множества $x_1^2 + \ldots + x_k^2 \leqslant 1 + y_1^2 + \ldots + y_l^2$ в $k+l$-мерном линейном пространстве.

44. Найти числа Бетти поверхности $x^2 + y^2 = 1 + z^2$ в трехмерном проективном пространстве. То же для поверхностей $z = xy$, $z = x^2$, $z^2 = x^2 + y^2$.

45. Найти индекс самопересечения поверхности $x^4 + y^4 = 1$ в проективной плоскости CP^2.

46. Отобразить конформно внутренность единичного круга на первый квадрант.

47. Отобразить конформно внешность круга на внешность данного эллипса.

48. Отобразить конформно полуплоскость без перпендикулярного ее краю отрезка на полуплоскость.

49. Вычислить

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{\sqrt{1 + z^{10}}}.$$

50. Вычислить

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{1 + x^2}\,dx.$$

51. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\,\frac{1 - e^x}{1 + e^x}\,dx.$$

52. Вычислить первый член асимптотики при $k \to \infty$ интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}\,dx}{\sqrt{1 + x^{2n}}}.$$

53. Исследовать особые точки дифференциальной формы $dt = dx/y$ на компактной римановой поверхности $y^2/2 + U(x) = E$, где U — многочлен, а E — не критическое значение.

54. $\ddot{x} = 3x - x^3 - 1$. В которой из ям больше период колебаний (в более мелкой или в более глубокой) при равных значениях полной энергии?

55. Исследовать топологически риманову поверхность функции

$$w = \operatorname{arctg} z.$$

56. Сколько ручек имеет риманова поверхность функции

$$w = \sqrt{1+z^n}.$$

57. Найти размерность пространства решений задачи $\partial u/\partial \bar{z} = \delta(z - i)$ при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, $\operatorname{Im} u(z) = 0$ при $\operatorname{Im} z = 0$, $u \to 0$ при $z \to \infty$.

58. Найти размерность пространства решений задачи $\partial u/\partial \bar{z} = a\delta(z - i) + b\delta(z + i)$ при $|z| \leqslant 2$, $\operatorname{Im} u = 0$ при $|z| = 2$.

59. Исследовать существование и единственность решения задачи $yu_x = xu_y$, $u|_{x=1} = \cos y$ в окрестности точки $(1, y_0)$.

60. Существует ли и единственно ли решение задачи Коши

$$x(x^2+y^2)\frac{\partial u}{\partial x} + y^3\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u|_{y=0} = 1$$

в окрестности точки $(x_0, 0)$ оси x?

61. При каком наибольшем t решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \sin x, \quad u|_{t=0} = 0,$$

продолжается на интервал $[0, t)$?

62. Найти все решения уравнения $y\,\partial u/\partial x - \sin x\,\partial u/\partial y = u^2$ в окрестности точки $(0, 0)$.

63. Существует ли решение задачи Коши $y\,\partial u/\partial x + \sin x\,\partial u/\partial y = y$, $u|_{x=0} = y^4$ на всей плоскости (x, y)? Единственно ли оно?

64. Имеет ли задача Коши $u|_{y=x^2} = 1$, $(\nabla u)^2 = 1$ гладкое решение в области $y \geqslant x^2$? В области $y \leqslant x^2$?

65. Найти среднее значение функции $\ln r$ на окружности $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ (функции $1/r$ на сфере).

66. Решить задачу Дирихле

$$\begin{array}{ll} \Delta u = 0 & \text{при } x^2 + y^2 < 1; \\ u = 1 & \text{при } x^2 + y^2 = 1,\ y > 0; \\ u = -1 & \text{при } x^2 + y^2 = 1,\ y < 0 \end{array}$$

67. Какова размерность пространства непрерывных при $x^2 + y^2 \geqslant 1$ решений задачи

$$\Delta u = 0 \text{ при } x^2 + y^2 > 1, \ \partial u/\partial n = 0 \text{ при } x^2 + y^2 = 1?$$

68. Найти

$$\inf \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dx\,dy$$

по C^∞-функциям u, равным 0 в 0 и 1 при $x^2 + y^2 = 1$.

69. Доказать, что телесный угол, опирающийся на заданный замкнутый контур,— гармоническая вне контура функция вершины угла.

70. Вычислить среднее значение телесного угла, под которым виден круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$, лежащий в плоскости $z = 0$, из точек сферы $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1$.

71. Вычислить плотность заряда на проводящей границе полости $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, в которую помещен заряд $q = 1$ на расстоянии r от центра.

72. Вычислить в первом приближении по ε влияние сжатия Земли ($\varepsilon \approx 1/300$) на гравитационное поле Земли на расстоянии Луны (считая Землю однородной).

73. Найти (в первом приближении по ε) влияние несовершенства почти сферического конденсатора $R = 1 + \varepsilon f(\varphi, \theta)$ на его емкость.

74. Нарисовать график $u(x, 1)$, если $0 \leqslant x \leqslant 1$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u\big|_{t=0} = x^2, \quad u\big|_{x^2=x} = x^2.$$

75. Вследствие годовых колебаний температуры Земля в городе N промерзает на глубину 2 м. На какую глубину она промерзла бы, вследствие суточных колебаний такой же амплитуды?

76. Исследовать поведение при $t \to +\infty$ решения задачи

$$u_t + (u \sin x)_x = \varepsilon u_{xx}, \quad u\big|_{t=0} \equiv 1, \ \varepsilon \ll 1.$$

77. Найти собственные числа оператора Лапласа $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$ на сфере радиуса R в евклидовом пространстве размерности n и их кратности.

78. Решить задачу Коши

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - 2B, \ \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 6\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - 2A,$$

$$A\big|_{t=0} = \cos x, \quad B\big|_{t=0} = 0, \ \frac{\partial A}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \frac{\partial B}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0.$$

79. Сколько решений имеет краевая задача

$$u_{xx} + \lambda u = \sin x, \ \ u(0) = u(\pi) = 0?$$

80. Решить уравнение

$$\int\limits_0^1 (x+y)^2 u(x)\, dx = \lambda u\,(y) + 1.$$

81. Найти функцию Грина оператора $d^2/dx^2 - 1$ и решить уравнение

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|} u(y)\, dy = e^{-x^2}.$$

82. При каких значениях скорости c уравнение $u_t = u - u^2 + u_{xx}$ имеет решение в виде бегущей волны $u = \varphi(x - ct)$, $\varphi(-\infty) = 1$, $\varphi(\infty) = 0$, $0 \leqslant u \leqslant 1$?

83. Найти решения уравнения $u_t = u_{xxx} + uu_x$, имеющие вид бегущей волны $u = \varphi(x - ct)$, $\varphi(\pm\infty) = 0$.

84. Найти число положительных и отрицательных квадратов в нормальной форме квадратичной формы $\sum\limits_{i<j} (x_i - x_j)^2$ от n переменных. А для формы $\sum\limits_{i<j} x_i x_j$?

85. Найти длины главных осей эллипсоида

$$\sum_{i \leqslant j} x_i x_j = 1.$$

86. Через центр куба (тетраэдра, икосаэдра) провести прямую так, чтобы сумма квадратов расстояний до вершин была: а) минимальной, б) максимальной.

87. Найти производные длин полуосей эллипсоида $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = 1 + \varepsilon xy$ по ε при $\varepsilon = 0$.

88. Какие фигуры могут получиться при пересечении бесконечномерного куба $|x_k| \leqslant 1$, $k = 1, 2, \ldots$, двумерной плоскостью?

89. Вычислить сумму векторных произведений $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y]$.

90. Вычислить сумму коммутаторов матриц, $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]]$, где $[A, B] = AB - BA$.

91. Найти жорданову нормальную форму оператора $e^{d/dt}$ в пространстве квазимногочленов $\{e^{\lambda t}p(t)\}$, где степени многочленов p меньше 5; оператора ad_A, $B \mapsto [A, B]$ в пространстве $(n \times n)$-матриц B, где A — диагональная матрица.

92. Найти порядки подгрупп группы вращений куба и ее нормальные делители.

93. Разложить пространство функций, заданных в вершинах куба, на инвариантные подпространства, неприводимые относительные группы а) его симметрий, б) его вращений.

94. Разложить пятимерное вещественное линейное пространство на неприводимые инвариантные подпространства группы, порожденной циклической перестановкой базисных векторов.

95. Разложить пространство однородных многочленов пятой степени от (x, y, z) на неприводимые подпространства, инвариантные относительно группы вращений $SO(3)$.

96. Каждый из 3600 абонентов телефонной станции вызывает ее в среднем раз в час. Какова вероятность того, что в данную секунду поступит 5 или более вызовов? Оценить средний промежуток времени между такими секундами $(i, i+1)$.

97. Частица, блуждающая по целым точкам полуоси $x \geqslant 0$, с вероятностью a сдвигается на 1 вправо, с вероятностью b влево, в остальных случаях остается на месте (при $x = 0$ вместо сдвига налево точка остается на месте). Определить установившееся распределение вероятностей, а также математическое ожидание x и математическое ожидание x^2 через большое время, если вначале частица находилась в точке 0.

98. Каждый из участников игры в очко на пальцах, стоящих по кругу, выбрасывает несколько пальцев правой руки, после чего для определения победителя суммарное число выкинутых пальцев отсчитывается по кругу от водящего. При каком числе участников N вероятность выигрыша хотя бы одного из подходящих $N/10$ участников становится больше 0,9? Как ведет себя при $N \to \infty$ вероятность выигрыша водящего?

99. Один из игроков прячет монету в 10 или 20 копеек, а другой отгадывает. Отгадавший получает монету, не отгадавший платит 15 копеек. Честная ли это игра? Каковы оптимальные смешанные стратегии обоих участников?

100. Найти математическое ожидание площади проекции куба с ребром 1 на плоскость при изотропно распределенном случайном направлении проектирования.