



МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«МИРЭА – Российский технологический университет»

РТУ МИРЭА

Институт искусственного интеллекта

Кафедра высшей математики

РАБОТА ДОПУЩЕНА К ЗАЩИТЕ

Заведующий кафедрой А.В. Шатина
Подпись

«29» 05 2025 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

по направлению подготовки бакалавра 01.03.02

Код направления подготовки

Наименование

«Прикладная математика и информатика»

направления подготовки

на тему: Математическое моделирование вращательного движения
спутника в окрестности спин-орбитального резонанса 1:1.

Обучающийся

Ахмерова Анастасия Алексеевна
Подпись

Ахмерова Анастасия Алексеевна

Фамилия Имя Отчество

Шифр

21K0305

Группа

КМБО-03-21

Руководитель
работы

А.В. Шатина
Подпись

д.ф.-м.н., доцент, заведующий
кафедрой высшей математики Шатина А.В.

Ученая степень, ученое звание, должность

ФИО

Москва 2025 г.



МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«МИРЭА – Российский технологический университет»

РТУ МИРЭА

Институт искусственного интеллекта

Кафедра высшей математики

СОГЛАСОВАНО

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий
кафедрой

подпись

Шатина Альбина Викторовна

Фамилия Имя Отчество

Директор
института

подпись

Магомедов Шамиль Гасангусейнович

Фамилия Имя Отчество

«10» 02 2025 г.

«10» 02 2025 г.

ЗАДАНИЕ

на выполнение выпускной квалификационной работы бакалавра

Обучающийся: Ахмерова Анастасия Алексеевна

Шифр: 21K0305

Направление подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Группа КМБО-03-21

1. Тема выпускной квалификационной работы

Математическое моделирование вращательного движения спутника в окрестности спин-орбитального резонанса 1:1.

2. Цель и задачи выпускной квалификационной работы

Цель работы: исследование вращательного движения твердого тела относительно центра масс на эллиптической орбите вблизи спин-орбитального резонанса 1:1, изучение либрационных колебаний Луны на основе построенной модели.

Задачи работы:

1. Выполнить обзор и анализ литературы по теме ВКР.
2. Получить уравнения вращательного движения спутника на эллиптической орбите в безразмерных переменных вблизи спин-орбитального резонанса 1:1 с сохранением членов четвертого порядка малости по эксцентриситету.
3. Получить усредненную систему уравнений вращательного движения спутника, найти ее стационарные решения, провести исследование их устойчивости, построить фазовый портрет.
4. Провести численное интегрирование неусредненной системы уравнений, построить интегральные кривые; найти период либрационных колебаний в долготе для Луны на основе рассматриваемой модели, сравнить с данными наблюдений.

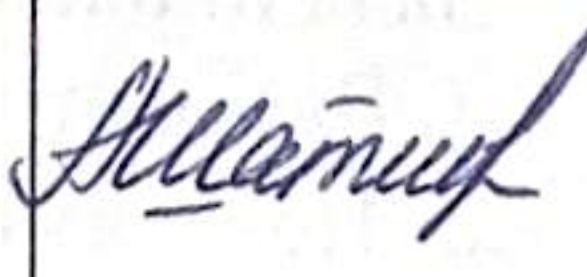
3. Этапы выполнения выпускной квалификационной работы бакалавра

№ этапа	Содержание этапа ВКР	Результат выполнения этапа ВКР	Срок выполнения
1	Работа с литературой по теме ВКР.	Результаты анализа литературных источников по теме ВКР.	26.02.2025
2	Вывод системы уравнений вращательного движения спутника на эллиптической орбите вблизи спин-орбитального резонанса 1:1 с сохранением членов четвертого порядка малости по эксцентриситету.	Система уравнений вращательного движения спутника на эллиптической орбите в безразмерных переменных вблизи спин-орбитального резонанса 1:1.	12.03.2025
3	Вывод усредненной (по средней аномалии) системы уравнений вращательного движения спутника. Построение фазового портрета в плоскости $(\psi, \dot{\psi})$ где ψ - медленная угловая переменная.	Усредненная система уравнений вращательного движения спутника, ее стационарные решения с характеристикой их устойчивости, фазовый портрет.	09.04.2025
4	Численное интегрирование возмущенной системы вращательного движения спутника, построение интегральных кривых; оценка периода либрационных колебаний в долготе для Луны на основе рассматриваемой модели.	Интегральные кривые, оценка периода либрационных колебаний в долготе для Луны.	07.05.2025
5	Подготовка презентации.	Презентация.	21.05.2025
6	Оформление работы.	Оформленный текст ВКР.	31.05.2025

4. Перечень разрабатываемых документов и графических материалов:

1. Фазовый портрет усредненной системы уравнений.
2. Графики зависимости от времени $p(\tau), \psi(\tau), \Phi(\tau)$ для различных начальных условий, где $p(\tau)$ – отношение угловой скорости собственного вращения к орбитальной угловой скорости, $\psi(\tau)$ – медленная угловая переменная, $\Phi(\tau)$ – угол между главной центральной осью инерции спутника и радиус-вектором его центра масс, интегральные кривые в плоскости $(p(\tau), \psi(\tau))$ (всего 4 графика).

5. Руководитель и консультанты выпускной квалификационной работы

Функциональные обязанности	Должность в Университете	Ф.И.О.	Подпись
Руководитель выпускной работы	Зав. кафедрой ВМ ИИИ, профессор	Шатина Альбина Викторовна	

Задание выдал

Руководитель ВКР  А.В. Шатина

« 12 » 02 2025 г.

Задание принял к исполнению

Обучающийся  А.А. Ахмерова

« 12 » 02 2025 г.

Аннотация

В работе рассматривается плоское вращательное движение спутника на эллиптической орбите вблизи спин-орбитального резонанса 1:1. Получена система уравнений вращательного движения в безразмерных переменных, учитывающая возмущения, вызванные эксцентриситетом орбиты до четвёртого порядка малости. Проведено усреднение по средней аномалии и получена упрощённая система, описывающая медленную динамику. Исследованы стационарные решения и их устойчивость, построен фазовый портрет системы. Для верификации результатов выполнено численное интегрирование полной (неусреднённой) модели, что позволило оценить параметры либрационных колебаний Луны. Полученные результаты способствуют более глубокому пониманию резонансной динамики и могут быть применимы в задачах управления ориентацией искусственных спутников и исследованиях динамики небесных тел.

Оглавление

Введение.....	5
1. Постановка задачи. Уравнения движения	6
1.1. Уравнения вращательного движения спутника вблизи спин-орбитального резонанса 1:1	11
2. Переход к безразмерным переменным для анализа вращательного движения спутника.....	11
3. Нормализация уравнений движения спутника вблизи спин-орбитального резонанса	12
4. Переход к медленной угловой переменной и усреднение уравнений движения вблизи спин-орбитального резонанса	13
5. Стационарные решения усреднённой системы и их устойчивость.....	19
6. Фазовый портрет. Период и амплитуда колебаний.....	20
7. Физическая либрация Луны в долготе	22
Результаты работы	28
Заключение	30
Список литературы	31
Приложение 1. Разложение $Gi(M, e)$ по степеням эксцентриситета e	32
Приложение 2. Фазовый портрет	35
Приложение 3. Период либрационных колебаний	37
Приложение 4. Численное интегрирование неусредненной системы	38
Приложение 5. График в плоскости (τ, ψ)	39
Приложение 6. График в плоскости (τ, p)	40
Приложение 7. График в плоскости (ψ, p)	40
Приложение 8. График в плоскости (τ, ϕ)	41

Введение

Проблема вращательного движения спутников на эллиптических орбитах, представляет собой важную задачу как для теоретической механики, так и для прикладной астродинамики. Особый интерес вызывает резонанс 1:1, при котором собственный период вращения спутника совпадает с орбитальным. Наиболее известный пример такого режима — синхронное вращение Луны.

Актуальность темы обусловлена тем, что резонансные режимы играют ключевую роль в динамике как естественных спутников, так и искусственных космических аппаратов. Исследование условий их устойчивости, а также параметров их колебаний, возникающих в окрестности резонансов, имеет важное значение для разработки навигационных систем и построения моделей ориентации тел в гравитационных полях.

В данной работе рассматривается модель абсолютно твёрдого тела, движущегося в плоскости орбиты. Основное внимание уделяется получению и анализу усреднённой системы уравнений вращательного движения, которая учитывает возмущения, вызванные эксцентриситетом орбиты до четвёртого порядка. Это позволяет выявить структуру фазового пространства и оценить устойчивость возможных резонансных режимов.

Также выполняется численное интегрирование полной системы уравнений движения. Сравнение усреднённой и точной динамики демонстрирует адекватность приближённых моделей и позволяет оценить параметры колебаний, таких как амплитуда и период либрации. На примере Луны показано, что синхронное вращение сопровождается малыми устойчивыми отклонениями, что подтверждается фазовыми траекториями и спектром колебаний.

Литературный анализ показывает, что значительное число работ, посвященных вращению тел вблизи резонансов (в частности, труды А.А. Белецкого, А.П. Маркеева, К.Д. Мюррея и С.Ф. Дермотта), ограничиваются рассмотрением круговых орбит или возмущений первого порядка. Данная работа позволяет более точно описать влияние орбитальной неравномерности и получить качественно новые сведения о структуре движения вблизи резонанса.

Исследование сочетает аналитический подход с численными методами моделирования, обеспечивая как интерпретируемость результатов, так и достаточную точность для прикладных задач.

1. Постановка задачи. Уравнения движения

Рассмотрим задачу о движении спутника в центральном гравитационном поле. Будем считать, что движение спутника относительно центра масс не влияет на орбиту, так что орбита является кеплеровской эллиптической. Это допущение справедливо по причине малости размеров спутника с размерами орбиты. Такую постановку задачи называют ограниченной.

Далее будут рассматриваться следующие системы координат:

$OXYZ$ – инерциальная (неподвижная) с началом в притягивающем центре O ;

$Sx_1x_2x_3$ – подвижная, связанная со спутником (здесь S - центр масс спутника, а оси являются главными центральными осями спутника);

$SX_1Y_1Z_1$ – поступательно движущаяся система координат, оси которой параллельны соответствующим осям системы координат $OXYZ$.

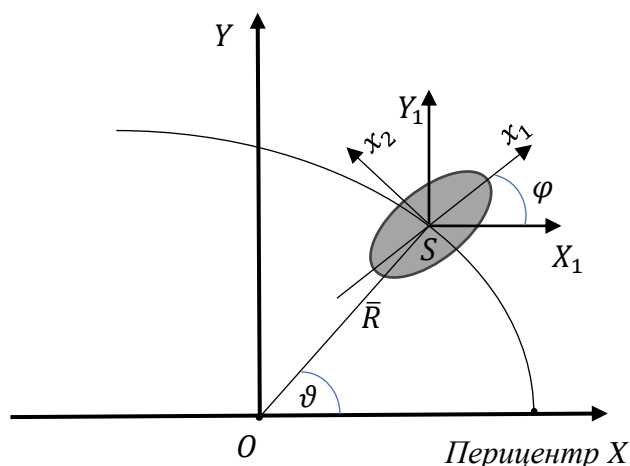


Рис. 1. Основные системы координат

В качестве модели спутника возьмем абсолютно твердое тело.

В рамках данной постановки задачи считаем, что центр масс спутника S движется по эллиптической орбите в плоскости OXY . Притягивающий центр O находится в одном из фокусов эллипса. Ось OX направлена в сторону перицентра. Положим

$$\bar{R} = \overline{OS}. \quad (1.1)$$

Тогда в инерциальной системе координат $OXYZ$

$$\bar{R} = R(\cos \vartheta ; \sin \vartheta ; 0); \quad (1.2)$$

$$R = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \vartheta}; \quad \dot{\vartheta} = \frac{(1 + e \cos \vartheta)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} \cdot n, \quad M = n(t - t_0), \quad n = \sqrt{\frac{\gamma}{a^3}}. \quad (1.3)$$

Здесь:

- a – большая полуось орбиты центра масс спутника S ;
- e – эксцентриситет орбиты;
- ϑ – истинная аномалия;
- n – орбитальная угловая скорость радиус-вектора \bar{R} ;
- M – средняя аномалия;
- γ – гравитационный параметр (произведение универсальной гравитационной постоянной и массы притягивающего центра);
- t – текущий момент времени;
- t_0 – момент прохождения через перицентр.

Обозначим через Ω область в трёхмерном евклидовом пространстве, занимаемую спутником. Радиус-вектор точки $Q \in \Omega$ представим в виде:

$$\bar{R}_Q = \bar{R} + \Gamma \bar{r}. \quad (1.4)$$

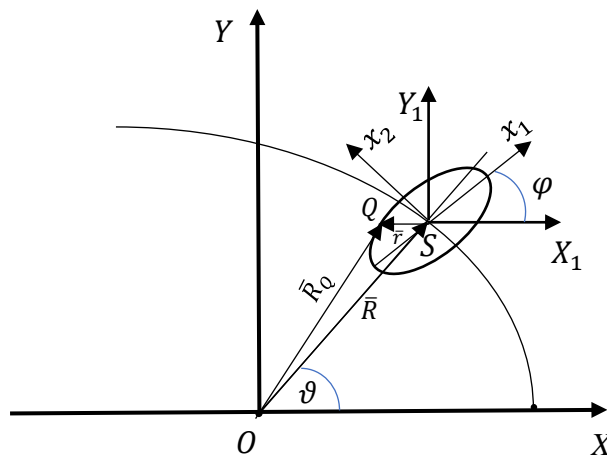


Рис. 2. Задание \bar{R}_Q, \bar{r}

Здесь Γ – ортогональная матрица перехода от подвижной системы координат $Sx_1x_2x_3$ к системе $SX_1Y_1Z_1$, $\bar{r} = \overline{SQ}$, \bar{r} задан в подвижной системе координат,

$$\bar{r} = (x_1, x_2, x_3). \quad (1.5)$$

Существует класс так называемых плоских движений спутника, когда ось Sx_3 перпендикулярна плоскости орбиты OXY во все время движения [1-3].

Далее будем рассматривать плоские движения спутника. Матрица Γ в этом случае имеет вид:

$$\Gamma = \Gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

где φ – угол между осями SX_1 и Sx_1 .

Найдем скорость точки Q :

$$\overline{V}_Q = \overline{R}_Q = \dot{\vec{R}} + \dot{\Gamma} \vec{r} = \dot{\vec{R}} + \Gamma[\vec{r} \times \vec{\omega}]. \quad (1.7)$$

Здесь $\vec{\omega}$ – угловая скорость спутника [4]:

$$\vec{\omega} \times \vec{a} = \Gamma^{-1} \dot{\Gamma} \vec{a}.$$

Для случая плоского движения

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_3, \quad (1.8)$$

где \vec{e}_3 – орт оси Sx_3 .

Интегрируя по области Ω , найдем кинетическую энергию спутника:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \overline{V}_Q^2 \rho dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\Gamma^{-1} \dot{\vec{R}} + [\vec{\omega} \times \vec{r}]]^2 \rho dx = \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{\vec{R}}, \dot{\vec{R}}) + \int_{\Omega} (\Gamma^{-1} \dot{\vec{R}} + [\vec{\omega} \times \vec{r}]) \rho dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\vec{\omega} \times \vec{r}]^2 \rho dx, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где m – масса спутника, ρ – его плотность, $dx = dx_1 dx_2 dx_3$.

Так как оси системы координат $Sx_1x_2x_3$ являются главными центральными осями инерции спутника, то

$$\int_{\Omega} x_i \rho dx = 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad \int_{\Omega} x_i x_j \rho dx = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, i \neq j, \quad (1.10)$$

$$\int_{\Omega} (x_2^2 + x_3^2) \rho dx = A, \quad \int_{\Omega} (x_1^2 + x_3^2) \rho dx = B, \quad \int_{\Omega} (x_1^2 + x_2^2) \rho dx = C. \quad (1.11)$$

Следовательно,

$$\int_{\Omega} (\Gamma^{-1} \dot{\vec{R}} + [\vec{\omega} \times \vec{r}]) \rho dx = 0; \quad (1.12)$$

$$\int_{\Omega} [\vec{\omega} \times \vec{r}]^2 \rho dx = (J \vec{\omega}, \vec{\omega}), \quad J = \text{diag}\{A, B, C\}, \quad (1.13)$$

где J – тензор инерции спутника относительно системы координат $Sx_1x_2x_3$. Из (1.13) и (1.8) получим:

$$(J \vec{\omega}, \vec{\omega}) = C \dot{\varphi}^2. \quad (1.14)$$

Из (1.2) - (1.3) следует:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{R}} &= \frac{aen \cdot \sin \vartheta}{\sqrt{1-e^2}} (\cos \vartheta; \sin \vartheta; 0) + \frac{an \cdot (1+e \cos \vartheta)}{\sqrt{1-e^2}} (-\sin \vartheta; \cos \vartheta; 0); \\ \dot{\bar{R}}^2 &= \frac{a^2 n^2 (1+e^2+2e \cos \vartheta)}{1-e^2}.\end{aligned}\quad (1.15)$$

С учётом (1.12) - (1.15) кинетическая энергия запишется в виде:

$$T = \frac{1}{2} m a^2 n^2 \frac{(1+e^2+2e \cos \vartheta)}{1-e^2} + \frac{1}{2} C \dot{\varphi}^2. \quad (1.16)$$

Найдем потенциальную энергию:

$$\begin{aligned}\Pi &= -\gamma \int_{\Omega} \frac{\rho dx}{|\bar{R}_Q|} = -\gamma \int_{\Omega} \frac{\rho dx}{\sqrt{(\bar{R} + \Gamma \bar{r})^2}} = -\gamma \int_{\Omega} \frac{\rho dx}{\sqrt{R^2 + 2(\Gamma^{-1} \bar{R}, \bar{r}) + r^2}} = \\ &= -\frac{\gamma}{R} \int_{\Omega} \frac{\rho dx}{\sqrt{1 + \frac{2(\Gamma^{-1} \bar{R}, \bar{r})}{R^2} + \frac{r^2}{R^2}}} = \\ &= -\frac{\gamma}{R} \int_{\Omega} \frac{\rho dx}{\sqrt{1 + \frac{2(\Gamma^{-1} \bar{R}, \bar{r})}{Rr} + \frac{r}{R} + \frac{r^2}{R^2}}}; \\ r &= |\bar{r}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.\end{aligned}\quad (1.17)$$

Далее положим

$$u = -\frac{(\Gamma^{-1} \bar{R}, \bar{r})}{Rr}, h = \frac{r}{R} \quad (|u| \leq 1, |h| < 1). \quad (1.18)$$

Воспользуемся формулой для производящей функции многочленов Лежандра $P_n(x)$ [5]:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2hu+h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(u) h^n, \quad |u| \leq 1, |h| < 1. \quad (1.19)$$

Тогда

$$\Pi = -\frac{\gamma}{R} \int_{\Omega} \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(u) \frac{r^n}{R^n} \right] \rho dx. \quad (1.20)$$

Учитывая, что $\frac{r}{R} \ll 1$ и ограничиваясь в (1.20) членами 2-го порядка по $\frac{r}{R}$, получим

$$\Pi = -\frac{\gamma}{R} \int_{\Omega} \{P_0(u) + P_1(u) \frac{r}{R} + P_2(u) \frac{r^2}{R^2}\} \rho dx, \quad (1.21)$$

$$P_0(u) = 1, \quad P_1(u) = u, \quad P_2(u) = \frac{1}{2}(3u^2 - 1), \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{-1} \bar{R} &= (R \cos(\vartheta - \varphi), R \sin(\vartheta - \varphi), 0), \\ (\Gamma^{-1} \bar{R}, \bar{r}) &= R(x_1 \cos(\vartheta - \varphi) + x_2 \sin(\vartheta - \varphi)),\end{aligned}$$

$$u = -\frac{1}{r} [x_1 \cos(\vartheta - \varphi) + x_2 \sin(\vartheta - \varphi)]. \quad (1.23)$$

Подставляя (1.22), (1.23) в (1.21), получим

$$\begin{aligned} \Pi = -\frac{\gamma}{R} \int_{\Omega} \left\{ 1 - \frac{x_1 \cos(\vartheta - \varphi) + x_2 \sin(\vartheta - \varphi)}{R} \right. \\ \left. + \frac{3(x_1 \cos(\vartheta - \varphi) + x_2 \sin(\vartheta - \varphi))^2}{2R^2} - \right. \\ \left. - \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{2R^2} \right\} \rho dx. \end{aligned}$$

Учитывая соотношения (1.10), (1.11), получим

$$\begin{aligned} \Pi = -\frac{\gamma}{R} \int_{\Omega} \left\{ 1 - \frac{3}{2R^2} [x_1^2 \cos^2(\vartheta - \varphi) + x_2^2 \sin^2(\vartheta - \varphi)] \right. \\ \left. - \frac{1}{2R^2} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \right\} \rho dx. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Из (1.11) следует

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} x_1^2 \rho dx = \frac{1}{2} (B + C - A), \quad \int_{\Omega} x_2^2 \rho dx = \frac{1}{2} (A + C - B), \\ \int_{\Omega} x_3^2 \rho dx = \frac{1}{2} (A + B - C). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Подставляя (1.25) в (1.24), получим:

$$\Pi = -\frac{\gamma m}{R} - \frac{3\gamma}{2R^3} (B - A) \cos^2(\varphi - \vartheta) - \frac{\gamma}{2R^3} (A + C - 2B). \quad (1.26)$$

Уравнения движения запишем в форме канонического уравнения Гамильтона. От обобщённой координаты φ и обобщённой скорости $\dot{\varphi}$ перейдём к (φ, I) , где I — обобщённый импульс:

$$I = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = C\dot{\varphi}. \quad (1.27)$$

Гамильтониан задачи [2,5]:

$$H = T + \Pi|_{\dot{\varphi} \rightarrow I} \Rightarrow H = \frac{I^2}{2C} + \frac{3\gamma}{2R^3} (A - B) \cos^2(\varphi - \vartheta) + \tilde{H}. \quad (1.28)$$

Слагаемое \tilde{H} в выражении для гамильтониана является заданной функцией времени, не зависит от φ и I и имеет вид:

$$\tilde{H} = \frac{ma^2n^2(1 + e^2 + 2e \cos \vartheta)}{2(1 - e^2)} - \frac{\gamma m}{R} - \frac{\gamma}{2R^3} (A + C - 2B). \quad (1.29)$$

Уравнения вращательного движения спутника имеют вид:

$$\begin{cases} i = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} \\ \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial I} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i = \frac{3\gamma(A-B)}{2a^3(1-e^2)^3} (1+e \cos \vartheta)^3 \sin(2\varphi - 2\vartheta) \\ \dot{\varphi} = \frac{I}{C} \end{cases}. \quad (1.30)$$

1.1. Уравнения вращательного движения спутника вблизи спин-орбитального резонанса 1:1

Получим уравнения движения спутника вблизи спин-орбитального резонанса 1:1, когда угловая скорость собственного вращения близка к среднему движению n ($\frac{\dot{\varphi}}{n} = 1$).

2. Переход к безразмерным переменным для анализа вращательного движения спутника

Проведём исследование динамики спутника с учётом плоских колебаний. Для упрощения анализа перейдём от размерной переменной I , обобщённым импульсом вращения спутника, к безразмерной переменной p . Это позволит нормализовать уравнение движения и исключить влияние размерных параметров.

Обобщённый импульс I связан с угловой скоростью вращения спутника:

$$I = J\dot{\vartheta},$$

где J – момент инерции спутника, $\dot{\vartheta}$ – угловая скорость собственного вращения спутника.

Введём безразмерную переменную p :

$$p = \frac{I}{Cn} = \frac{J\dot{\vartheta}}{Cn}. \quad (2.1)$$

Здесь:

C – масштабный параметр, зависящий от характеристик системы,

$n = \sqrt{\frac{\gamma}{a^3}}$ – орбитальная угловая скорость.

Если выбрать $C = J$, формула для p упрощается:

$$p = \frac{\dot{\vartheta}}{n}.$$

3. Нормализация уравнений движения спутника вблизи спин-орбитального резонанса

Приведём уравнение движения к нормализованному виду. Из (2.1) получаем

$$I = Cnp. \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в формулу кинетической энергии T , получаем

$$T = \frac{I^2}{2C} = \frac{(Cnp)^2}{2C} = \frac{Cn^2p^2}{2}. \quad (2.3)$$

Гамильтониан системы принимает вид:

$$H = \frac{Cn^2p^2}{2} + \frac{3\gamma}{2R^3}(A - B)\cos^2(\varphi - \vartheta) + \tilde{H}.$$

После перехода к безразмерной переменной p уравнения (1.30) преобразуются:

1. **Уравнение для угловой координаты φ :** Производная гамильтониана по I :

$$\frac{\partial H}{\partial I} = \frac{\partial}{\partial I} \left(\frac{I^2}{2C} \right) = \frac{I}{C}.$$

Подставляя (2.2), получаем

$$\dot{\varphi} = \frac{I}{C} = pn. \quad (2.4)$$

2. **Уравнение для безразмерного импульса p :** Производная гамильтониана по φ (1.30):

$$\dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = \frac{3\gamma(A - B)}{2a^3(1 - e^2)^3}(1 + e \cos \vartheta)^3 \sin(2\varphi - 2\vartheta).$$

Отсюда получаем уравнение для p :

$$\dot{p} = \frac{\dot{I}}{Cn} = \frac{3\gamma(A - B)}{2a^3Cn(1 - e^2)^3}(1 + e \cos \vartheta)^3 \sin(2\varphi - 2\vartheta). \quad (2.5')$$

Или

$$\dot{p} = \varepsilon F_1(p, \varphi, \vartheta(M)), \quad (2.5)$$

где $\varepsilon = \frac{B-A}{C}$.

Из (1.3) получаем производную средней аномалии M по времени:

$$\dot{M} = n \quad (2.6)$$

С учётом (2.4)–(2.6) система уравнений движения принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{p} = \varepsilon F_1(p, \varphi, \vartheta(M)) \\ \dot{\varphi} = pn \\ \dot{M} = n \end{cases}, \quad \varepsilon = \frac{B - A}{C} \quad (2.7)$$

Полученная система описывает динамику вращения спутника на эллиптической орбите с учётом спин-орбитального резонанса и возмущений, вызванных эллиптичностью орбиты. Нормализованный вид уравнений позволяет проводить дальнейший анализ устойчивости движения и резонансных эффектов.

4. Переход к медленной угловой переменной и усреднение уравнений движения вблизи спин-орбитального резонанса

Для анализа движения спутника на эллиптической орбите вблизи спин-орбитального резонанса 1:1 необходимо упростить уравнения движения, исключив быстро осциллирующие члены, вызванные эллиптичностью орбиты. Это достигается через:

1. Переход к медленной угловой переменной $\psi = \varphi - M$, где φ — угол поворота спутника, а M — средняя аномалия.
2. Разложение истинной аномалии ϑ по степеням эксцентриситета e до четвёртого порядка.
3. Разложение всех зависимых величин по e .
4. Усреднение уравнений движения по средней аномалии M , с сохранением членов до четвёртого порядка малости.

Цель: получить явную систему дифференцируемых уравнений для p, φ, M , сохранив все члены до e^4 .

Определим медленную угловую переменную:

$$\psi = \varphi - M, \quad (3.1)$$

где $M = n(t - t_0)$ — средняя аномалия. Средняя аномалия M растёт линейно во времени (см. (2.7)).

Тогда из (2.5') получим

$$\begin{aligned} \sin(2\varphi - 2\vartheta) &= \sin(2\psi + 2M - 2\vartheta) = \\ &= \sin 2\psi \cos(2M - 2\vartheta) + \cos 2\psi \sin(2M - 2\vartheta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{(1 + e \cos \vartheta)^3}{(1 - e^2)^3} \cos(2M - 2\vartheta) \\ &= \frac{(1 + e \cos \vartheta)^3}{(1 - e^2)^3} [\cos 2M \cos 2\vartheta - \sin 2M \sin 2\vartheta], \end{aligned}$$

$$\frac{(1 + e \cos \vartheta)^3}{(1 - e^2)^3} \sin(2M - 2\vartheta) = \frac{(1 + e \cos \vartheta)^3}{(1 - e^2)^3} [\sin 2M \cos 2\vartheta - \cos 2M \sin 2\vartheta].$$

Положим

$$\frac{(1 + e \cos \vartheta)^3}{(1 - e^2)^3} \sin(2\varphi - 2\vartheta) = [G_1 + G_2] \sin 2\psi + [G_3 - G_4] \cos 2\psi. \quad (3.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{(1 + e \cos \vartheta)^3}{(1 - e^2)^3} \cos 2M \cos 2\vartheta, \\ G_2 &= \frac{(1 + e \cos \vartheta)^3}{(1 - e^2)^3} \sin 2M \sin 2\vartheta, \\ G_3 &= \frac{(1 + e \cos \vartheta)^3}{(1 - e^2)^3} \sin 2M \cos 2\vartheta, \\ G_4 &= \frac{(1 + e \cos \vartheta)^3}{(1 - e^2)^3} \cos 2M \sin 2\vartheta. \end{aligned}$$

Выразим G_i ($i = 1, \dots, 4$) через среднюю аномалию M и эксцентриситет, используя разложение для $\cos \vartheta$ с точностью до 4-го порядка по эксцентриситету [6, стр. 59]:

$$\cos \vartheta = b_0 + b_1 e + b_2 e^2 + b_3 e^3 + b_4 e^4 + O(e^5); \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} b_0 &= \cos M, b_1 = \cos 2M - 1, b_2 = \frac{9}{8}(\cos 3M - \cos M), \\ b_3 &= \frac{4}{3}(\cos 4M - \cos 2M), b_4 = \frac{25}{192} \cos M - \frac{225}{128} \cos 3M + \frac{625}{384} \cos 5M. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для G_1 , получаем:

1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 - e^2)^3} &= (1 + (-e^2))^{-3} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)(-4) \dots (-3 - n + 1)}{n!} (-e^2)^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 4 \dots (n + 2)}{n!} e^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} e^{2n} = \\ &= 1 + 3e^2 + 6e^4 + o(e^4). \end{aligned} \quad (3.5)$$

2)

$$\begin{aligned} (1 + e \cos \vartheta)^3 &= 1 + 3e \cos \vartheta + 3e^2 \cos^2 \vartheta + e^3 \cos^3 \vartheta = \\ &= 1 + 3e(b_0 + b_1 e + b_2 e^2 + b_3 e^3) + 3e^2(b_0 + b_1 e + b_2 e^2)^2 + e^3(b_0 + b_1 e)^3 \\ &= 1 + 3eb_0 + 3b_1 e^2 + 3b_2 e^3 + 3b_3 e^4 \\ &\quad + 3e^2(b_0^2 + b_1^2 e^2 + 2b_0 b_1 e + 2b_0 b_2 e^2) + e^3(b_0^3 + 3b_0^2 b_1 e) \\ &= 1 + 3eb_0 + 3b_1 e^2 + 3b_2 e^3 + 3b_3 e^4 + 3b_0^2 e^2 + 3b_1^2 e^4 + 6b_0 b_1 e^3 \\ &\quad + 6b_0 b_2 e^4 + b_0^3 e^3 + 3b_0^2 b_1 e^4 \\ &= 1 + 3b_0 e + 3(b_1 + b_0^2) e^2 + (3b_2 + 6b_0 b_1 + b_0^3) e^3 \\ &\quad + (3b_3 + 3b_1^2 + 6b_0 b_2 + 3b_0^2 b_1) e^4. \end{aligned} \quad (3.6)$$

3)

$$\begin{aligned} \frac{(1 + e \cos \vartheta)^3}{(1 - e^2)^3} &= 1 + 3b_0e + 3(b_1 + b_0^2)e^2 + (3b_2 + 6b_0b_1 + b_0^3)e^3 + \\ &+ (3b_3 + 3b_1^2 + 6b_0b_2 + 3b_0^2b_1)e^4 + 3e^2 + 9b_0e^3 + 9(b_1 + b_0^2)e^4 + 6e^4 = \\ &= 1 + 3b_0e + 3(1 + b_1 + b_0^2)e^2 + (3b_2 + 6b_0b_1 + b_0^3 + 9b_0e^3)e^3 + \\ &+ (3b_3 + 3b_1^2 + 6b_0b_2 + 3b_0^2b_1 + 9b_1 + 9b_0^2 + 6)e^4. \end{aligned} \quad (3.7)$$

4)

$$\begin{aligned} \cos 2\vartheta &= 2\cos^2 \vartheta - 1 = 2b_0^2 - 1 + 4b_0b_1e + (2b_1^2 + 4b_0b_2)e^2 + \\ &+ (4b_0b_3 + 4b_1b_2)e^3 + (2b_2^2 + 4b_0b_4 + 4b_1b_3)e^4. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Далее вычисления проводились с помощью математического пакета системных вычислений SymPy в Python ([Приложение 1](#)):

5)

$$\frac{(1 + e \cos \vartheta)^3}{(1 - e^2)^3} \cos 2M \cos 2\vartheta = A_0 + A_1e + A_2e^2 + A_3e^3 + A_4e^4;$$

$$A_0 = \cos^2 2M = \frac{1 + \cos 4M}{2},$$

$$A_1 = \cos 2M \cos M (7 \cos 2M - 4) = \frac{1}{2}(\cos M + \cos 3M)(7 \cos 2M - 4) =$$

$$= \frac{7}{4}[\cos M + \cos 3M + \cos M + \cos 5M] - 2 \cos M - 2 \cos 3M =$$

$$= \frac{3}{2} \cos M - \frac{1}{4} \cos 3M + \frac{7}{4} \cos 5M,$$

$$A_2 = \frac{17}{4} + \frac{17}{4} \cos 2M - \frac{5}{4} \cos 4M + \frac{17}{4} \cos 6M - \frac{11}{2} =$$

$$= -\frac{5}{4} + \frac{17}{4} \cos 2M - \frac{5}{4} \cos 4M + \frac{17}{4} \cos 6M,$$

$$A_3 = -\frac{365}{96} \cos M + \frac{283}{32} \cos 3M - \frac{123}{32} \cos 5M + \frac{845}{96} \cos 7M,$$

$$A_4 = \frac{41}{96} - \frac{115}{12} \cos 2M + \frac{205}{12} \cos 4M - \frac{115}{12} \cos 6M + \frac{533}{32} \cos 8M,$$

Итак, из 1)-5) следует, что

$$G_1 = a_{10} + a_{11}e + a_{12}e^2 + a_{13}e^3 + a_{14}e^4, \quad (3.9)$$

где

$$a_{10} = A_0 = \frac{1}{2}(1 + \cos 4M);$$

$$a_{11} = \frac{1}{4}(6 \cos M - \cos 3M + 7 \cos 5M);$$

$$a_{12} = \frac{1}{4}(-5 + 17 \cos 2M - 5 \cos 4M + 17 \cos 6M);$$

$$a_{13} = \frac{1}{96}(-365 \cos M + 849 \cos 3M - 369 \cos 5M + 845 \cos 7M);$$

$$a_{14} = \frac{41}{96} - \frac{115}{12} \cos 2M + \frac{205}{12} \cos 4M - \frac{115}{12} \cos 6M + \frac{533}{32} \cos 8M.$$

Для G_2 , получаем:

Используем разложение для $\sin \vartheta$ с точностью до 4-го порядка по эксцентриситету [6, стр. 59]:

$$\begin{aligned} \sin \vartheta = \sin M + e \sin 2M + e^2 \left(\frac{9}{8} \sin 3M - \frac{7}{8} \sin M \right) + e^3 \left(\frac{4}{3} \sin 4M - \frac{7}{6} \sin 2M \right) \\ + e^4 \left(\frac{17}{192} \sin 2M - \frac{207}{128} \sin 3M + \frac{625}{384} \sin 5M \right) + O(e^5). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sin 2\vartheta = 2 \sin \vartheta \cos \vartheta = \\ = \sin 2M + e(4 \sin M - 8 \sin^3 M) + e^2 \left(\frac{13}{4} \sin 4M - 4 \sin 2M \right) \\ + e^3 \left(27 \sin^3 M - \frac{223}{12} \sin M + \frac{59}{12} \sin 5M \right) \\ + e^4 \left(\frac{163}{48} \sin 2M - \frac{259}{24} \sin 4M + \frac{115}{16} \sin 6M \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Из (3.6), (3.10) следует, что

$$G_2 = a_{20} + a_{21}e + a_{22}e^2 + a_{23}e^3 + a_{24}e^4, \quad (3.12)$$

где

$$\begin{aligned} a_{20} &= \sin^2 2M = \frac{1}{2}(1 - \cos 4M); \\ a_{21} &= \frac{1}{4}[\cos 3M - 7 \cos 5M + 6 \cos M]; \\ a_{22} &= 10 \sin^2 M (\sin^2 M - 1) - \frac{17}{2} \sin^2 M + \frac{17}{2} \sin^2 3M; \\ a_{23} &= \frac{281}{32} \cos 3M + \frac{123}{32} \cos 5M - \frac{845}{96} \cos 7M - \frac{367}{96} \cos M; \\ a_{24} &= \frac{781}{6} \sin^2 M (\sin^2 M - 1) + \frac{115}{6} (\sin^2 M - \sin^2 3M) + \frac{533}{16} \sin^2 4M. \end{aligned}$$

Для G_3 , получаем:

$$G_3 = a_{30} + a_{31}e + a_{32}e^2 + a_{33}e^3 + a_{34}e^4, \quad (3.13)$$

где

$$\begin{aligned} a_{30} &= \frac{1}{2} \sin 4M; \\ a_{31} &= \sin^3 M - \frac{11}{4} \sin M + \frac{7}{4} \sin 5M; \\ a_{32} &= \frac{17}{4} \sin 6M - \frac{5}{4} \sin 4M - \frac{17}{4} \sin 2M; \end{aligned}$$

$$a_{33} = \frac{841}{24} \sin^3 M - \frac{1045}{48} \sin M - \frac{123}{32} \sin 5M + \frac{845}{96} \sin 7M;$$

$$a_{34} = \frac{115}{12} \sin 2M - \frac{779}{48} \sin 4M - \frac{115}{12} \sin 6M + \frac{533}{32} \sin 8M.$$

Для G_4 , получаем:

$$G_4 = a_{40} + a_{41}e + a_{42}e^2 + a_{43}e^3 + a_{44}e^4, \quad (3.14)$$

где

$$a_{40} = \frac{1}{2} \sin 4M;$$

$$a_{41} = \sin^3 M + \frac{5}{4} \sin M + \frac{7}{4} \sin 5M;$$

$$a_{42} = \frac{17}{4} \sin 2M - \frac{5}{4} \sin 4M + \frac{17}{4} \sin 6M;$$

$$a_{43} = -\frac{847}{24} \sin^3 M + \frac{1085}{48} \sin M - \frac{123}{32} \sin 5M + \frac{845}{96} \sin 7M;$$

$$a_{44} = -\frac{115}{12} \sin 2M + \frac{409}{24} \sin 4M - \frac{115}{12} \sin 6M + \frac{533}{32} \sin 8M.$$

Подставляя полученные G_i ($i = 1, \dots, 4$) в (3.2), получаем

$$\frac{(1 + e \cos \vartheta)^3}{(1 - e^2)^3} \sin(2\varphi - 2\vartheta) = B_0 + B_1e + B_2e^2 + B_3e^3 + B_4e^4, \quad (3.15)$$

где

$$B_0 = \sin 2\psi;$$

$$B_1 = 3 \sin 2\psi \cos M - 4 \cos 2\psi \sin M =$$

$$= -\frac{1}{2} \sin(M + 2\psi) + \frac{7}{2} \sin(2\psi - M);$$

$$B_2 = \sin 2\psi (17 \cos^2 M - 11) - \frac{17}{2} \sin(2\psi - 2M);$$

$$B_3 = \frac{1}{2} \sin 2\psi \cos M (141 \cos^2 M - 121)$$

$$+ \frac{1}{3} \cos 2\psi \sin M (211 \sin^2 M - 135);$$

$$B_4 = \cos 2\psi \left(\frac{115}{6} \sin 2M - \frac{1597}{48} \sin 4M \right)$$

$$+ \sin 2\psi \left(\frac{1601}{6} \sin^4 M - \frac{457}{2} \sin^2 M + 15 \right);$$

Итак,

$$\dot{p} = \frac{3\gamma\varepsilon}{2a^3n} (B_0 + B_1e + B_2e^2 + B_3e^3 + B_4e^4) + O(e^5), \quad \varepsilon = \frac{B - A}{C}. \quad (3.16)$$

Рассмотрим производную ψ по времени:

$$\dot{\psi} = \dot{\phi} - \dot{M}.$$

Используя $\dot{\phi}$ из (2.7), получаем

$$\dot{\psi} = n(p - 1). \quad (3.17)$$

Таким образом,

$$\begin{cases} \dot{p} = \frac{3\gamma(A - B)}{2a^3 C n} \{ [G_1 + G_2] \sin 2\psi + [G_3 - G_4] \cos 2\psi \} \\ \dot{\phi} = (p - 1)n \\ \dot{M} = n \\ G_i = G_i(M, e) \end{cases}, \quad (3.18)$$

Проведём усреднение по средней аномалии M :

1)

$$\begin{aligned} \langle a_{10} \rangle_M &= \frac{1}{2}, & \langle a_{11} \rangle_M &= 0, & \langle a_{12} \rangle_M &= -\frac{5}{4}, \\ \langle a_{13} \rangle_M &= 0, & \langle a_{14} \rangle_M &= \frac{41}{96}; \end{aligned}$$

$$\langle a_{20} \rangle_M = \frac{1}{2}, \quad \langle a_{21} \rangle_M = 0,$$

$$\begin{aligned} \langle a_{22} \rangle_M &= \langle 10 \sin^4 M - \frac{37}{2} \sin^2 M + \frac{17}{2} \sin^2 3M \rangle_M \\ &= 10 \cdot \frac{3}{8} - \frac{27}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{17}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{15 - 37 + 17}{4} = -\frac{5}{4}, & \langle a_{23} \rangle_M &= 0, \\ \langle a_{24} \rangle_M &= \frac{781}{6} \cdot \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \right) + \frac{115}{6} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{533}{16} \cdot \frac{1}{2} = \\ &= \frac{781 \cdot (3 - 4)}{6 \cdot 8} + 0 + \frac{533}{32} = -\frac{781}{48} + \frac{533}{32} = \frac{533 \cdot 3 - 781 \cdot 2}{96} \\ &= \frac{1599 - 1562}{96} = \frac{37}{96}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\langle \cdot \rangle_M = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cdot dM,$$

$$\langle \sin^2 M \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 M dM = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2M \right) dM = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \frac{1}{2}.$$

Получаем,

$$\langle G_1 + G_2 \rangle = 1 - \frac{5}{2} e^2 + \frac{78}{96} e^4 = 1 - \frac{5}{2} e^2 + \frac{13}{16} e^4.$$

2)

$$\langle a_{3j} \rangle = 0, \quad \langle a_{4j} \rangle = 0, \quad j = 0, \dots, 4 \Rightarrow \langle G_3 - G_4 \rangle = 0.$$

Таким образом, усредненная система уравнений:

$$\begin{cases} \dot{p} = \frac{3\gamma(A-B)}{2a^3 Cn} \left(1 - \frac{5}{2}e^2 + \frac{13}{16}e^4\right) \sin 2\psi \\ \dot{\psi} = (p-1)n \\ \dot{M} = n \end{cases}. \quad (3.19)$$

Разложение истинной аномалии по степеням эксцентриситета [6, пункт 2.5]:

$$\begin{aligned} \vartheta = M + 2e \sin M + \frac{5}{4}e^2 \sin 2M + e^3 \left(\frac{13}{12} \sin 3M - \frac{1}{4} \sin M \right) \\ + e^4 \left(\frac{103}{96} \sin 4M - \frac{11}{24} \sin 2M \right) + O(e^5). \end{aligned} \quad (3.20)$$

5. Стационарные решения усреднённой системы и их устойчивость

Найдём стационарные решения для (3.19), состоящей из первых двух уравнений усреднённой системы.

Стационарные точки – это такие (p, ψ) , при которых $\dot{p} = 0, \dot{\psi} = 0$. Получим

$$\dot{\psi} = (p-1)n = 0 \Rightarrow p = 1,$$

$$\dot{p} = \alpha \sin 2\psi = 0 \Rightarrow \sin 2\psi = 0 \Rightarrow \psi = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Здесь } \alpha = \frac{3\gamma(A-B)}{2a^3 Cn} \left(1 - \frac{5}{2}e^2 + \frac{13}{16}e^4\right).$$

Итак, стационарные точки:

$$(p_0, \psi_0) = \left(1, \frac{k\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}. \quad (4.1)$$

Исследуем поведение системы в окрестности стационарных точек с помощью линеаризации – найдём якобиан системы:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} & \frac{\partial \dot{p}}{\partial \psi} \\ \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial p} & \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2\alpha \cos 2\psi_0 \\ n & 0 \end{bmatrix}.$$

Чтобы определить характер движения вблизи стационарной точки, найдём собственные значения λ из характеристического уравнения:

$$\begin{aligned} \det(J - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2\alpha \cos 2\psi_0 \\ n & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\alpha n \cos 2\psi_0 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \pm \sqrt{2\alpha n \cos 2\psi_0}. \end{aligned}$$

Знак и тип собственных значений λ определяют характер устойчивости стационарной точки.

Рассмотрим возможные случаи:

1. При $\alpha > 0$:

- Если $\psi_0 = 0, \pi, 2\pi, \dots \Rightarrow \cos 2\psi_0 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2\alpha n} \in \mathbb{R}$.
Получаем два вещественных корня с разными знаками \Rightarrow **седло**
 \Rightarrow **неустойчивая точка**.
- Если $\psi_0 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots \Rightarrow \cos 2\psi_0 = -1 \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{2\alpha n} \in i\mathbb{R}$.
Чисто мнимые корни \Rightarrow **центр** \Rightarrow **нейтрально устойчивая точка (колебания)**.

2. При $\alpha < 0$:

Знак выражения под корнем в формуле для λ зависит не только от α , но и от $\cos 2\psi_0$:

- Если $\psi_0 = 0, \pi, 2\pi, \dots \Rightarrow \cos 2\psi_0 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2\alpha n} \in \mathbb{C}$, но $\alpha < 0 \Rightarrow \lambda \in i\mathbb{R}$. Чисто мнимые корни \Rightarrow **центр** \Rightarrow **нейтрально устойчивая точка (колебания)**.
- Если $\psi_0 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots \Rightarrow \cos 2\psi_0 = -1, \alpha < 0 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$. Получаем два вещественных корня с разными знаками \Rightarrow **седло** \Rightarrow **неустойчивая точка**.

6. Фазовый портрет. Период и амплитуда колебаний

Из первых двух уравнений системы (3.19) следует:

$$\ddot{\psi} = \dot{p}n = \frac{3\gamma(A-B)}{2a^3C} \left(1 - \frac{5}{2}e^2 + \frac{13}{16}e^4\right) \sin 2\psi, \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\psi}\dot{\psi} &= \frac{3\gamma(A-B)}{2a^3C} \left(1 - \frac{5}{2}e^2 + \frac{13}{16}e^4\right) \sin 2\psi \cdot \dot{\psi}, \\ \frac{1}{2}\dot{\psi}^2 &= \frac{3}{2} \frac{\gamma(A-B)}{a^3C} \left(1 - \frac{5}{2}e^2 + \frac{13}{16}e^4\right) \sin^2 \psi + \tilde{h}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где \tilde{h} — постоянная, полученная в результате интегрирования по времени.

Положим

$$k = \frac{3(A-B)}{C} \left(1 - \frac{5}{2}e^2 + \frac{13}{16}e^4\right), \quad h = 2\tilde{h}. \quad (5.3)$$

Тогда с учетом (1.3) уравнение (5.2) примет вид:

$$\dot{\psi}^2 = h + kn^2 \sin^2 \psi. \quad (5.4)$$

Если заданы начальные условия $\psi(0) = \psi_0$, $\dot{\psi}(0) = \psi_1$, то

$$h = \psi_1^2 - kn^2 \sin^2 \psi_0. \quad (5.5)$$

Уравнение (5.4) позволяет построить фазовый портрет в плоскости $(\psi; \dot{\psi})$. Следует рассмотреть случаи:

- 1) $h > kn^2$,
- 2) $h = kn^2$,
- 3) $h < kn^2$.

Возьмем $\psi \in [-2\pi; 2\pi]$.

В случае 1 угол ψ монотонно увеличивается или уменьшается. Во втором случае получим кривую, разделяющую фазовую плоскость на области колебательного и вращательного режимов движения спутника. В третьем случае вращение спутника имеет колебательный характер.

Так как $\dot{\psi}^2 \geq 0$, то

$$|\sin \psi| \leq \sqrt{\frac{h}{kn^2}} \quad (5.6)$$

Из (5.6) следует, что $|\psi| \leq \psi^*$, $\psi^* = \arcsin \sqrt{\frac{h}{kn^2}}$.

Период колебаний T равен:

$$T = 4 \int_0^{\psi^*} \frac{d\psi}{\sqrt{h - kn^2 \sin^2 \psi}} \quad (5.7)$$

С помощью замены переменной $\sin \beta = \sqrt{\frac{kn^2}{h}} \cos \psi$ интеграл в правой части (3.7) сводится к полному эллиптическому интегралу 1-го рода:

$$\begin{aligned} \cos \beta d\beta &= \sqrt{\frac{kn^2}{h}} \cos \psi d\psi, \\ d\psi &= \frac{\cos \beta d\beta}{\sqrt{\frac{kn^2}{h}} \cos \psi} = \frac{\cos \beta d\beta}{\sqrt{\frac{kn^2}{h}} \sqrt{1 - \frac{h}{kn^2} \sin^2 \beta}}, \\ h - kn^2 \sin^2 \psi &= h - kn^2 \frac{h}{kn^2} \sin^2 \beta = h \cos^2 \beta. \end{aligned}$$

$$T = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \beta d\beta}{\sqrt{\frac{kn^2}{h}} \sqrt{1 - \frac{h}{kn^2} \sin^2 \beta} \sqrt{h} \cos \beta},$$

$$T = \frac{4}{\sqrt{kn^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \frac{h}{kn^2} \sin^2 \beta}}, \quad (5.8)$$

$$T = \frac{4}{\sqrt{kn^2}} K \left(\sqrt{\frac{h}{kn^2}} \right). \quad (5.9)$$

Ниже представлен фазовый портрет системы, построенный на основании уравнения (5.4), для различных значений постоянной h . Видно наличие центров (замкнутые орбиты колебаний) и седел (разделяющие траектории). Замкнутые траектории соответствуют колебаниям, незамкнутые – вращению. Фазовый портрет построен с помощью Python ([Приложение 2](#)).

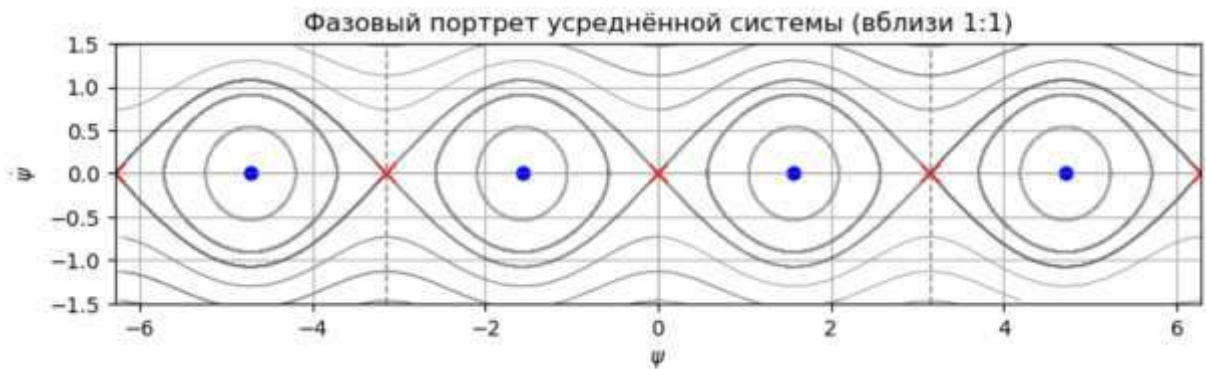


Рис. 3. Фазовый портрет вращательного движения спутника вблизи резонанса 1:1

7. Физическая либрация Луны в долготе

Рассмотрим упрощенную модель вращательного движения небесного тела с параметрами Луны

$$e = 0,0549,$$

$$a = 384400 \text{ км.},$$

$$T_0 = 27,321661 \text{ сут.}, \quad \left(n = \frac{2\pi}{T_0} \right)$$

$$\frac{A - B}{C} = -2,27871 \cdot 10^{-4}$$

В системе уравнений вращательного движения (3.18) перейдем к безразмерному времени $\tau = nt$. Тогда получим следующую систему уравнений вращательного движения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp}{d\tau} = \frac{3(A-B)}{2C} \{ [G_1 + G_2] \sin 2\psi + [G_3 - G_4] \cos 2\psi \} \\ \frac{d\psi}{d\tau} = p - 1 \\ \frac{dM}{d\tau} = 1 \end{array} \right. , \quad (6.1)$$

С учетом того, что либрация Луны по долготе имеет амплитуду около $7^\circ 54'$ найдём период либрационных колебаний по формуле (5.9).

Дано

$$\psi^* = 7^\circ 54' = 7 + \frac{54}{60} = 7.9^\circ = \frac{7.9 \cdot \pi}{180} \approx 0.13788 \text{ рад},$$

$$n = \frac{2\pi}{T_0} \approx 0.22997,$$

Упрощенная модель (5.3) даёт, с учетом $\frac{A-B}{C} = -2,27871 \cdot 10^{-4}$, $e = 0,0549$:

$$k = 3 \cdot |-2,27871 \cdot 10^{-4}| \cdot \left(1 - \frac{5}{2} (0,0549)^2 + \frac{13}{16} (0,0549)^4 \right) \approx 6,8 \cdot 10^{-4}.$$

Вычислим h и m . Подставим:

$$h = kn^2 \cdot \sin^2(0.13788) \approx kn^2 \cdot 0.01889.$$

Тогда подкоренное выражение:

$$\sqrt{\frac{h}{kn^2}} = \sqrt{\sin^2 \psi^*} = \sin \psi^* \approx 0.13744.$$

Полный эллиптически интеграл первого рода найдём с помощью метода *ellipk(<m^2>)* в Python (принимает аргумент в квадрате) из библиотеки *scipy.special* ([Приложение 3](#))

$$K\left(\sqrt{\frac{h}{kn^2}}\right) = K(\sin \psi^*) \approx K(0.13744) \approx 1.578295.$$

Подставляя в основную формулу (5.9), получаем

$$T = T = \frac{4}{\sqrt{kn^2}} K(\sin \psi^*) = \frac{2T_0}{\pi\sqrt{k}} K(\sin \psi^*) = \frac{2 \cdot 27,321661}{\pi\sqrt{6,8 \cdot 10^{-4}}} \cdot 1.57829 \\ \approx 1057.952 -$$

— период колебаний в сутках, либо $t = \frac{T}{365.25} \approx 2.897$ — период колебаний в годах.

Таким образом, найденный период показывает, что в заданных параметрах система допускает длительные квазипериодические движения, которые характерны для устойчивых центральных точек в фазовом пространстве.

Проинтегрируем систему (6.1). Для этого упростим $(G_1 + G_2)$ и $(G_3 - G_4)$:

$$\begin{aligned}
 G_1 + G_2 &= (a_{14} + a_{24})e^4 + (a_{13} + a_{23})e^3 + (a_{12} + a_{22})e^2 + (a_{11} + a_{21})e \\
 &\quad + a_{10} + a_{20} = \\
 &= \left(\frac{13}{16} - \frac{115}{6} \cos 2M + \frac{1601}{48} \cos 4M \right) e^4 \\
 &\quad + \left(\frac{141}{8} \cos 3M - \frac{61}{8} \cos M \right) e^3 + \left(8.5 \cos 2M - \frac{5}{2} \right) e^2 + 3e \cos M \\
 &\quad + 1, \\
 G_3 - G_4 &= (a_{34} - a_{44})e^4 + (a_{33} - a_{43})e^3 + (a_{32} - a_{42})e^2 + (a_{31} - a_{41})e \\
 &\quad + a_{30} - a_{40} = \\
 &= \left(\frac{115}{6} \sin 2M + \frac{1597}{48} \sin 4M \right) e^4 \\
 &\quad + \left(-\frac{211}{12} \sin 3M + 8.375 \sin M \right) e^3 - 8.5e^2 \sin 2M - 4e \sin M.
 \end{aligned}$$

Начальные условия возьмем:

$$p(0) = 1 \pm 0,01,$$

$$\psi(0) = 1^\circ; 2^\circ; 3^\circ; 4^\circ; 5^\circ; 6^\circ; 7^\circ \left(1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \text{ рад} \right),$$

$$M(0) = 0,$$

$$\tau \in [0, 200].$$

Для интегрирования системы воспользуемся методом Рунге-Кутты 4-5 порядка с помощью функции `scipy.integrate.solve_ivp()` в Python. (см. [Приложение 4](#))

На основании численного интегрирования неусредненной системы были построены графики в четырех плоскостях

$$(\tau, \psi), (\tau, p), (\psi, p), (\tau, \phi),$$

где

$$\begin{aligned}
 \phi &= \varphi - \vartheta = \psi + M - \vartheta; \\
 \vartheta &= M + 2e \sin M + \frac{5}{4}e^2 \sin 2M + e^3 \left(\frac{13}{12} \sin 3M - \frac{1}{4} \sin M \right) \\
 &\quad + e^4 \left(\frac{103}{96} \sin 4M - \frac{11}{24} \sin 2M \right) + o(e^4).
 \end{aligned}$$

Получаем

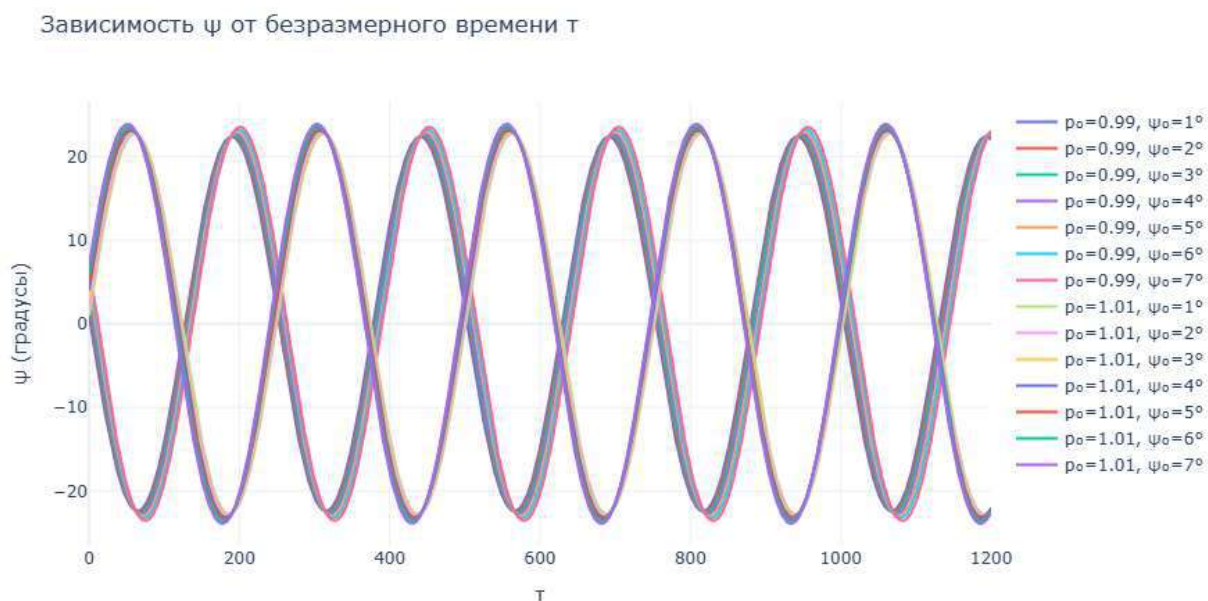


Рис. 4. График в плоскости (τ, ψ)

Данный график демонстрирует зависимость угла ψ от безразмерного времени τ . Кривая имеет квазипериодический характер с малой амплитудой колебаний вокруг фиксированного значения. Это указывает на близость к синхронному вращению спутника, где $\psi \approx 0$. Незначительные колебания связаны с орбитальной эксцентриситетной модуляцией и гравитационными моментами.

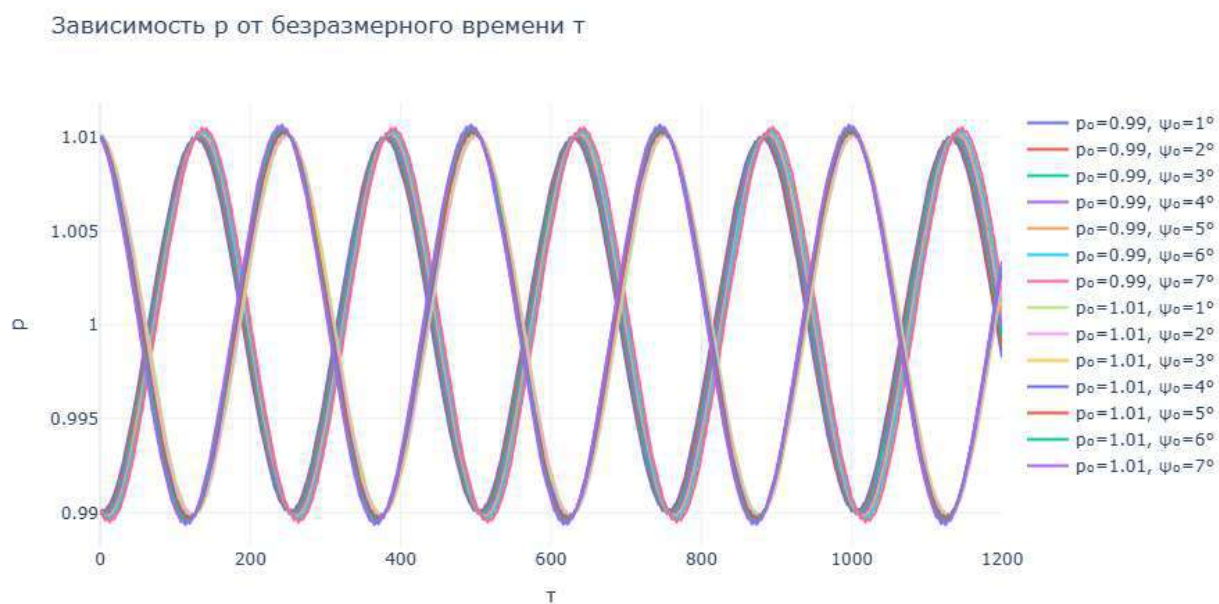


Рис. 5. График в плоскости (τ, p)

Импульс p показывает аналогичную квазипериодичность. Его поведение синфазно с колебаниями ψ , что свидетельствует о сохранении полной энергии системы и устойчивости вращения. При этом видна характерная модуляция импульса с частотой, соответствующей орбитальному движению.

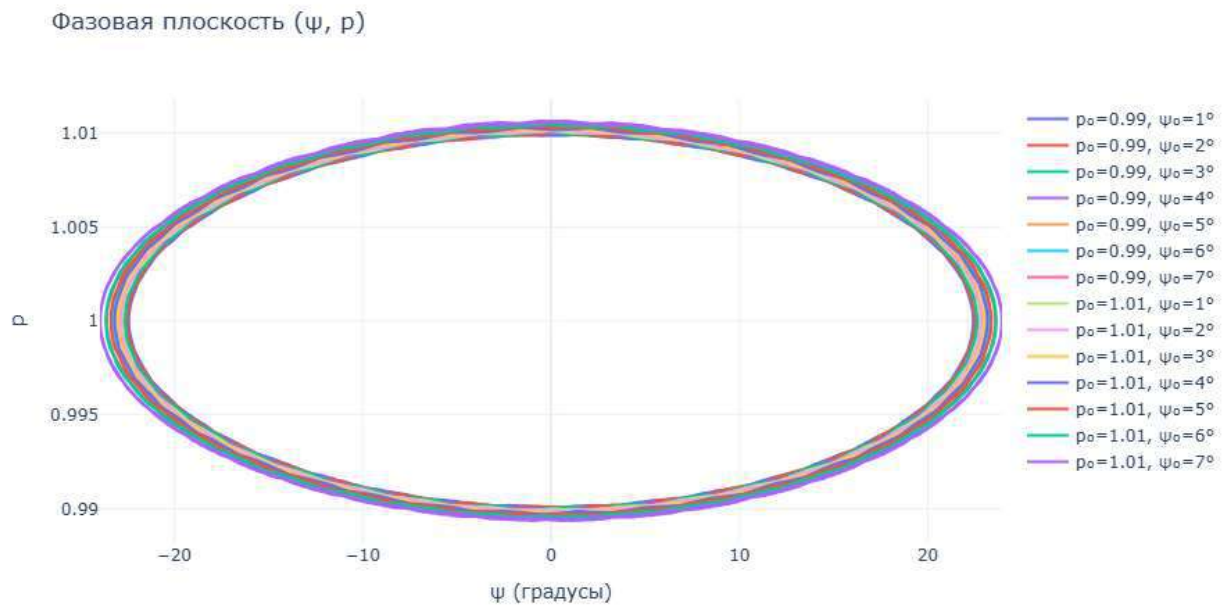


Рис. 6. График в плоскости (ψ, p)

Фазовый портрет в этой проекции представляет собой замкнутую петлю, характерную для колебательного режима около устойчивого резонансного положения. Это подтверждает, что вращение Луны находится в резонансе 1:1 (синхронное вращение). Отсутствие спиральной структуры указывает на отсутствие диссипативных эффектов.

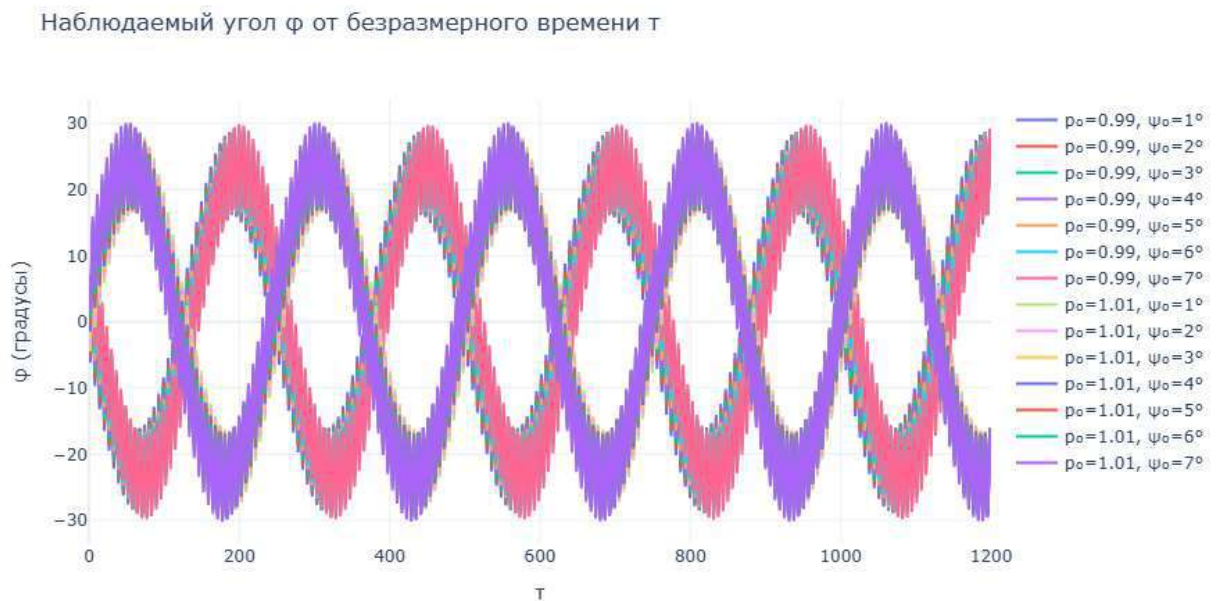


Рис. 7. График в плоскости (τ, ϕ)

Угол ϕ характеризует отклонение вращения от идеального синхронного резонанса, компенсированного орбитальной модуляцией. График показывает ограниченные квазипериодические колебания ϕ , что указывает на устойчивость движения около резонанса.

При $p_0 = 0.99$ и $p_0 = 1.01$ наблюдаются несимметричные колебания, проявляющиеся как слабая дрейфующая модуляция на фоне основной осцилляции. Это свидетельствует о наличии слабых несинхронных эффектов и чувствительности к начальному углу ψ_0 .

Из графика видно, что значение ϕ колеблется примерно в пределах:

$$\phi = [-16^\circ, +16^\circ].$$

Таким образом, амплитуда колебаний изменения наблюдаемого угла ϕ составляет порядка 16° . Это подтверждает наличие устойчивого квазипериодического движения с достаточно широким диапазоном фазовых колебаний.

Результаты работы

В ходе выполнения работы были решены задачи, направленные на исследование вращательного движения Луны вблизи спин-орбитального резонанса 1:1.

Была выведена нормализованная система уравнений движения спутника вблизи спин-орбитального резонанса:

$$\begin{cases} \dot{p} = \varepsilon F_1(p, \varphi, \vartheta(M)) \\ \dot{\varphi} = pn \\ \dot{M} = n \end{cases}, \quad \varepsilon = \frac{B-A}{C}.$$

Мы выполнили:

1. Переход к медленной угловой переменной $\psi = \varphi - M$.
2. Разложение истинной аномалии ϑ по e до 4-го порядка.
3. Усреднение уравнений по средней аномалии M , сохранив члены до e^4 .

Также была получена усреднённая система уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = n(p-1), \\ \dot{p} = \frac{3\gamma(A-B)}{2a^3 C n} \left(1 - \frac{5}{2}e^2 + \frac{13}{16}e^4\right) \sin 2\psi, \\ \dot{M} = n. \end{cases}$$

Работа включала аналитическое и численное исследование как усредненной (3.18), так и полной (неусредненной) системы уравнений (6.1).

1. Анализ усредненной системы и устойчивости стационарных решений

Найденные стационарные точки системы:

$$(p_0, \psi_0) = \left(1, \frac{k\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}.$$

Для исследования устойчивости была проведена линеаризация, найден якобиан системы

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 2\alpha \cos 2\psi_0 \\ n & 0 \end{bmatrix},$$

и соответствующее характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\alpha n \cos 2\psi_0 = 0.$$

Характер устойчивости стационарных точек определялся знаком $\cos 2\psi_0$ и α :

3. При $\alpha > 0$:

- Если $\psi_0 = 0, \pi, 2\pi, \dots \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2\alpha n} \in \mathbb{R} \Rightarrow$ **седло** \Rightarrow **неустойчивая точка**.
- Если $\psi_0 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{2\alpha n} \in i\mathbb{R} \Rightarrow$ **центр** \Rightarrow **нейтрально устойчивая точка (колебания)**.

4. При $\alpha < 0$:

- Если $\psi_0 = 0, \pi, 2\pi, \dots \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2\alpha n} \in i\mathbb{R} \Rightarrow$ **центр** \Rightarrow **нейтрально устойчивая точка (колебания)**.
- Если $\psi_0 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$ **седло** \Rightarrow **неустойчивая точка**.

Был построен фазовый портрет усредненной системы в плоскости $(\psi; \dot{\psi})$, демонстрирующий как замкнутые траектории (вблизи центров), так и разделяющие их сепаратрисы от седловых точек ([Рисунок 3](#)).

2. Численное интегрирование неусредненной системы

Произведено численное интегрирование полной (неусреднённой) системы вращательного движения для упрощенной модели Луны (6.1). Система интегрировалась на интервале $\tau \in [0, 1200]$ при начальных условиях, близких к синхронному резонансу. Построены графики в плоскостях (τ, ψ) , (τ, p) , (ψ, p) , (τ, ϕ) . Произведена оценка амплитуды изменения угла ϕ .

Заключение

В работе проведено исследование модели вращательного движения Луны в окрестности спин-орбитального резонанса 1:1. Основные результаты:

1. Получена система уравнений вращательного движения спутника на эллиптической орбите в безразмерных переменных вблизи спин-орбитального резонанса 1:1.
2. Получена усредненная система уравнений вращательного движения спутника, ее стационарные решения с характеристикой их устойчивости, фазовый портрет.
3. Построены интегральные кривые.
4. Найден и оценен период либрационных колебаний в долготе для Луны.

Таким образом, работа успешно решает поставленные задачи и подтверждает, что синхронное вращение Луны — устойчивое резонансное состояние, сопровождающееся малыми колебаниями.

Список литературы

- 1) Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: МГУ, 1975, 308 с.
- 2) Болотин С.В., Карапетян А.В., Кугушев Е.И., Трещев Д.В. Теоретическая механика. — М.—Издательский центр «Академия», 2010. — 432 с.
- 3) Маркеев А..П. О вращениях почти симметричного спутника на эллиптической орбите при резонансе меркурианского типа // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. Вып. 5. С. 707-720.
- 4) Вильке В.Г. Механика систем материальных точек и твердых тел. М.: Физматлит, 2013. — 268 с.
- 5) Аксенов Е.П. Специальные функции в небесной механике. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 320 с.
- 6) Мюррей К., Дермотт С. Динамика Солнечной системы. М.: Физматлит, 2010. — 588 с.

Приложение 1. Разложение $G_i(M, e)$ по степеням эксцентриситета e

```
import sympy as sp

# sin(2θ)

# Определение символов
e, M = sp.symbols('e M')

# Определение коэффициентов b0, b1, b2, b3, b4
b0 = sp.cos(M)
b1 = sp.cos(2*M) - 1
b2 = sp.Rational(9, 8) * (sp.cos(3*M) - sp.cos(M))
b3 = sp.Rational(4, 3) * (sp.cos(4*M) - sp.cos(2*M))
b4 = sp.Rational(25, 192) * sp.cos(M) - sp.Rational(225, 128) *
sp.cos(3*M) + sp.Rational(625, 384) * sp.cos(5*M)

# Разложение cos(θ)
cos_theta = b0 + b1*e + b2*e**2 + b3*e**3 + b4*e**4

# Разложение sin(θ)
sin_theta = (sp.sin(M) + e*sp.sin(2*M) +
             e**2 * (sp.Rational(9, 8)*sp.sin(3*M) - sp.Rational(7,
8)*sp.sin(M)) +
             e**3 * (sp.Rational(4, 3)*sp.sin(4*M) - sp.Rational(7,
6)*sp.sin(2*M)) +
             e**4 * (sp.Rational(17, 192)*sp.sin(2*M) -
sp.Rational(207, 128)*sp.sin(3*M) + sp.Rational(625,
384)*sp.sin(5*M)))

# Выражение для sin(2θ)
sin_2theta = 2 * sin_theta * cos_theta

# Разложение sin(2θ) по e до e^4 включительно
sin_2theta_series = sp.series(sin_2theta, e, n=5).remove0()

# Упрощение выражения
sin_2theta = sp.simplify(sin_2theta_series)

# Вывод результата
sp.pprint(sin_2theta, use_unicode=True)
```

```

# cos(2θ)

# Символы
e, M = sp.symbols('e M')

# Явные рациональные коэффициенты
b0 = sp.cos(M)
b1 = sp.cos(2*M) - 1
b2 = sp.Rational(9, 8)*(sp.cos(3*M) - sp.cos(M))
b3 = sp.Rational(4, 3)*(sp.cos(4*M) - sp.cos(2*M))
b4 = sp.Rational(25, 192)*sp.cos(M) - sp.Rational(225,
128)*sp.cos(3*M) + sp.Rational(625, 384)*sp.cos(5*M)

# Разложение cos(2θ)
expr = (
    2*b0**2 +
    4*b0*b1*e +
    2*b0**2*e**2*(2*b2/b0 + b1**2/b0**2) +
    2*b0**2*e**3*(2*b3/b0 + 2*b1*b2/b0**2) +
    2*b0**2*e**4*(2*b4/b0 + 2*b1*b3/b0**2 + b2**2/b0**2) -
    1
)

# Упрощение выражения
simplified_expr = sp.simplify(expr.expand()).series(e, n=5).removeO()
#simplified_expr_1 = sp.simplify(full_expr.expand()).series(e,
n=5).removeO()

# Красивый вывод
print("Разложение cos(2θ) в виде рациональных дробей:")
sp.pprint(simplified_expr, use_unicode=True)

```

```

#G1

# Числитель (1 + e * cos(θ))^3
cos_theta = b0 + b1 * e + b2 * e**2 + b3 * e**3 + b4 * e**4
numerator = (1 + e * cos_theta)**3
numerator = numerator.series(e, n=5).removeO()

# Знаменатель (1 - e^2)^(-3)
denominator = (1 - e**2)**(-3)
denominator = denominator.series(e, n=5).removeO()

# Разложение cos(2θ) = 2 * cos^2(θ) - 1
cos_2theta = 2 * cos_theta**2 - 1

```

```

cos_2theta = cos_2theta.series(e, n=5).remove0()

# Разложение cos(2M) (для этого примера считаем cos(2M) напрямую)
cos_2M = sp.cos(2*M)

# Общее выражение (числитель / знаменатель)
full_expr = sp.expand(numerator * denominator).series(e,
n=5).remove0()

# Умножение всех выражений
final_expr_G1 = sp.expand(full_expr * cos_2M * cos_2theta).series(e,
n=5).remove0()

```

```

#G2

# Числитель (1 + e * cos(θ))^3
cos_theta = b0 + b1 * e + b2 * e**2 + b3 * e**3 + b4 * e**4
numerator = (1 + e * cos_theta)**3
numerator = numerator.series(e, n=5).remove0()

# Знаменатель (1 - e^2)^(-3)
denominator = (1 - e**2)**(-3)
denominator = denominator.series(e, n=5).remove0()

# Разложение sin(2M) (для этого примера считаем sin(2M) напрямую)
sin_2M = sp.sin(2*M)

# Общее выражение (числитель / знаменатель)
full_expr = sp.expand(numerator * denominator).series(e,
n=5).remove0()

# Умножение всех выражений
final_expr_G2 = sp.expand(full_expr * sin_2M * sin_2theta).series(e,
n=5).remove0()

```

```

#G3

# Числитель (1 + e * cos(θ))^3
cos_theta = b0 + b1 * e + b2 * e**2 + b3 * e**3 + b4 * e**4
numerator = (1 + e * cos_theta)**3
numerator = numerator.series(e, n=5).remove0()

# Знаменатель (1 - e^2)^(-3)
denominator = (1 - e**2)**(-3)
denominator = denominator.series(e, n=5).remove0()

```



```

# Разложение  $\cos(2\theta) = 2 * \cos^2(\theta) - 1$ 
cos_2theta = 2 * cos_theta**2 - 1
cos_2theta = cos_2theta.series(e, n=5).remove0()

# Разложение  $\sin(2M)$  (для этого примера считаем  $\sin(2M)$  напрямую)
sin_2M = sp.sin(2*M)

# Общее выражение (числитель / знаменатель)
full_expr = sp.expand(numerator * denominator).series(e,
n=5).remove0()

# Умножение всех выражений
final_expr_G3 = sp.expand(full_expr * sin_2M * cos_2theta).series(e,
n=5).remove0()

```

```

#G4

# Числитель  $(1 + e * \cos(\theta))^3$ 
cos_theta = b0 + b1 * e + b2 * e**2 + b3 * e**3 + b4 * e**4
numerator = (1 + e * cos_theta)**3
numerator = numerator.series(e, n=5).remove0()

# Знаменатель  $(1 - e^2)^{-3}$ 
denominator = (1 - e**2)**(-3)
denominator = denominator.series(e, n=5).remove0()

# Разложение  $\cos(2M)$  (для этого примера считаем  $\cos(2M)$  напрямую)
cos_2M = sp.cos(2*M)

# Общее выражение (числитель / знаменатель)
full_expr = sp.expand(numerator * denominator).series(e,
n=5).remove0()

# Умножение всех выражений
final_expr_G4 = sp.expand(full_expr * cos_2M * sin_2theta).series(e,
n=5).remove0()

```

Приложение 2. Фазовый портрет

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp

# === ПАРАМЕТРЫ СИСТЕМЫ ===

```

```

A, B, C = 1.0, 0.8, 0.5
e = 0.1
n = 1.0
gamma = 1.0
a = 1.0

# === КОЭФФИЦИЕНТЫ ===
alpha = (3 * gamma * (A - B)) / (2 * a**3 * C * n) * (1 - 2.5 * e**2
+ (13/16) * e**4)
k = 3 * (A - B) / C * (1 - 2.5 * e**2 + (13/16) * e**4)

# === ПРАВАЯ ЧАСТЬ СИСТЕМЫ ===
def system(t, Y):
    psi, v = Y
    dpsi = v
    dv = (k * n**2 / 2) * np.sin(2 * psi)
    return [dpsi, dv]

# === ОТРИСОВКА ТРАЕКТОРИИ ===
def plot_trajectory(y0, color='gray', alpha=0.7, lw=0.8, label=None):
    sol = solve_ivp(system, [-200, 200], y0, t_eval=np.linspace(-200,
200, 2000), rtol=1e-9)
    psi, v = sol.y
    mask = (psi >= -2*np.pi) & (psi <= 2*np.pi)
    plt.plot(psi[mask], v[mask], color=color, linewidth=lw,
alpha=alpha, label=label)

# === СЕТКА НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ===
psi0_vals = np.linspace(-2*np.pi, 2*np.pi, 7)
v0_vals = np.linspace(-2.2, 2.2, 7)

plt.figure(figsize=(8, 6))

# === ОБЩАЯ ФАЗОВАЯ СТРУКТУРА ===
for psi0 in psi0_vals:
    for v0 in v0_vals:
        plot_trajectory([psi0, v0])

# === СЕПАРАТРИСЫ ИЗ ВСЕХ СЕДЕЛ ===
eps = 1e-3
saddle_points = [-2*np.pi, -np.pi, 0, np.pi, 2*np.pi]
for psi_s in saddle_points:
    for sign in [+1, -1]:
        y0 = [psi_s, sign * eps]

```

```

        plot_trajectory(y0, color='black', alpha=0.2, lw=0.8,
                        label='Сепаратриса' if psi_s == 0 and sign ==
1 else None)

# === СТАЦИОНАРНЫЕ ТОЧКИ: СЕДЛА и ЦЕНТРЫ ===
psi_fixed = np.arange(-2*np.pi, 2*np.pi + np.pi/2, np.pi/2)
for psi0 in psi_fixed:
    cos2psi = np.cos(2 * psi0)
    lambda_sq = 2 * alpha * n * cos2psi
    if lambda_sq > 0:
        plt.plot(psi0, 0, 'rx', markersize=9, label='Седло' if psi0 ==
psi_fixed[0] else "")
    elif lambda_sq < 0:
        plt.plot(psi0, 0, 'bo', markersize=6, label='Центр' if psi0 ==
psi_fixed[1] else "")

# === ОФОРМЛЕНИЕ ===
plt.axhline(0, color='gray', lw=0.4)
plt.axvline(0, color='gray', lw=0.4)
plt.axvline(np.pi, color='gray', lw=1, ls='dashed')
plt.axvline(-np.pi, color='gray', lw=1, ls='dashed')
plt.axvline(2*np.pi, color='gray', lw=0.5, ls='dotted')
plt.axvline(-2*np.pi, color='gray', lw=0.5, ls='dotted')

plt.xlim(-2*np.pi, 2*np.pi)
plt.ylim(-1.5, 1.5)
plt.xlabel(r"$\psi$")
plt.ylabel(r"$\dot{\psi}$")
plt.title("Фазовый портрет усреднённой системы (вблизи 1:1)")
plt.grid(True)
#plt.legend()
plt.gca().set_aspect('equal')
plt.tight_layout()
plt.show()

```

Приложение 3. Период либрационных колебаний

```

import numpy as np
from scipy.special import ellipk

# Параметры системы
e0 = 0.0549                # эксцентриситет орбиты
alpha = 2.27871e-4         # (B - A)/C
T0 = 27.321661             # период обращения Луны в сутках

```



```

# 1. Угол psi* в радианах (7°54')
psi_star_deg = 7 + 54/60 # 7 градусов и 54 минуты
psi_star_rad = np.radians(psi_star_deg)
print(f"Угол ψ* в радианах: {psi_star_rad:.6f}")

# 2. Вычисление коэффициента k
k = -3 * alpha * (1 - 5 * e0**2 + (13 * e0**4)/16)
print(f"k = {k:.6f}")

# 3. Вычисление параметра a = sin²(ψ*)
a = np.sin(psi_star_rad)**2
print(f"a = {a:.6f}")

# 4. Вычисление эллиптического интеграла первого рода K(a)
K = ellipk(a)
print(f"Эллиптический интеграл K(a) = {K:.6f}")

# 5. Вычисление T1 (обратите внимание на множитель 4 в формуле для периода)
T1 = (2 * T0) / (np.pi * np.sqrt(-k)) * K # Здесь -k, так как k отрицательный
print(f"T1 = {T1:.3f} (период колебаний в сутках)")

# 6. Перевод периода в годы
T1_years = T1 / 365.25
print(f"T1 = {T1_years:.3f} (период колебаний в годах)")

```

Приложение 4. Численное интегрирование неусредненной системы

```

# Параметры Луны
e = 0.0549
T0 = 27.321661
n = 2 * np.pi / T0
alpha = -2.27871e-4
Aconst = 1.5 * alpha

def F1(M):
    return ((13/16 - 115/6*np.cos(2*M) + 1601/48*np.cos(4*M))*e**4 +
            (-61/8*np.cos(M) + 141/8*np.cos(3*M))*e**3 +
            (-2.5 + 8.5*np.cos(2*M))*e**2 +
            3*e*np.cos(M) + 1)

```

```

def F2(M):
    return ((115/6*np.sin(2*M) - 1597/48*np.sin(4*M))*e**4 +
            (8.375*np.sin(M) - 211/12*np.sin(3*M))*e**3 -
            8.5*e**2*np.sin(2*M) - 4*e*np.sin(M))

def theta(M):
    m = np.mod(M, 2*np.pi)
    return (m + 2*e*np.sin(m) + (5/4)*e**2*np.sin(2*m) +
            e**3*((13/12)*np.sin(3*m) - (1/4)*np.sin(m)) +
            e**4*((103/96)*np.sin(4*m) - (11/24)*np.sin(2*m)))

def normalize_angle_deg(x):
    return (x + 180) % 360 - 180

def ode_system(tau, y):
    p, psi, M = y
    dp_dt = Aconst * (F1(M) * np.sin(2 * psi) + F2(M) * np.cos(2 *
psi))
    dps_i_dt = p - 1
    dM_dt = 1
    return [dp_dt, dps_i_dt, dM_dt]

# Начальные условия
p0_vals = [0.99, 1.01]
psi0_vals = np.radians(np.arange(1, 8))
initial_conditions = [(p0, psi0, 0) for p0 in p0_vals for psi0 in
psi0_vals]
tau_span = (0, 1200)
tau_eval = np.linspace(*tau_span, 4000)

solutions = []
labels = []

for p0, psi0, M0 in initial_conditions:
    sol = solve_ivp(
        ode_system, tau_span, [p0, psi0, M0],
        t_eval=tau_eval, rtol=1e-9, atol=1e-9
    )
    solutions.append(sol)
    labels.append(f"p0={p0}, ψ0={np.degrees(psi0):.0f}°")

```

Приложение 5. График в плоскости (τ,ψ)

```

(* Построение графика (\[Tau], \[Psi]) *)
Plot[

```

```

Evaluate[Table[
    psi[tau]/Degree /. sol[[1]],
    {sol, solutions}
]],
{tau, 0, 200},
PlotLegends -> Table[
    StringForm["p0=`", \[Psi]0=``°", ic[[1]], ic[[2]]/Degree],
    {ic, initialConditions}
],
PlotLabel ->
"Зависимость угла \[Psi] от безразмерного времени \[Tau]",
AxesLabel -> {"\[Tau]", "\[Psi] (градусы)"},
GridLines -> Automatic,
ImageSize -> 600,
PlotRange -> All
]

```

Приложение 6. График в плоскости (τ, ρ)

```

fig1 = go.Figure()
for sol, label in zip(solutions, labels):
    psi_deg = normalize_angle_deg(np.degrees(sol.y[1]))
    fig1.add_trace(go.Scatter(x=sol.t, y=psi_deg, mode='lines',
name=label))

fig1.update_layout(
    title="Зависимость  $\psi$  от безразмерного времени  $\tau$ ",
    xaxis_title=" $\tau$ ", yaxis_title=" $\psi$  (градусы)",
    height=500, width=900, template="plotly_white"
)
fig1.show()

```

Приложение 7. График в плоскости (ψ, ρ)

```

fig3 = go.Figure()
for sol, label in zip(solutions, labels):
    psi_deg = normalize_angle_deg(np.degrees(sol.y[1]))
    fig3.add_trace(go.Scatter(x=psi_deg, y=sol.y[0], mode='lines',
name=label))

fig3.update_layout(
    title="Фазовая плоскость ( $\psi, \rho$ )",
    xaxis_title=" $\psi$  (градусы)", yaxis_title=" $\rho$ ",
    height=500, width=900, template="plotly_white"
)

```



```
)  
fig3.show()
```

Приложение 8. График в плоскости (τ, ϕ)

```
fig4 = go.Figure()  
for p0, psi0, M0 in initial_conditions:  
    sol = solve_ivp(  
        ode_system, tau_span, [p0, psi0, M0],  
        t_eval=tau_eval, rtol=1e-9, atol=1e-9  
    )  
    p, psi, M = sol.y  
    phi = normalize_angle_deg(np.degrees(psi + M - theta(M)))  
    label = f"p0={p0},  $\psi_0$ ={np.degrees(psi0):.0f}°"  
    fig4.add_trace(go.Scatter(x=sol.t, y=phi, mode='lines',  
name=label))  
fig4.update_layout(  
    title="Наблюдаемый угол  $\phi$  от безразмерного времени  $\tau$ ",  
    xaxis_title=" $\tau$ ", yaxis_title=" $\phi$  (градусы)",  
    height=500, width=900, template="plotly_white"  
)  
fig4.show()
```

Отзыв на выпускную квалификационную работу
Ахмеровой Анастасии Алексеевны
«Математическое моделирование вращательного движения спутника в
окрестности спин-орбитального резонанса 1:1»

Работа Ахмеровой А.А. посвящена исследованию плоского вращательного движения спутника в центральном ньютоновском поле сил на эллиптической орбите в окрестности резонанса 1:1, когда угловая скорость собственного вращения совпадает с орбитальной. Спутник моделируется абсолютно твердым телом. Рассматривается ограниченная постановка задачи, когда центр масс спутника движется по заданной кеплеровской эллиптической орбите. В Солнечной системе указанное резонансное движение осуществляется Луной относительно Земли, спутниками Юпитера, Сатурна, Марса и других планет. Полученные в работе теоретические результаты применяются для исследования либрационных колебаний Луны в долготе на основе построенной модели.

Выпускная квалификационная работа Ахмеровой А.А. состоит из введения, основной части, заключения, списка используемой литературы и приложения. Она содержит 41 страницу текста, 7 рисунков.

Во введении раскрывается актуальность темы исследования, излагаются цели исследования.

В основной части работы выведены уравнения плоских вращательных движений спутника на эллиптической орбите и на их основе уравнения вращательного движения спутника в безразмерных переменных вблизи резонанса 1:1 с сохранением членов четвертого порядка малости по эксцентриситету; получена усредненная система уравнений вращательного движения; проведен анализ эволюционной системы уравнений вращательного движения спутника в окрестности спин-орбитального резонанса 1:1 (найден стационарные решения, исследована их устойчивость, построен фазовый портрет, получены оценки амплитуды и периода либрационных колебаний); проведено численное интегрирование уравнений вращательного движения спутника вблизи спин-орбитального резонанса 1:1, построены интегральные кривые; полученные результаты применены для исследования либрационных колебаний Луны в долготу.

В заключении сформулированы основные результаты выпускной квалификационной работы. В приложение включены программный код программ, полученных с помощью библиотек Mathematica и Python.

Работа выполнена на высоком уровне, хорошо оформлена. При выполнении выпускной квалификационной работы Ахмерова А.А. проявила себя вдумчивым исследователем, продемонстрировала высокую работоспособность, ответственное отношение к делу и прекрасное владение материалом.

Результаты ВКР докладывались на X научно-технической конференции студентов и аспирантов РТУ МИРЭА.

Считаю, что выпускная квалификационная работа «Математическое моделирование вращательного движения спутника в окрестности спин-орбитального резонанса 1:1» удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к выпускным работам бакалавра, а Ахмерова А.А. заслуживает присвоения квалификации «Бакалавр» с оценкой «отлично».

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., доцент, профессор
кафедры высшей математики
Института искусственного интеллекта
РТУ МИРЭА



(Шатина А.В.)