Московский государственный университет

имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Отчет по заданию № 6

"Сборка многомодульных программ.

Вычисление корней уравнений и определенных интегралов."

Вариант 7/3/2

Выполнила:

студентка 101 группы

Коваленко А.П.

Преподаватель:

Батузов К.А.

Москва

2019

Оглавление

Постановка задачи

В программе требуется реализовать численный метод, позволяющий вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками трех функций, уравнения которых заданы. Программа должна состоять из двух модулей.

Первый модуль представляет собой ассемблерный код, в котором представлено решение задачи о нахождении значения указанных функций и их производных в заданной точке.

Второй модуль должен быть написан на языке C и содержать вычисление площади плоской фигуры(криволинейного треугольника) с использованием двух вспомогательных функций: функции поиска точки пересечения двух кривых методом касательных и функции подсчета определенного интеграла по формуле трапеций. Нахождение корня уравнения и подсчет интеграла ведутся на заданном отрезке при заданной точности, причем параметры вводятся вручную и выводятся аналитически.

Необходимо осуществить сборку модулей в одну программу, вызываемую из командной строки и позволяющую тестировать каждую из своих частей.

Задача решается для следующих функций:

- $f_1 = \ln(x)$
- $f_2 = -2x + 14$
- $f_3 = 1/(2 - x) + 6$

Математическое обоснование

Проведем анализ функций, рассматриваемых в задаче. График функции f_1 имеет вертикальную асимптоту x = 0 и пересекает ось OX в точке (1;0). На всей области определения функция монотонно возрастает. Функция f_2 - линейная, монотонно убывает на всей числовой прямой, находится ниже прямой y = 2 при значениях x>6, пересекает ось OX в точке (7;0). f_1 принимает значение 2 в точке $x = e^2 = 7.389046$, значит, график функции находится ниже прямой y = 2 при значениях x < 7.389046. Точка пересечения функций f_1 и f_2 находится в промежутке 6<= x <= 7, обе функции монотонны, других точек пересечения нет.

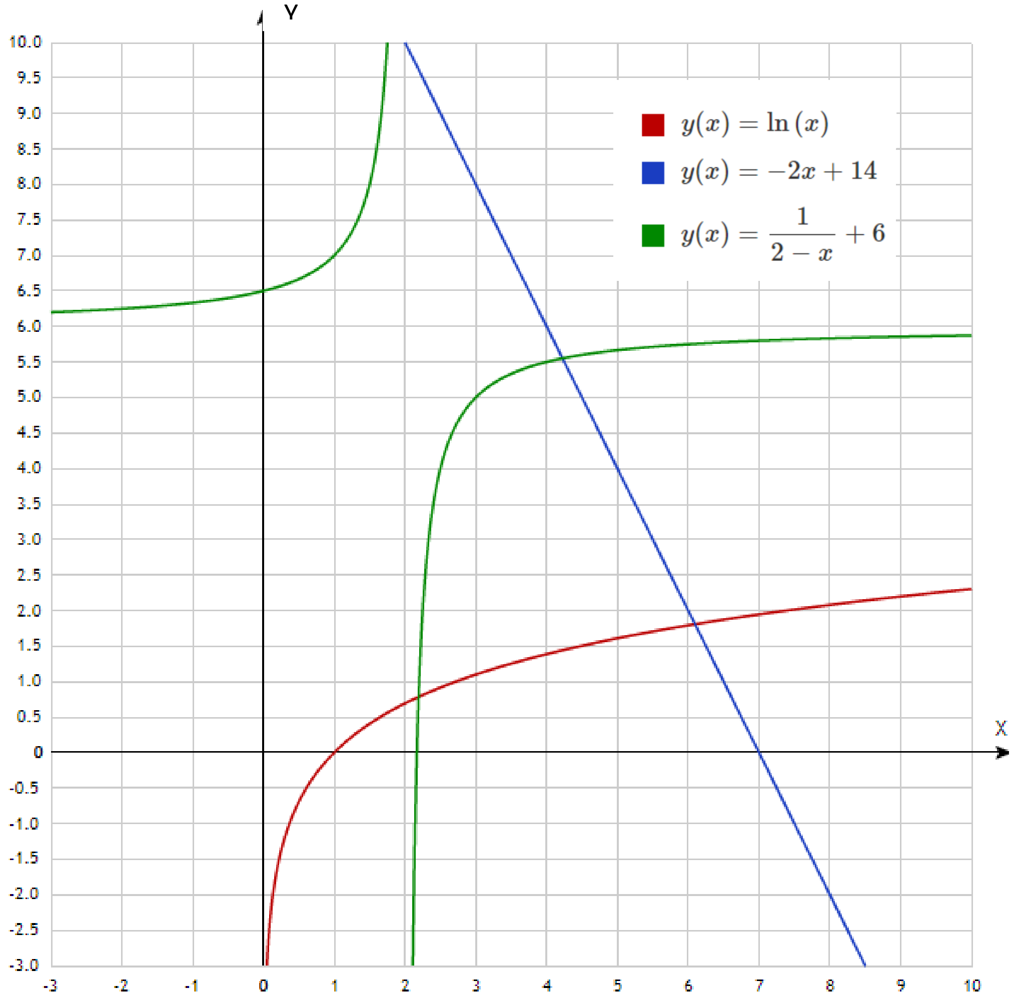

Рис.1 Поведение заданных функций и ограниченный ими криволинейный треугольник

График функции f_3 имеет вертикальную асимптоту x = 2 и горизонтальную асимптоту y = 6, монотонно возрастает при x > 2, пересекает ось OX в точке (2.166667; 0), принимает значение 2 в точке x = 2.25. Значит, точка пересечения f_1 и f_3 находится в промежутке 2.1<= x <=2.25..

Функция f_2 принимает значение 6 при x = 4, f_2 убывает, f_3 возрастает, значит, точка их пересечения находится на промежутке 4<= x <= 7, других точек пересечения у этих функций нет.

Таким образом, получаем, что все вершины криволинейного треугольника располагаются на промежутке [2.1;7],.

Для применения метода касательных поиска корней уравнения g(x) = 0 на отрезке [a;b] необходимые и достаточные условия [1]:

- ✓ функция определена и непрерывно дифференцируема на данном отрезке
- ✓ значения функции на концах данного отрезка имеют разный знак
- ✓ производная функции монотонна и сохраняет знак на данном отрезке

Рассмотрим данные в условиях задачи функции и убедимся, что они удовлетворяют этим условиям на отрезке.

1) $g_{12} = f_1(x) - f_2(x) = \ln(x) + 2x - 14$ определена и непрерывно дифференцируема на отрезке [2.1;7], ее производная $g_{12}'(x) = 1/x + 2$ положительна на рассматриваемом отрезке и убывает, так как вторая производная $g_{12}''(x) = -1/x^2$ отрицательна на отрезке. $g_{12}(2.1) = -9.0581 < 0$, $g_{12}(7) = 1.9459 > 0$.
2) $g_{13} = f_1(x) - f_3(x) = \ln(x) - 1/(2-x) - 6$ определена и непрерывно дифференцируема на отрезке [2.1; 4], ее производная $g_{13}'(x) = 1/x - 1/(2-x)^2$ отрицательна на рассматриваемом отрезке и возрастает, так как вторая производная $g_{13}''(x) = -1/x^2 - 2/(2-x)^3$ положительна на отрезке. $g_{13}(2.1) = 4.7419 > 0$, $g_{13}(4) = -4.1137 < 0$.
3) $g_{23} = f_2(x) - f_3(x) = -2x + 14 - 1/(2-x) - 6$ определена и непрерывно дифференцируема на отрезке [3; 7], ее производная $g_{23}'(x) = -2 + 1/(2-x)^2$ отрицательна на рассматриваемом отрезке и убывает, так как вторая производная $g_{23}''(x) = 2/(2-x)^3$ отрицательна. $g_{23}(3) = 3 > 0$, $g_{23}(7) = -5.8 < 0$.

Для вычисления площади ограниченной области, необходимо найти три точки пересечения методом касательных и найти 4 интеграла по формуле трапеций(надо разбить отрезок на 2 части, на каждом вычислить значения интегралов верхней и нижней функций, вычесть одно значение из другого), необходимая точность вычислений составляет 0.001.

Если для расчета точек пересечения была выбрана погрешность eps1, то так как найденная точка учитывается при расчете двух интегралов, то результирующая погрешность абсциссы составляет 2eps1. Погрешность посчитанной площади будет составлять величину площади прямоугольника, одна из сторон которого равна 2eps1, а другая - наибольшему значению функции на данном отрезке. Пусть x1 - точка пересечения f1 и f3, x2 - точка пересечения f2 и f3, x3 - точка пересечения f1 и f2. Возьмем в качестве наибольшего значения функции f3 на [x1;x2] число 6, функции f1 - число 2, в качестве наибольшего значения функции f2 на отрезке [x2;x3] - число 6, функции f1 - число 2. Если для расчета интеграла по формуле трапеций была выбрана погрешность eps2, то результирующая погрешность составляет:

(2*eps1*6 + eps2)*2 + (2*eps1*2 + eps2) <= 0.001

32*eps1 + 4*eps2 <= 0.001

Пусть eps2 = 0.000025, тогда eps1 <=0.000028. Для удобства возьмем eps1 = eps2 = 0.000025. Выбранные значения гарантируют результирующую точность вычисления 0.001.

Погрешность приближенных вычислений при нахождении корней методом касательных оценивается, как

eps1 = $|f(x_n)|/(\min|f'(x)|)$, где a<= x <=b [1]

Погрешность приближенных вычислений при нахождении интеграла по формуле трапеций оценивается как

eps2 = $(b - a)^3 * \max(f''(x)) / 12 * n^2$, где a<= x <= b, n - число отрезков разбиения [1]

Получили связь между количество итераций и eps1, eps2.

Результаты экспериментов

Кривые	X	Y
1 и 2	6.0962	1.8077
2 и 3	4.2247	5.5506
1 и 3	2.1917	0.7846

Таблица 1. Координаты точек пересечения

При точности e = 0.001 получено приблизительное значение площади заданной фигуры:

S = 11.2363

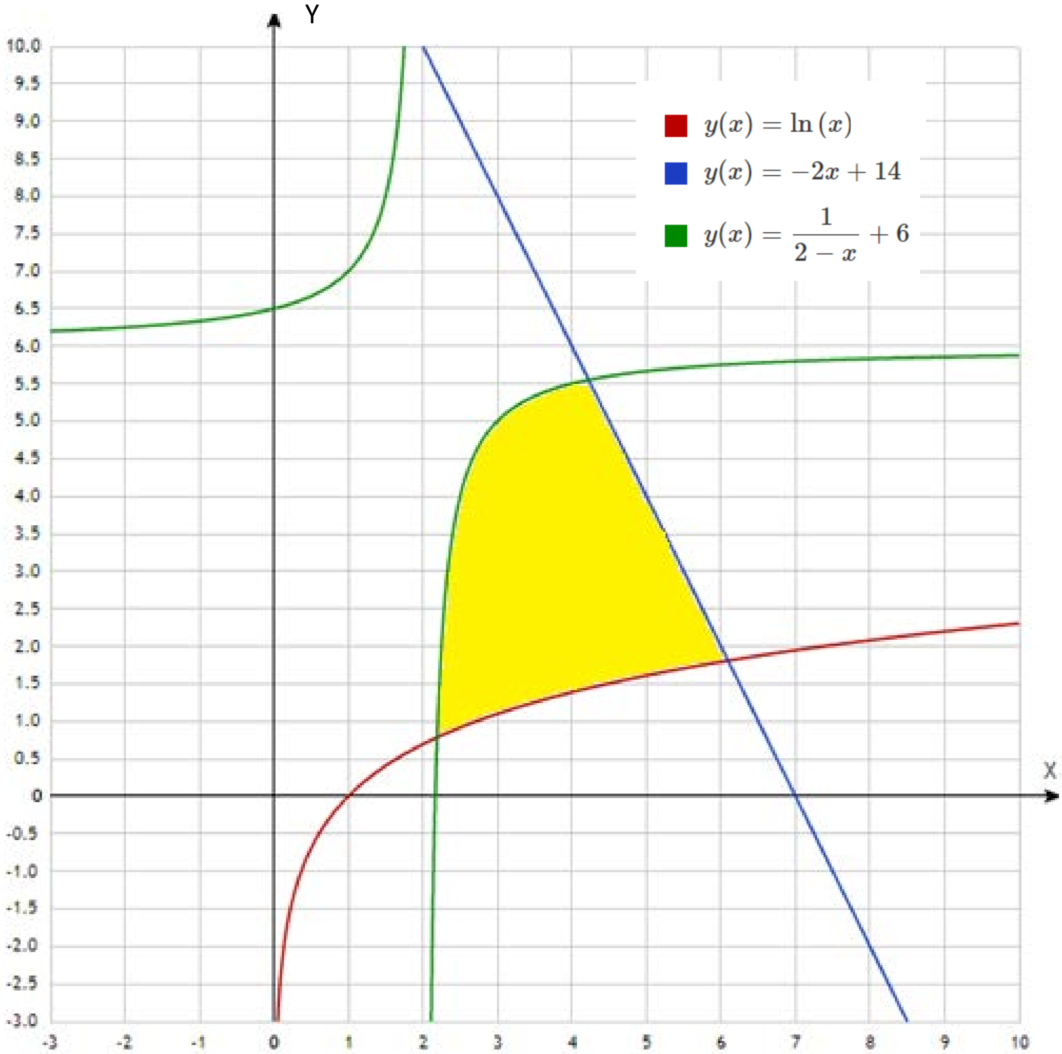

Рис.2 Плоская фигура, ограниченная графиками заданных уравнений

Структура программы и спецификация функций

Программа состоит из двух модулей: func.asm и main.c.

Функции func.asm:

1) *global f1*
   double f1(double x) - запись на языке C - вычисляет значение f_1 = ln(x) в точке x
2) *global f2*
   double f2(double x) - запись на языке C - вычисляет значение f_2 = -2x + 14 в точке x
3) *global f3*
   double f3(double x) - запись на языке C - вычисляет значение f_3 = 1/(2 - x) + 6 в точке x
4) *global f1_*
   double f1_(double x) - запись на языке C - вычисляет значение производной f_1' = 1/x в точке x
5) *global f2_*
   double f2_(double x) - запись на языке C - вычисляет значение производной f_2' = -2 в точке x
6) *global f3_*
   double f3_(double x) - запись на языке C - вычисляет значение производной f_3' = 1/(2 - x)^2 в точке x

Функции main.c:

1) *double f4(double x)* - вспомогательная функция для тестирования, вычисляет значение f_4 = 3x + 4 в точке x
2) *double f5(double x)* - вспомогательная функция для тестирования, вычисляет значение f_5 = x^2 + 7x + 8 в точке x
3) *double f6(double x)* - вспомогательная функция для тестирования, вычисляет значение f_6 = x^2 + 5x + 5 в точке x
4) *double f4_(double x)* - вспомогательная функция для тестирования, вычисляет значение производной f_4' = 3 в точке x
5) *double f5_(double x)* - вспомогательная функция для тестирования, вычисляет значение производной f_5' = 2x + 7 в точке x
6) *double f6_(double x)* - вспомогательная функция для тестирования, вычисляет значение производной f_6' = 2x + 5x в точке x
7) *double root(double f(double), double g(double), double f_(double), double g_(double), double a, double b, double eps1)* - функция, вычисляющая корень уравнения f(x) - g(x) = 0 (точка пересечения функций) на отрезке от [a;b] с точностью eps1 методом касательных
8) *double integral(double f(double), double a, double b, double eps2)* - функция для вычисления интеграла функции f(x) на отрезке [a;b] с точностью eps2 по формуле трапеций
9) *void test(void)* - функция, позволяющая тестировать функции root и integral на вспомогательных функциях f_4, f_5, f_6

10) *int main(int argc, char* argv[])* - в функции осуществляется работа с ключами командной строки и расчет площади плоской фигуры, ограниченной графиками функций f_1, f_2, f_3

Сборка программы (Make - файл)

Makefile:

```
CC=gcc
NASM=nasm
CFLAGS+=-W -Wall -g -O2 -m32
ASMFLAGS+=-g -f elf32
.PHONY: all clean

all: func

func: main.o func.o
	$(CC) $(CFLAGS) -o $@ $^

main.o: main.c
	$(CC) $(CFLAGS) -c $<

func.o: func.asm
	$(NASM) $(ASMFLAGS) $< -o $@

clean:
	rm -rf *.o
```

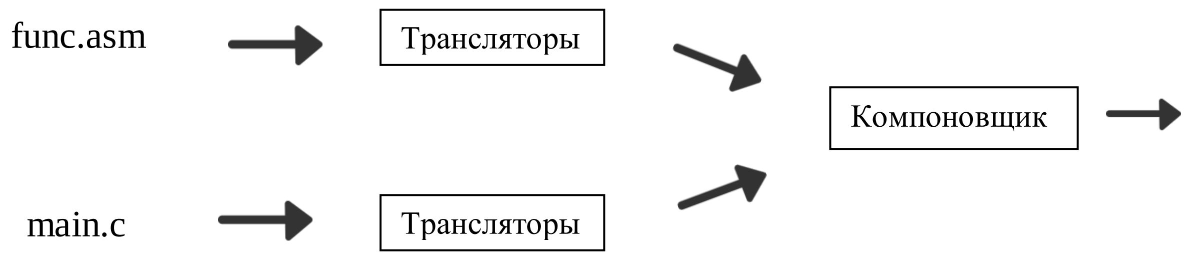

Рис.3 Зависимость между модулями программы

Отладка программы, тестирования функций

В модуле main.c помимо основных заданы три дополнительные функции $f_4 = 3x + 4$, $f_5 = x^2 + 7x + 8$, $f_6 = x^2 + 5x + 5$, которые используются для отладки функций root и integral, на заданных при вызове программы отрезках и с заданной точностью. Эти функции представляют собой многочлены степени не выше 2, поэтому расчет их интегралов нетрудно осуществить вручную.

Тестирование осуществляется с помощью ключа -test, выбор функций и параметров вычислений осуществляется путем ввода значений с клавиатуры.

Для функции root доступны три теста: точка пересечения f_4 и f_5, f_5 и f_6, f_4 и f_6. Результаты работы численного метода и аналитических вычислений приведены в таблице:

Пара функций	Левая граница отрезка	Правая граница отрезка	Точность вычислений	Результат, полученный аналитически	Результат работы численного метода
4 и 5	-4	0	0.001	-2	-2.0000
5 и 6	-4	0	0.001	-1.5	-1.5000
4 и 6	-4	0	0.001	-1	-1.0000

Таблица 2. Результаты тестирования функции root

Для функции integral доступны три теста: f4, f5, f6. Результаты работы численного метода и аналитических вычислений приведены в таблице:

Номер функции	Левая граница отрезка	Правая граница отрезка	Точность вычислений	Результат, полученный аналитически	Результат работы численного метода
4	2	4	0.001	26	25.9998
5	2	4	0.001	76.6667	76.6664
6	2	4	0.001	58.6667	58.6664

Таблица 3. Результаты тестирования функции integral

Программа на Си и на Ассемблере

Исходные тексты программы находятся в архиве, который приложен к данному отчету.

Анализ допущенных ошибок

В ходе работы существенных ошибок допущено не было. В процессе отладки была допущена ошибка в выборе границ вычисления (вызван поиск значения функции в точке, где она не определена). Впоследствии она и некоторые другие незначительные неточности были устранены.

Список литературы

[1] Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Т.1 — Москва: Наука, 1985.