Современные методы решения инженерных задач

Линейная модель производства

Линейная модель производства является расширением балансовой модели. Отличия:

1) Каждый объект $P_i, i = 1, m$ выпускает и потребляет некоторое множество продуктов и ресурсов: $G_1,\ G_2, \ldots, G_j, \ldots, G_n$

2) Целью УО является не получение строго заданного плана, а экстремизация некоторой целевой функции (максимизация прибыли, минимизация себестоимости).

3) Для каждого объекта вводится понятие интенсивности его работы - определяет сколько и каких продуктов можно произвести и сколько и каких ресурсов для этого потребуется.

4) Линейность ($k *$ интенсивность = $k *$ продукт)

Линейная модель производства

Есть $P_1, \ldots, P_i, \ldots, P_m$ объектов и $G_1, \ldots, G_j, \ldots, G_n$ продуктов или ресурсов.

Каждый объект характеризуется вектором $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$, где a_{ij} по модулю равно количеству продуктов или ресурсов j-го вида, которое потребляет i-ый объект при работе с единичной интенсивностью.

Если $a_{ij} < 0$, то G_j производится P_i и если $a_{ij} > 0$, то G_j потребляется P_i.

Задача планирования

Задача планирования заключается в определении вектора интенсивностей $X = (x_1; \dots ; x_m)$ работы всех объектов при которых будут выполнены все ограничения на план вырабатываемой продукции и потребления ресурсов, и достигнут экстремум целевой функции $X \geq 0$. Система локальных ограничений аналогична балансовой модели.

Вектор $d = \left(\sigma_1; \dots ; \sigma_j; \dots ; \sigma_n\right)$, $\sigma_j < 0$ - план производства j-го продукта, $\sigma_j > 0$ - план потребления j-го продукта.

Матрицу A составим из векторов a^j.

Потребность всей системы в j-ом продукте:

$$x_1 a_{1j} + x_2 a_{2j} + \dots + x_m a_{mj} = \left(X, a^j\right)$$

Всегда выполняется система неравенств: $\left(X, a^j\right) \leq \sigma_j$

Система глобальных ограничений

$XA \le d$	$X \ge 0$

Введем вектор $c = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m)$; γ_i - прибыль i-го объекта при его работе с единичной интенсивностью.

Целевая функция: $(c, X) \to max$ (или $(c, X) \to min$ если c – это себестоимость).

То есть, получаем задачу линейного программирования в стандартной форме.

Возможны следующие варианты:

- Решение единственное
- Множество одинаковых решений
- Отсутствие решения (вызванное несовместностью ограничений или из-за неограниченной ЦФ)

Двойственная задача линейного программирования

Стандартная форма:

Прямая задача ЛП:

$(c, x) = max$

$xA \leq d$

$x \geq 0$

Двойственная к ней:

$(d, y) = min$

$Ay \geq c$

$y \geq 0$

Эквивалентный вид двойственной задачи: $(-d, y) = max, \quad y(-A^*) \leq -c, \quad y \geq 0$

Двойственная к ней: $(-c, x) = min, -A^*x \geq -\mathrm{d}, \quad x \geq 0$

То есть двойственная к двойственной задаче есть прямая задача.

Двойственная задача линейного программирования

Каноническая форма:

Прямая задача ЛП:

$(c, x) = max$

$xA = d$

$x \geq 0$

Двойственная к ней:

$(d, y) = min$

$Ay \geq c$

Двойственные задачи сформулированные к задаче ЛП в стандартной и канонической формах → эквивалентны

Взаимосвязь прямой и двойственной задач ЛП

Лемма 1:

Если x и y - допустимые решения прямой задачи в стандартной форме и двойственной к ней, тогда:

$$(c, x) \leq \left(xAy\right) \leq \left(d, y\right)$$

То есть значение целевой функции прямой задачи не больше значения целевой функции двойственной задачи.

Лемма 2:

То же для канонической формы.

Взаимосвязь прямой и двойственной задач ЛП

Теорема 1. Критерий оптимальности

Если $\bar{x}$ - допустимое решение прямой задачи, а $\bar{y}$ - допустимое решение соответствующей двойственной задачи (все равно в какой форме) и имеет место равенство $(c, \bar{x}) = \left(d, \bar{y}\right)$,

то $\bar{x}$ и $\bar{y}$ являются решениями исходных прямой и двойственной задач.

Взаимосвязь прямой и двойственной задач ЛП

Теорема 2. Основная теорема двойственности

Если у прямой и двойственной к ней задачи есть допустимые решения, то **всегда существуют** и **решения** этих задач, такие что выполняются исходные требования предыдущей теоремы.

Экономический смысл решения двойственной задачи

Пусть $L(d)$ - экстремальное значение целевой функции в зависимости от d.

$$L(d) = (c, \bar{x}) = (d, \bar{y})$$

Как изменится $L(d)$ при известном изменении Δd? Можно изменить прямую задачу на Δd и, решив её, найти $\Delta L(d)$:

$$\Delta L(d) = \Delta (d, \bar{y}) = (\Delta d, \bar{y}) + (d, \Delta \bar{y}) + (\Delta d, \Delta \bar{y})$$

где $\bar{y} + \Delta \bar{y}$ новое решение двойственной задачи с новой целевой функцией $(d + \Delta d, \bar{y})$, но при старых ограничениях.

Если $\Delta d \to 0$, то $\Delta \bar{y} = 0$, следовательно, $\Delta L(d) = (\Delta d, \bar{y})$.

Пусть $\Delta d = (0,\ 0,\ \dots,\ \Delta \sigma_j,\ \dots, 0)$, тогда $\Delta L(d) = \Delta \sigma_j \bar{y}_j$, то есть $\bar{y}_j$ имеет размерность стоимости единицы продукции.

Экономический смысл решения двойственной задачи

Решение двойственной задачи   часто интерпретируют как **цены на** соответствующие **виды** продукции и , приводящие к достижению цели УО.

1) Компоненты вектора   имеют размерность стоимости единицы ресурса (цены единицы продукции) и дают УО информацию об **изменении** его **целевой** **функции при изменении ограничений** на план или ресурсы *(то есть изменении вектора).*

2) Если УО будет пользоваться   как ценами на ресурсы, то он сразу **может определить убыточные объекты** *(то есть объекты, которые не должны участвовать в оптимальном плане).*

Также, **решение** двойственной задачи **можно интерпретировать** как изменение ЦФ при изменении соответствующего ограничения на 1.

Экономический смысл решения двойственной задачи

Распишем ограничения двойственной задачи

$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\bar{y}_j \geq \gamma_j$; $i = 1; m$, где смысл слагаемых в правой части определяется так: если $a_{ij}\bar{y}_j < 0$, то это прибыль от продажи j-го вида продукции, в противном случае - затраты на покупку j-го ресурса, чтобы i-ый объект мог работать с единичной интенсивностью.

(Расходы на покупку ресурсов) - (доход от продажи продуктов) ≥ (внешней прибыли)

Если для предприятия i_1 выполняется строгое неравенство, то это предприятие убыточно и не должно участвовать в оптимальном плане.

Теорема равновесия

Теорема Равновесия:

Для того чтобы допустимые решения $\bar{x}$ и $\bar{y}$ прямой и двойственной стандартных задач были решениями этих задач, необходимо и достаточно, чтобы имели место следующие соотношения:

$\bar{y}_j = 0$, **если** $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_i \leq \sigma_j$ **(1)**

$x_i = 0$, **если** $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\bar{y}_j \leq \gamma_j$ **(2)**

Теорема равновесия

Экономический смысл соотношения (1):

Если какой-то ресурс используется в оптимальном плане не полностью, то цена такого ресурса должна быть равна 0, и если какой-то продукт производится системой в количестве, большем чем потребность в нем, то цена такого продукта также должна быть равной 0

Экономический смысл соотношения (2): все объекты, которые убыточны при ценах $\bar{y}_j$, в оптимальном плане не участвуют.

Экономический смысл решения двойственной задачи и его использование для решения задач управления

Решение задачи управления имеет тот недостаток, что при составлении своего плана предприятие (объект) не стимулируется к экономному расходу ресурсов и выпуску таких продуктов, которые наиболее нужны системе. Для того чтобы обеспечить такое стимулирование, можно каждому объекту предложить, наряду с выполнением плана, максимизировать прибыль при некоторых ценах.

Прибыль для каждого объекта P_i вычисляется по следующей формуле:

(прибыль) = (внешняя прибыль) + (доход от продажи) - (расход на покупку продуктов).

Недостатки использования метода линейного программирования для решения экономических задач

1. Возможен случай, когда область допустимых значений является пустым множеством, тогда **нет решения** ни у прямой, ни у двойственной задачи.
2. Решение всегда находится в крайней точке, то есть ряд ограничений модели выполняется как равенство и возникает **проблема с точностью.**