Современные методы решения инженерных задач

Определение параметров объектов по результатам измерений

Способы определения

1) По результатам **прямых** измерений
2) По результатам **косвенных** измерений

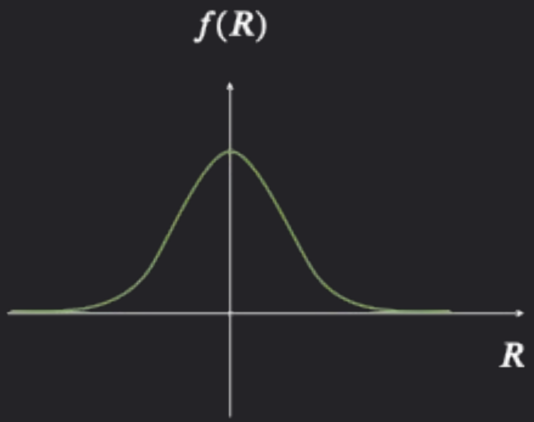
Определение параметров объектов по результатам измерений

Цель

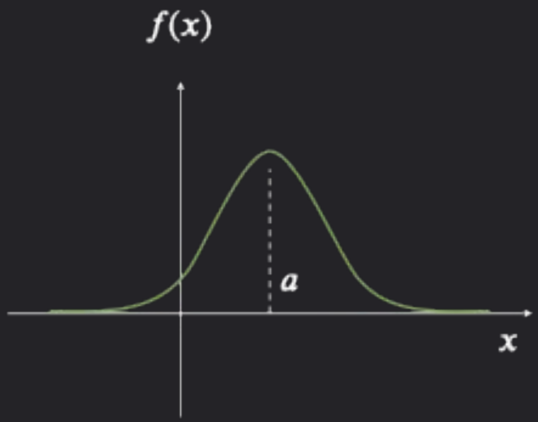
Определить параметр a по результатам его измерений с помощью прибора с погрешностью $R \to N[0,\sigma]$

$x = a + R$ – **показания прибора**

$x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ - **результаты эксперимента**



$$a = mx = ?$$



Определение параметров объектов по результатам измерений

Свойства оценок

θ – параметр случайной величины $\hat{\theta}$ – его оценка

1) **Состоятельность. Оценка состоятельна, если при увеличении выборки она стремится по вероятности к оцениваемому параметру**

$$\hat{\theta} \xrightarrow[n \to \infty]{P} \theta$$

2) **Несмещенность. Математическое ожидание оценки равно оцениваемому параметру**

$$M\left\{\hat{\theta}\right\} = \theta$$

3) **Эффективность. Эффективная оценка обладает наименьшей дисперсией среди всех остальных оценок:**

$$\hat{\theta}_{эф} = argmin\, \sigma\left(\hat{\theta}\right)$$

Определение параметров объектов по результатам измерений

Для $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \hat{m}x$:

1) $\bar{x} \xrightarrow[n \to \infty]{P} mx$

2) $M\{\bar{x}\} = mx$

Регрессионный анализ

Доверительный интервал

$$\left(\hat{\theta} - \delta, \hat{\theta} + \delta\right)$$

$$P\left\{\hat{\theta} - \delta \leq \theta \leq \hat{\theta} + \delta\right\} = 1 - \alpha$$

α – **уровень значимости**

1-α – **надежность, или доверительная вероятность**

Регрессионный анализ

Параметры модели

При определении параметров по результатам косвенных измерений задача сводится к задаче **параметрической идентификации** математической модели:

X	Y
x_1	y_1
x_2	y_2
...	...
x_n	y_n

$$y = f(x, b); \qquad b = \left(b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m\right)$$

критерий идентификации $F(b)$, для метода наименьших квадратов (МНК):

$$F(b) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f\left(x_i, b\right)\right)^2 \to min$$

Определить: $b = \left(b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m\right) = \ ?$

Регрессионный анализ

Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов сводится к решению следующей системы нормальных уравнений:

$$
\begin{cases}
\left.\dfrac{\partial F(b)}{\partial b_0}\right|_{x_i} = 0 \\
\left.\dfrac{\partial F(b)}{\partial b_1}\right|_{x_i} = 0 \\
\vdots \\
\left.\dfrac{\partial F(b)}{\partial b_m}\right|_{x_i} = 0
\end{cases}
$$

Регрессионный анализ

Задача и предпосылки

Задача регрессионного анализа состоит в нахождении по методу МНК оценки уравнения регрессии, расчёта погрешности, полученной от замены точной регрессии на приближенную, и определении значимости всех рассчитанных оценок коэффициентов уравнения регрессии.

Предпосылки, лежащие в основе регрессионного анализа:

1) Величина Y имеет **нормальный закон распределения** в любом сечении по X:

$$Y \to N[m_Y,\ \delta_Y]$$

2) Вид зависимости оценки уравнения регрессии **известен** – это зависимость линейна относительно неизвестных коэффициентов $\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots$

Зависимость может, **например**, иметь такой вид:

$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2(x_2)^2$ или $\hat{y} = b_0 + b_1 ln|x_1| + b_2 sin(x_2)$

Регрессионный анализ

Задача и предпосылки

Замечание: Ряд функций можно свести к требуемому виду путём замены переменных.

Например, $v = \varphi_1(x, y); u = \varphi_2(x, y) \Rightarrow v = c_0 + c_1 U$

Пусть $\hat{y} = b_0 e^{b_1 x_1}$

Тогда $v = ln\hat{y},\ \ u = x;\ \ ln\hat{y} = ln\, b_0 + b_1 x$,

то есть $c_0 = ln\, b_0,\ \ c_1 = b_1$

3) Дисперсия величины X пренебрежимо мала по сравнению с дисперсией величины Y:

$\sigma_X \lll \sigma_Y$

Если это не так, то необходимо использовать конфлюэнтный анализ.

4) Дисперсия величины Y есть величина постоянная, или изменяющаяся по известному закону, в зависимости от величины X:

$\sigma_Y = const$ или $\sigma_Y = \varphi(x)$

Регрессионный анализ

Задача и предпосылки

5) **Величины** $x_1,\ x_2,\ \dots, x_n$ **- линейно независимы, то есть невозможно построить зависимость вида** $\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + \dots + b_2(x_1 + x_2) + \dots$

В регрессионном анализе взаимодействие факторов учитывается только в виде произведения: $\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + \dots + b_2x_1x_2 + \dots$

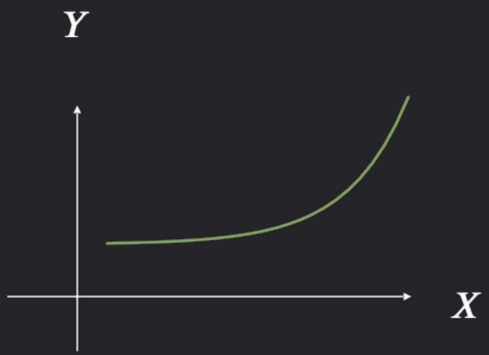
Регрессионный анализ

Замечание

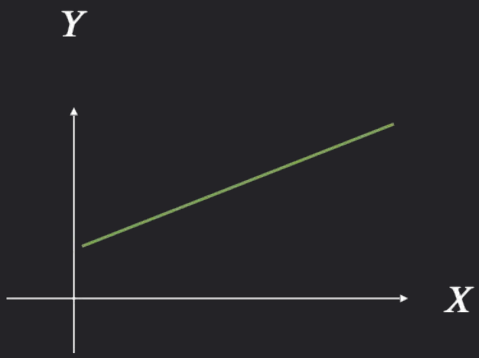
В ряде случаев функцию $y = f(x, b)$ удобно линеаризовать:

$$y = b_0 exp(b_1 x) ln(y) = ln(b_0) + b_1 x$$

$$\left| \begin{matrix} U = U(x, y) \\ V = V(x, y) \end{matrix} \right| \rightarrow \left| V = C_0 + C_1 U \right|$$



$$b_0 = exp(C_0)$$



Регрессионный анализ

Получена модель вида

$$y = b_0 + b_1 x$$

Как найти обратную зависимость?

$$\cancel{x = \frac{y - b_0}{b_1}}$$

Алгебраические действия с полученными при помощи метода наименьших квадратов зависимостями недопустимы