Современные методы решения инженерных задач

Экономико-математические модели (ЭММ) задач планирования и управления

Принципы построения экономико-математических моделей (ЭММ)

1) Любая ЭММ рассматривает экономическую систему, состоящую из **множества подсистем**

2) Каждый экономический объект функционирует по **своим собственным законам**

3) **Глобальные ограничения** - соотношения, описывающие совместное функционирование всех экономических объектов, входящих в систему

4) **Целевая функция** или **критерий эффективности** - количественная мера, описывающая качество функционирования системы

Задача планирования в ЭММ

Определение для всех **объектов системы** всех **материальных потоков**, включая взаимные полуфабрикаты и конечную продукцию

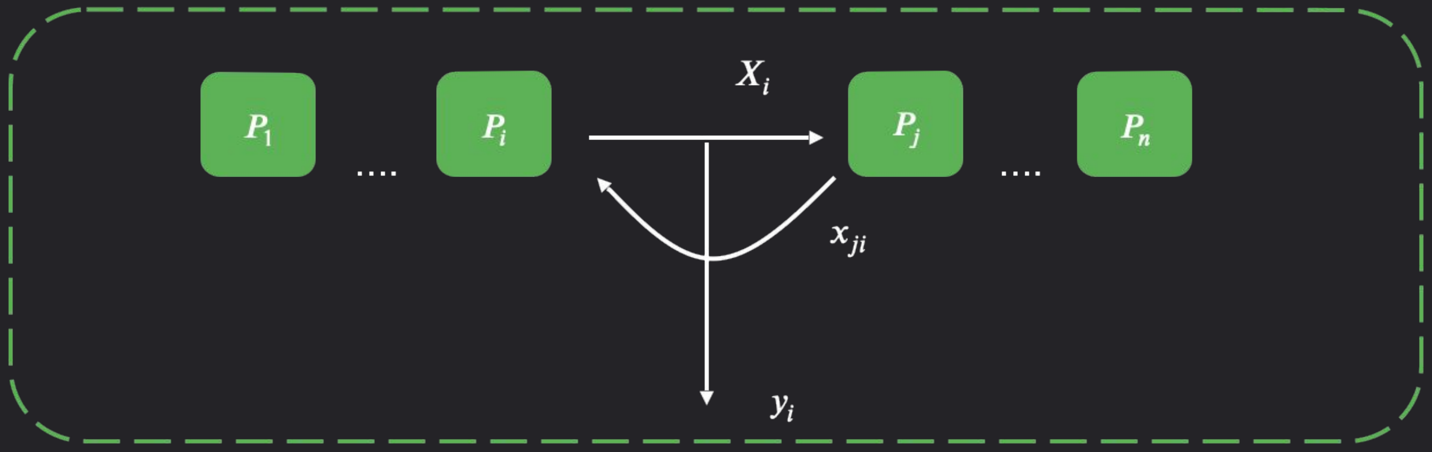
Балансовая модель производства

Предположения

1) Функционирование каждого из объектов определяется скалярной величиной, то есть **только одним показателем**
2) Предположение **комплектности**: считается известным, сколько каждому экономическому объекту необходимо получить продукции от всех остальных, чтобы самому выпустить единицу продукции
3) **Линейность:** для увеличения своего выпуска в k раз каждому объекту требуется ровно в k раз увеличить комплект поступления требуемых продуктов от других объектов
4) **Часть продукции** передается во внешнюю среду - конечный продукт

Формальное изложение балансовой модели

Управляющий орган (УО)



$P_1, P_2, \ldots, P_n$ - **объекты**
X_i - **вся продукция i-го объекта (полный выпуск)**

y_i - **конечный продукт**
x_{ji} - **продукт от j-го объекта к i-му**

Виды задач

Целевая функция УО - обеспечить строго требуемое количество конечного продукта всей системы.

$Y = (y_1; y_2; \ldots; y_n)$ **- вектор конечного продукта всей системы.**

Задача планирования:

По величинам $y_1; y_2; \ldots; y_n$ **определить величины** $x_{11}, \ldots, x_{nn}$ **такие, что при рассчитанных взаимных потоках продукции вся система будет производить заданный объем конечного продукта.**

Виды ограничений

Локальные ограничения

По X_i можно узнать требуемое количество продуктов от всех других объектов.

a_{ij} - количество продуктов которые необходимо получить j-му объекту от i-го для того, чтобы выпустить единицу продукции.

A – матрица прямых затрат

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; a_{ij} \geq 0$$

Виды ограничений

Локальные ограничения

По x_i можно узнать требуемое количество продуктов от всех других объектов.

Каждому объекту ставится в соответствие вектор коэффициентов $a_{1i},\ a_{2i},\ \ldots,\ a_{ni}$- технологических коэффициентов, или коэффициентов прямых затрат.

a_{ji} - количество продуктов которые необходимо получить i-му объекту от j-го для того, чтобы выпустить единицу продукции. Тогда:

$$x_{1i} = a_{1i}x_i$$
$$\ldots$$
$$x_{ni} = a_{ni}x_i$$

Затраты - выпуск

Данные представляются в виде специальной таблицы **«Затраты-Выпуск»**, общий вид которой приведен ниже. Символом **“^”** обозначаются величины, относящиеся к предыдущему периоду.

	P_1	P_2	…	P_i	…	P_n	Конечный продукт	Полный выпуск
P_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1i}	…	x_{1n}	y_1	$X_1 = \widehat{y_1} + \sum_{k=1}^{n} x_{1k}$
P_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2i}	…	x_{2n}	y_2	$X_2 = \widehat{y_2} + \sum_{k=1}^{n} x_{2k}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
P_n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{ni}	…	x_{nn}	y_n	$X_n = \widehat{y_n} + \sum_{k=1}^{n} x_{nk}$

Затраты - выпуск

Известны матрица коэффициентов прямых затрат A и вектор конечной продукции Y, коэффициенты x_{ji} , можно определить из системы локальных ограничений.

Требуется определить вектор полного выпуска X.

Решение:

$$(E - A)X = Y$$

$$X = (E - A)^{-1}Y = SY$$

где E - единичная матрица.

Теорема 1

Продуктивность матрицы A - необходимое и достаточное условие существования, единственности и не отрицательности решения системы $(E - A)X = Y$ при любом $Y \geq 0$.

Теорема 2 - критерий продуктивности

Матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $S = (E - A)^{-1}$ существует и неотрицательна.

Матрица S называется матрицей полных затрат.

Экономический смысл матрицы S

$$X = (E - A)^{-1} Y = SY$$

$S^j = \left(\sigma_{1j}, \sigma_{2j}, \ \ldots, \sigma_{nj}\right)$ - j-ый столбец матрицы S.

Тогда $x = \sum_{j=1}^{n} y_j S^j$

Пусть Y такой, что $y_j = \begin{cases} 0, \ j \neq k \\ 1, \ j = k \end{cases}$

В этом случае $X = S^k$ или $x_i = \sigma_{ik}, \ i = (1, \ \ldots, \ n)$

Таким образом, матрица S имеет следующий экономический смысл:

σ_{ik} - количество продукции, которое должен передать P_i, чтобы P_k мог выпустить единицу конечной продукции.

Составление плана методом перезаказов

В условиях неопределенности (элементов матрицы A) для составления плана происходит организация процесса согласования планов.

Пусть система должна получить $Y^0 = \left(y_1^0, y_2^0, \ \ldots, y_n^0\right)$.

Первый шаг:

Управляющий орган в качестве плана j-му объекту задает то, что хотел бы получить, то есть $УО \to P_j \to y_j^0$. В ответ каждый объект, зная только собственные a^j и y^0, передает свою потребность УО в виде: $y_j^0 a^j = \left(a_{1j}y_j^0, a_{2j}y_j^0, \ \ldots, a_{nj}y_j^0\right)$.

УО формирует новое задание: $Y^1 = \left(y_1^0, y_2^0, \ \ldots, y_n^0\right) = Y^0 + \sum_{j=1}^{n} y_j^0 a^j = Y^0 + AY^0$ → сумма конечное

продукции и заказов объектов.

Составление плана методом перезаказов

Второй шаг:

$$YO \to P_j \to y_j^0,$$

$$P_j \to YO \to y_j^1 a^j$$

$$Y^2 = Y^0 + AY^1 = \left(E + A + A^2\right)Y^0$$

Шаг v:

$$Y^{v-1} = \left(E + A + A^2 + \ldots + A^{v-1}\right)Y^0$$

$$Y^v = \left(E + A + A^2 + \ldots + A^v\right)Y^0$$

При $v \to \infty$:

$$Y^v \to (E - A)^{-1}Y^0$$

Учет факторов производства и поставок из других экономических систем

Пусть факторов m. Потребность в факторах на планируемый период: $Z = \{z_1, \ \dots, z_i, \ \dots, z_m\}$

z_i - потребность в i-ом факторе.

P_j характеризуется вектором $b^j = \left\{\beta_{1j}, \dots, \beta_{ij}, \dots, \beta_{mj}\right\}$

β_{ij} - количество i-го фактора, необходимое P_j для производства единицы продукции

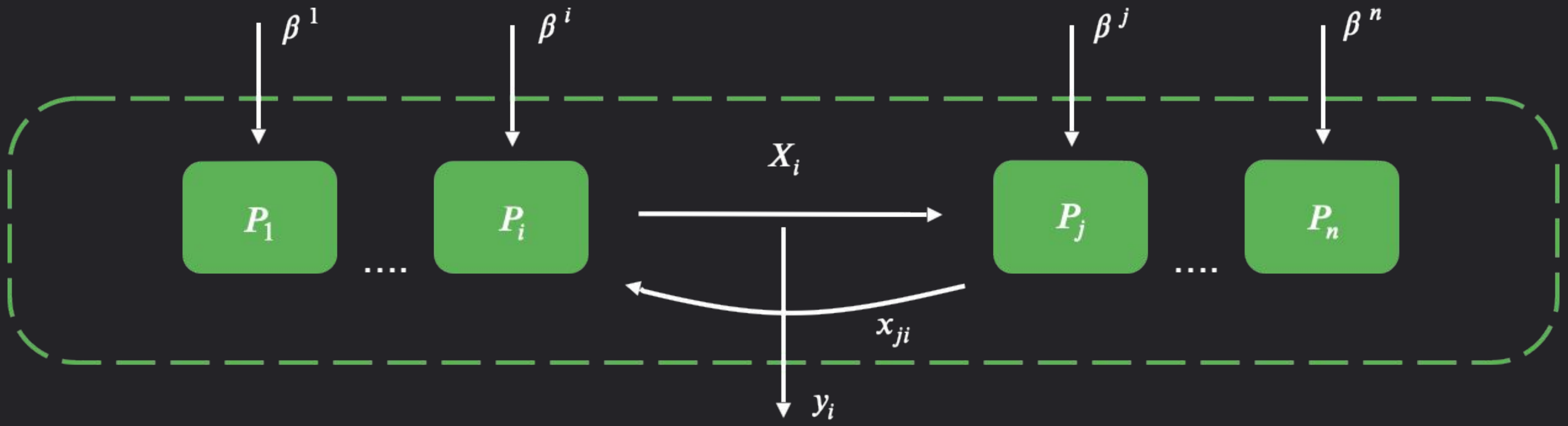
→ коэффициент прямых затрат факторов.

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \cdots & \beta_{mn} \end{pmatrix}$$

j-ый столбец для объекта P_j.

i-ая строка - потребность всех объектов в i-ом факторе.

Учет факторов производства и поставок из других экономических систем



Потребность всей системы в *i*-ом факторе:

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} x_j, \text{ где } i = 1, \ldots, m$$

$$Z = BX = BSY$$