Численное решение уравнения Смолуховского.

Математическая модель:

Уравнение Смолуховского $\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \rho(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{\zeta}\frac{\partial}{\partial x}U'(x,t)\rho(x,t)$, $\rho(x,0) = \delta\left(x\right)$,

$\rho(0,t) = \rho(L,t)$; $\left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|_{x=L}$.

Задание:

Промоделировать *(при помощи решения уравнения Смолуховского методом сеток, сводящем модель к решению СЛАУ методом периодической прогонки)* движение броуновской частицы в периодическом потенциале $U(x) = U_0 \sin(2\pi x / L)$, L – период.

При записи численной модели не забывать о необходимости перехода к безразмерным величинам – см. ЭУМК.

1.1. Построить зависимость решения уравнения Смолуховского, $\rho(x,t)$, от координаты для разных фиксированных моментов времени. Аналогичные графики построить для потока $J(x,t) = -De^{-\beta U(x,t)}\frac{\partial}{\partial x}e^{\beta U(x,t)}\rho(x,t) = -D\frac{\partial}{\partial x}\rho(x,t) - \beta D\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\rho(x,t)$.

1.2. Показать, что с течением времени распределение $\rho(x,t)$ стремится к равновесному (больцмановскому, $\rho(x) = \exp[-\beta U(x)] / \int_0^L dx \exp[-\beta U(x)]$), а поток $J(x,t)$ к нулю.

1.3. Добавить в модель действие постоянной силы (сноса) F, т.е. заменить $U(x)$ на $U(x) - Fx$. Показать, что в этом случае с течением времени профили решения $\rho(x,t)$ и $J(x,t)$ будут стремиться к результату Стратоновича.

1.4. Положить амплитуду U_0 равной нулю, оставив только $F \neq 0$. Прокомментировать полученный результат. Сравнить с известным, следующим из анализа формул Стратоновича.