

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Лабораторная работа № 1

Выполнила: Яроцкас Анастасия, 2 курс, 4 группа

Преподаватель: Полещук Максим Александрович

Минск

2018

Постановка задачи:

В соответствии с вариантом задания (равным номеру в списке академической группы) произвести табулирование функции $f(x)$, используя чебышевскую сетку с m узлами, где $m \in \{3, 4, 5, 6, 8\}$. Для каждого m построить

интерполяционный многочлен Ньютона в начале отрезка на чебышевской сетке.

В отчёте представить значения аргумента x_n , приближенные значения интерполяционного многочлена $P(x_n)$, точные значения функции $f(x_n)$. Вывод всех величин организовать в таблицу. Для каждого m оценить погрешность

интерполирования на отрезке (в равномерной норме). Сравнить со значениями оценок погрешностей $|r_m(x_n)|$ в серединах отрезков между соседними узлами при

равномерном интерполировании на m узлах (в точках $x_n = \frac{b-a}{2(m-1)}(2n+1), n = \overline{0, m-2}$

интервала $[a; b]$). Для вычислений использовать тип *float*.

Входные данные:

$2(\pi + 3x)^{1/2}, [1; 10]$

Формулы и краткие пояснения к ним:

Если интерполирование производится на произвольном отрезке $[a; b]$, то формула для оптимальных уз-лов:

$$x_k = (a+b)/2 + (b-a)/2 \cos((2k+1)\pi/2n), k = \overline{0, n}.$$

Интерполяционный многочлен в форме Ньютона имеет вид:

$$P_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f(x_0, x_1) + \dots + (x-x_0) \cdots (x-x_{n-1})f(x_0, x_1, \dots, x_n).$$

Разделенные разности определяются равенствами: $f(x_i, x_j) = f(x_j)$

$$-f(x_i)x_j - x_i, f(x_0, x_1, \dots, x_{k+1}) = f(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) - f(x_0, x_1, \dots, x_k)x_{k+1} - x_0$$

Погрешность интерполирования: $r_m(x) = f(x) - P_n(x)$.

Равномерная норма определяется по формуле: $\|r_m(x)\| = \max_{x_n \in [a, b]} |r_m(x_n)|$.

Листинг:

```
#include <iostream>
#include <math.h>
#include <iomanip>
```

```
int A = 1;
int B = 10;
```

```

float f(float x) {
    return (float)(2*pow((M_PI + 3 * x), 0.5));
}

int fac(int n){
    int temp = 1;
    for(int i = 1; i <= 2*n - 3; i += 2){
        temp *= i;
    }

    return temp;
}

float diff_f(int n, float x) {
    if(n == 1){
        return (float)(3/pow(M_PI + 3 * x, 0.5));
    }
    return (float)(pow(-1, n + 1) * pow(3, n) * fac(n)/ (pow(2, n - 1) *
pow((M_PI + 3 * x), ((2*n - 1)/2))));
}

int factorial(int n) {
    int res = 1;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        res *= (i + 1);
    }
    return res;
}

void DiffTable(float** table, int m) {
    int index = 0;
    for (float i = m - 1; i >= 0; i--) {
        float x = (float)(A + B) / 2 + (float)(B - A) / 2 * cos(M_PI *
(i + 0.5) / m); //xn
        table[0][index] = x;
        table[1][index] = f(table[0][index]);
        index++;
    }

    for (int i = 2; i < m + 1; i++){
        for (int j = 0; m - i - j >= 0; j++) {
            table[i][j] = (-table[i - 1][j] + table[i - 1][j + 1]) /
(table[0][j + i - 1] - table[0][j]);
        }
    }
}

void clear(int m, float** table){

    for (int i = 0; i < m; i++) {
        delete table[i + 1];
    }

    delete table[0];
}

```

```

    delete table;
}

void solve(int m) {
    std::cout << "m = " << m << " " << std::endl;
    int fact = factorial(m);
    float** table;

    table = new float*[m + 1];
    table[0] = new float[m];
    for (int i = 0; i < m; i++) {
        table[i + 1] = new float[m - i];
    }

    DiffTable(table, m);

    //P(x)
    std::cout << "P(x) = ";
    for (int i = 1; i <= m; i++)
    {
        std::cout << std::setprecision(3) << table[i][0];
        for (int j = 0; j < i - 1; j++)
        {
            if (table[0][j]>0)
                std::cout << "*(x - " << std::setprecision(3) <<
table[0][j] << ")";
            else std::cout << "*( x + " << std::setprecision(3) <<
abs(table[0][j]) << " )";
        }
        if (i<m) std::cout << " + ";
    }
    std::cout << std::endl;

    //xn | f(xn) | P(xn)
    for (int i = 0; i < m; i++) {
        std::cout << std::endl;
        std::cout << "x" << std::setprecision(3) << i + 1 << " = " <<
table[0][i] << std::endl << "f(x) = " << f(table[0][i]) << std::endl <<
"P(x) = ";
        float result = 0;
        for (int c = 0; c < m; c++)
        {
            float p = table[c + 1][0];
            for (int j = 0; j < c; j++) {
                p *= (table[0][i] - table[0][j]);
            }
            result += p;
        }
        std::cout << std::setprecision(3) << result << std::endl;
    }

    std::cout << "\n||f(x)-P(x)|| <= ";
    float r_x = diff_f(m, 2)*pow(B - A, m)*pow(2, 1 - 2 * m) / fact;
    std::cout << abs(r_x) << std::endl;
}

```

```

        for (int i = 0; i <= m - 2; i++) {
            float x = (float) A + (float)(B - A) / (2 * (m - 1))*(2 * i +
1);
            std::cout << "x" << i + 1 << " = " << x << " r(x" << i + 1 << ")
<= ";
            float res = 1;
            for (int i = 0; i < m; i++) {
                res *= (x - table[0][i]);
            }
            float r_xn = diff_f(m, 2) * abs(res) / fact;
            std::cout << abs(r_xn) << std::endl;
        }

        clear(m, table);
    }

int main(){
    freopen("output.txt", "w", stdout);

    int arr[] = { 3, 4, 5, 6, 8 };
    int size = sizeof(arr) / sizeof(arr[0]);

    for (int i = 0; i < size; i++) {
        solve(arr[i]);
        std::cout << "\n\n";
    }

    return 0;
}

```

Вывод:

m = 3

$P(x) = 5.64 + 0.827*(x - 1.6) + -0.0294*(x - 1.6)*(x - 5.5)$

x1 = 1.6

f(x) = 5.64

P(x) = 5.64

x2 = 5.5

f(x) = 8.86

P(x) = 8.86

x3 = 9.4

f(x) = 11.2

P(x) = 11.2

$||f(x)-P(x)|| \leq 0.92$

x1 = 3.25 r(x1) <= 0.92

x2 = 7.75 r(x2) <= 0.92

m = 4

$P(x) = 5.36 + 0.926*(x - 1.34) + -0.0413*(x - 1.34)*(x - 3.78) + 0.00252*(x - 1.34)*(x - 3.78)*(x - 7.22)$

$x_1 = 1.34$
 $f(x) = 5.36$
 $P(x) = 5.36$

$x_2 = 3.78$
 $f(x) = 7.61$
 $P(x) = 7.61$

$x_3 = 7.22$
 $f(x) = 9.96$
 $P(x) = 9.96$

$x_4 = 9.66$
 $f(x) = 11.3$
 $P(x) = 11.3$

$||f(x)-P(x)|| \leq 0.425$
 $x_1 = 2.5 \quad r(x_1) \leq 0.414$
 $x_2 = 5.5 \quad r(x_2) \leq 0.425$
 $x_3 = 8.5 \quad r(x_3) \leq 0.414$

$m = 5$
 $P(x) = 5.22 + 0.995*(x - 1.22) + -0.054*(x - 1.22)*(x - 2.85) +$
 $0.00386*(x - 1.22)*(x - 2.85)*(x - 5.5) + -0.000273*(x - 1.22)*(x -$
 $2.85)*(x - 5.5)*(x - 8.15)$

$x_1 = 1.22$
 $f(x) = 5.22$
 $P(x) = 5.22$

$x_2 = 2.85$
 $f(x) = 6.84$
 $P(x) = 6.84$

$x_3 = 5.5$
 $f(x) = 8.86$
 $P(x) = 8.86$

$x_4 = 8.15$
 $f(x) = 10.5$
 $P(x) = 10.5$

$x_5 = 9.78$
 $f(x) = 11.4$
 $P(x) = 11.4$

$||f(x)-P(x)|| \leq 0.219$
 $x_1 = 2.12 \quad r(x_1) \leq 0.195$
 $x_2 = 4.38 \quad r(x_2) \leq 0.209$
 $x_3 = 6.62 \quad r(x_3) \leq 0.209$
 $x_4 = 8.88 \quad r(x_4) \leq 0.195$

$m = 6$

$$P(x) = 5.14 + 1.04*(x - 1.15) + -0.00661*(x - 1.15)*(x - 2.32) + 0.00555*(x - 1.15)*(x - 2.32)*(x - 4.34) + -0.000439*(x - 1.15)*(x - 2.32)*(x - 4.34)*(x - 6.66) + 3.33e-05*(x - 1.15)*(x - 2.32)*(x - 4.34)*(x - 6.66)*(x - 8.68)$$

$$\begin{aligned} x1 &= 1.15 \\ f(x) &= 5.14 \\ P(x) &= 5.14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x2 &= 2.32 \\ f(x) &= 6.35 \\ P(x) &= 6.35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x3 &= 4.34 \\ f(x) &= 8.04 \\ P(x) &= 8.04 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x4 &= 6.66 \\ f(x) &= 9.62 \\ P(x) &= 9.62 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x5 &= 8.68 \\ f(x) &= 10.8 \\ P(x) &= 10.8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x6 &= 9.85 \\ f(x) &= 11.4 \\ P(x) &= 11.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ||f(x)-P(x)|| &\leq 0.122 \\ x1 = 1.9 \quad r(x1) &\leq 0.0914 \\ x2 = 3.7 \quad r(x2) &\leq 0.0951 \\ x3 = 5.5 \quad r(x3) &\leq 0.122 \\ x4 = 7.3 \quad r(x4) &\leq 0.0951 \\ x5 = 9.1 \quad r(x5) &\leq 0.0914 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m &= 8 \\ P(x) &= 5.06 + 1.1*(x - 1.09) + -0.0863*(x - 1.09)*(x - 1.76) + 0.00949*(x - 1.09)*(x - 1.76)*(x - 3) + -0.00097*(x - 1.09)*(x - 1.76)*(x - 3)*(x - 4.62) + 8.87e-05*(x - 1.09)*(x - 1.76)*(x - 3)*(x - 4.62)*(x - 6.38) + -7.45e-06*(x - 1.09)*(x - 1.76)*(x - 3)*(x - 4.62)*(x - 6.38)*(x - 8) + 6.01e-07*(x - 1.09)*(x - 1.76)*(x - 3)*(x - 4.62)*(x - 6.38)*(x - 8)*(x - 9.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x1 &= 1.09 \\ f(x) &= 5.06 \\ P(x) &= 5.06 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x2 &= 1.76 \\ f(x) &= 5.8 \\ P(x) &= 5.8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x3 &= 3 \\ f(x) &= 6.97 \end{aligned}$$

$$P(x) = 6.97$$

$$\begin{aligned}x_4 &= 4.62 \\f(x) &= 8.25 \\P(x) &= 8.25\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_5 &= 6.38 \\f(x) &= 9.44 \\P(x) &= 9.44\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_6 &= 8 \\f(x) &= 10.4 \\P(x) &= 10.4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_7 &= 9.24 \\f(x) &= 11.1 \\P(x) &= 11.1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_8 &= 9.91 \\f(x) &= 11.5 \\P(x) &= 11.5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}||f(x)-P(x)|| &\leq 0.0423 \\x_1 &= 1.64 \quad r(x_1) \leq 0.0158 \\x_2 &= 2.93 \quad r(x_2) \leq 0.00647 \\x_3 &= 4.21 \quad r(x_3) \leq 0.0287 \\x_4 &= 5.5 \quad r(x_4) \leq 0.0423 \\x_5 &= 6.79 \quad r(x_5) \leq 0.0287 \\x_6 &= 8.07 \quad r(x_6) \leq 0.00647 \\x_7 &= 9.36 \quad r(x_7) \leq 0.0158\end{aligned}$$