Лабораторная работа 2

Яроцкас А.И.

3 курс 2 группа

22.

a) График функции $f_1(x)$ возрастает при $a < b$, убывает при $a > b$, а $f_2(x)$ достигает максимума в точке $0 \le \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} \le 1$. Тогда при $a = b$ множество Парето имеет вид $\{\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\}$, при $a < b$ - $\{\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta},\ 0\}$, при $a > b$ - $\{\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta},\ 1\}$.

b) График $f_1(x)$ возрастает с увеличением $x_1,\ x_2$, $f_2(x)$ возрастает с ростом x_1, убывает с ростом x_2. И так как при фиксированном x_2 обе функции достигают максимума в $x_1 = 1$ и возрастают с увеличением x_1, множество Парето имеет вид $\{1\} \times [0,1]$.

c) $x_3 = 1 - x_1 - x_2$. Множество Парето :

$$\left\{ \left(x_1, x_2, x_3\right) \middle| x_1 = x_2 \ge \frac{1}{3} \right\} \cup \left\{ \left(x_1, x_2, x_3\right) \middle| x_1 = x_3 \ge \frac{1}{3} \right\} \cup \left\{ \left(x_1, x_2, x_3\right) \middle| x_2 = x_3 \ge \frac{1}{3} \right\}$$

1.

a) $\underline{I} = \max_i \min_j (h_{ij}) = \max_i \min_j (f(i) - g(j)) = \max_i (f(i) - \max_j g(j)) = \max_i f(i) - \max_j g(j)$.

$\bar{I} = \max_i \min_j (h_{ij}) = \min_j \max_i (f(i) - g(j)) = \min_j (\max_i f(i) - g(j)) = \max_i f(i) - \max_j g(j)$.

Тогда $\underline{I} = \bar{I}$ и, следовательно, игра разрешима в чистых стратегиях. Решение игры – пара стратегий $(i_0,\ j_0)$ такая, что $\max_j f(i) = f(i_0),\quad \max_j g(j) = g(j_0)$.

b) $\underline{I} = \max_i \min_j (h_{ij}) = \max_i \min_j (f(i) + g(j)) = \max_i (f(i) + \min_j g(j)) = \max_i f(i) + \min_j g(j)$

$\bar{I} = \max_i \min_j (h_{ij}) = \min_j \max_i (f(i) + g(j)) = \min_j (\max_i f(i) + g(j)) = \max_i f(i) + \min_j g(j)$.

Тогда $\underline{I} = \bar{I}$ и, следовательно, игра разрешима в чистых стратегиях. Решение игры – пара стратегий $(i_0,\ j_0)$ такая, что $\max_j f(i) = f(i_0),\quad \min_j g(j) = g(j_0)$.

c) Положим $a \le c,\ b \le d,\ a \le b$ (если данное условие не выполняется изначально, подобного можно добиться путём перестановок строк и столбцов). Тогда

$\underline{I} = \max\Big(\min(a,b), \min(c,d), \min(a,d), \min(c,b)\Big) = \min(c,d)$.

$\bar{I} = \min\Big(\max(a,c), \max(b,d)\Big) = \min(c,d)$. Тогда $\underline{I} = \bar{I}$ и, следовательно, игра разрешима в чистых стратегиях. Оптимальная стратегия для первого игрока – вторая, для второго – первая при $c \le d$, вторая иначе (номера стратегий без учёта перестановок).

d) Без ограничения общности будем считать, что числа в матрице упорядочены в лексикографическом порядке (в других случаях доказательство аналогично). Тогда $\underline{I} = c$. $\bar{I} = c$. Тогда $\underline{I} = \bar{I}$ и, следовательно, игра разрешима в чистых стратегиях. Оптимальная стратегия для первого игрока – третья, для второго – первая, четвёртая, пятая, восьмая.

e) Для каждой строки матрицы a_i, c_i постоянны, следовательно, минимум в строках будет достигаться при минимальном значении $\dfrac{b_j}{d_j}$. Минимум в каждой строке достигается для одного и того же столбца. Пусть это j_0. Тогда исходную матрицу $(H)_{n\times m}$ можно свести к матрице $\left(H_0\right)_{n\times 1}$. В такой матрице стратегии первого игрока – действительные числа. В силу того, что на множестве действительных чисел задано отношение порядка, в полученной матрице есть строка (строки), доминирующие над остальными. Пусть это i_0. Тогда полученную матрицу можно свести к $\left(H_{00}\right)_{1\times 1}$, которая состоит из одного элемента. Тогда игра разрешима в чистых стратегиях, решение игры – пара стратегий $(i_0,\ j_0)$.

f) $\underline{I} = \max_i \min_j (h_{ij}) = \max_i \min_j (- h_{jk} - h_{ki}) = -\max_j h_{jk} - \min_i h_{ki}$.
$\bar{I} = \max_i \min_j (h_{ij}) = \min_j \max_i (- h_{jk} - h_{ki}) = \max_j h_{jk} - \min_i h_{ki}$. Тогда $\underline{I} = \bar{I}$ и, следовательно, игра разрешима в чистых стратегиях.

5.
Множество чистых стратегий для игрока A:

1) A_1 – все фишки в позиции 1,
2) A_2– все фишки в позиции 2,
3) A_3 – все фишки в позиции 3,
4) A_4 – по одной фишке в каждой позиции,
5) A_5 – 2 фишки в позиции 1, одна – в позиции 2,
6) A_6 – 2 фишки в позиции 1, одна – в позиции 3,
7) A_7 – 2 фишки в позиции 2, одна – в позиции 1,
8) A_8 – 2 фишки в позиции 2, одна – в позиции 3,
9) A_9 – 2 фишки в позиции 3, одна – в позиции 1,
10) A_{10} – 2 фишки в позиции 3, одна – в позиции 2.

Из таких же стратегий состоит множество $B = \left\{B_1,\ \ldots, B_{10}\right\}$.
Пусть выигрыш первого игрока (или проигрыш второго) – общее число “прорвавшихся” фишек. Тогда матрица выигрышей имеет следующий вид:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}
A_1	0	3	3	2	1	1	2	3	2	3
A_2	3	0	3	2	2	3	1	1	3	2
A_3	3	3	0	2	3	2	3	2	1	1
A_4	2	2	2	0	1	1	1	1	1	1
A_5	1	2	3	1	0	1	1	2	2	2
A_6	1	3	2	1	1	0	2	2	1	2
A_7	2	1	3	1	1	2	0	1	2	2

A_8	3	1	2	1	2	2	1	0	2	1
A_9	2	3	1	1	2	1	2	2	0	1
A_{10}	3	2	1	1	2	2	2	1	1	0

$\underline{I} = 0, \overline{I} = 3$. Таким образом, игра не разрешима в чистых стратегиях.
Найдём решение игры в смешанных стратегиях. Построим пару двойственных задач линейного программирования.

Первая задача:

$$\sum_{i=1}^{10} x_i \to min$$

$$\begin{cases} 0 \bullet x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 + 2x_7 + 3x_8 + 2x_9 + 3x_{10} \geq 1 \\ 3x_1 + 0 \bullet x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 3x_6 + x_7 + x_8 + 3x_9 + 2x_{10} \geq 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 0 \bullet x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 2x_6 + 3x_7 + 2x_8 + x_9 + x_{10} \geq 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 0 \bullet x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \geq 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 0 \bullet x_5 + x_6 + x_7 + 2x_8 + 2x_9 + 2x_{10} \geq 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + 0 \bullet x_6 + 2x_7 + 2x_8 + x_9 + 2x_{10} \geq 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 + 0 \bullet x_7 + x_8 + 2x_9 + 2x_{10} \geq 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 + 2x_6 + x_7 + 0 \bullet x_8 + 2x_9 + x_{10} \geq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 + 2x_7 + 2x_8 + 0 \bullet x_9 + x_{10} \geq 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + 2x_6 + 2x_7 + x_8 + x_9 + 0 \bullet x_{10} \geq 1 \end{cases}$$

$x_i \geq 0, i = \overline{1,10}$

Вторая задача:

$$\sum_{j=1}^{10} y_j \to max$$

$$\begin{cases} 0 \bullet y_1 + 3y_2 + 3y_3 + 2y_4 + y_5 + y_6 + 2y_7 + 3y_8 + 2y_9 + 3y_{10} \leq 1 \\ 3y_1 + 0 \bullet y_2 + 3y_3 + 2y_4 + 2y_5 + 3y_6 + y_7 + y_8 + 3y_9 + 2y_{10} \leq 1 \\ 3y_1 + 3y_2 + 0 \bullet y_3 + 2y_4 + 3y_5 + 2y_6 + 3y_7 + 2y_8 + y_9 + y_{10} \leq 1 \\ 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 0 \bullet y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} \leq 1 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 + 0 \bullet y_5 + y_6 + y_7 + 2y_8 + 2y_9 + 2y_{10} \leq 1 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_4 + y_5 + 0 \bullet y_6 + 2y_7 + 2y_8 + y_9 + 2y_{10} \leq 1 \\ 2y_1 + y_2 + 3y_3 + y_4 + y_5 + 2y_6 + 0 \bullet y_7 + y_8 + 2y_9 + 2y_{10} \leq 1 \\ 3y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 + 2y_5 + 2y_6 + y_7 + 0 \bullet y_8 + 2y_9 + y_{10} \leq 1 \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 + y_4 + 2y_5 + y_6 + 2y_7 + 2y_8 + 0 \bullet y_9 + y_{10} \leq 1 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 + 2y_5 + 2y_6 + 2y_7 + y_8 + y_9 + 0 \bullet y_{10} \leq 1 \end{cases}$$

$y_j \geq 0, j = \overline{1,10}$.

Решения задач: $x = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 0{,}0, 0{,}0, 0{,}0, 0\right),\ y = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 0{,}0, 0{,}0, 0{,}0, 0\right)$.

Решение матричной задачи: $I_1 = I_2 = I = 2$,

$p = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3},\ 0{,}0, 0{,}0, 0{,}0, 0\right),\ q = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3},\ 0{,}0, 0{,}0, 0{,}0, 0\right)$

6.

Матрица выигрышей:

2	−3	4	−5	6
−3	4	−5	6	−7
4	−5	6	−7	8
−5	6	−7	8	−9
6	−7	8	−9	10

$\underline{I} = -5,\ \bar{I} = 6$. Таким образом, игра не разрешима в чистых стратегиях.

Найдём решение игры в смешанных стратегиях. Для избавления от отрицательных элементов прибавим к элементам матрицы 10. Построим пару двойственных задач линейного программирования.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{5} x_i \to \min \\ 12x_1 + 7x_2 + 14x_3 + 5x_4 + 16x_5 \geq 1 \\ 7x_1 + 14x_2 + 5x_3 + 16x_4 + 3x_5 \geq 1 \\ 14x_1 + 5x_2 + 16x_3 + 3x_4 + 18x_5 \geq 1 \\ 5x_1 + 16x_2 + 3x_3 + 18x_4 + x_5 \geq 1 \\ 16x_1 + 3x_2 + 18x_3 + x_4 + 20x_5 \geq 1 \\ x_i \geq 0\ i = \overline{1,5} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{5} y_i \to \max \\ 12y_1 + 7y_2 + 14y_3 + 5y_4 + 16y_5 \leq 1 \\ 7y_1 + 14y_2 + 5y_3 + 16y_4 + 3y_5 \leq 1 \\ 14y_1 + 5y_2 + 16y_3 + 3y_4 + 18y_5 \leq 1 \\ 5y_1 + 16y_2 + 3y_3 + 18y_4 + y_5 \leq 1 \\ 16y_1 + 3y_2 + 18y_3 + y_4 + 20y_5 \leq 1 \\ y_i \geq 0\ i = \overline{1,5} \end{cases}$$

Решения задач: $x = \left(\frac{1}{80}, 0, 0, \frac{1}{20}, \frac{3}{80}\right), y = \left(\frac{1}{80}, \frac{0{,}0, 1}{20}, \frac{3}{80}\right)$.

Решение матричной игры: $I = \frac{1}{\sum_{i=1}^{10} x_i} - 10 = 10 - 10 = 0$,

$p = \left(\frac{1}{8}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right),\ q = \left(\frac{1}{8}, \frac{0{,}0, 1}{2}, \frac{3}{8}\right)$.

7.

Первый и второй игрок могут выложить в сумме от 1 до 6. Построим матрицу выигрышей. Если сумма цифр всех фишек делится на 3, то первый игрок получает 1 очко, если делится на 4 – игрок *B* получает 1 очко (в матрице записываем -1). Если сумма цифр не делится ни на 3, ни на 4 либо делится на оба числа, игроки получают 0 очков.

0	1	−1	0	1	0
1	−1	0	−1	0	−1
−1	0	1	0	−1	1
0	−1	0	−1	1	0
1	0	2	1	0	0
0	−1	1	0	0	−1

$\underline{I} = -1, \bar{I} = 1$. Таким образом, игра не разрешима в чистых стратегиях.
Найдём решение игры в смешанных стратегиях. Для избавления от отрицательных элементов прибавим к элементам матрицы 1. Тогда получим

1	2	0	1	2	1
2	0	1	0	1	0
0	1	2	1	0	2
1	0	1	0	2	1
2	1	0	2	1	1
1	0	2	1	1	0

Построим пару двойственных задач линейного программирования.

$$\sum_{i=1}^{6} x_i \to min$$

$x_1 + 2x_2 + x_4 + 2x_5 + x_6 \ \geq \ 1,$
$2x_1 + x_3 + x_5 \ \geq \ 1,$
$x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_6 \ \geq \ 1, x_1 + x_3 + 2x_5 + x_6 \ \geq 1$
,
$2x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 + x_6 \ \geq \ 1, x_1 + 2x_3 + x_4 + x_5 \ \geq \ 1$
,
$x_i \geq 0$

$$\sum_{i=1}^{6} y_i \to max$$

$y_1 + 2y_2 + y_4 + 2y_5 + y_6 \ \leq \ 1,$
$2y_1 + y_3 + y_5 \ \leq \ 1,$
$y_2 + 2y_3 + y_4 + 2y_6 \ \leq \ 1, y_1 + y_3 + 2y_5 + y_6 \ \leq \ 1$
,
$2y_1 + y_2 + 2y_4 + y_5 + y_6 \ \leq \ 1, y_1 + 2y_3 + y_4 + y_5 \ \leq \ 1$
,

$y_i \geq 0$

Решения задач: $x = \left(\frac{2}{7}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, 0, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}\right)$, $y = (\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

Решение матричной задачи: $I = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{6} x_i} = \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{6} y_j} = \dfrac{1}{1} = 1$,

$p = \left(\frac{1}{4},\ 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $q = (\frac{2}{7}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, 0, \frac{1}{7}, \frac{1}{7})$.

8.

$\underline{I} = \max\{0;\ 0{,}4;\ 0\} = 0{,}4.$

$\bar{I} = \min\{0{,}8; 0{,}6; 0{,}6; 0{,}8\} = 0{,}6.$

$\bar{I} \neq \underline{I}$, следовательно, игра не разрешима в чистых стратегиях.

Для определения оптимальных смешанных стратегий игроков и значения игры построим пару двойственных задач линейного программирования:

$$\sum_{i=1}^{3} x_i \to min,$$

$$0{,}8x_1 + 0{,}4x_2 \geq 1$$
$$0{,}6x_2 \geq 1$$
$$0{,}6x_2 \geq 1$$
$$0{,}4x_2 + 0{,}8x_3 \geq 1$$
$$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,3}$$

$$\sum_{j=1}^{4} y_i \to min,$$

$$0{,}8y_1 \leq 1$$
$$0{,}4y_1 + 0{,}6y_2 + 0{,}6y_3 + 0{,}4y_4 \leq 1$$
$$0{,}8y_4 \leq 1$$
$$y_j \geq 0,\ j = \overline{1,4}$$

Заданной смешанной стратегии $p = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ и значению игры $I = 0{,}4$ соответствует вектор $x = \left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right)$. Данный вектор не удовлетворяет ограничению $0{,}6x_2 \geq 1$.

Следовательно, этот вектор не может быть решением данной матричной игры.

Решения задач: $x = \left(\frac{5}{12}, \frac{5}{3}, \frac{5}{12}\right)$, $y = \left(\frac{5}{4},\ 0, 0, \frac{5}{4}\right)$.

Решение матричной задачи:

$I = 0{,}4$, $p = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$, $q = \left(\frac{1}{2},\ 0, 0, \frac{1}{2}\right)$.

9.

$\underline{I} = \max\{-4;\ 4;\ 2\} = 4.$

$\bar{I} = \min\{14; 8; 8\} = 8.$

$\bar{I} \neq \underline{I}$, следовательно, игра не разрешима в чистых стратегиях.

Для определения оптимальных смешанных стратегий игроков и значения игры построим пару двойственных задач линейного программирования:

$$\sum_{i=1}^{4} x_i \to min$$

$$\begin{aligned} 14x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 &\geq 1 \\ -4x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 8x_4 &\geq 1 \\ 2x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 2x_4 &\geq 1 \end{aligned}$$

$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4}.$

$$\sum_{i=1}^{3} y_i \to max$$

$$\begin{aligned} &14y_1 - 4y_2 + 2y_3 \leq 1{-}4y_1 + 8y_2 + 8y_3 \leq 1 \\ &4y_1 + 4y_2 + 4y_3 \leq 12y_1 + 8y_2 + 2y_3 \leq 1 \end{aligned}$$

$y \geq 0,\ y = \overline{1,3}.$

Заданные смешанные стратегии и значение игры не являются решением матричной игры, так как полученные решения не удовлетворяют ограничению $2x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 2x_4 \geq 1$.

Решения задач: $x = \left(\frac{1}{16},\ 0, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}\right),\ y = \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right).$

Решение матричной задачи: $I = 4, p = \left(\frac{1}{4},\ 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right),\ q = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$

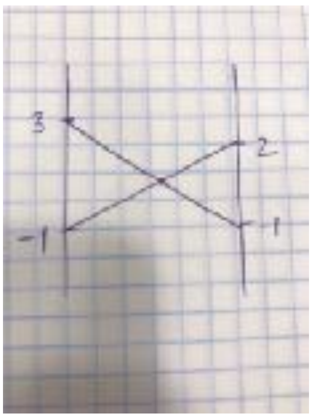
10.

а) $\underline{I} = -1, \bar{I} = 2$. Таким образом, игра не разрешима в чистых стратегиях. Для первого игрока первая стратегия доминирует над второй: $(-1,\ 1,\ 3) \geq (-1, 0, 2)$. Тогда $p_2 = 0$. Для второго игрока первая стратегия доминирует над второй: $(-1, 2) \leq (1, 2)$. Тогда $q_2 = 0$. Получим следующую матрицу выигрышей:

-1	3
2	-1

$$\begin{cases} -q_1 + 3q_2 = I \\ 2q_1 - q_2 = I \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases}.\ I = \frac{5}{7},\ q = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right).$$

$$\begin{cases} I = -1 + \left(2 - (-1)\right)p_2 \\ I = 3 + (-1 - 3)p_2 \end{cases}.\ p = \left(\frac{3}{7}, \frac{5}{7}\right).$$

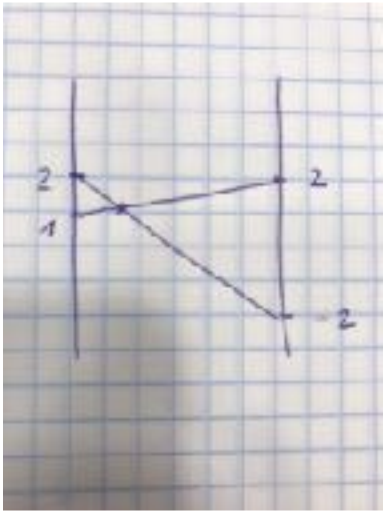


b) $\underline{I} = -1, \bar{I} = 2$. Таким образом, игра не разрешима в чистых стратегиях.
Для первого игрока вторая стратегия доминирует над первой. Тогда $p_1 = 1$.
Для второго игрока первая стратегия доминирует над пятой, третья стратегия доминирует над второй и четвёртой. Тогда $p_2 = p_4 = 0$.
Получим следующую матрицу выигрышей:

1	2
−1	3
2	−2

$$\begin{cases} p_1 + 2p_3 = I \\ 2p_1 - 2p_3 = I \\ p_1 + p_3 = 1 \end{cases}. \; I = \frac{6}{5},\ p = \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right).$$

$$\begin{cases} I = -1 + (2-1)q_2 \\ I = 2 + (-2-2)q_2 \end{cases}. \; p = \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{6}{5}\right).$$

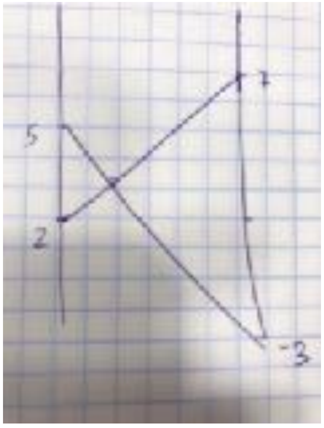


c) $\underline{I} = 2, \bar{I} = 5$. Таким образом, игра не разрешима в чистых стратегиях.
$p_2 = p_4 = q_3 = q_4 = 0$.
Получим следующую матрицу выигрышей:

2	5
7	−3

$$\begin{cases} 2q_1 + 5q_2 = I \\ 7q_1 - 3q_2 = I \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases}. \; I = \frac{41}{13},\ q = \left(\frac{8}{13}, \frac{5}{13}\right).$$

$$\begin{cases} I = 2 + (7-2)p_2 \\ I = 5 + \left(-3-5\right)p_2 \end{cases}. \; p = \left(\frac{10}{13}, \frac{3}{13}\right).$$



d) $\underline{I} = 0, \bar{I} = 1$. Таким образом, игра не разрешима в чистых стратегиях.

$p_3 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = 0$.

Получим следующую матрицу выигрышей:

2	−1
0	1

$$\begin{cases} 2q_1 - q_2 = I \\ q_2 = I \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases}. \ I = \frac{1}{2}, \ q = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

$$\begin{cases} I = 2 + (0-2)p_2 \\ I = -1 + \big(1 - (-1)\big)p_2 \end{cases}. \ p = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right).$$