Gimnazija „Bora Stanković“
Niš, Srbija

MATURSKI RAD

Predmet: Matematika

Tema: Logaritam

jednačine i nejednačine

Učenik:
Luka Nešić, IV/ 6

Profesor:
Nenad Totić

2025.

Sadržaj

1 Uvod

1.1 Definicija logaritma

Ako je

$$x = b^y$$

onda se može pisati

$$\boxed{y = \log_b x}, \tag{1}$$

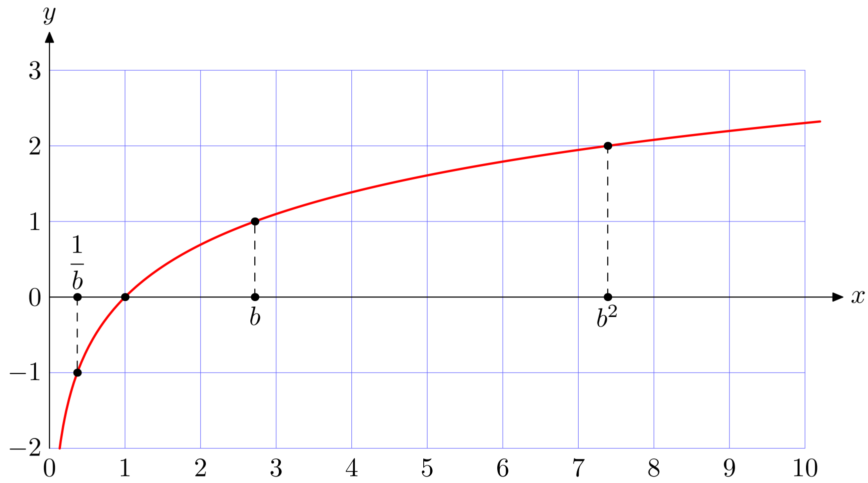
gde je b *osnova* (*baza*) logaritma, a x *argument*. (Izgovara se „y je jednako logaritam od x za osnovu b“ ili kraće „y je logaritam b od x“.) Takođe važi

$$b = x^{1/y} = \sqrt[y]{x}.$$

Sama reč *logaritam* potiče od grčkih reči $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$ (*logos*) i $\acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$ (*aritmos*), sa značenjem „broj kojim se računa“.

1.2 Grafik funkcije

Funkcija je u skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ definisana za $x > 0$ i $b > 0 \wedge b \neq 1$. Za $b > 1$ funkcija je rastuća, dok je za $b < 1$ funkcija opadajuća. Funkcija ima samo jednu *nulu*, uvek za $x = 1$. Važi *bijekcija*: $\log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x = y$.



Slika 1: Grafik logaritamske funkcije $y = \log_b x$.

1.3 Antilogaritam

Inverzna funkcija logaritmu je obično stepenovanje osnove logaritma argumentom i zove se *antilogaritam*

$$\boxed{\operatorname{antilog}_b x = \log_b^{-1} x = b^x}. \tag{2}$$

Iz same definicije važi

$$\boxed{\log_b(\operatorname{antilog}_b x) = \operatorname{antilog}_b(\log_b x) = x}. \tag{3}$$

2 Jednakosti

2.1 Logaritam stepena osnove

Po samoj definiciji logaritma, ako je $x = b^a$, onda je

$$\boxed{\log_b b^a = a}. \tag{4}$$

Ako stavimo da je $1 = b^0$, odnosno, $b = b^1$, dobijamo da je

$$\boxed{\log_b 1 = 0} \qquad \text{i} \qquad \boxed{\log_b b = 1}. \tag{5}$$

Takođe je bitna jednakost

$$\boxed{b^{\log_b x} = x} \tag{6}$$

koja proizilazi iz same definicije logaritma i antilogaritma.

2.2 Logaritam proizvoda

Ako je

$$u = \log_b x \wedge v = \log_b y \quad \Rightarrow \quad x = b^u \wedge y = b^v,$$

onda je, zbog jednakosti (4)

$$x \cdot y = b^u b^v = b^{u+v} \quad \Rightarrow \quad \log_b(x \cdot y) = \log_b b^{u+v} = u + v.$$

Odavde je

$$\boxed{\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y}. \tag{7}$$

Iz ove jednakosti se može izvesti formula za logaritam faktorujela broja. Ako je

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k \quad \Rightarrow \quad \log(n!) = \sum_{k=1}^{n} \log k.$$

(Zanimljivo je da je $\log(1 \cdot 2 \cdot 3) = \log(1 + 2 + 3) = \log 1 + \log 2 + \log 3$.)

2.3 Logaritam količnika

Slično logaritmu proizvoda, ako je

$$u = \log_b x \wedge v = \log_b y \quad \Rightarrow \quad x = b^u \wedge y = b^v,$$

onda je, zbog jednakosti (4)

$$x/y = b^u b^{-v} = b^{u-v} \quad \Rightarrow \quad \log_b(x/y) = \log_b b^{u-v} = u - v.$$

Odavde je

$$\boxed{\log_b(x/y) = \log_b x - \log_b y}. \tag{8}$$

Iz ove jednakosti sledi

$$\boxed{\log_b(1/x) = -\log_b x}. \tag{9}$$

2.4 Logaritam stepena broja

Ako je

$$y = x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ puta}},$$

onda, iz jednakosti za logaritam proizvoda (7), sledi da je

$$\log_b y = \log_b(\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ puta}}) = \underbrace{\log_b x + \log_b x + \cdots + \log_b x}_{n \text{ puta}} = n \log_b x,$$

odakle je

$$\boxed{\log_b x^n = n \log_b x}. \tag{10}$$

Iz ove jednakosti može se izvesti i jednakost

$$\boxed{\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_b x}. \tag{11}$$

Odavde se može izvesti jednakost

$$\boxed{x^y = b^{y \log_b x}}. \tag{12}$$

2.5 Promena osnove logaritma

Ako je

$$y = \log_a x \quad \Rightarrow \quad x = a^y,$$

onda je

$$\log_b x = \log_b a^y = y \log_b a = \log_a x \cdot \log_b a.$$

Odavde je

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}. \tag{13}$$

Iz ove jednakosti, ako stavimo da je $x = b$, se dobija i jednakost

$$\boxed{\log_a b \cdot \log_b a = 1}. \tag{14}$$

Iz jednakosti (4) i (13), ako stavimo da je $a = b^n$, sledi jednakost

$$\boxed{\log_{b^n} x = \frac{1}{n} \log_b x}. \tag{15}$$

Odavde, ako stavimo da je $n = -1$, sledi

$$\boxed{\log_{1/b} x = -\log_b x}, \tag{16}$$

a uzevši u obzir i jednakost (9) dobija se

$$\boxed{\log_{1/b} x = \log_b(1/x)}. \tag{17}$$

3 Najčešće logaritamske osnove

3.1 Osnova 10

U iniženjerstvu se najčešće koristi osnova logaritma 10, zove se *dekadni* ili *zajednički* logaritam, i piše se

$$y = \log_{10} x$$

ili, skraćeno,

$$y = \lg x.$$

Ponekad se može videti i samo

$$y = \log x,$$

bez navođenja osnove, ali treba obratiti pažnju na kontekst. Ako je neki inženjerski tekst u pitanju, najverovatnije se misli na osnovu 10.

Dekadni logaritam je pogodan i kada se koristi, takozvani *naučni* ili *inženjerski* zapis broja. Na primer, *Plankova konstanta* (Max Planck) iznosi

$$h = 6{,}62607015 \times 10^{-34}$$

koja ima dekadni logatiram

$$\log_{10} h = \log_{10}(6{,}62607015) - 34.$$

U fizici se za merenje nivoa signala ili zvuka koristi jedinica *bel* (B), ali je češće u praktičnoj upotrebi 10 puta manja jedinica *decibel* (dB), odnosno, $1\,\mathrm{B} = 10\,\mathrm{dB}$. Nivo signala L, koji zavisi od odnosa izmerene snage P i refrentne snage P_0, izražen u decibelima iznosi

$$L = 10 \log_{10} \left(\frac{P}{P_0} \right) \mathrm{dB}.$$

Kako se u akustici uzima da je referentna snaga $P_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W}$, moglo bi se pisati da je nivo zvuka u decibelima

$$L = 10 \log_{10}(P) - 120.$$

Normalan govor je oko 50 dB, zvuk motora mlaznog aviona pri poletanju je 150 dB, a smrtonosan je zvuk od 240 dB i više. Zvučni top Genasys LRAD ima nivo zvuka od oko 160 dB, što znači da je 10^{11} puta moćniji od govora.

Slična formula se koristi i za određivanje jačine zemljotresa.

3.2 Osnova 2

U informatici se često koristi logaritam sa osnovom 2, koji se zove *binarni* logaritam, i piše se

$$y = \log_2 x$$

ili, skraćeno,

$$y = \operatorname{lb} x.$$

Koristi se u kombinatorici, kao i u određivanju *količine informacija*, odnosno, potrebnog broja bitova memorije za smeštanje nekog podatka. Ako se zna da će u memoriju biti upisivani celi brojevi od 0 do n, onda je potrebno rezevisati

$$bits = \lfloor \log_2(n) \rfloor + 1$$

bitova memorije, gde $\lfloor x \rfloor$ predstavlja *najveći ceo broj koji je manji ili jednak* x (izgovara se „najveće celo od x“). Na primer, ako će u određenoj memoriji najveći broj biti milion, onda je za to potrebno rezevisati

$$bits = \lfloor \log_2(1\,000\,000) \rfloor + 1 = \lfloor 19{,}9315685693 \rfloor + 1 = 19 + 1 = 20$$

bitova memorije. Najveći broj koji može stati u ovih rezervisanih 20 bitova memorije je binarni broj koji ima 20 jedinica i iznosi

$$(1111\,1111\,1111\,1111\,1111)_2 = 2^{20} - 1 = 1\,048\,575.$$

Kako su i realni brojevi u memoriji predstavljeni kao uređeni parovi binarnih brojeva u obliku $(mantisa, eksponent)$, sa značenjem

$$x = mantisa \times 2^{eksponent},$$

binarni logaritam bi bio izračunat kao

$$\log_2(x) = \log_2(mantisa) + eksponent,$$

ako je $mantisa > 0$, inače je nedefinisan.

Binarni logaritam se koristi i u atomskoj fizici. Vreme *poluraspada* $t_{1/2}$ je vreme potrebno da se raspadne polovina jezgara atoma neke materije. Ako imamo početan broj jezgara N_0 i broj jezgara N_t nakon vremena t, njihov odnsos se može predstaviti formulom

$$\frac{N_0}{N_t} = 2^{t/t_{1/2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{t}{t_{1/2}} = \log_2\left(\frac{N_0}{N_t}\right). \tag{18}$$

Ova formula se koristi i za određivanje starosti stena ili fosila.

3.3 Osnova e

Ovu logaritamsku osnovu je otkrio Jakob Bernuli (Jacob Bernoulli) kada je proučavao *složenu kamatu* i dokazao da *kontinualna* složena kamata teži konstanti

$$\mathbf{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

ali je Ojler (Leonhard Euler) odredio njenu vrednosti i dao joj ime. Logaritam za ovu osnovu se zove *prirodni* logaritam (*logarithmus naturalis*) i piše se

$$\ln x = \log_{\mathbf{e}} x.$$

Antilogaritam je $\mathbf{e}^x$, koji se kao funkicja piše $\exp(x)$, i zove se *eksponencijalna funkcija*. Ova funkcija je poznata po tome što je to jedina funkcija čiji je izvod jednak samoj funkciji. Brojna vrednost se može izračunati formulom

$$\boxed{\mathbf{e}^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}. \tag{19}$$

Ako stavimo da je $x = 1$, brojna vrednost osnove prirodnog logaritma $\mathbf{e}$ se može odrediti

$$\begin{aligned}\mathbf{e} &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots \\ &= 2{,}7182818284\,5904523536\,0287471352\,6624977572\,\ldots\end{aligned} \tag{20}$$

sa željenom tačnošću.

4 Brojna vrednost

4.1 Formula

Brojna vrednost prirodnog logaritma može biti izračunata pomoću formule

$$\boxed{\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2n+1}} \tag{21}$$

do željene tačnosti. Postupak kojim se računa $y = \ln x$ sa tačnošću ε izgleda ovako:

$$\begin{array}{l} r \leftarrow (x-1)/(x+1); \quad k \leftarrow 1; \quad p \leftarrow 2r; \quad q \leftarrow r^2; \quad a \leftarrow p; \quad y \leftarrow a; \\ \text{ponavljati dok je } |a| > \varepsilon: \\ \quad k \leftarrow k+2; \quad p \leftarrow p \cdot q; \quad a \leftarrow p/k; \quad y \leftarrow y+a; \end{array} \tag{22}$$

(Videti zadatak 6.4.3 na strani 18.) Ovim postupkom se može izračunati konstanta

$$\begin{aligned} \ln 2 &= \frac{2}{1 \cdot 3^1} + \frac{2}{3 \cdot 3^3} + \frac{2}{5 \cdot 3^5} + \frac{2}{7 \cdot 3^7} + \frac{2}{9 \cdot 3^9} + \cdots \\ &= 0{,}6931471805\,5994530941\,7232121458\,1765680755\,\ldots \end{aligned}$$

kao i konstanta

$$\ln 10 = 2{,}3025850929\,9404568401\,7991454684\,3642076011\,\ldots$$

Ove konstante se koriste prilikom izračunavanja vrednosti binarnog, odnosno, dekadnog logaritma

$$\operatorname{lb} x = \log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}, \qquad \lg x = \log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

4.2 Verižni razlomak

Brojna vrednost prirodnog logaritma može se izračunati i pomoću *verižnog razlomka*

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \cfrac{x}{1 + \cfrac{1^2 x}{2 - 1x + \cfrac{2^2 x}{3 - 2x + \cfrac{3^2 x}{4 - 3x + \ddots}}}} \\ &= \cfrac{x}{1 + \mathop{\mathrm{K}}\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2 x}{n+1-nx}}. \end{aligned}$$

Poput simbola koji se koriste za sumu 'Σ' ili proizvod 'Π', Gaus (Carl Friedrich Gauss) je smislio, verovatno, najpogodniji način za predstavljanje verižnih (lančanih) razlomaka, gde simbol 'K' potiče od nemačke reči za *prekinuti lanac* (*Kettenbruch*). Izraz iza ovog simbola pokazuje kako izgleda *opšti član* verižnog razlomka.

Ako pomoću ove formule izračunamo prvih 11 *konvergenata* $\ln 2$ kao $-\ln(1-1/2)$, dobićemo

$$\ln 2 \approx \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{131}{192}, \frac{661}{960}, \frac{1327}{1920}, \frac{1163}{1680}, \frac{148969}{215040}, \frac{447047}{645120}, \frac{44711}{64512}, \frac{983705}{1419264}, \ldots$$

gde je poslednji razlomak tačan na 5 decimala.

4.3 Logaritamske tablice

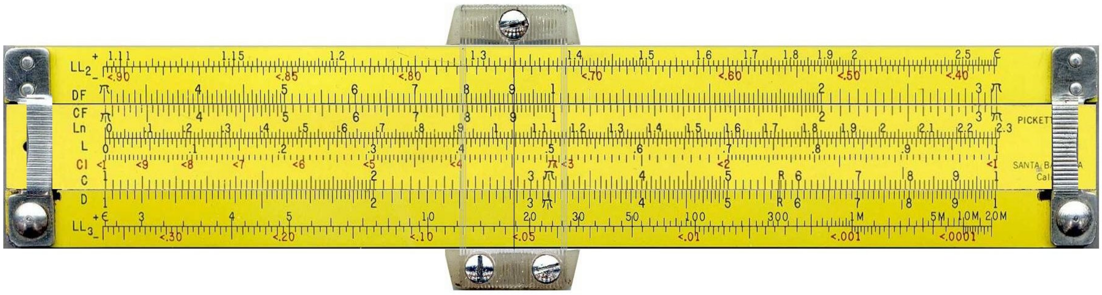
Prve tablice logaritama je izračunao Neper (John Napier of Merchiston) 1614. godine, koje su praktično sadržale logaritam za osnaovu $1/\mathbf{e}$, sa skaliranim argumentom i rezultatom, iako sam Neper nije znao za konstantu $\mathbf{e}$. Savremenim zapisom bi ovaj logaritam bio definisan kao

$$\mathrm{NapLog}(x) = 10^7 \log_{1/\mathbf{e}}(x/10^7) = -10^7 \ln(x/10^7).$$

Nekoliko godina kasnije, 1617. i 1624, Brigs (Henry Briggs) je izračunao tablice dekadnih logaritama sa 14 cifara tačnosti, koje se uz dopune i ispravke koriste i danas pod imenom *Brigsove tablice*.

4.4 Logaritmar

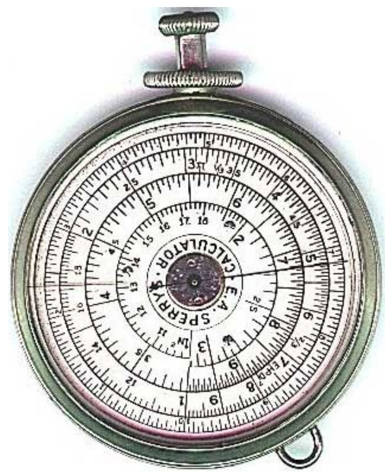
Pre pojave digitrona, za približno određivanje brojne vrednosti logaritma, koristila se je analogna mehanička sprava sa nekoliko lenjira zvana *logaritmar*.



Slika 2: Šiber.

Lenjiri imaju podeoke sa decimalom i logaritamskom, a često i sa sinusnom skalom. Jedan od lenjira je bio klizni, te otuda popularno ime *šiber* (od nemačkog *Rechenschieber*). Koristi se jednostavno, pomeranjem klizača i čitanjem vrednosti sa odgovarajuće skale. (Videti zadatke 6.4.1 i 6.4.2.)

Postojale su i kružne varijante, pa i džepne, gde je džepni sat sa logaritmarom i kompasom bio „iPhone“ XIX i prve polovine XX veka.



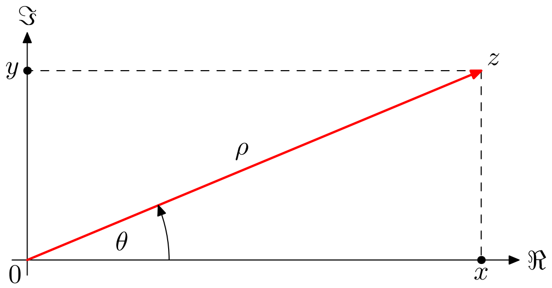
Slika 3: Džepni logaritmar.

Tablice i logaritmari se i danas koriste u vojsci, kao rezerva u slučaju otkazivanja elektronike. Prvi kompjuter ENIAC (Electronic Numerical Integrator And Computer) je napravljen 1946. godine da bi izračunao tablice za vojsku.

5 Razno

5.1 Kompleksni logaritam

Ako u kompleksnoj ravni imamo kompleksan broj $z \in \mathbb{C}$,



Slika 4: Broj z u kompleksnoj ravni.

koji može biti predstavljean kao

$$\begin{aligned} z &= x + iy && \text{pravougle koordinate} \\ &= \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta) && \text{polarne koordinate} \\ &= \rho\,\mathbf{e}^{i\theta} && \text{Ojlerova formula} \end{aligned}$$

onda se, iz Ojlerove formule i jednakosti (7) i (4), dobija

$$\boxed{\ln z = \ln\rho + i\theta}\,. \tag{23}$$

Pošto je $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$, sledi da prirodni logaritam kompleksnog broja z nije definisan ($\tilde{\infty}$) samo za $z = 0$. Kako je $y/x = \tan\theta$, prirodni logaritam kompleksnog broja, predstavljenog pravouglim koordinatama, iz formule (23), može se izračunati

$$\boxed{\ln(x + iy) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}\,. \tag{24}$$

I za kompleksne brojeve važi jednakost promene baze (13), tako da za dva kompleksna broja z i w, gde je $z \neq 0$, $w \neq 0$ i $w \neq 1$, sledi

$$\log_w z = \frac{\ln z}{\ln w},$$

gde se $\ln z$ i $\ln w$ računaju pomoću formule (23), odnosno, (24). Na primer,

$$\log_{2+i}(3 + 4i) = 2, \qquad \log_i \mathbf{e} = \frac{2}{i\pi}.$$

Iz Ojlerove formule se može dobiti, kako je nazvana, *najlepša formula u istoriji matematike*, u kojoj je upotrebljeno 5 najvažnijih matematičkih konstatnti $(0, 1, \pi, \mathbf{e}, i)$

$$\boxed{\mathbf{e}^{i\pi} + 1 = 0}\,,$$

gde, ako prebacimo 1 na desnu stranu i *logaritmujemo*, dobijamo zanimljiva jednakost

$$\frac{\ln(-1)}{\sqrt{-1}} = \pi.$$

Još jedna zanimljiva jednakost se može dobiti pomoću kompleksnog logaritma, a to je vrednost i^i. Kako i ima polarne koordinate $\rho = 1$ i $\theta = \pi/2$, ako ga predstavimo Ojlerovom formulom kao $i = \mathbf{e}^{i\pi/2}$ i iz jednakosti (12) i (4), sledi da je

$$i^i = \mathbf{e}^{i \ln i} = \mathbf{e}^{i \ln \mathbf{e}^{i\pi/2}} = \mathbf{e}^{i^2\pi/2} = \mathbf{e}^{-\pi/2} \approx 0.20788$$

realan broj.

5.2 Izvod

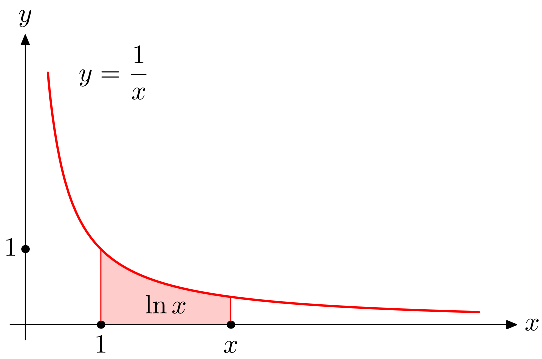
Ako je

$$y = \ln x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x},$$

odakle se, pomoću jednakosti (13) i jednakosti za izvod složene funkcije, može dobiti

$$\boxed{y = \log_b(f(x)) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{f'(x)}{f(x)\ln b}}. \tag{25}$$

Površina figure ispod funkcije $y = 1/x$ do x-ose, u opsegu od 1 do x iznosi $\ln x$. (Matematički zapisano: $\int_1^x dx/x = \ln x$.)



Slika 5: Geometrijsko značenje $\ln x$.

(Na slici je $x = \mathbf{e}$, tako da je površina osenčane figure jednaka 1.)

5.3 Limes

Ojler je dokazao da je

$$\ln x = \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1).$$

5.4 Teorema prostih brojeva

Još jedno mesto gde se pojavljuje prirodni logaritam u *teoriji brojeva* je, takozvana, *teorema prostih brojeva* (PNT), kojom se je bavio Gaus kada je imao samo 15–16 godina.

Ako funkcija $\pi(n)$ ima vrednost *ukupan broj prostih brojeva manjih ili jednakih od* n, onda važi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)\ln n}{n} = 1.$$

Posledica ove teoreme je da je n-ti prost broj p_n, za veliko n, otprilike

$$p_n \sim n \ln n.$$

6 Zadaci i rešenja

6.1 Jednačine

6.1.1 FIT-prijemni

▷ **Zadatak:** Nađi rešenje jednačne

$$\log_2(x-2) + \log_4(x-2) + \log_{16}(x-2) = 7.$$

(Zadatak sa mog prijemnog ispita na FIT.)

Rešenje: Vidimo da su osnove logaritama stepeni broja 2, pa iz jednakosti za logaritam stepena osnove (15) sledi

$$\begin{aligned} \log_2(x-2) + \log_{2^2}(x-2) + \log_{2^4}(x-2) &= \\ \log_2(x-2) + \frac{1}{2}\log_2(x-2) + \frac{1}{4}\log_2(x-2) &= \\ \frac{7}{4}\log_2(x-2) &= 7, \end{aligned}$$

odnosno, posle skraćivanja,

$$\log_2(x-2) = 4.$$

Odavde je

$$x - 2 = 2^4 = 16 \quad \Rightarrow \quad x = \boxed{18}.$$

6.1.2 Jednačina 2

▷ **Zadatak:** Reši jednačinu

$$2\log(x) - \log(6-x) = 0.$$

Rešenje: Da bi logaritam u jednačini bio definisan mora biti

$$x > 0 \land 6 - x > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < x < 6.$$

Zbog jednakosti (10) možemo pisati

$$\log(x^2) = \log(6-x)$$

odakle sledi

$$\begin{aligned} x^2 &= 6 - x \\ x^2 + x - 6 &= 0. \end{aligned}$$

Rešavanjem kvadratne jednačine

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm 5}{2}, \end{aligned}$$

dobijamu rešenja $x_1 = 2$ i $x_2 = -3$, odakle je jedinstveno rešenje

$$x = \boxed{2}.$$

6.1.3 JJJJ

▷ **Zadatak:** Reši jednačinu
$$\ln(x) = \ln(15 - x) - \ln(x + 1).$$

Rešenje: Jednačina je definisana za
$$x > 0 \wedge 15 - x > 0 \wedge x + 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < x < 15.$$
Ako zapišemo jednačinu kao
$$\ln(x) + \ln(x + 1) = \ln(15 - x)$$
iz jednakosti za logaritam proizvoda (7), možemo pisati
$$\begin{aligned} \ln(x(x + 1)) &= \ln(15 - x) \\ \ln(x^2 + x) &= \ln(15 - x) \\ x^2 + x &= 15 - x \\ x^2 + 2x - 15 &= 0 \end{aligned}$$
Rešavanjem kvadratne jednačine dobijamo 2 rešenja, $x_1 = 3$ i $x_2 = -5$, ali zbog uslova, ostaje jedinstveno
$$x = \boxed{3}.$$

6.1.4 Četiri četvorke

▷ **Zadatak:** Dokazati da svaki prirodan broj $n \in \mathbb{N}$, može biti predstavljen sa 4 broja 4, pomoću logaritamske funkcije i kvadratnog korena
$$n = \log_{\sqrt{4}/4}\left(\log_4 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{4}}}}_{n \text{ korena}}\right).$$

Rešenje: Kako je
$$\frac{\sqrt{4}}{4} = \frac{1}{2} \qquad \text{i} \qquad \underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{4}}}}_{n \text{ korena}} = 4^{(1/2)^n},$$
izraz može biti uprošćen
$$\log_{\sqrt{4}/4}\left(\log_4 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{4}}}}_{n \text{ korena}}\right) = \log_{1/2}\left(\log_4 4^{(1/2)^n}\right),$$
gde iz jednakosti za logaritam stepena osnove (4), sledi
$$\begin{aligned} &= \log_{1/2}(1/2)^n \\ &= \boxed{n}. \end{aligned}$$

Davno je u jednom časopisu postavljen sličan zadatak: da se sa što manje istih brojeva, koristeći bilo koju matematičku funkciju, predstavi svaki prirodan broj n. Rešio ga je nobelovac Pol Dirak (Paul Dirac) sa 3 broja 2, čije originalno rešenje izgleda
$$-\ell og_2\, \ell og_2 \sqrt{\cdots n \cdots \sqrt{2}} = -\ell og_2\, \ell og_2\, 2^{2^{-n}} = -\ell og_2\, 2^{-n} = n. \qquad \square$$

6.1.5 Sveska 1

▷ **Zadatak:** Nađi x ako je

$$x^{\log x} = 1000x^2.$$

Rešenje: Ako logaritmujemo obe strane dobijamo

$$\begin{aligned} \log x^{\log x} &= \log(1000x^2) \\ \log x \log x &= \log 1000 + \log x^2 \\ \log^2 x &= 3 + 2\log x, \end{aligned}$$

gde, posle smene $t = \log x$, dobijamo kvadratnu jednačinu

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

čija su rešenja $t_1 = 3$ i $t_2 = -1$, odakle su

$$x_1 = 10^3 = \boxed{1000} \quad \text{i} \quad x_2 = 10^{-1} = \boxed{\frac{1}{10}}.$$

6.1.6 Beskonačni koren

▷ **Zadatak:** Odredi vrednost

$$x = \ln\left(\mathbf{e}\sqrt[2]{\mathbf{e}\sqrt[3]{\mathbf{e}\sqrt[4]{\mathbf{e}\sqrt[5]{\cdots}}}}\right)$$

gde je $\mathbf{e}$ osnova prirodnog logaritma.

Rešenje: Kako je $\ln \mathbf{e} = 1$, a koristeći jednakost za logaritam proizvoda (7) i jednakost za logaritam korena (11), možemo pisati

$$\begin{aligned} &= 1 + \frac{1}{2}\ln\left(\mathbf{e}\sqrt[3]{\mathbf{e}\sqrt[4]{\mathbf{e}\sqrt[5]{\cdots}}}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\ln\left(\mathbf{e}\sqrt[4]{\mathbf{e}\sqrt[5]{\cdots}}\right)\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{4}\ln\left(\mathbf{e}\sqrt[5]{\cdots}\right)\right)\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{5}\ln(\cdots)\right)\right)\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} + \cdots \\ &= \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots \end{aligned}$$

Ako pogledamo formulu (20) na strani 7, možemo videti da je ovaj zbir jednak

$$x = \boxed{\mathbf{e} - 1},$$

jer iz sume za izračunavanje $\mathbf{e}$ nedostaje *nulti* član $1/0! = 1$.

6.2 Nejednačine

6.2.1 11

▷ **Zadatak:** Reši nejednačinu

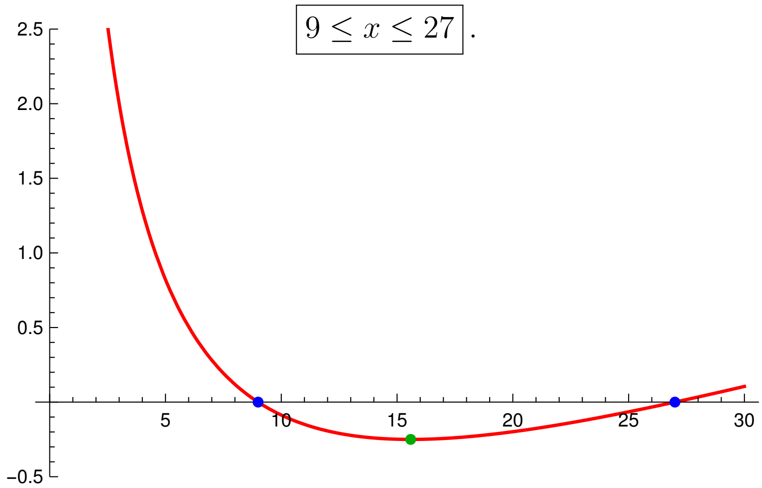
$$\log_3^2 x - 5\log_3 x + 6 \leq 0.$$

Rešenje: Kada izvršimo zamenu $t = \log_3 x$, možemo pisati da je

$$t^2 - 5t + 6 \leq 0$$

Kako su rešenja kvadratne jednačine $t_1 = 2$ i $t_2 = 3$, nejednačina je zadovoljena kada je $t \in [2, 3]$. Pošto je $x = 3^t$, sledi da je nejednačina zadovoljena za $x \in [3^2, 3^3]$, odnosno,

$$\boxed{9 \leq x \leq 27}.$$



Slika 6: $y = \log_3^2 x - 5\log_3 x + 6$.

Dodatak: Funkcija imam minimum za $t = 5/2$, odnosno, u tački $(9\sqrt{3}, -1/4)$.

6.2.2 10

▷ **Zadatak:** Reši nejednačinu

$$\log_5 x \geq \frac{1}{2}\log_5(3x - 2).$$

Rešenje: Da bi logaritam bio definisan, vidimo da mora biti

$$3x - 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{2}{3}.$$

Ako nejednačinu pomožimo sa 2 , dobijamo

$$\begin{aligned} 2\log_5 x &\geq \log_5(3x - 2) \\ \log_5 x^2 &\geq \log_5(3x - 2) \\ x^2 &\geq 3x - 2 \\ x^2 - 3x + 2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Kvadratna jednačina ima rešenja $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$, pa je rešenje nejednačine

$$x \in \boxed{\left(\frac{2}{3}, 1\right] \cup [2, \infty)}.$$

6.3 Razni primeri

6.3.1 Poluraspad joda

▷ **Zadatak:** Ako imamo 63 g izotopa joda ^{131}I, a znamo da smo pre 11 dana imali 163 g, koje je vreme poluraspada ovog izotopa? (Koristi prirodni logaritam.)

Rešenje: Iz formule (18) na strani 7, sledi da se vreme poluraspada može izračunati

$$t_{1/2} = \frac{t}{\log_2(m_0/m_t)} = \frac{t\ln 2}{\ln(m_0/m_t)} = \frac{11\ln 2}{\ln(163/63)} \approx \boxed{8.02\,\text{dana}}.$$

6.3.2 Decimalne cifre

▷ **Zadatak:** Koliko decimalnih cifara ima 128-bitna promenljiva?

Rešenje: $d = \lfloor \log_{10} 2^{128} \rfloor + 1 = \lfloor 128 \log_{10} 2 \rfloor + 1 = \lfloor 38.5318 \rfloor + 1 = 38 + 1 = \boxed{39}$.

6.3.3 Izvod

▷ **Zadatak:** Odredi izvod funkcije $f(\alpha) = \log_3(\cos\alpha)$.

Rešenje: Kako je izvod $\cos\alpha$ jednak $-\sin\alpha$ i iz jednakosti za izvod logaritma funkcije (25), sledi da je

$$f'(\alpha) = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha \ln 3} = \boxed{-\frac{\tan\alpha}{\ln 3}}.$$

6.3.4 Geometrijski niz

▷ **Zadatak:** Za $0 \leq x < 1$, uprostiti izraz

$$y = \log(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots).$$

Rešenje: Kako je zbir[1] beskonačnog geometrijskog niza

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x},$$

može se pisati

$$y = \log\left(\frac{1}{1-x}\right),$$

gde iz jednakosti za recipročnu vrednost (9), sledi

$$= \boxed{-\log(1-x)}.$$

[1]**Dokaz:** Ako je $s = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = 1 + x \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots) = 1 + x \cdot s$, onda sledi $s = 1/(1-x)$. $\square$

6.4 Ručni rad

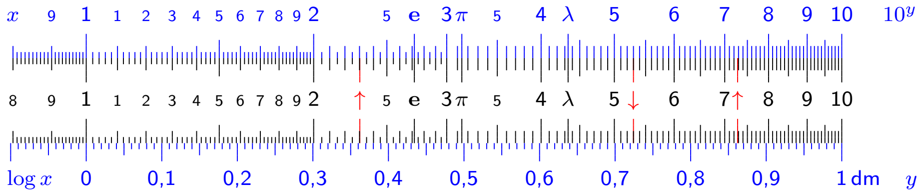
6.4.1 Analogni kvadratni koren

▷ **Zadatak:** Objasni način za određivanje vrednosti $\sqrt{x}$ logaritmarom.

Rešenje: Kvadratni koren se može direktno čitati sa logaritmara ako *u glavi* izvršimo deljenje sa 2, i po potrebi, sabiranje sa 0,5, što je vrlo jednostavno, jer se radi o brojevima između 0 i 1 sa najviše 3 decimale. Kako je

$$\sqrt{x} = 10^{\frac{1}{2}\log x},$$

potrebno je pročitati vrednost $\log x$, a onda za dvostruko manju vrednost od nje, pročitati vrednost 10^y. Na primer, za izračunavanje $\sqrt{5{,}3}$, čitamo da je $\log 5{,}3 \approx 0{,}724$, a onda čitamo vrednost 10^y za $y = 0{,}724/2 = 0{,}362$ i dobijamo $\sqrt{5{,}3} \approx 2{,}3$.



Za $\sqrt{53}$ treba u y dodati još 0,5 tako da je $y = 0{,}362 + 0{,}5 = 0{,}862$, odakle je $\sqrt{53} \approx 7{,}28$. Naravno, $\sqrt{530}$ se računa kao $10\sqrt{5{,}3}$, ili $\sqrt{0{,}53} = \frac{1}{10}\sqrt{53}$.

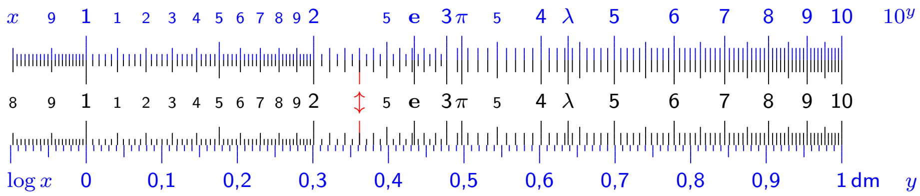
6.4.2 Analogni stepen

▷ **Zadatak:** Odredi logaritmarom približnu vrednost $z = 2{,}3^{1{,}7}$.

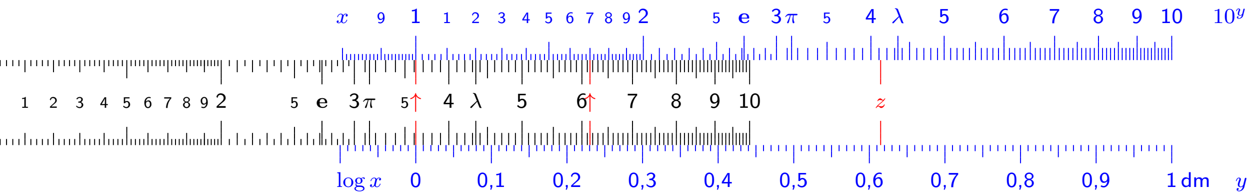
Rešenje: Pomoću jednakosti (12) predstavimo

$$z = 2{,}3^{1{,}7} = 10^{1{,}7\cdot\log(2{,}3)}.$$

Prvo određujemo vrednost $\log(2{,}3)$ tako što nalazimo $x = 2{,}3$ i čitamo ispod njega vrednost $\log x$ (vidi nit obeleženu sa '$\updownarrow$').



Nalazimo da je $\log(2{,}3) \approx 0{,}362$. Nakon toga, tu vrednost na klizaču poravnavamo sa $x = 1$. Kako na klizaču ne postoji 0,362, postavićemo na 3,62, s tim što ćemo rezultat podeliti sa 10. Sada, za $x = 1{,}7$ čitamo vrednost na klizaču ispod



i nalazimo da je oko 6,15, što znači da je $1{,}7 \cdot \log(2{,}3) \approx 0{,}615$. Nakon toga, za $y = 0{,}615$ čitamo vrednost 10^y i nalazimo da je oko 4,12 što je i rešenje

$$z = 2{,}3^{1{,}7} \approx \boxed{4{,}12},$$

a tačna vrednost je $z = 4{,}120380\ldots$

6.4.3 ln 3

▷ **Zadatak:** Pomoću postupka (22) sa strane 8, izračunati *peške* približnu vrednost $\ln 3$, u 5 koraka. Za upoređivanje, tačna vrednost je

$$\ln 3 = 1{,}0986122886\,6810969139\,5245236922\,5257046475\,\ldots$$

Rešenje: Za $x = 3$, izraz $r = (x-1)/(x+1) = 1/2$. U nultom koraku postavljamo početne vrednosti:

Korak *0.* $\quad k = 1, \quad p = 2r = 1, \quad q = r^2 = 1/4, \quad a = p = 1, \quad y = a = 1.$

Slede koraci iteracije — povećamo k za 2, pomnožimo p sa q, član sume a postaje p/k, koga dodajemo u rezultat y:

Korak *1.* $\quad k = 3, \quad p = 1/4, \quad a = 1/12, \quad y = 13/12;$

Korak *2.* $\quad k = 5, \quad p = 1/16, \quad a = 1/80, \quad y = 263/240;$

Korak *3.* $\quad k = 7, \quad p = 1/64, \quad a = 1/448, \quad y = 7379/6720;$

Korak *4.* $\quad k = 9, \quad p = 1/256, \quad a = 1/2304, \quad y = 88583/80640;$

Korak *5.* $\quad k = 11, \quad p = 1/1024, \quad a = 1/11264, \quad y = 3897967/3548160.$

Rezultat je

$$\ln 3 \approx \frac{3897967}{3548160} \approx \boxed{1{,}0986},$$

što je prilično tačno za samo 5 koraka, jer je apsolutna greška oko $2{,}4 \times 10^{-5}$.

Da smo računali u 20 koraka, dobili bi smo $\ln 3 = \frac{63608390698223636810983847З}{578988523561291667944243200}$, greška bi bila oko 7×10^{-15}, što je preciznost s kojom je 1617. godine Brigs izračunao svoje logaritamske tablice.

7 Reference

7.1 Literatura

[*1*] Larousse: „Matematika“, *Opšta enciklopedija* (1967)

[*2*] Nebojša Ikodinović, Slađana Dimitrijević, Suzana Aleksić: „Udžbenik sa zbirkom zadataka za 2. razred gimnazije“, *Matematika 2* (2019)

[*3*] Vene Bogoslavov: „Zbirka rešenih zadataka iz matematike 2“, (2008–2011)

[*4*] Marjan Matejić, Lidija Stefanović, Branislav Ranđelović, Igor Milovanović: „Kompleti zadataka za prijemni ispit“, *Matematika* (2011)

[*5*] Rade Nikolić: „Zadaci za prijemni ispit iz matematike na Fakultet informacionih tehnologija“, (2020)

[*6*] Gradimir V. Milovanović, Đorđe R. Đorđević: „Programiranje numeričkih metoda“, (1981)

[*7*] Donald E. Knuth: „Seminumerical Algorithms“, *The Art of Computer Programming* (1968–)

[*8*] Dragoljub Vasić, Vene Bogoslavov, Gliša Nešković: „Logaritamske tablice“, (2008)

[*9*] Henry Briggs: „Arithmetica logarithmica“, (1624)

7.2 Linkovi

[*1*] WIKIPEDIA — Logarithm
`https://en.wikipedia.org/wiki/Logarithm`

[*2*] Wolfram MathWorld — Logarithm
`https://mathworld.wolfram.com/Logarithm.html`

[*3*] Wolfram MathWorld — Antiogarithm
`https://mathworld.wolfram.com/Antilogarithm.html`

[*4*] Wolfram Language & System Documentation Center — Logarithm
`https://reference.wolfram.com/language/ref/Log.html`

[*5*] A reconstruction of the tables of Briggs' *Arithmetica logarithmica* (1624)
`https://inria.hal.science/inria-00543939/PDF/briggs1624doc.pdf`

[*6*] Newman's Short Proof of the Prime Number Theorem
`https://people.mpim-bonn.mpg.de/zagier/files/doi/10.2307/2975232/fulltext.pdf`

[*7*] YouTube — Log Tables — Numberphile
`https://www.youtube.com/watch?v=VRzH4xB0GdM`

[*8*] YouTube — The iPhone of Slide Rules — Numberphile
`https://www.youtube.com/watch?v=xRpR1rmPbJE`

[*9*] YouTube — The Four 4s — Numberphile
`https://www.youtube.com/watch?v=Noo4lN-vSvw`