

Gimnazija „Bora Stanković“  
Niš, Srbija

# MATURSKI RAD

Predmet: Matematika

Tema: Logaritam  
*jednačine i nejednačine*

Učenik:  
Luka Nešić, IV/6

Profesor:  
Nenad Totić

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>3</b>
1.1	Definicija logaritma . . . . .	3
1.2	Tok i grafik funkcije . . . . .	3
1.3	Antilogaritam . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Logaritamske jednakosti</b>	<b>4</b>
2.1	Logaritam stepena osnove . . . . .	4
2.2	Logaritam proizvoda . . . . .	4
2.3	Logaritam količnika . . . . .	4
2.4	Logaritam stepena broja . . . . .	5
2.5	Promena osnove logaritma . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Najčešće logaritamske osnove</b>	<b>6</b>
3.1	Osnova 10 . . . . .	6
3.2	Osnova 2 . . . . .	6
3.3	Osnova $e$ . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Brojna vrednost logaritma</b>	<b>8</b>
4.1	Formula . . . . .	8
4.2	Verižni razlomak . . . . .	8
4.3	Logaritamske tablice . . . . .	9
4.4	Logaritmar . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Razno</b>	<b>10</b>
5.1	Kompleksni logaritam . . . . .	10
5.2	Kvaternioni . . . . .	11
5.3	Izvod . . . . .	12
5.4	Integral . . . . .	12
5.5	Limes . . . . .	12
5.6	Benfordov zakon . . . . .	12
<b>6</b>	<b>Zadaci i rešenja</b>	<b>13</b>
6.1	Jednačine . . . . .	13
6.1.1	FIT . . . . .	13
6.1.2	Jednačina 2 . . . . .	13
6.1.3	Jjjj (yafe) . . . . .	14
6.1.4	Četiri četvorke . . . . .	14
6.1.5	Sveska 7 . . . . .	15
6.1.6	Beskonačni koren . . . . .	15
6.1.7	Net 3 . . . . .	16
6.1.8	Izumiranje . . . . .	16
6.1.9	Pitagora . . . . .	17
6.2	Nejednačine . . . . .	18
6.2.1	Sveska 11 . . . . .	18
6.2.2	Sveska 9 . . . . .	18
6.2.3	Sveska 10 . . . . .	19

6.2.4	Net 1 . . . . .	19
6.2.5	Net 2 . . . . .	20
6.2.6	Net 6 . . . . .	21
6.2.7	Granice . . . . .	22
6.3	Kratki primeri . . . . .	23
6.3.1	Zemljotres . . . . .	23
6.3.2	Decimalne cifre . . . . .	23
6.3.3	Poluraspad joda . . . . .	23
6.3.4	Geometrijski niz . . . . .	23
6.3.5	Izvod . . . . .	24
6.3.6	$i$ na $i$ . . . . .	24
6.3.7	$\ln(-z)$ . . . . .	24
6.3.8	Prvo, pa 1 . . . . .	24
6.4	Ručni rad . . . . .	25
6.4.1	Analogni stepen . . . . .	25
6.4.2	Analogni kvadratni koren . . . . .	25
6.4.3	$\ln 3$ . . . . .	26
<b>7</b>	<b>Odrednice</b>	<b>27</b>
7.1	Literatura . . . . .	27
7.2	Software . . . . .	27
7.3	Linkovi . . . . .	28
<b>8</b>	<b>Indeks</b>	<b>29</b>

# 1 Uvod

Ovaj rad se bavi *logaritamskom funkcijom*, jednom od najvažnijih funkcija u matematici. Zbog svoje važnosti, zajedno sa eksponencijalnom, trigonometrijskim i njima inverznim funkcijama, spada u grupu *elementarnih* funkcija. Opisane su njene osobine i dati su primeri njene upotrebe, kao i zadaci sa rešenjima (ukupno 27).

Sama reč *logaritam* potiče od grčkih reči  $\lambda\acute{o}\gamma\omicron\varsigma$  (*logos*) i  $\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$  (*arimos*), sa značenjem „odgovarajući broj“.

## 1.1 Definicija logaritma

Funkcija

$$y = \log_b x \quad (1)$$

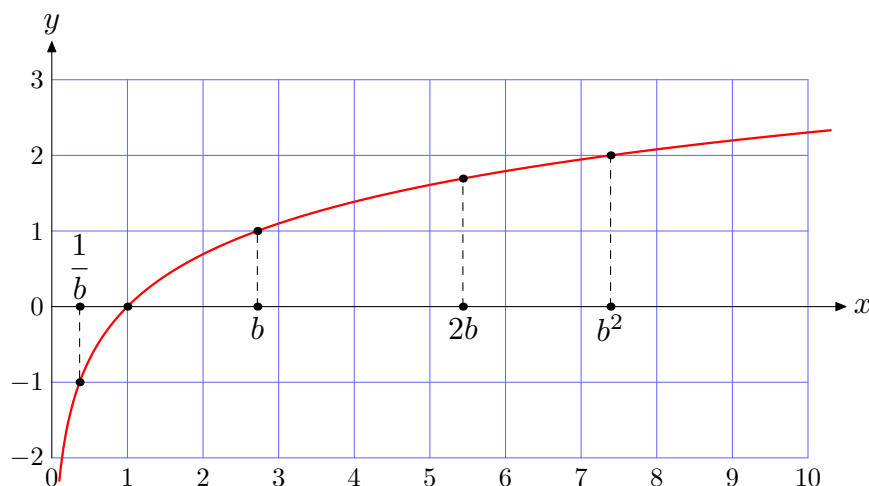
je rešenje po  $y$  jednačine

$$x = b^y,$$

gde je  $b$  *osnova* (*baza*) logaritma, a  $x$  *argument*. (Izgovara se „ $y$  je jednako logaritam od  $x$  za osnovu  $b$ “ ili kraće „ $y$  je logaritam  $b$  od  $x$ “.)

## 1.2 Tok i grafik funkcije

Funkcija je u skupu realnih brojeva  $\mathbb{R}$  definisana za  $x > 0$  i  $b > 0 \wedge b \neq 1$ . Funkcija je *monotona*: za  $b > 1$  funkcija je *rastuća*, dok za  $b < 1$  funkcija je *opadajuća*. Zbog toga važi *bijekcija*:  $\log_b u = \log_b v \Leftrightarrow u = v$ . Funkcija ima jednu *nulu*, uvek za  $x = 1$ . Kada  $x \rightarrow 0$ , onda  $y \rightarrow -\infty$  za  $b > 1$ , odnosno,  $y \rightarrow +\infty$  za  $b < 1$ .



Slika 1: Grafik logaritamske funkcije  $y = \log_b x$ .

## 1.3 Antilogaritam

Inverzna funkcija logaritmu je obično stepenovanje osnove logaritma argumentom i zove se *antilogaritam*

$$\text{antilog}_b x = \log_b^{-1} x = b^x. \quad (2)$$

Iz same definicije važi

$$\log_b(\text{antilog}_b x) = \text{antilog}_b(\log_b x) = x. \quad (3)$$

## 2 Logaritamske jednakosti

Za logaritamsku funkciju važe razne *jednakosti* koje se koriste za uprošćivanje i prilagođavanje izraza prilikom rešavanja problema i zadataka.

### 2.1 Logaritam stepena osnove

Po samoj definiciji logaritma, ako je  $x = b^a$ , onda je

$$\log_b b^a = a . \quad (4)$$

Ako stavimo da je  $1 = b^0$ , odnosno,  $b = b^1$ , dobijamo da je

$$\log_b 1 = 0 \quad \text{ i } \quad \log_b b = 1 . \quad (5)$$

Takođe je bitna jednakost

$$b^{\log_b x} = x \quad (6)$$

koja proizilazi iz same definicije logaritma i antilogaritma.

### 2.2 Logaritam proizvoda

Ako je

$$u = \log_b x \wedge v = \log_b y \xLeftrightarrow{\text{def}} x = b^u \wedge y = b^v ,$$

onda je, zbog jednakosti (4)

$$x \cdot y = b^u b^v = b^{u+v} \Rightarrow \log_b(x \cdot y) = \log_b b^{u+v} = u + v .$$

Odavde je

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y . \quad (7)$$

Iz ove jednakosti se može izvesti formula za logaritam faktorijela broja. Ako je

$$n! = \prod_{k=1}^n k \Rightarrow \log(n!) = \sum_{k=1}^n \log k .$$

(Zanimljivo je da je  $\log(1 \cdot 2 \cdot 3) = \log 1 + \log 2 + \log 3 = \log(1 + 2 + 3)$ .)

### 2.3 Logaritam količnika

Slično logaritmu proizvoda, ako je

$$u = \log_b x \wedge v = \log_b y \xLeftrightarrow{\text{def}} x = b^u \wedge y = b^v ,$$

onda je, zbog jednakosti (4)

$$x/y = b^u b^{-v} = b^{u-v} \Rightarrow \log_b(x/y) = \log_b b^{u-v} = u - v .$$

Odavde je

$$\log_b(x/y) = \log_b x - \log_b y . \quad (8)$$

Iz ove jednakosti sledi

$$\log_b(1/x) = -\log_b x . \quad (9)$$

## 2.4 Logaritam stepena broja

Ako je

$$y = x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ puta}},$$

onda, iz jednakosti za logaritam proizvoda (7), sledi da je

$$\log_b y = \log_b (\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ puta}}) = \underbrace{\log_b x + \log_b x + \cdots + \log_b x}_{n \text{ puta}} = n \log_b x,$$

odakle je

$$\log_b x^n = n \log_b x. \quad (10)$$

Iz ove jednakosti sledi jednakost

$$\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_b x, \quad (11)$$

kao i jednakost

$$x^y = b^{y \log_b x}. \quad (12)$$

## 2.5 Promena osnove logaritma

Ako je

$$y = \log_a x \stackrel{\text{def}}{\iff} x = a^y,$$

onda je

$$\log_b x = \log_b a^y = y \log_b a = \log_a x \cdot \log_b a.$$

Odavde je

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}. \quad (13)$$

Iz ove jednakosti, ako stavimo da je  $x = b$ , se dobija i jednakost

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1. \quad (14)$$

Iz jednakosti (4) i (13), ako stavimo da je  $a = b^n$ , sledi jednakost

$$\log_{b^n} x = \frac{1}{n} \log_b x. \quad (15)$$

Odavde, ako stavimo da je  $n = -1$ , sledi

$$\log_{1/b} x = -\log_b x, \quad (16)$$

a uzevši u obzir i jednakost (9) dobija se

$$\log_{1/b} x = \log_b(1/x). \quad (17)$$

⚠ Treba biti oprezan kod korišćenja svih ovih jednakosti, naročito kod stepenovanja, i uvek treba proveriti opseg u kome se računa. Na primer, iz jednakosti (10), sledi  $\log x^2 = 2 \log x$ , što je ispravno za  $x > 0$ , međutim,  $\log x^2 = 2 \log |x|$  za bilo koje  $x \neq 0$ .

## 3 Najčešće logaritamske osnove

### 3.1 Osnova 10

U inženjerstvu se najčešće koristi logaritam sa osnovom 10, zove se *dekadni* ili *zajednički* logaritam, i piše se

$$y = \log_{10} x$$

ili, skraćeno,

$$y = \lg x.$$

Ponekad se može videti i samo

$$y = \log x,$$

bez navođenja osnove, ali treba obratiti pažnju na kontekst. Ako je neki inženjerski tekst u pitanju, najverovatnije se misli na osnovu 10.

Dekadni logaritam je pogodan i kada se koristi, takozvani *naučni* ili *inženjerski* zapis broja. Na primer, *Plankova konstanta* (Max Planck) iznosi

$$h = 6,62607015 \times 10^{-34} \text{ J/Hz}$$

koja ima dekadni logatiram

$$\log_{10} h = \log_{10}(6,62607015) - 34.$$

U fizici se za merenje nivoa signala ili zvuka koristi jedinica *bel* (B), ali je češće u praktičnoj upotrebi 10 puta manja jedinica *decibel* (dB), odnosno,  $1 \text{ B} = 10 \text{ dB}$ . Nivo signala  $L$ , koji zavisi od odnosa izmerene snage  $P$  i referentne snage  $P_0$ , izražen u decibelima iznosi

$$L = 10 \log_{10} \left( \frac{P}{P_0} \right) \text{ dB}.$$

Kako se u akustici uzima da je referentna snaga  $P_0 = 10^{-12} \text{ W}$ , moglo bi se pisati da je nivo zvuka u decibelima

$$L = 10 \log_{10}(P) - 120.$$

Normalan govor je oko 50 dB, zvuk motora mlaznog aviona pri poletanju je 150 dB, a smrtonosan je zvuk od 240 dB i više. Zvučni top Genasys LRAD ima nivo zvuka od oko 160 dB, što znači da je  $10^{11}$  puta moćniji od govora.

Slična formula se koristi i za određivanje jačine zemljotresa, ili pH vrednosti.

### 3.2 Osnova 2

U informatici se često koristi logaritam sa osnovom 2, koji se zove *binarni* logaritam, i piše se

$$y = \log_2 x$$

ili, skraćeno,

$$y = \lg x.$$

Koristi se u kombinatorici, kao i u određivanju *količine informacija*, odnosno, potrebnog broja bitova memorije za smeštanje nekog podatka. Ako se zna da će u memoriju biti upisivani celi brojevi od 0 do  $n$ , onda je potrebno rezevisati

$$\text{bits} = \lfloor \log_2(n) \rfloor + 1 \tag{18}$$

bitova memorije, gde  $\lfloor x \rfloor$  predstavlja *najveći ceo broj koji je manji ili jednak  $x$*  (izgovara se „najveće celo od  $x$ “). Na primer, ako će u određenoj memoriji najveći broj biti milion, onda je za to potrebno rezervisati

$$bits = \lfloor \log_2(1\,000\,000) \rfloor + 1 = \lfloor 19,9315685693 \rfloor + 1 = 19 + 1 = 20$$

bitova memorije. Najveći broj koji može stati u ovih rezervisanih 20 bitova memorije je binarni broj koji ima 20 jedinica i iznosi

$$(1111\,1111\,1111\,1111\,1111)_2 = 2^{20} - 1 = 1\,048\,575.$$

Kako su i realni brojevi u memoriji predstavljeni kao uređeni parovi binarnih brojeva u obliku  $x = (mantisa, eksponent)$ , sa značenjem

$$x = mantisa \times 2^{eksponent},$$

binarni logaritam bi bio izračunat kao

$$\log_2(x) = \log_2(mantisa) + eksponent,$$

ako je  $mantisa > 0$ , inače je nedefinisan.

Binarni logaritam se koristi i u atomskoj fizici. Vreme *poluraspada*  $t_{1/2}$  je vreme potrebno da se raspadne polovina jezgara atoma neke materije. Ako imamo početan broj jezgara  $N_0$  i broj jezgara  $N_t$  nakon vremena  $t$ , njihov odnos se može predstaviti formulom

$$\frac{N_0}{N_t} = 2^{t/t_{1/2}} \Rightarrow \frac{t}{t_{1/2}} = \log_2 \left( \frac{N_0}{N_t} \right). \quad (19)$$

Ova formula se koristi i za određivanje starosti stena ili fosila.

### 3.3 Osnova $e$

Ovu logaritamsku osnovu je otkrio Jakob Bernuli (Jacob Bernoulli) kada je proučavao *složenu kamatu* i dokazao da *kontinualna* složena kamata teži konstanti

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n,$$

ali je tek Ojler (Leonhard Euler) odredio njenu tačnu vrednosti i dao joj ime. Logaritam za ovu osnovu se zove *prirodni* logaritam (*logarithmus naturalis*) i piše se

$$\ln x = \log_e x.$$

Antilogaritam je *eksponencijalna* funkcija  $e^x = \exp(x)$ , koja je poznata po tome što je to jedina funkcija čiji je prvi izvod jednak samoj funkciji:  $\exp'(x) = \exp(x)$ . Brojna vrednost se može izračunati formulom

$$e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (20)$$

Ako stavimo da je  $x = 1$ , brojna vrednost osnove prirodnog logaritma  $e$  se može odrediti

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots \\ &= 2,7182818284\,5904523536\,0287471352\,6624977572 \dots \end{aligned} \quad (21)$$

sa željenom tačnošću.



## 4 Brojna vrednost logaritma

### 4.1 Formula

Brojna vrednost prirodnog logaritma može biti izračunata pomoću formule

$$\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^{2n+1} \quad (22)$$

do željene tačnosti. Postupak kojim se računa  $y = \ln x$  sa tačnošću  $\varepsilon$  izgleda ovako:

$$\begin{array}{l} r \leftarrow (x-1)/(x+1); \quad k \leftarrow 1; \quad p \leftarrow 2r; \quad q \leftarrow r^2; \quad a \leftarrow p; \quad y \leftarrow a; \\ \text{ponavljati dok je } |a| > \varepsilon: \\ \quad k \leftarrow k+2; \quad p \leftarrow p \cdot q; \quad a \leftarrow p/k; \quad y \leftarrow y + a; \end{array} \quad (23)$$

Ovim postupkom se može izračunati vrednost

$$\begin{aligned} \ln 2 &= \frac{2}{1 \cdot 3^1} + \frac{2}{3 \cdot 3^3} + \frac{2}{5 \cdot 3^5} + \frac{2}{7 \cdot 3^7} + \frac{2}{9 \cdot 3^9} + \dots \\ &= 0,6931471805 \, 5994530941 \, 7232121458 \, 1765680755 \, \dots \end{aligned} \quad (24)$$

kao i vrednost

$$\begin{aligned} \ln 10 &= \frac{2}{1 \cdot 9^1} + \frac{2}{3 \cdot 9^3} + \frac{2}{5 \cdot 9^5} + \frac{2}{7 \cdot 9^7} + \frac{2}{9 \cdot 9^9} + \dots + 3 \ln 2 \\ &= 2,3025850929 \, 9404568401 \, 7991454684 \, 3642076011 \, \dots \end{aligned} \quad (25)$$

(Videti zadatak 6.4.3 na strani 26.) Pomoću njih se mogu izračunati brojne vrednosti binarnog  $\log_2 x = \ln x / \ln 2$ , odnosno, dekadnog  $\log_{10} x = \ln x / \ln 10$  logaritma.

### 4.2 Verižni razlomak

Brojna vrednost prirodnog logaritma može se izračunati i pomoću *verižnog razlomka*

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \frac{x}{1 + \frac{1^2 x}{2 - 1x + \frac{2^2 x}{3 - 2x + \frac{3^2 x}{4 - 3x + \dots}}}} \\ &= \frac{x}{1 + \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{n+1 - nx}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Poput simbola koji se koriste za sumu ‘ $\Sigma$ ’ ili proizvod ‘ $\Pi$ ’, Gaus (Johann Carl Friedrich Gauß) je smislio, verovatno, najpogodniji način za predstavljanje verižnih (*lančanih*) razlomaka, gde simbol ‘K’ potiče od nemačke reči za *prekinuti lanac* (*Kettenbruch*). Izraz iza ovog simbola pokazuje kako izgleda *opšti član* verižnog razlomka.

Ako pomoću ove formule izračunamo prvih 11 *konvergenata*  $\ln 2$  kao  $-\ln(1+x)$ , gde je  $x = -1/2$ , dobićemo

$$\ln 2 \approx \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{131}{192}, \frac{661}{960}, \frac{1327}{1920}, \frac{1163}{1680}, \frac{148969}{215040}, \frac{447047}{645120}, \frac{44711}{64512}, \frac{983705}{1419264}, \dots$$

gde je poslednji razlomak tačan na 5 decimala.

### 4.3 Logaritamske tablice

Prve tablice logaritama je 1614. godine izračunao škotski matematičar Neper (John Napier of Merchiston), koje su praktično sadržale logaritam za osnovu  $1/e$ , sa skaliranim argumentom i rezultatom, iako sam Neper nije znao za konstantu  $e$ . Savremenim zapisom bi logaritam iz Neperovih tablica bio definisan kao

$$\text{NapLog}(x) = 10^7 \log_{1/e}(x/10^7) = -10^7 \ln(x/10^7).$$

Nekoliko godina kasnije, 1617. i 1624, engleski matematičar Briggs (Henry Briggs) je izračunao tablice dekadnih logaritama sa 14 cifara tačnosti, koje se uz dopune i ispravke koriste i danas pod imenom *Brigsove tablice*.

### 4.4 Logaritmar

Pre pojave digitrona, za približno određivanje brojne vrednosti logaritma, koristila se je analogna mehanička sprava sa nekoliko lenjira zvana *logaritmar*.



Slika 2: Šiber.

Lenjiri imaju podeoke sa decimalom i logaritamskom, a često i sa sinusnom i nekom drugom skalom. Jedan od lenjira je bio klizni, te otuda popularno ime *šiber* (od nemačkog *Rechenschieber*). Koristi se jednostavno, pomeranjem klizača i čitanjem vrednosti sa odgovarajuće skale. (Videti zadatke 6.4.1 i 6.4.2.)

Postojale su i kružne varijante, pa i džepne, gde je džepni sat sa logaritmarom i kompasom bio „iPhone“ XIX i prve polovine XX veka.



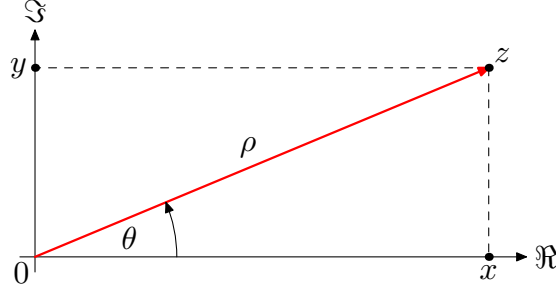
Slika 3: Džepni logaritmar.

Tablice i logaritmari se i danas koriste u vojsci, kao rezerva u slučaju otkazivanja elektronike. Prvi kompjuter ENIAC (Electronic Numerical Integrator And Computer) je napravljen 1946. godine sa jednom namenom: da izračuna tablice za vojsku.

## 5 Razno

### 5.1 Kompleksni logaritam

Ako u kompleksnoj ravni imamo kompleksan broj  $z \in \mathbb{C}$ ,



**Slika 4:** Broj  $z$  u kompleksnoj ravni.

on može biti predstavljen kao

$$\begin{aligned} z &= x + iy && \text{pravougle koordinate,} \\ &= \rho (\cos \theta + i \sin \theta) && \text{polarne koordinate.} \end{aligned}$$

Iz Ojlerove formule<sup>1</sup>

$$\mathbf{e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta}, \quad (27)$$

sledi da je  $z = \rho \mathbf{e^{i\theta}}$ , odakle, iz jednakosti (7) i (4) se dobija

$$\mathbf{\ln z = \ln \rho + i\theta}. \quad (28)$$

Pošto je  $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ , sledi da prirodni logaritam kompleksnog broja  $z$  nije definisan samo za  $z = 0$ , kada je  $\ln z = \infty$ . Kako je  $y/x = \tan \theta$ , prirodni logaritam kompleksnog broja, predstavljenog pravouglim koordinatama, iz formule (28), može se izračunati

$$\mathbf{\ln(x + iy) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \arctan\left(\frac{y}{x}\right)}, \quad (29)$$

kao i

$$\mathbf{\exp(x + iy) = e^x (\cos y + i \sin y)}. \quad (30)$$

I za kompleksne brojeve važi jednakost promene osnove (13), tako da za dva kompleksna broja  $z$  i  $w$ , gde je  $z \neq 0$ ,  $w \neq 0$  i  $w \neq 1$ , sledi  $\log_w z = \ln z / \ln w$ , gde se  $\ln z$  i  $\ln w$  računaju pomoću formule (28), odnosno, (29). Na primer,

$$\log_{2+i}(3 + 4i) = 2, \quad \log_i \mathbf{e} = \frac{2}{i\pi}, \quad \log_2(-4) = 2 + \frac{i\pi}{\ln 2}.$$

Iz Ojlerove formule se, takođe, može dobiti *najlepša formula u istoriji matematike*, u kojoj je upotrebljeno 5 najvažnijih matematičkih konstanti  $(0, 1, \pi, \mathbf{e}, i)$

$$\mathbf{e^{i\pi} + 1 = 0}, \quad (31)$$

gde, ako prebacimo 1 na desnu stranu i *logaritmujemo*, dobijamo zanimljivu jednakost

$$\frac{\ln(-1)}{\sqrt{-1}} = \pi.$$

<sup>1</sup>Ojlerova formula se lako dokazuje pomoću formule (20) i sličnih formula za  $\sin x$  i  $\cos x$ , koje se dobijaju iz *Meklorenovog reda* (Cailean MacLabhruinn):  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) (x^n/n!)$ , gde  $f^{(n)}$  predstavlja  $n$ -ti izvod funkcije  $f$ .

## 5.2 Kvaternioni

Poput skupa kompleksnih brojeva  $\mathbb{C}$ , koji predstavlja objekte u 2D prostoru, skup *kvaterniona*  $\mathbb{H}$ , predstavlja objekte u 3D prostoru. Prvi ih je opisao 1843. godine irski matematičar Hamilton (William Rowan Hamilton), te njemu u čast i oznaka skupa  $\mathbb{H}$ .

U informatici su neizbežni deo svega što se dešava u 3D: navigacija aviona, podmornica, raketa, satelita, nebeska i kvantna mehanika, robotika, igre, grafika, ...

Kvaternion  $q \in \mathbb{H}$  može biti predstavljen kao zbir

$$q = s + v \quad (32)$$

koji se sastoji od *skalarnog* dela  $s \in \mathbb{R}$  i *vektorskog* dela  $v \in \mathbb{R}^3$ , gde je

$$v = xi + yj + zk \quad (33)$$

3D vektor sa koordinatama  $(x, y, z)$ , a gde su  $i, j$  i  $k$  jedinični vektori po  $x, y$  i  $z$  osi, za koje važi

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \quad ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j. \quad (34)$$

§ U skupu kvaterniona  $\mathbb{H}$  za operaciju množenja, uopšteno, ne važi *zakon komutacije*:  $ji = -ij = -k$ ,  $kj = -jk = -i$ ,  $ik = -ki = -j$ . Ovo je logično kad se setimo da i kod *Rubikove kocke* najčešće nije svejedno kojim redosledom okrećemo stranice. Važi *asocijativnost*:  $(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$ .

Da bi  $q = s + v$  bio *pravi* kvaternion, mora biti  $v \neq 0$ , inače je  $q$  običan realan broj, kada se primenjuju operacije i funkcije iz skupa  $\mathbb{R}$ . Ako odredimo apsolutnu vrednost kvaterniona

$$\lambda = |v| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \rho = |q| = \sqrt{s^2 + \lambda^2}$$

koja se zove *norma*, odredimo *jedinični vektor* (*unit*) vektorskog dela kvaterniona

$$u = \frac{v}{\lambda},$$

koji se zove *versor* i gde je po definiciji<sup>2</sup>  $|u| = 1$  i  $u^2 = -1$ , kao i ugao orijentacije

$$\varphi = \arccos\left(\frac{s}{\rho}\right),$$

možemo dobiti polarni zapis kvaterniona

$$q = \rho(\cos \varphi + u \sin \varphi) = \rho e^{u\varphi}. \quad (35)$$

Iz svega ovoga se može dobiti

$$\ln(q) = \ln \rho + u\varphi \quad (36)$$

i

$$\exp(q) = e^s (\cos \lambda + u \sin \lambda). \quad (37)$$

§ Ostale operacije i funkcije nisu tema ovog rada, ali sabiranje i oduzimanje je uobičajeno, kod množenja treba obratiti pažnju na formulu (34) i komutativnost, a recipročna vrednost je  $q^{-1} = \bar{q}/\rho^2$ , gde je  $\bar{q} = s - v$ , *konjugovana* vrednost. Trigonometrijske i hiperbolične funkcije se mogu izraziti pomoću eksponencijalne, a njihove inverzne pomoću logaritamske funkcije.

<sup>2</sup>U skupu  $\mathbb{H}$ ,  $\sqrt{-1}$  ima beskonačno rešenja: svaki kvaternion koji se nalazi na *jediničnoj sferi* je rešenje ( $s = 0 \wedge x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ), odnosno, svaki versor.

## 5.3 Izvod

Ako je

$$y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x},$$

odakle se, pomoću jednakosti (13) i jednakosti za izvod složene funkcije, može dobiti

$$y = \log_b(f(x)) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{f(x) \ln b}. \quad (38)$$

Površina figure ispod funkcije  $y = 1/x$  do  $x$ -ose, u opsegu od 1 do  $x$  iznosi  $\ln x$ . Matematički zapisano:  $\int_1^x dx/x = \ln x$ .



**Slika 5:** Geometrijsko značenje  $\ln x$ .

(Na slici je  $x = e$ , tako da je površina osenčane figure jednaka 1.)

## 5.4 Integral

Neodređeni integral prirodnog logaritma je

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + \text{constant}. \quad (39)$$

## 5.5 Limes


Ojler je dokazao da je

$$\ln x = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1). \quad (40)$$

## 5.6 Benfordov zakon

Verovatnoća da *početne cifre* neke matematičke ili fizičke konstante (kao i dužine reke, visine planine, broja stanovnika, rastojanja, stanja na računu, ...), budu  $\ell$  za brojnu osnovu  $b$ , prati takozvani *Benfordov zakon* (Frank Benford), i iznosi

$$P(b, \ell) = \log_b \left( 1 + \frac{1}{\ell} \right). \quad (41)$$

Na primer, u *Fibonačijevom nizu* (Leonardo Bonacci): 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, ..., verovatnoća da prva cifra nekog člana niza bude 9 iznosi  $\log_{10}(1 + 1/9) \approx 4,58\%$ . Ovu zakonitost je prvi otkrio 1881. godine astronom Njucom (Simon Newcomb), kada je primetio da su listovi logaritamskih tablica koje je dugo koristio najprljaviji na početku: . (Videti zadatak 6.3.8 na strani 24.)

## 6 Zadaci i rešenja

### 6.1 Jednačine

#### 6.1.1 FIT

▷ **Zadatak:** Nađi rešenje jednačine

1

$$\log_2(x-2) + \log_4(x-2) + \log_{16}(x-2) = 7.$$

(Zadatak sa mog prijemnog ispita na FIT „Metropolitan“.)

► **Rešenje:** Vidimo da su osnove logaritama stepeni broja 2, pa iz jednakosti za logaritam stepena osnove (15) sledi

$$\begin{aligned}\log_2(x-2) + \log_{2^2}(x-2) + \log_{2^4}(x-2) &= \\ \log_2(x-2) + \frac{1}{2}\log_2(x-2) + \frac{1}{4}\log_2(x-2) &= \\ \frac{7}{4}\log_2(x-2) &= 7,\end{aligned}$$

odnosno, posle skraćivanja,

$$\log_2(x-2) = 4.$$

Odavde je

$$x-2 = 2^4 = 16 \Rightarrow x = \boxed{18}.$$

#### 6.1.2 Jednačina 2

▷ **Zadatak:** Reši jednačinu

2

$$2\log(x) - \log(6-x) = 0.$$

► **Rešenje:** Da bi logaritam u jednačini bio definisan mora biti

$$x > 0 \wedge 6-x > 0 \Rightarrow 0 < x < 6.$$

Zbog jednakosti (10) možemo pisati

$$\log(x^2) = \log(6-x)$$

odakle sledi

$$\begin{aligned}x^2 &= 6-x \\ x^2 + x - 6 &= 0.\end{aligned}$$

Rešavanjem<sup>3</sup> kvadratne jednačine

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2},\end{aligned}$$

dobijamu rešenja  $x_1 = 2$  i  $x_2 = -3$ , odakle je jedinstveno rešenje

$$x = \boxed{2}.$$

---

<sup>3</sup>U nastavku rada, postupak rešavanja linearne i kvadratne jednačine će biti izostavljen.

### 6.1.3 Jjjj (yafe)

► **Zadatak:** Reši jednačinu

$$\ln(x) = \ln(15 - x) - \ln(x + 1).$$

► **Rešenje:** Jednačina je definisana za

$$x > 0 \wedge 15 - x > 0 \wedge x + 1 > 0 \Rightarrow 0 < x < 15.$$

Ako zapišemo jednačinu kao

$$\ln(x) + \ln(x + 1) = \ln(15 - x)$$

iz jednakosti za logaritam proizvoda (7), možemo pisati

$$\ln(x(x + 1)) = \ln(15 - x)$$

$$\ln(x^2 + x) = \ln(15 - x)$$

$$x^2 + x = 15 - x$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

Rešavanjem kvadratne jednačine dobijamo 2 rešenja,  $x_1 = 3$  i  $x_2 = -5$ , ali zbog uslova, ostaje jedinstveno

$$x = \boxed{3}.$$

### 6.1.4 Četiri četvorke

► **Zadatak:** Dokazati da svaki prirodan broj  $n \in \mathbb{N}$ , može biti predstavljen sa 4 broja 4, pomoću logaritamske funkcije i kvadratnog korena

$$n = \log_{\sqrt{4}/4} \left( \log_4 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{4}}}}_{n \text{ korena}} \right).$$

► **Rešenje:** Kako je

$$\frac{\sqrt{4}}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{4}}}}_{n \text{ korena}} = 4^{(1/2)^n},$$

izraz može biti uprošćen

$$\log_{\sqrt{4}/4} \left( \log_4 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{4}}}}_{n \text{ korena}} \right) = \log_{1/2} (\log_4 4^{(1/2)^n}),$$

gde iz jednakosti za logaritam stepena osnove (4), sledi

$$= \log_{1/2} (1/2)^n$$

$$= \boxed{n}.$$

★ **Dodatak:** Davno je u jednom časopisu postavljen sličan zadatak: da se sa što manje istih brojeva, koristeći bilo koju matematičku funkciju, predstavi svaki prirodan broj  $n$ . Rešio ga je nobelovac Pol Dirak (Paul Dirac) sa 3 broja 2, čije originalno rešenje izgleda

$$-\log_2 \log_2 \sqrt{\dots n \dots \sqrt{2}} = -\log_2 \log_2 2^{2^{-n}} = -\log_2 2^{-n} = n. \quad \square$$

### 6.1.5 Sveska 7

▷ **Zadatak:** Nađi  $x$  ako je

5

$$x^{\log x} = 1000x^2.$$

► **Rešenje:** Ako logaritmujeemo obe strane dobijamo

$$\begin{aligned}\log x^{\log x} &= \log(1000x^2) \\ \log x \log x &= \log 1000 + \log x^2 \\ \log^2 x &= 3 + 2 \log x,\end{aligned}$$

gde, posle smene  $t = \log x$ , dobijamo kvadratnu jednačinu

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

čija su rešenja  $t_1 = 3$  i  $t_2 = -1$ , odakle su

$$x_1 = 10^3 = \boxed{1000} \quad \text{i} \quad x_2 = 10^{-1} = \boxed{\frac{1}{10}}.$$

### 6.1.6 Beskonačni koren

▷ **Zadatak:** Odredi vrednost

6

$$x = \ln \left( e^{\sqrt[2]{e^{\sqrt[3]{e^{\sqrt[4]{e^{\sqrt[5]{\dots}}}}}}}} \right).$$

► **Rešenje:** Kako je  $\ln e = 1$  i koristeći jednakost za logaritam proizvoda (7) i jednakost za logaritam korena (11), možemo pisati

$$\begin{aligned}x &= 1 + \frac{1}{2} \ln \left( e^{\sqrt[3]{e^{\sqrt[4]{e^{\sqrt[5]{\dots}}}}}} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{3} \ln \left( e^{\sqrt[4]{e^{\sqrt[5]{\dots}}}} \right) \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{4} \ln \left( e^{\sqrt[5]{\dots}} \right) \right) \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{5} \ln(\dots) \right) \right) \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + \dots \\ &= \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots\end{aligned}$$

Ako pogledamo formulu (21) na strani 7, možemo videti da je ovaj zbir jednak

$$x = \boxed{e - 1},$$

jer iz sume za izračunavanje  $e$  nedostaje *nulti* član  $1/0! = 1$ .



### 6.1.7 Net 3

▷ **Zadatak:** Odredi  $n^3$  ako je

7

$$\log_{5n} 30\sqrt{5} = \log_{4n} 48.$$

► **Rešenje:** Prebacimo logaritme u osnovu 6, jer je 6 *nzd* za 30 i 48 iz izraza

$$\begin{aligned} \frac{\log_6 30\sqrt{5}}{\log_6 5n} &= \frac{\log_6 48}{\log_6 4n} \\ \frac{\log_6 6 + \log_6 5 + \frac{1}{2} \log_6 5}{\log_6 5 + \log_6 n} &= \frac{\log_6 6 + \log_6 8}{\log_6 4 + \log_6 n} \\ \frac{1 + \frac{3}{2} \log_6 5}{\log_6 5 + \log_6 n} &= \frac{1 + 3 \log_6 2}{2 \log_6 2 + \log_6 n}. \end{aligned}$$

Kada izvršimo smenu  $n = 6^t$ , odnosno,  $t = \log_6 n$  i  $u = \log_6 2$  i  $v = \log_6 5$ , dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{1 + \frac{3}{2}v}{v + t} &= \frac{1 + 3u}{2u + t} \\ (1 + \frac{3}{2}v)(2u + t) &= (1 + 3u)(v + t) \\ 2u + 3uv + t + \frac{3}{2}vt &= v + 3uv + t + 3ut \quad / -3uv; -t; \times 2; \\ 4u + 3vt &= 2v + 6ut \\ 6ut - 3vt &= 4u - 2v \\ t(6u - 3v) &= 4u - 2v \\ t &= \frac{4u - 2v}{6u - 3v} \\ t &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2u - v}{2u - v} \\ t &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Oдавde je

$$n^3 = 6^{3t} = \boxed{36}.$$

### 6.1.8 Izumiranje

▷ **Zadatak:** Nađi  $n$  ako je

8

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdots \log_n(n+1) = 10.$$

► **Rešenje:** Ako prebacimo sve logaritme u osnovu 2, dobijamo

$$\log_2 3 \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 6}{\log_2 5} \cdots \frac{\log_2(n+1)}{\log_2 n} = 10.$$

Vidimo da će, nakon *masovnog* skraćivanja, *izumreti* svi izrazi osim

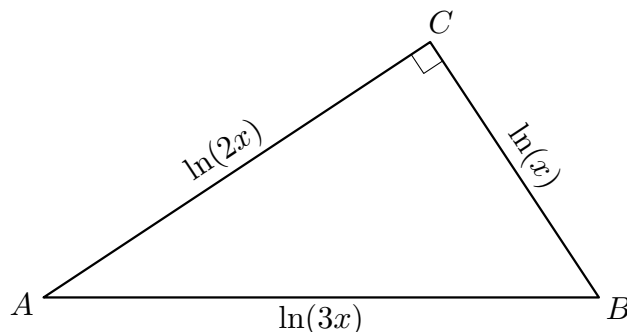
$$\log_2(n+1) = 10,$$

odakle je,

$$n+1 = 2^{10} = 1024 \Rightarrow n = \boxed{1023}.$$

### 6.1.9 Pitagora

▷ **Zadatak:** Odredi  $x$  sa slike.



**Slika 6:** Pravougli trougao  $\triangle ABC$ .

(Zadatak sa Tik-Toka.)

► **Rešenje:** Nađimo najpre rešenje opšteg slučaja

$$a = \ln(px), \quad b = \ln(qx), \quad c = \ln(rx).$$

Zbog lakšeg pisanja, izvršimo smenu

$$t = \ln x, \quad u = \ln p, \quad v = \ln q, \quad w = \ln r,$$

odakle je

$$a = t + u, \quad b = t + v, \quad c = t + w.$$

Iz Pitagorine teoreme  $a^2 + b^2 = c^2$ , sledi da je

$$(t + u)^2 + (t + v)^2 = (t + w)^2$$

$$t^2 + 2tu + u^2 + t^2 + 2tv + v^2 = t^2 + 2tw + w^2$$

gde, nakon sređivanja, dobijamo kvadratnu jednačinu

$$t^2 + 2(u + v - w)t + (u^2 + v^2 - w^2) = 0,$$

čija su rešenja

$$t_{1,2} = w - u - v \pm \sqrt{2(w - u)(w - v)},$$

ali nas zanima samo pozitivno. Kada vratimo smenu dobijamo

$$\ln x = \ln \left( \frac{r}{pq} \right) + \sqrt{2 \ln \left( \frac{r}{p} \right) \ln \left( \frac{r}{q} \right)},$$

gde je, posle antilogaritmovanja

$$x = \frac{r}{pq} \cdot e^{\sqrt{2 \ln(r/p) \ln(r/q)}}.$$

Zbog logaritama ispod korena vidimo da mora biti  $p, q, r > 0$  ili  $p, q, r < 0$ , i  $|p|, |q| < |r|$ , gde će  $x$  imati isti znak kao  $p, q$  i  $r$ .

Kada u ovo rešenje stavimo vrednosti sa slike,  $p = 1$ ,  $q = 2$  i  $r = 3$ , dobijamo da je

$$x = \boxed{\frac{3}{2} e^{\sqrt{2 \ln(3) \ln(3/2)}}} \approx 3,85488,$$

a stranice trougla su približno

$$a \approx 1,34934, \quad b \approx 2,04249, \quad c \approx 2,44795.$$

(Na slici je 1 = ‘\_\_\_\_\_’.)

## 6.2 Nejednačine

### 6.2.1 Sveska 11

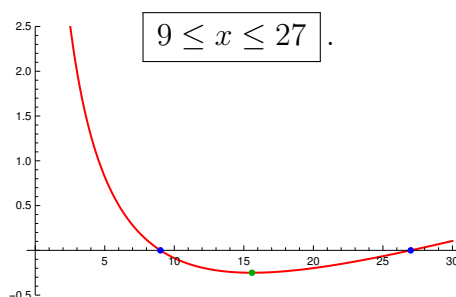
▷ **Zadatak:** Reši nejednačinu

$$\log_3^2 x - 5 \log_3 x + 6 \leq 0.$$

► **Rešenje:** Kada izvršimo smenu  $t = \log_3 x$ , možemo pisati da je

$$t^2 - 5t + 6 \leq 0$$

Kako su rešenja kvadratne jednačine  $t_1 = 2$  i  $t_2 = 3$ , nejednačina je zadovoljena kada je  $t \in [2, 3]$ . Pošto je  $x = 3^t$ , sledi da je nejednačina zadovoljena za  $x \in [3^2, 3^3]$ , odnosno,



**Slika 7:**  $y = \log_3^2 x - 5 \log_3 x + 6$ .

★ **Dodatak:** Funkcija ima minimum za  $t = 5/2$ , odnosno, u tački  $(9\sqrt{3}, -1/4)$ .

### 6.2.2 Sveska 9

▷ **Zadatak:** Odredi u kojim granicama je zadovoljen uslov

$$\log_3(x^2 - 4) < \log_3 5.$$

► **Rešenje:** Ako se oslobodimo logaritma

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &< 5 \\ x^2 &< 9, \end{aligned}$$

dobićemo da je  $-3 < x < 3$ . Međutim, da bi logaritam bio definisan mora biti

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &> 0 \\ x^2 &> 4, \end{aligned}$$

odnosno,  $x < -2$  ili  $x > 2$ . Odavde je

$$x \in (-3, -2) \cup (2, 3).$$



**Slika 8:**  $y = \log_3(x^2 - 4)$ ;  $\log_3 5$ .

### 6.2.3 Sveska 10

▷ **Zadatak:** Reši nejednačinu

12

$$\log_5 x \geq \frac{1}{2} \log_5 (3x - 2).$$

► **Rešenje:** Da bi logaritam bio definisan, vidimo da mora biti

$$3x - 2 > 0 \Rightarrow x > \frac{2}{3}.$$

Ako nejednačinu pomnožimo sa 2, dobijamo

$$\begin{aligned} 2 \log_5 x &\geq \log_5 (3x - 2) \\ \log_5 x^2 &\geq \log_5 (3x - 2) \\ x^2 &\geq 3x - 2 \\ x^2 - 3x + 2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Kvadratna jednačina ima rešenja  $x_1 = 1$  i  $x_2 = 2$ , pa je rešenje nejednačine

$$x \in \left( \frac{2}{3}, 1 \right] \cup [2, \infty).$$



Slika 9:  $y = \log_5 x$ ;  $\frac{1}{2} \log_5 (3x - 2)$ .

### 6.2.4 Net 1

▷ **Zadatak:** Reši

13

$$\log_{3x+5} (9x^2 + 8x + 8) > 2.$$

► **Rešenje:** Ako antilogaritmujemo obe strane dobijamo

$$\begin{aligned} 9x^2 + 8x + 8 &> (3x + 5)^2 \\ 9x^2 + 8x + 8 &> 9x^2 + 30x + 25 \\ 8x + 8 &> 30x + 25, \end{aligned}$$

gde je nakon sređivanja

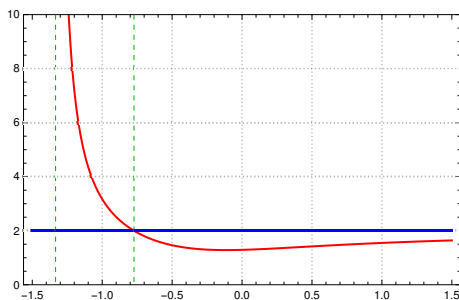
$$x < -\frac{17}{22}$$

Sledeći uslov je da osnova bude veća od 1, to jest

$$\begin{aligned} 3x + 5 &> 1 \\ x &> -\frac{4}{3}, \end{aligned}$$

odakle sledi rešenje

$$x \in \left( -\frac{4}{3}, -\frac{17}{22} \right).$$



Slika 10:  $y = \log_{3x+5}(9x^2 + 8x + 8)$ ; 2.

### 6.2.5 Net 2

▷ **Zadatak:** Nađi vrednosti koje zadovoljavaju nejednačinu

14

$$\log_7(x + 5) > \log_5(x + 5).$$

► **Rešenje:** Prebacimo izraz u zajednički logaritam

$$\begin{aligned} \frac{\log(x + 5)}{\log 7} &> \frac{\log(x + 5)}{\log 5} \\ \log 5 \log(x + 5) &> \log 7 \log(x + 5). \end{aligned}$$

Kako je  $\log 5 < \log 7$  i pozitivni su, da bi uslov važio, mora biti

$$\log(x + 5) < 0,$$

odakle je

$$\begin{aligned} x + 5 &< 1 \\ x &< -4, \end{aligned}$$

a da bi logaritam bio definisan mora da važi i

$$\begin{aligned} x + 5 &> 0 \\ x &> -5, \end{aligned}$$

odakle je rešenje

$$x \in (-5, -4).$$



Slika 11:  $y = \log_7(x+5)$ ;  $\log_5(x+5)$ .

### 6.2.6 Net 6

▷ **Zadatak:** Koje vrednosti zadovoljavaju uslov

15

$$\log_2(x+1) > \log_4 x^2?$$

► **Rešenje:** Ako levu stranu zapišemo kao

$$2 \cdot \frac{1}{2} \log_2(x+1) = \log_{2^2}(x+1)^2$$

što sledi iz jednakosti (15) i (10), dobićemo

$$\log_4(x+1)^2 > \log_4 x^2$$

$$(x+1)^2 > x^2$$

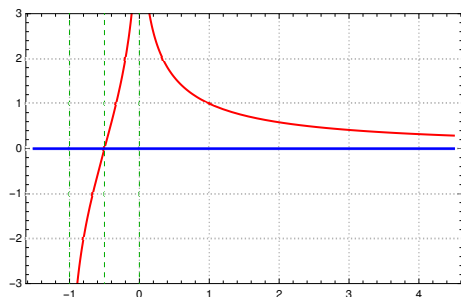
$$x^2 + 2x + 1 > x^2$$

$$2x + 1 > 0$$

$$x > -\frac{1}{2}.$$

Kako mora da važi  $x > -1$  i  $x \neq 0$ , dobijamo konačno rešenje

$$x \in \left( -\frac{1}{2}, 0 \right) \cup (0, \infty).$$



Slika 12:  $y = \log_2(x+1) - \log_4 x^2$ .

★ **Dodatak:** Kao što je na strani 5 napomenuto, da smo  $\log_4 x^2$  jednostavno predstavili kao  $\log_{2^2} x^2 = \log_2 x$ , dobili bismo netačno rešenje. Ispravno bi bilo  $\log_4 x^2 = \log_2 |x|$ , kada bismo posebno gledali 2 slučaja: za  $x > 0$  i za  $x < 0$ .

## 6.2.7 Granice

▷ **Zadatak:** Dokaži da važi nejednakost

16

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1, \quad (42)$$

kojom se definišu *donja* i *gornja* granica prirodnog logaritma.

► **Rešenje:** Pogledajmo prvo desni deo nejednakosti. Ako definišemo funkciju

$$y = \ln x - (x - 1),$$

potrebno je da dokažemo da je  $y \leq 0$  za svako  $x > 0$ . Intuitivno je jasno da tvrđenje važi, jer  $\ln x$  mnogo sporije raste od  $x - 1$ , i formalni dokaz će nam se zasnivati na tome.

Prvi izvod funkcije je

$$y' = \frac{1}{x} - 1,$$

koji ima jedinstvenu nulu  $y' = 0$  za  $x = 1$ , gde je i  $y = 0$ . Kako je drugi izvod

$$y'' = -\frac{1}{x^2} < 0,$$

uvek negativan, to znači da funkcija  $y$  nema *prevojnih tačaka* i da tačka  $(1, 0)$  predstavlja *maksimum* funkcije  $y$ , odakle je  $y \leq 0$ , odnosno,

$$\ln x \leq x - 1.$$

Ako u ovu nejednakost umesto  $x$  stavimo  $1/x$ , možemo pisati

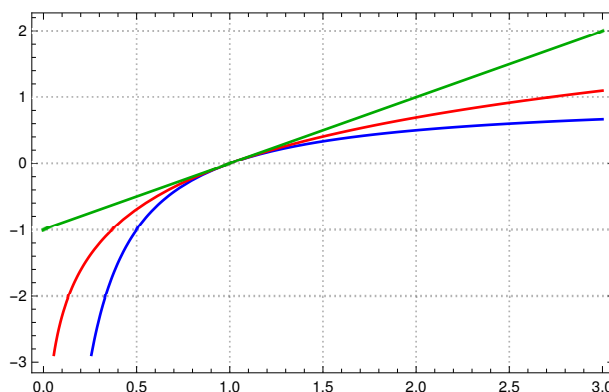
$$\begin{aligned} \ln(1/x) &\leq \frac{1}{x} - 1 \\ -\ln x &\leq \frac{1}{x} - 1, \end{aligned}$$

gde, kada izrazi zamene strane i znak, dobijamo

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln x,$$

što predstavlja levi deo nejednakosti iz zadatka. □

★ **Dodatak:** Sve tri funkcije iz nejednakosti se *dodiruju* u tački  $(1, 0)$ , što znači da u toj tački sve tri imaju istu *tangentu*, odnosno, isti prvi izvod  $y'(1) = 1$ ; inače bi se sekle i nejednakost ne bi važila.



Slika 13:  $y = 1 - 1/x$ ;  $\ln x$ ;  $x - 1$ .

## 6.3 Kratki primeri

### 6.3.1 Zemljotres

- ▷ **Zadatak:** Magnituda zemljotresa  $M$  po *Rihterovoj skali* u epicentru zavisi logaritamski od intenziteta zemljotresa  $I$

17

$$M = \log_{10} I.$$

U avgustu 2009, japansko ostrvo Honšu je pogodio zemljotres magnitude  $M_1 = 6,1$  po Rihteru, a u martu 2011, razarajući zemljotres koji je bio oko 800 puta jači od prvog. Koliko stepeni po Rihteru je imao drugi? (Koristi logaritamske tablice ili logaritar.)

- **Rešenje:**  $M_2 = M_1 + \log_{10} 800 \approx 6,1 + 2,9 = \boxed{9,0}$  stepeni Rihtera.

### 6.3.2 Decimalne cifre

- ▷ **Zadatak:** Koliko decimalnih cifara  $d$  ima 128-bitna promenljiva? ( $\log_{10} 2 \approx 0,30103$ )

18

- **Rešenje:**  $d = \lfloor \log_{10} 2^{128} \rfloor + 1 = \lfloor 128 \log_{10} 2 \rfloor + 1 = \lfloor 38,53184 \rfloor + 1 = 38 + 1 = \boxed{39}$ .

### 6.3.3 Poluraspad joda

- ▷ **Zadatak:** Ako imamo 63 g izotopa joda  $^{131}\text{I}$ , a znamo da smo pre 11 dana imali 163 g, koje je vreme poluraspada ovog izotopa? (Koristi prirodni logaritam.)

19

- **Rešenje:** Iz formule (19) na strani 7, sledi da se vreme poluraspada može izračunati

$$t_{1/2} = \frac{t}{\log_2(m_0/m_t)} = \frac{t \ln 2}{\ln(m_0/m_t)} = \frac{11 \ln 2}{\ln(163/63)} \approx \boxed{8,02 \text{ dana}}.$$

### 6.3.4 Geometrijski niz

- ▷ **Zadatak:** Za  $0 \leq x < 1$ , uprostiti izraz

20

$$y = \log(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots).$$

- **Rešenje:** Kako je zbir beskonačnog geometrijskog niza<sup>4</sup>

$$s = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x},$$

može se pisati

$$y = \log\left(\frac{1}{1-x}\right),$$

gde iz jednakosti za recipročnu vrednost (9), sledi

$$= \boxed{-\log(1-x)}.$$

---

<sup>4</sup>**Dokaz:**  $s = 1 + x \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots) = 1 + x \cdot s$ , odakle je  $s - x \cdot s = 1$ , sledi da je  $s = 1/(1-x)$ .  $\square$



### 6.3.5 Izvod

▷ **Zadatak:** Odredi izvod funkcije  $f(\alpha) = \ln \operatorname{sinc} \alpha$ , gde je  $\operatorname{sinc} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ . 21

► **Rešenje:** Pomoću jednakosti (8) razložimo funkciju na

$$f(\alpha) = \ln \sin \alpha - \ln \alpha,$$

a kako je izvod  $\sin \alpha$  jednak  $\cos \alpha$  i iz jednakosti (38) za izvod logaritma funkcije, sledi da je

$$f'(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} = \boxed{\cot \alpha - \frac{1}{\alpha}}.$$

### 6.3.6 $i$ na $i$

▷ **Zadatak:** Odredi vrednost  $i^i$  gde je  $i = \sqrt{-1}$ , *imaginarna jedinica*. 22

► **Rešenje:** Kako u kompleksnoj ravni  $i$  ima polarne koordinate  $\rho = 1$  i  $\theta = \pi/2$ , ako ga predstavimo Ojlerovom formulom kao  $i = e^{i\pi/2}$  i iz jednakosti (12) i (4), sledi da je

$$i^i = e^{i \ln i} = e^{i \ln e^{i\pi/2}} = e^{i^2 \pi/2} = \boxed{e^{-\pi/2}} \approx 0,20788$$

realan broj.

### 6.3.7 $\ln(-z)$

▷ **Zadatak:** U skupu kompleksnih brojeva  $\mathbb{C}$ , ako znamo vrednost  $\ln z$ , koliko je  $\ln(-z)$ ? 23

► **Rešenje:** Kako je u kompleksnoj ravni  $-z$  jednako  $z$  zarotirano oko koordinatnog početka za ugao od  $180^\circ = \pi$ , dobijamo

$$\ln(-z) = \boxed{\ln z + i\pi}.$$

Ako proverimo, iz Ojlerove jednakosti (31), dobijamo

$$e^{\ln(-z)} = e^{\ln z + i\pi} = e^{\ln z} \cdot e^{i\pi} = z \cdot (-1) = -z.$$

★ **Dodatak:** Hmmm ..., trik sa rotacijom nije baš potpuno tačan: dobili bismo  $-z$  i za ugao  $-\pi$ , pa bi bilo  $\ln(-z) = \ln z - i\pi$ , što je takođe tačno; u stvari, tačno je za bilo koji ugao  $\pi + 2k\pi$  gde je  $k \in \mathbb{Z}$  ceo broj. Odavde bi sledilo da je

$$\ln(-z) = \ln z + i(\pi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

I sama formula (28),  $\ln z = \ln \rho + i\theta$ , predstavlja samo *glavnu granu* kompleksnog logaritma, koji je nekakva vrsta 4D spirale. Potpuna formula bi bila

$$\boxed{\ln z = \ln \rho + i(\theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}}. \quad (43)$$

### 6.3.8 Prvo, pa 1

▷ **Zadatak:** Koliki procenat cena od igle do lokomotive počinje cifrom 1? 24

► **Rešenje:** Iz formule (41) sa strane 12, sledi da je  $P(10, 1) = \log_{10} 2 \approx \boxed{30\%}$ .

★ **Dodatak:** U filmu *Računovođa* (*The Accountant*), glavni lik (Ben Afflec) otkriva da su finansijski izveštaji prepravljani, jer uviđa da iznosi ne prate ovo pravilo.

## 6.4 Ručni rad

### 6.4.1 Analogni stepen

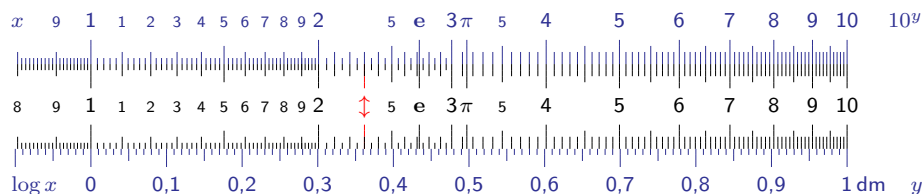
▷ **Zadatak:** Odredi logaritmarom približnu vrednost  $z = 2,3^{1,7}$ .

25

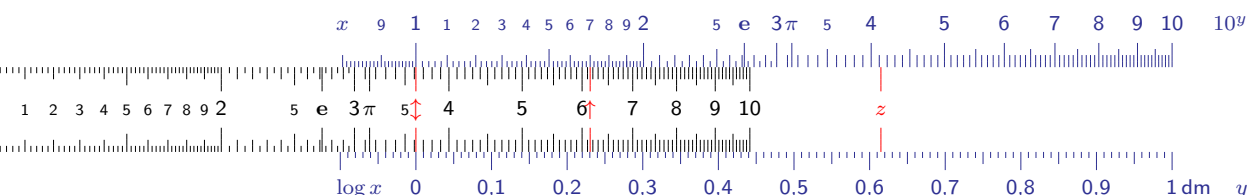
► **Rešenje:** Pomoću jednakosti (12) predstavimo

$$z = 2,3^{1,7} = 10^{1,7 \cdot \log(2,3)}.$$

Prvo određujemo vrednost  $\log(2,3)$  tako što za  $x = 2,3$  čitamo ispod vrednost  $\log x$ . Nalazimo da je  $\log(2,3) \approx 0,362$  (vidi nit obeleženu sa  $\uparrow$ ).



Nakon toga, tu vrednost na klizaču poravnavamo sa  $x = 1$ . Kako na klizaču ne postoji 0,362, postavimo na 3,62, s tim što ćemo rezultat podeliti sa 10. Sada, za  $x = 1,7$  čitamo vrednost na klizaču ispod ( $\uparrow$ )



i nalazimo da je oko 6,15, što znači da je  $1,7 \cdot \log(2,3) \approx 0,615$ . Potom, za  $y = 0,615$  čitamo vrednost  $10^y$  i nalazimo da je oko 4,12 što je i rešenje

$$z = 2,3^{1,7} \approx \boxed{4,12},$$

a tačna vrednost je  $z = 4,120380 \dots$

### 6.4.2 Analogni kvadratni koren

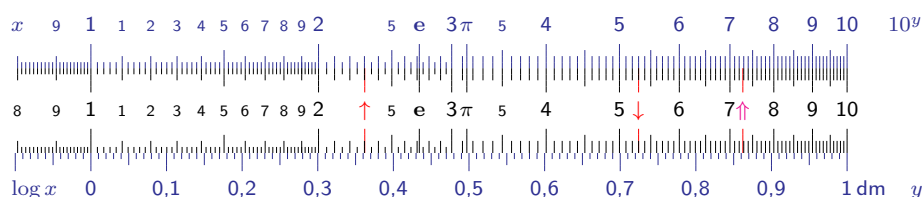
▷ **Zadatak:** Objasni način za određivanje vrednosti  $\sqrt{x}$  logaritmarom.

26

► **Rešenje:** Uz malo vežbe, kvadratni koren možemo direktno čitati sa logaritmara ako u glavi izvršimo deljenje sa 2 i, po potrebi, sabiranje sa 0,5 što je vrlo jednostavno jer se radi o brojevima između 0 i 1 sa najviše 3 decimale. Kako je

$$\sqrt{x} = 10^{\frac{1}{2} \log x},$$

potrebno je pročitati vrednost  $\log x$ , a onda, za dvostruko manju vrednost od nje, pročitati vrednost  $10^y$ . Na primer, za izračunavanje  $\sqrt{5,3}$ , čitamo da je  $\log(5,3) \approx 0,724$  ( $\downarrow$ ), potom, za  $y = 0,724/2 = 0,362$  ( $\uparrow$ ), čitamo vrednost  $10^y$  i dobijamo  $\sqrt{5,3} \approx 2,3$  ( $2,3^2 = 5,29$ ).



Za  $\sqrt{53}$  treba u  $y$  dodati još 0,5 tako da je  $y = 0,362 + 0,5 = 0,862$  ( $\uparrow$ ), odakle je  $\sqrt{53} \approx 7,28$  ( $7,28^2 = 52,9984$ ). Naravno,  $\sqrt{530}$  se računa kao  $10\sqrt{5,3}$ , ili  $\sqrt{0,53} = \frac{1}{10}\sqrt{53}$ .

### 6.4.3 $\ln 3$

► **Zadatak:** U čast Nepera i Briggsa, pomoću postupka (23) sa strane 8, izračunaj *peške* približnu vrednost  $\ln 3$  u 5 koraka. Za upoređivanje, tačna vrednost je

$$\ln 3 = 1,0986122886\ 6810969139\ 5245236922\ 5257046475 \dots$$

► **Rešenje:** Za  $x = 3$  biće  $r = (x - 1)/(x + 1) = 1/2$ . U nultom koraku postavljamo početne vrednosti:

$$\text{Korak } 0. \quad k = 1, \quad p = 2r = 1, \quad q = r^2 = 1/4, \quad a = p = 1, \quad y = a = 1.$$

Slede koraci iteracije — povećamo  $k$  za 2, pomnožimo  $p$  sa  $q$ , član sume  $a$  postaje  $p/k$ , koga dodajemo u rezultat  $y$ :

$$\text{Korak } 1. \quad k = 3, \quad p = 1/4, \quad a = 1/12, \quad y = 13/12;$$

$$\text{Korak } 2. \quad k = 5, \quad p = 1/16, \quad a = 1/80, \quad y = 263/240;$$

$$\text{Korak } 3. \quad k = 7, \quad p = 1/64, \quad a = 1/448, \quad y = 7379/6720;$$

$$\text{Korak } 4. \quad k = 9, \quad p = 1/256, \quad a = 1/2304, \quad y = 88583/80640;$$

$$\text{Korak } 5. \quad k = 11, \quad p = 1/1024, \quad a = 1/11264, \quad y = 3897967/3548160.$$

Rezultat je

$$\ln 3 \approx \frac{3897967}{3548160} = \boxed{1.098588 \dots}$$

što nije loše za samo 5 koraka, jer je apsolutna greška oko  $2,4 \times 10^{-5}$ . Ali, može bolje ...

★ **Dodatak:** Ako već imamo precizno izračunatu vrednost  $\ln 2$ , onda je bolje računati  $\ln 3$  kao  $\ln(3/4) + 2 \ln 2$ , jer će u postupku, umesto  $r = 1/2$ , biti  $r = (3/4 - 1)/(3/4 + 1) = -1/7$ , odnosno, umesto  $q = 1/4$ , biće  $q = 1/49$ , što dovodi do mnogo bržeg izračunavanja. U istom broju koraka bismo dobili

$$\ln \frac{3}{4} \approx -\frac{2}{7} - \frac{296}{1029} - \frac{72526}{252105} - \frac{24876448}{86472015} - \frac{522405418}{1815912315} - \frac{281576520392}{978776737785},$$

gde poslednji razlomak ima grešku od oko  $1,6 \times 10^{-12}$ , što je više od dvostruko tačnih cifara. Kada mu (sa strane 8) dodamo  $2 \ln 2$ , dobićemo

$$\ln 3 \approx 2 \ln 2 - \frac{281576520392}{978776737785} = \underbrace{1,0986122886\ 6972615081 \dots}_{12 \text{ tačnih cifara}}$$

Uopšteno, postupak je najbrži ako računamo  $\ln x = \ln(x/2^n) + n \ln 2$ , gde biramo  $n$  takvo da  $x/2^n$  bude što bliže 1, odnosno, da  $q$  bude najmanje moguće (vidi program).

```

10 REM ln(x) algorithm test
20 LET eps=0: LET hi=SQR 2: LET lo=1/hi: LET n=0: LET r=2: GO TO 140
30 FOR x=1 TO 20: GO SUB 100: PRINT "ln(";x;")";TAB 6;"="";y;TAB 22;"n="";n: NEXT x
99 STOP
100 REM logarithmus naturalis
110 LET r=x: LET n=0
120 IF r>hi THEN LET r=r/2: LET n=n+1: GO TO 120
130 IF r<lo THEN LET r=r*2: LET n=n-1: GO TO 130
140 LET r=(r-1)/(r+1): LET k=1: LET p=2*r: LET q=r*r: LET a=p: LET y=a
150 IF ABS (y-z)>eps THEN LET k=k+2: LET p=p*q: LET a=p/k: LET z=y: LET y=y+a: GO TO 150
160 IF n<>0 THEN LET y=y+n*ln2
170 RETURN
RUN

```

```

ln(1) = 0 n = 0
ln(2) = 0.69314718 n = 1
ln(3) = 1.0986123 n = 1
ln(4) = 1.3862944 n = 1
ln(5) = 1.6094379 n = 1
ln(6) = 1.7917595 n = 3
ln(7) = 1.9459101 n = 3
ln(8) = 2.0794415 n = 3
ln(9) = 2.1972246 n = 3
ln(10) = 2.3025851 n = 3
ln(11) = 2.3978953 n = 3
ln(12) = 2.4849066 n = 4
ln(13) = 2.5649494 n = 4
ln(14) = 2.6390573 n = 4
ln(15) = 2.7080502 n = 4
ln(16) = 2.7725887 n = 4
ln(17) = 2.8332133 n = 4
ln(18) = 2.8903718 n = 4
ln(19) = 2.944439 n = 4
ln(20) = 2.9957323 n = 4

```

9 STOP statement, 99:1


Slika 14: ZX Spectrum BASIC program.

## 7 Odrednice

### 7.1 Literatura

- [1] Larousse: „Matematika“, *Opšta enciklopedija* (1967)
- [2] Nebojša Ikodinović, Slađana Dimitrijević, Suzana Aleksić: „Udžbenik sa zbirkom zadataka za 2. razred gimnazije“, *Matematika 2* (2019)
- [3] Vene Bogoslavov: „Zbirka rešenih zadataka iz matematike 2“, (2008–2011)
- [4] Marjan M. Matejić, Lidiya V. Stefanović, Branislav M. Ranđelović, Igor Ž. Milovanović: „Kompleti zadataka za prijemni ispit“, *Matematika* (2011)
- [5] Rade Nikolić: „Zadaci za prijemni ispit iz matematike na Fakultet informacionih tehnologija“, (2020)
- [6] Milton Abramowitz, Irene Stegun: „Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables“, *Applied Mathematics* (1964)
- [7] Gradimir V. Milovanović, Đorđe R. Đorđević: „Programiranje numeričkih metoda“, (1981)
- [8] Donald E. Knuth: „Seminumerical Algorithms“, *The Art of Computer Programming* (1968–)
- [9] Dragoljub Vasić, Vene Bogoslavov, Gliša Nešković: „Logaritamske tablice“, (2008)
- [10] Henry Briggs: „Arithmetica logarithmica“, (1624)
- [11] Donald E. Knuth: „The  $\text{\TeX}$ book“, *Computers and Typesetting* (1996)
- [12] John D. Hobby: „User’s manual“, *METAPOST* (2024)

### 7.2 Software

- [1] Mathematica — Wolfram Research
- [2] Visual Studio Code (Integrated Development Environment) — Microsoft
- [3] **ZX BASIC** (programming language) — Sinclair Research Ltd.
- [4] **Pascal** (programming language) — Niklaus Wirth
- [5]  (programming language) — Google
- [6] **Python** (programming language) — Python Software Foundation
- [7] METAPOST (PostScript programming language)— John D. Hobby
- [8]  $\text{\TeX}$  (typesetting system) — Donald E. Knuth
- [9]  $\text{\LaTeX}$  ( $\text{\TeX}$  macros) — Leslie Lamport
- [10]  $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{\TeX}$  ( $\text{\TeX}$  macros) — American Mathematical Society

## 7.3 Linkovi

- [1] **GitHub** — Luka S. Nešić — Maturski rad  
<https://github.com/Nasumica/LukaMaturski/>
- [2] **WIKIPEDIA** — Logarithm  
<https://en.wikipedia.org/wiki/Logarithm>
- [3] **Wolfram MathWorld** — Logarithm  
<https://mathworld.wolfram.com/Logarithm.html>
- [4] **Wolfram MathWorld** — Antiogarithm  
<https://mathworld.wolfram.com/Antilogarithm.html>
- [5] **Wolfram Language & System Documentation Center** — Logarithm  
<https://reference.wolfram.com/language/ref/Log.html>
- [6] **WolframAlpha** — Computational Intelligence  
<https://www.wolframalpha.com/>
- [7] A reconstruction of the tables of Briggs' *Arithmetica logarithmica* (1624)  
<https://inria.hal.science/inria-00543939/PDF/briggs1624doc.pdf>
- [8] **WIKIPEDIA** — Benford's law  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Benford's\\_law](https://en.wikipedia.org/wiki/Benford's_law)
- [9] **IMDb** — The Accountant (2016)  
<https://www.imdb.com/title/tt2140479/>
- [10] **WIKIPEDIA** — Quaternion  
<https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion>
- [11] **Wolfram Language & System Documentation Center** — Quaternions Package  
<https://reference.wolfram.com/language/Quaternions/tutorial/Quaternions.html>
- [12] **YouTube** — Log Tables — Numberphile  
<https://www.youtube.com/watch?v=VRzH4xB0GdM>
- [13] **YouTube** — The iPhone of Slide Rules — Numberphile  
<https://www.youtube.com/watch?v=xRpR1rmPbJE>
- [14] **YouTube** — The Four 4s — Numberphile  
<https://www.youtube.com/watch?v=Noo4lN-vSvw>
- [15] **YouTube** — Fantastic Quaternions — Numberphile  
<https://www.youtube.com/watch?v=3BR8tK-LuB0>
- [16] **GitHub** — Srbislav D. Nešić — Numerical recipes in Pascal  
<https://github.com/Nasumica/Wirth/>

## 8 Indeks

Ovo je indeks ključnih reči i najbitnijih pojmova iz ovog rada. Pored svakog pojma, *iskošenim ciframa* su ispisani brojevi strana na kojima se taj pojam nalazi. Naravno, nisu prikazane sve strane, već samo gde se nalazi definicija tog pojma ili gde je bitna njegova upotreba. Za verziju dokumenta u elektronskom obliku, kao i za sve prethodne odrednice, radi *hyperlink* do navedene strane.

2D, 11

3D, 11

2, 6, 14

**4**, 14

10, 6

algoritam, 8, 26

antilogaritam, 3, 17

apsolutna vrednost  $|x|$ , 5, 10, 11, 17

argument, 3

asocijativnost, 11

**BASIC**, 26

baza, 3

Benfordov zakon, 12

Bernuli, 7

beskonačnost ( $\infty$ ), 3

binarni logaritam, 6

Brigs, 9

brojna vrednost, 7, 8, 26

decibel, 6

definicija, 3

dekadni logaritam, 6

digitron, 9

Dirak, 14

**e**, 7, 15, 24

eksponencijalna funkcija, 7

eksponent, 7

ENIAC, 9

epsilon ( $\varepsilon$ ), 8, 26

exp, 7, 10, 11

faktorijel ( $n!$ ), 4, 7, 15

Fibonači, 12

Fibonačijev niz, 12

floor  $\lfloor x \rfloor$ , 7, 23

formula, 7, 8

fusnota, 10, 11, 13, 23

Gaus, 8

geometrijski niz, 23

grafik, 3, 12

Hamilton, 11

*i*, 10, 11, 24

integral, 12

iPhone, 9

izvod, 7, 12, 22, 24

*j*, 11

jedinični vektor, 11

jednakosti, 4

*k*, 11

količnik, 4

kompjuter, 9, 26

kompleksan broj, 10, 24

kompleksna beskonačnost ( $\tilde{\infty}$ ), 10

komutativnost, 11

konjugovana vrednost ( $\bar{z}$ ), 11

konvergent, 8

koren ( $\sqrt{x}$ ), 14, 15, 25

kvadratna jednačina, 13–15, 17–19

kvaternion, 11

limes, 7, 12

ln, 7, 8, 10, 11, 26

ln 10, 8

ln 2, 8, 26

ln 3, 26

$\log_{10}$ , 6, 23, 24

$\log_2$ , 6, 14, 16, 23

logaritam, 3

logaritmar, 9, 25

logaritmovanje, 10, 15

magnituda, 23

maksimum, 22

mantisa, 7

Mathematica, 27

matorski rad, 📄

Mekloren, 10

Meklorenov red, 7, 10

minimum, 18

Neper, 9

norma, 11

Njucom, 12

Ojler, 7, 12

Ojlerova formula, 10

osnova, 3

pi ( $\pi$ ), 10, 24  
 Pitagora, 17  
 Pitagorina teorema, 17  
 Plank, 6  
 polarni zapis, 10, 11  
 poluraspad ( $t_{1/2}$ ), 7, 23  
 pozor, 5, 11  
 pravougli trougao, 17  
 prirodni logaritam, 7  
 program, 26  
 proizvod, 4  
  
 QR code, 31  
  
 recipročna vrednost, 4, 11  
 Rubikova kocka, 11  
  
 skalar, 11  
 stepen, 5, 25  
 stepen osnove, 4  
  
 šiber, 9  
 što je trebalo dokazati ( $\square$ ), 14, 22, 23  
  
 tablice, 9  
 T<sub>E</sub>X, 27  
 Tik-Tok, 17  
 trougao ( $\triangle$ ), 17  
  
 unit, 11  
  
 vektor, 11  
 verižni ralomak, 8  
 verovatnoća, 12  
 versor, 11  
  
 WIKIPEDIA, 28  
 Wolfram MathWorld, 28  
  
*x*-osa, 11, 12  
  
*y*-osa, 11  
 YouTube, 28  
  
*z*-osa, 11  
 zbir, 11  
 ZX Spectrum, 26

