

Gimnazija „Bora Stanković“  
Niš, Srbija

# MATURSKI RAD

Predmet: Matematika

Tema: Logaritam  
*jednačine i nejednačine*

Učenik:  
Luka Nešić, IV/6

Profesor:  
Nenad Totić

2025.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>3</b>
1.1	Definicija logaritma . . . . .	3
1.2	Grafik funkcije . . . . .	3
1.3	Antilogaritam . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Jednakosti</b>	<b>4</b>
2.1	Logaritam stepena osnove . . . . .	4
2.2	Logaritam proizvoda . . . . .	4
2.3	Logaritam količnika . . . . .	4
2.4	Logaritam stepena broja . . . . .	5
2.5	Promena osnove logaritma . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Najčešće logaritamske osnove</b>	<b>6</b>
3.1	Osnova 10 . . . . .	6
3.2	Osnova 2 . . . . .	6
3.3	Osnova $e$ . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Brojna vrednost</b>	<b>8</b>
4.1	Formula . . . . .	8
4.2	Verižni razlomak . . . . .	8
4.3	Logaritamske tablice . . . . .	9
4.4	Logaritmar . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Razno</b>	<b>10</b>
5.1	Kompleksni logaritam . . . . .	10
5.2	Izvod . . . . .	11
5.3	Limes . . . . .	11
5.4	Teorema prostih brojeva . . . . .	11
<b>6</b>	<b>Zadaci i rešenja</b>	<b>12</b>
6.1	Jednačine . . . . .	12
6.1.1	FIT-prijemni . . . . .	12
6.1.2	Jednačina 2 . . . . .	12
6.1.3	JJJJ . . . . .	13
6.1.4	Četiri četvorke . . . . .	13
6.1.5	Beskonačni koren . . . . .	14
6.2	Nejednačine . . . . .	15
6.3	Odabrani primeri . . . . .	16
6.3.1	Geometrijski niz . . . . .	16
6.3.2	Poluraspad joda . . . . .	16
6.3.3	Decimalne cifre . . . . .	16
6.3.4	Izvod . . . . .	16
6.4	Ručni rad . . . . .	17
6.4.1	Analogni kvadratni koren . . . . .	17
6.4.2	Analogni stepen . . . . .	17
6.4.3	$\ln 3$ . . . . .	18

<b>7</b>	<b>Reference</b>	<b>19</b>
7.1	Literatura . . . . .	19
7.2	Linkovi . . . . .	19

# 1 Uvod

## 1.1 Definicija logaritma

Ako je

$$x = b^y$$

onda se može pisati

$$y = \log_b x, \quad (1)$$

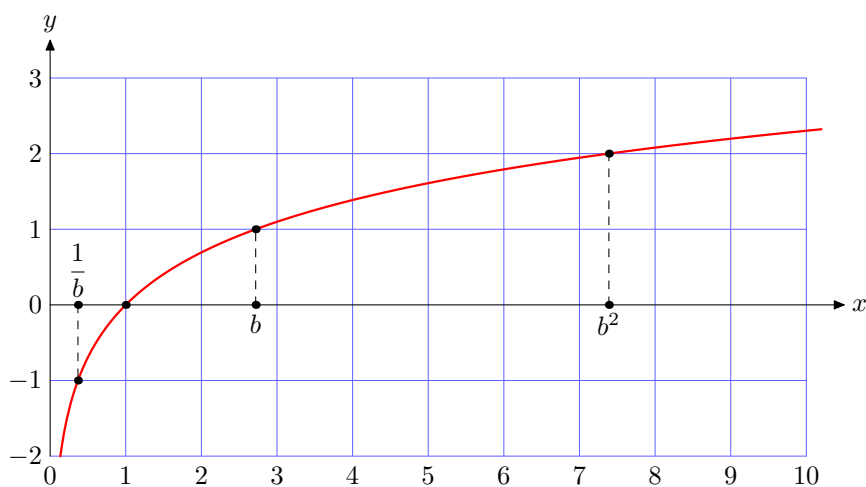
gde je  $b$  *osnova* (*baza*) logaritma, a  $x$  *argument*. (Izgovara se „ $y$  je jednako logaritam od  $x$  za osnovu  $b$ “ ili kraće „ $y$  je logaritam  $b$  od  $x$ “.) Takođe važi

$$b = x^{1/y} = \sqrt[y]{x}.$$

Sama reč *logaritam* potiče od grčkih reči  $\lambda\acute{o}\gamma\omicron\varsigma$  (*logos*) i  $\acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$  (*arimos*), sa značenjem „broj kojim se računa“.

## 1.2 Grafik funkcije

Funkcija je u skupu realnih brojeva  $\mathbb{R}$  definisana za  $x > 0$  i  $b > 0 \wedge b \neq 1$ . Za  $b > 1$  funkcija je rastuća, dok je za  $b < 1$  funkcija opadajuća. Funkcija ima samo jednu *nulu*, uvek za  $x = 1$ . Važi *bijekcija*:  $\log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x = y$ .



Slika 1: Grafik logaritamske funkcije  $y = \log_b x$ .

## 1.3 Antilogaritam

Inverzna funkcija logaritmu je obično stepenovanje osnove logaritma argumentom i zove se *antilogaritam*

$$\text{antilog}_b x = \log_b^{-1} x = b^x. \quad (2)$$

Iz same definicije važi

$$\log_b(\text{antilog}_b x) = \text{antilog}_b(\log_b x) = x. \quad (3)$$

## 2 Jednakosti

### 2.1 Logaritam stepena osnove

Po samoj definiciji logaritma, ako je  $x = b^a$ , onda je

$$\log_b b^a = a. \quad (4)$$

Ako stavimo da je  $1 = b^0$ , odnosno,  $b = b^1$ , dobijamo da je

$$\log_b 1 = 0 \quad \text{ i } \quad \log_b b = 1. \quad (5)$$

Takođe je bitna jednakost

$$b^{\log_b x} = x \quad (6)$$

koja proizilazi iz same definicije logaritma i antilogaritma.

### 2.2 Logaritam proizvoda

Ako je

$$u = \log_b x \wedge v = \log_b y \Rightarrow x = b^u \wedge y = b^v,$$

onda je, zbog jednakosti (4)

$$x \cdot y = b^u b^v = b^{u+v} \Rightarrow \log_b(x \cdot y) = \log_b b^{u+v} = u + v.$$

Odavde je

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y. \quad (7)$$

Iz ove jednakosti se može izvesti formula za logaritam faktorijela broja. Ako je

$$n! = \prod_{k=1}^n k \Rightarrow \log(n!) = \sum_{k=1}^n \log k.$$

(Zanimljivo je da je  $\log(1 \cdot 2 \cdot 3) = \log(1 + 2 + 3) = \log 1 + \log 2 + \log 3$ .)

### 2.3 Logaritam količnika

Slično logaritmu proizvoda, ako je

$$u = \log_b x \wedge v = \log_b y \Rightarrow x = b^u \wedge y = b^v,$$

onda je, zbog jednakosti (4)

$$x/y = b^u b^{-v} = b^{u-v} \Rightarrow \log_b(x/y) = \log_b b^{u-v} = u - v.$$

Odavde je

$$\log_b(x/y) = \log_b x - \log_b y. \quad (8)$$

Iz ove jednakosti sledi

$$\log_b(1/x) = -\log_b x. \quad (9)$$

## 2.4 Logaritam stepena broja

Ako je

$$y = x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ puta}},$$

onda, iz jednakosti za logaritam proizvoda (7), sledi da je

$$\log_b y = \log_b (\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ puta}}) = \underbrace{\log_b x + \log_b x + \cdots + \log_b x}_{n \text{ puta}} = n \log_b x,$$

odakle je

$$\log_b x^n = n \log_b x. \quad (10)$$

Iz ove jednakosti može se izvesti i jednakost

$$\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_b x. \quad (11)$$

Odavde se može izvesti jednakost

$$x^y = b^{y \log_b x}. \quad (12)$$

## 2.5 Promena osnove logaritma

Ako je

$$y = \log_a x \Rightarrow x = a^y,$$

onda je

$$\log_b x = \log_b a^y = y \log_b a = \log_a x \cdot \log_b a.$$

Odavde je

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}. \quad (13)$$

Iz ove jednakosti, ako stavimo da je  $x = b$ , se dobija i jednakost

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1. \quad (14)$$

Iz jednakosti (4) i (13), ako stavimo da je  $a = b^n$ , sledi jednakost

$$\log_{b^n} x = \frac{1}{n} \log_b x. \quad (15)$$

Odavde, ako stavimo da je  $n = -1$ , sledi

$$\log_{1/b} x = -\log_b x, \quad (16)$$

a uzevši u obzir i jednakost (9) dobija se

$$\log_{1/b} x = \log_b (1/x). \quad (17)$$

## 3 Najčešće logaritamske osnove

### 3.1 Osnova 10

U inženjerstvu se najčešće koristi osnova logaritma 10, zove se *dekadni* ili *zajednički* logaritam, i piše se

$$y = \log_{10} x$$

ili, skraćeno,

$$y = \lg x.$$

Ponekad se može videti i samo

$$y = \log x,$$

bez navođenja osnove, ali treba obratiti pažnju na kontekst. Ako je neki inženjerski tekst u pitanju, najverovatnije se misli na osnovu 10.

Dekadni logaritam je pogodan i kada se koristi, takozvani *naučni* ili *inženjerski* zapis broja. Na primer, *Plankova konstanta* (Max Planck) iznosi

$$h = 6,62607015 \times 10^{-34}$$

koja ima dekadni logatiram

$$\log_{10} h = \log_{10}(6,62607015) - 34.$$

U fizici se za merenje nivoa signala ili zvuka koristi jedinica *bel* (B), ali je češće u praktičnoj upotrebi 10 puta manja jedinica *decibel* (dB), odnosno,  $1 \text{ B} = 10 \text{ dB}$ . Nivo signala  $L$ , koji zavisi od odnosa izmerene snage  $P$  i refrentne snage  $P_0$ , izražen u decibelima iznosi

$$L = 10 \log_{10} \left( \frac{P}{P_0} \right) \text{ dB}.$$

Kako se u akustici uzima da je referentna snaga  $P_0 = 10^{-12} \text{ W}$ , moglo bi se pisati da je nivo zvuka u decibelima

$$L = 10 \log_{10}(P) - 120.$$

Normalan govor je oko 50 dB, zvuk motora mlaznog aviona pri poletanju je 150 dB, a smrtonosan je zvuk od 240 dB i više. Zvučni top **Genasys LRAD** ima nivo zvuka od oko 160 dB, što znači da je  $10^{11}$  puta moćniji od govora.

Slična formula se koristi i za određivanje jačine zemljotresa.

### 3.2 Osnova 2

U informatici se često koristi logaritam sa osnovom 2, koji se zove *binarni* logaritam, i piše se

$$y = \log_2 x$$

ili, skraćeno,

$$y = \lg x.$$

Koristi se u kombinatorici, kao i u određivanju *količine informacija*, odnosno, potrebnog broja bitova memorije za smeštanje nekog podatka. Ako se zna da će u memoriju biti upisivani celi brojevi od 0 do  $n$ , onda je potrebno rezevisati

$$bits = \lfloor \log_2(n) \rfloor + 1$$

bitova memorije, gde  $\lfloor x \rfloor$  predstavlja *najveći ceo broj koji je manji ili jednak  $x$*  (izgovara se „najveće celo od  $x$ “). Na primer, ako će u određenoj memoriji najveći broj biti milion, onda je za to potrebno rezervisati

$$bits = \lfloor \log_2(1\,000\,000) \rfloor + 1 = \lfloor 19,9315685693 \rfloor + 1 = 19 + 1 = 20$$

bitova memorije. Najveći broj koji može stati u ovih rezervisanih 20 bitova memorije je binarni broj koji ima 20 jedinica i iznosi

$$(1111\,1111\,1111\,1111\,1111)_2 = 2^{20} - 1 = 1\,048\,575.$$

Kako su i realni brojevi u memoriji predstavljeni kao uređeni parovi binarnih brojeva u obliku (*mantisa*, *eksponent*), sa značenjem

$$x = mantisa \times 2^{eksponent},$$

binarni logaritam bi bio izračunat kao

$$\log_2(x) = \log_2(mantisa) + eksponent,$$

ako je *mantisa*  $> 0$ , inače je nedefinisan.

Binarni logaritam se koristi i u atomskoj fizici. Vreme *poluraspada*  $t_{1/2}$  je vreme potrebno da se raspadne polovina jezgara atoma neke materije. Ako imamo početan broj jezgara  $N_0$  i broj jezgara  $N_t$  nakon vremena  $t$ , njihov odnos se može predstaviti formulom

$$\frac{N_0}{N_t} = 2^{t/t_{1/2}} \Rightarrow \frac{t}{t_{1/2}} = \log_2 \left( \frac{N_0}{N_t} \right). \quad (18)$$

Ova formula se koristi i za određivanje starosti stena ili fosila.

### 3.3 Osnova e

Ovu logaritamsku osnovu je otkrio Jakob Bernuli (Jacob Bernoulli) kada je proučavao *složenu kamatu* i dokazao da *kontinualna* složena kamata teži konstanti

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n,$$

ali je Ojler (Leonhard Euler) odredio njenu vrednosti i dao joj ime. Logaritam za ovu osnovu se zove *prirodni* logaritam (*logarithmus naturalis*) i piše se

$$\ln x = \log_e x.$$

Antilogaritam je  $e^x$ , koji se kao funkcija piše  $\exp(x)$ , i zove se *eksponencijalna funkcija*. Ova funkcija je poznata po tome što je to jedina funkcija čiji je izvod jednak samoj funkciji. Brojna vrednost se može izračunati formulom

$$e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (19)$$

Ako stavimo da je  $x = 1$ , brojna vrednost osnove prirodnog logaritma  $e$  se može odrediti

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots \\ &= 2,7182818284\,5904523536\,0287471352\,6624977572 \dots \end{aligned} \quad (20)$$

sa željenom tačnošću.



## 4 Brojna vrednost

### 4.1 Formula

Brojna vrednost prirodnog logaritma može biti izračunata pomoću formule

$$\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^{2n+1} \quad (21)$$

do željene tačnosti. Postupak kojim se računa  $y = \ln x$  sa tačnošću  $\varepsilon$  izgleda ovako:

$$\begin{aligned} r &\leftarrow (x-1)/(x+1); & k &\leftarrow 1; & p &\leftarrow 2r; & q &\leftarrow r^2; & a &\leftarrow p; & y &\leftarrow a; \\ \text{ponavljati dok je } |a| &> \varepsilon: \\ k &\leftarrow k+2; & p &\leftarrow p \cdot q; & a &\leftarrow p/k; & y &\leftarrow y+a; \end{aligned} \quad (22)$$

(Videti zadatak 6.4.3 na strani 18.) Ovim postupkom se može izračunati konstanta

$$\begin{aligned} \ln 2 &= \frac{2}{1 \cdot 3^1} + \frac{2}{3 \cdot 3^3} + \frac{2}{5 \cdot 3^5} + \frac{2}{7 \cdot 3^7} + \frac{2}{9 \cdot 3^9} + \dots \\ &= 0,6931471805\,5994530941\,7232121458\,1765680755 \dots \end{aligned}$$

kao i konstanta

$$\ln 10 = 2,3025850929\,9404568401\,7991454684\,3642076011 \dots$$

Ove konstante se koriste prilikom izračunavanja vrednosti binarnog, odnosno, dekadnog logaritma

$$\text{lb } x = \log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}, \quad \lg x = \log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

### 4.2 Verižni razlomak

Brojna vrednost prirodnog logaritma može se izračunati i pomoću *verižnog razlomka*

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \frac{x}{1 + \frac{1^2 x}{2 - 1x + \frac{2^2 x}{3 - 2x + \frac{3^2 x}{4 - 3x + \ddots}}}} \\ &= \frac{x}{1 + \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{n+1-nx}}. \end{aligned}$$

Poput simbola koji se koriste za sumu ‘ $\Sigma$ ’ ili proizvod ‘ $\Pi$ ’, Gaus (Carl Friedrich Gauss) je smislio, verovatno, najpogodniji način za predstavljanje verižnih (lančanih) razlomaka, gde simbol ‘K’ potiče od nemačke reči za *prekinuti lanac* (*Kettenbruch*). Izraz iza ovog simbola pokazuje kako izgleda *opšti član* verižnog razlomka.

Ako pomoću ove formule izračunamo prvih 11 *konvergenata*  $\ln 2$  kao  $-\ln(1-1/2)$ , dobićemo

$$\ln 2 \approx \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{131}{192}, \frac{661}{960}, \frac{1327}{1920}, \frac{1163}{1680}, \frac{148969}{215040}, \frac{447047}{645120}, \frac{44711}{64512}, \frac{983705}{1419264}, \dots$$

gde je poslednji razlomak tačan na 5 decimala.

### 4.3 Logaritamske tablice

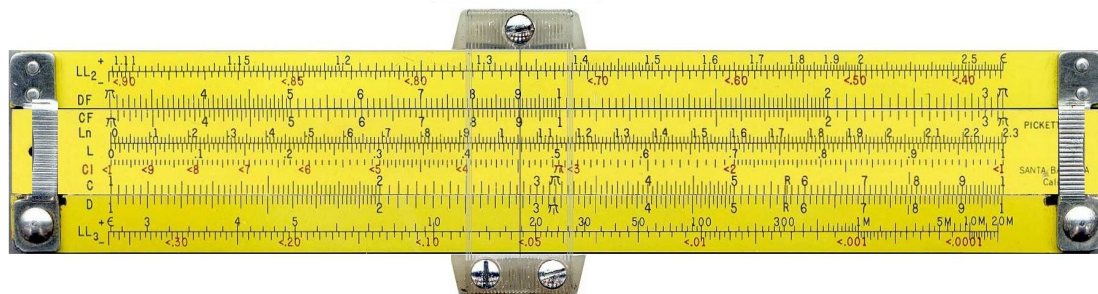
Prve tablice logaritama je izračunao Neper (John Napier of Merchiston) 1614. godine, koje su praktično sadržale logaritam za osnovu  $1/e$ , sa skaliranim argumentom i rezultatom, iako sam Neper nije znao za konstantu  $e$ . Savremenim zapisom bi ovaj logaritam bio definisan kao

$$\text{NapLog}(x) = 10^7 \log_{1/e}(x/10^7) = -10^7 \ln(x/10^7).$$

Nekoliko godina kasnije, 1617. i 1624, Briggs (Henry Briggs) je izračunao tablice decimalnih logaritama sa 14 cifara tačnosti, koje se uz dopune i ispravke koriste i danas pod imenom *Brigsove tablice*.

### 4.4 Logaritmar

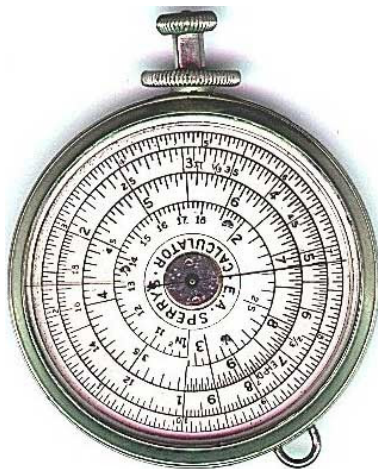
Pre pojave digitrona, za približno određivanje brojne vrednosti logaritma, koristila se je analogna mehanička sprava sa nekoliko lenjira zvana *logaritmar*.



Slika 2: Šiber.

Lenjiri imaju podeoke sa decimalom i logaritamskom, a često i sa sinusnom skalom. Jedan od lenjira je bio klizni, te otuda popularno ime *šiber* (od nemačkog *Rechenschieber*). Koristi se jednostavno, pomeranjem klizača i čitanjem vrednosti sa odgovarajuće skale. (Videti zadatke 6.4.1 i 6.4.2.)

Postojale su i kružne varijante, pa i džepne, gde je džepni sat sa logaritmarom i kompasom bio „iPhone“ XIX i prve polovine XX veka.



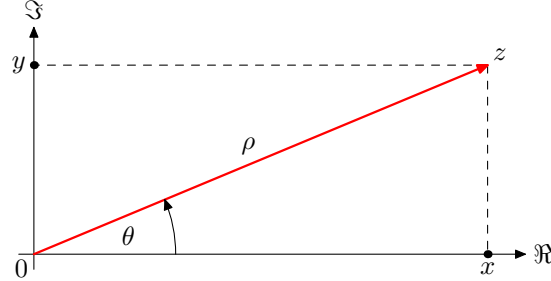
Slika 3: Džepni logaritmar.

Tablice i logaritmari se i danas koriste u vojsci, kao rezerva u slučaju otkazivanja elektronike. Prvi kompjuter ENIAC (Electronic Numerical Integrator And Computer) je napravljen 1946. godine da bi izračunao tablice za vojsku.

## 5 Razno

### 5.1 Kompleksni logaritam

Ako u kompleksnoj ravni imamo kompleksan broj  $z \in \mathbb{C}$ ,



Slika 4: Broj  $z$  u kompleksnoj ravni.

koji može biti predstavljen kao

$$\begin{aligned} z &= x + iy && \text{pravougle koordinate} \\ &= \rho (\cos \theta + i \sin \theta) && \text{polarne koordinate} \\ &= \rho e^{i\theta} && \text{Ojlerova formula} \end{aligned}$$

onda se, iz Ojlerove formule i jednakosti (7) i (4), dobija

$$\ln z = \ln \rho + i\theta. \quad (23)$$

Pošto je  $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ , sledi da prirodni logaritam kompleksnog broja  $z$  nije definisan ( $\infty$ ) samo za  $z = 0$ . Kako je  $y/x = \tan \theta$ , prirodni logaritam kompleksnog broja, predstavljenog pravouglim koordinatama, iz formule (23), može se izračunati

$$\ln(x + iy) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \quad (24)$$

I za kompleksne brojeve važi jednakost promene baze (13), tako da za dva kompleksna broja  $z$  i  $w$ , gde je  $z \neq 0$ ,  $w \neq 0$  i  $w \neq 1$ , sledi

$$\log_w z = \frac{\ln z}{\ln w},$$

gde se  $\ln z$  i  $\ln w$  računaju pomoću formule (23), odnosno, (24). Na primer,

$$\log_{2+i}(3+4i) = 2, \quad \log_i e = \frac{2}{i\pi}.$$

Iz Ojlerove formule se može dobiti, kako je nazvana, *najlepša formula u istoriji matematike*, u kojoj je upotrebljeno 5 najvažnijih matematičkih konstanti ( $0, 1, \pi, e, i$ )

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

gde, ako prebacimo 1 na desnu stranu i *logaritmujemo*, dobijamo zanimljiva jednakost

$$\frac{\ln(-1)}{\sqrt{-1}} = \pi.$$

Još jedna zanimljiva jednakost se može dobiti pomoću kompleksnog logaritma, a to je vrednost  $i^i$ . Kako  $i$  ima polarne koordinate  $\rho = 1$  i  $\theta = \pi/2$ , ako ga predstavimo Ojlerovom formulom kao  $i = e^{i\pi/2}$  i iz jednakosti (12) i (4), sledi da je

$$i^i = e^{i \ln i} = e^{i \ln e^{i\pi/2}} = e^{i^2 \pi/2} = e^{-\pi/2} \approx 0.20788$$

realan broj.

## 5.2 Izvod

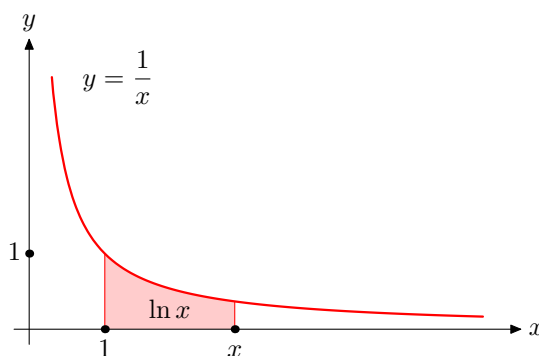
Ako je

$$y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x},$$

odakle se, pomoću jednakosti (13) i jednakosti za izvod složene funkcije, može dobiti

$$y = \log_b(f(x)) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{f(x) \ln b}. \quad (25)$$

Površina figure ispod funkcije  $y = 1/x$  do  $x$ -ose, u opsegu od 1 do  $x$  iznosi  $\ln x$ . (Matematički zapisano:  $\int_1^x dx/x = \ln x$ .)



**Slika 5:** Geometrijsko značenje  $\ln x$ .

(Na slici je  $x = e$ , tako da je površina osenčane figure jednaka 1.)

## 5.3 Limes

Ojler je dokazao da je

$$\ln x = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1).$$

## 5.4 Teorema prostih brojeva

Još jedno mesto gde se pojavljuje prirodni logaritam u *teoriji brojeva* je, takozvana, *teorema prostih brojeva* (PNT), kojom se je bavio Gaus kada je imao samo 15–16 godina.

Ako funkcija  $\pi(n)$  ima vrednost *ukupan broj prostih brojeva manjih ili jednakih od  $n$* , onda važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n) \ln n}{n} = 1.$$

Posledica ove teoreme je da je  $n$ -ti prost broj  $p_n$ , za veliko  $n$ , otprilike

$$p_n \sim n \ln n.$$

## 6 Zadaci i rešenja

### 6.1 Jednačine

#### 6.1.1 FIT-prijemni

▷ **Zadatak:** Nađi rešenje jednačine

$$\log_2(x-2) + \log_4(x-2) + \log_{16}(x-2) = 7.$$

(Zadatak sa mog prijemnog ispita na FIT.)

**Rešenje:** Vidimo da su osnove logaritama stepeni broja 2, pa iz jednakosti za logaritam stepena osnove (15) sledi

$$\begin{aligned}\log_2(x-2) + \log_{2^2}(x-2) + \log_{2^4}(x-2) &= \\ \log_2(x-2) + \frac{1}{2}\log_2(x-2) + \frac{1}{4}\log_2(x-2) &= \\ \frac{7}{4}\log_2(x-2) &= 7,\end{aligned}$$

odnosno, posle skraćivanja,

$$\log_2(x-2) = 4.$$

Odavde je

$$x-2 = 2^4 = 16 \Rightarrow x = \boxed{18}.$$

#### 6.1.2 Jednačina 2

▷ **Zadatak:** Reši jednačinu

$$2\log(x) - \log(6-x) = 0.$$

**Rešenje:** Da bi logaritam u jednačini bio definisan mora biti

$$x > 0 \wedge 6-x > 0 \Rightarrow 0 < x < 6.$$

Zbog jednakosti (10) možemo pisati

$$\log(x^2) = \log(6-x)$$

odakle sledi

$$\begin{aligned}x^2 &= 6-x \\ x^2 + x - 6 &= 0.\end{aligned}$$

Rešavanjem kvadratne jednačine

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm 5}{2},\end{aligned}$$

dobijamo rešenja  $x_1 = 2$  i  $x_2 = -3$ , odakle je jedinstveno rešenje

$$x = \boxed{2}.$$

### 6.1.3 JJJJ

▷ **Zadatak:** Reši jednačinu

$$\ln(x) = \ln(15 - x) - \ln(x + 1).$$

**Rešenje:** Jednačina je definisana za

$$x > 0 \wedge 15 - x > 0 \wedge x + 1 > 0 \Rightarrow 0 < x < 15.$$

Ako zapišemo jednačinu kao

$$\ln(x) + \ln(x + 1) = \ln(15 - x)$$

iz jednakosti za logaritam proizvoda (7), možemo pisati

$$\ln(x(x + 1)) = \ln(15 - x)$$

$$\ln(x^2 + x) = \ln(15 - x)$$

$$x^2 + x = 15 - x$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

Rešavanjem kvadratne jednačine dobijamo 2 rešenja,  $x_1 = 3$  i  $x_2 = -5$ , ali zbog uslova, ostaje jedinstveno

$$x = \boxed{3}.$$

### 6.1.4 Četiri četvorke

▷ **Zadatak:** Dokazati da svaki prirodan broj  $n \in \mathbb{N}$ , može biti predstavljen sa 4 broja 4, pomoću logaritamske funkcije i kvadratnog korena

$$n = \log_{\sqrt{4/4}} \left( \log_4 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{4}}}}_{n \text{ korena}} \right).$$

**Rešenje:** Kako je

$$\frac{\sqrt{4}}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{4}}}}_{n \text{ korena}} = 4^{(1/2)^n},$$

izraz može biti uprošćen

$$\log_{\sqrt{4/4}} \left( \log_4 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{4}}}}_{n \text{ korena}} \right) = \log_{1/2} (\log_4 4^{(1/2)^n}),$$

gde iz jednakosti za logaritam stepena osnove (4), sledi

$$\begin{aligned} &= \log_{1/2} (1/2)^n \\ &= \boxed{n}. \end{aligned}$$

*Davno je u jednom časopisu postavljen sličan zadatak: da se sa što manje istih brojeva, koristeći bilo koju matematičku funkciju, predstavi svaki prirodan broj  $n$ . Rešio ga je nobelovac Pol Dirac (Paul Dirac) sa 3 broja 2, čije originalno rešenje izgleda*

$$-\log_2 \log_2 \sqrt{\dots n \dots \sqrt{2}} = -\log_2 \log_2 2^{2^{-n}} = -\log_2 2^{-n} = n. \quad \square$$

### 6.1.5 Beskonačni koren

▷ **Zadatak:** Odredi vrednost

$$x = \ln \left( \mathbf{e}^{\sqrt[2]{\mathbf{e}^{\sqrt[3]{\mathbf{e}^{\sqrt[4]{\mathbf{e}^{\sqrt[5]{\dots}}}}}}}}} \right)$$

gde je  $\mathbf{e}$  osnova prirodnog logaritma.

**Rešenje:** Kako je  $\ln \mathbf{e} = 1$ , a koristeći jednakost za logaritam proizvoda (7) i jednakost za logaritam korena (11), možemo pisati

$$\begin{aligned} x &= \ln \left( \mathbf{e}^{\sqrt[2]{\mathbf{e}^{\sqrt[3]{\mathbf{e}^{\sqrt[4]{\mathbf{e}^{\sqrt[5]{\dots}}}}}}}}} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \ln \left( \mathbf{e}^{\sqrt[3]{\mathbf{e}^{\sqrt[4]{\mathbf{e}^{\sqrt[5]{\dots}}}}}}} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{3} \ln \left( \mathbf{e}^{\sqrt[4]{\mathbf{e}^{\sqrt[5]{\dots}}}}} \right) \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{4} \ln \left( \mathbf{e}^{\sqrt[5]{\dots}} \right) \right) \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{5} \ln(\dots) \right) \right) \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + \dots \\ &= \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots \end{aligned}$$

Ako pogledamo formulu (20) na strani 7, možemo videti da je ovaj zbir jednak

$$x = \boxed{\mathbf{e} - 1},$$

jer iz sume za izračunavanje  $\mathbf{e}$  nedostaje *nulti* član  $1/0! = 1$ .

## 6.2 Nejednačine



## 6.3 Odabrani primeri

### 6.3.1 Geometrijski niz

▷ **Zadatak:** Za  $0 \leq x < 1$ , uprostiti izraz

$$y = \log(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots).$$

**Rešenje:** Kako je zbir<sup>1</sup> beskonačnog geometrijskog niza

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1 - x},$$

može se pisati

$$y = \log\left(\frac{1}{1 - x}\right),$$

gde iz jednakosti za recipročnu vrednost (9), sledi

$$= \boxed{-\log(1 - x)}.$$

### 6.3.2 Poluraspad joda

▷ **Zadatak:** Ako imamo 63 g izotopa joda  $^{131}\text{I}$ , a znamo da smo pre 11 dana imali 163 g, koje je vreme poluraspada ovog izotopa? (Koristi prirodni logaritam.)

**Rešenje:** Iz formule (18) na strani 7, sledi da se vreme poluraspada može izračunati

$$t_{1/2} = \frac{t}{\log_2(m_0/m_t)} = \frac{t \ln 2}{\ln(m_0/m_t)} = \frac{11 \ln 2}{\ln(163/63)} \approx \boxed{8.02 \text{ dana}}.$$

### 6.3.3 Decimalne cifre

▷ **Zadatak:** Koliko decimalnih cifara ima 128-bitna promenljiva?

**Rešenje:**  $d = \lfloor \log_{10} 2^{128} \rfloor + 1 = \lfloor 128 \log_{10} 2 \rfloor + 1 = \lfloor 38.5318 \rfloor + 1 = 38 + 1 = \boxed{39}.$

### 6.3.4 Izvod

▷ **Zadatak:** Odredi izvod funkcije  $f(\alpha) = \log_3(\cos \alpha)$ .

**Rešenje:** Kako je izvod  $\cos \alpha$  jednak  $-\sin \alpha$  i iz jednakosti za izvod logaritma funkcije (25), sledi da je

$$f'(\alpha) = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha \ln 3} = \boxed{-\frac{\tan \alpha}{\ln 3}}.$$

---

<sup>1</sup>**Dokaz:** Ako je  $s = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = 1 + x \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots) = 1 + x \cdot s$ , onda sledi  $s = 1/(1 - x)$ .  $\square$

## 6.4 Ručni rad

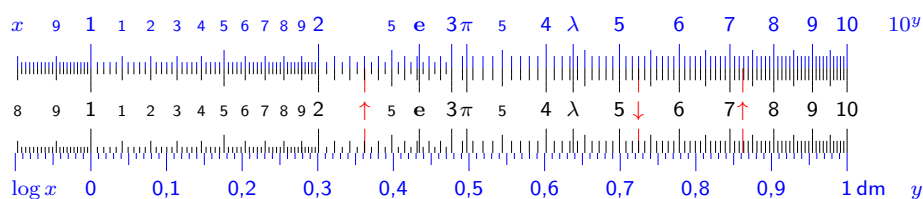
### 6.4.1 Analogni kvadratni koren

▷ **Zadatak:** Objasni način za određivanje vrednosti  $\sqrt{x}$  logaritmarom.

**Rešenje:** Kvadratni koren se može direktno čitati sa logaritmara ako u glavi izvršimo deljenje sa 2, i po potrebi, sabiranje sa 0,5, što je vrlo jednostavno, jer se radi o brojevima između 0 i 1 sa najviše 3 decimale. Kako je

$$\sqrt{x} = 10^{\frac{1}{2} \log x},$$

potrebno je odrediti vrednost  $\log x$ , a onda za dvostruko manju vrednost od nje, pročitati vrednost  $10^y$ . Na primer, za izračunavanje  $\sqrt{5,3}$ , čitamo da je  $\log 5,3 \approx 0,724$ , a onda čitamo vrednost  $10^y$  za  $y = 0,724/2 = 0,362$  i dobijamo  $\sqrt{5,3} \approx 2,3$ .



Za  $\sqrt{53}$  treba u  $y$  dodati još 0,5 tako da je  $y = 0,362 + 0,5 = 0,862$ , odakle je  $\sqrt{53} \approx 7,28$ . Naravno,  $\sqrt{530}$  se računa kao  $10\sqrt{5,3}$ , ili  $\sqrt{0,53} = \frac{1}{10}\sqrt{53}$ .

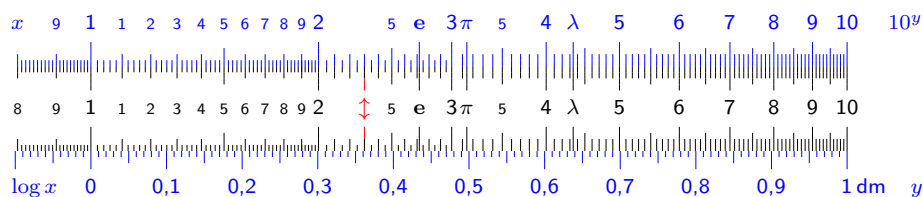
### 6.4.2 Analogni stepen

▷ **Zadatak:** Odredi logaritmarom približnu vrednost  $z = 2,3^{1,7}$ .

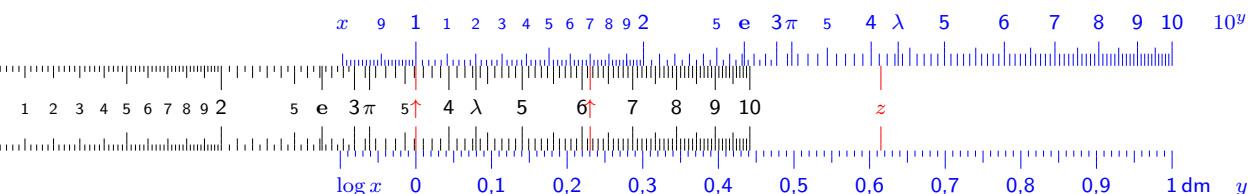
**Rešenje:** Pomoću jednakosti (12) predstavimo

$$z = 2,3^{1,7} = 10^{1,7 \cdot \log(2,3)}.$$

Prvo određujemo vrednost  $\log(2,3)$  tako što nalazimo  $x = 2,3$  i čitamo ispod njega vrednost  $\log x$  (vidi nit obeleženu sa '↑').



Nalazimo da je  $\log(2,3) \approx 0,362$ . Nakon toga, tu vrednost na klizaču poravnavamo sa  $x = 1$ . Kako na klizaču ne postoji 0,362, postavimo na 3,62, s tim što ćemo rezultat podeliti sa 10. Sada, za  $x = 1,7$  čitamo vrednost na klizaču ispod



i nalazimo da je oko 6,15, što znači da je  $1,7 \cdot \log(2,3) \approx 0,615$ . Nakon toga, za  $y = 0,615$  čitamo vrednost  $10^y$  i nalazimo da je oko 4,12 što je i rešenje

$$z = 2,3^{1,7} \approx \boxed{4,12},$$

a tačna vrednost je  $z = 4,120380 \dots$

### 6.4.3 $\ln 3$

▷ **Zadatak:** Pomoću postupka (22) sa strane 8, izračunati *peške* približnu vrednost  $\ln 3$ , u 5 koraka. Za upoređivanje, tačna vrednost je

$$\ln 3 = 1,0986122886\ 6810969139\ 5245236922\ 5257046475\ \dots$$

**Rešenje:** Za  $x = 3$ , izraz  $r = (x - 1)/(x + 1) = 1/2$ . U nultom koraku postavljamo početne vrednosti:

$$\text{Korak } 0. \quad k = 1, \quad p = 2r = 1, \quad q = r^2 = 1/4, \quad a = p = 1, \quad y = a = 1.$$

Slede koraci iteracije — povećamo  $k$  za 2, pomnožimo  $p$  sa  $q$ , član sume  $a$  postaje  $p/k$ , koga dodajemo u rezultat  $y$ :

$$\text{Korak } 1. \quad k = 3, \quad p = 1/4, \quad a = 1/12, \quad y = 13/12;$$

$$\text{Korak } 2. \quad k = 5, \quad p = 1/16, \quad a = 1/80, \quad y = 263/240;$$

$$\text{Korak } 3. \quad k = 7, \quad p = 1/64, \quad a = 1/448, \quad y = 7379/6720;$$

$$\text{Korak } 4. \quad k = 9, \quad p = 1/256, \quad a = 1/2304, \quad y = 88583/80640;$$

$$\text{Korak } 5. \quad k = 11, \quad p = 1/1024, \quad a = 1/11264, \quad y = 3897967/3548160.$$

Rezultat je

$$\ln 3 \approx \frac{3897967}{3548160} \approx \boxed{1,0986},$$

što je prilično tačno za samo 5 koraka, jer je apsolutna greška oko  $2,4 \times 10^{-5}$ .

## 7 Reference

### 7.1 Literatura

- [1] Larousse: „Matematika“, *Opšta enciklopedija* (1967)
- [2] Nebojša Ikodinović, Slađana Dimitrijević, Suzana Aleksić: „Udžbenik sa zbirkom zadataka za 2. razred gimnazije“, *Matematika 2* (2019)
- [3] Vene Bogoslavov: „Zbirka rešenih zadataka iz matematike 2“, (2008–2011)
- [4] Marjan Matejić, Lidiya Stefanović, Branislav Randelović, Igor Milovanović: „Kompleti zadataka za prijemni ispit“, *Matematika* (2011)
- [5] Rade Nikolić: „Zadaci za prijemni ispit iz matematike na Fakultet informacionih tehnologija“, (2020)
- [6] Gradimir V. Milovanović, Đorđe R. Đorđević: „Programiranje numeričkih metoda“, (1981)
- [7] Donald E. Knuth: „Seminumerical Algorithms“, *The Art of Computer Programming* (1968–)
- [8] Dragoljub Vasić, Vene Bogoslavov, Gliša Nešković: „Logaritamske tablice“, (2008)
- [9] Henry Briggs: „Arithmetica logarithmica“, (1624)

### 7.2 Linkovi

- [1] WIKIPEDIA — Logarithm  
<https://en.wikipedia.org/wiki/Logarithm>
- [2] Wolfram MathWorld — Logarithm  
<https://mathworld.wolfram.com/Logarithm.html>
- [3] Wolfram MathWorld — Antilogarithm  
<https://mathworld.wolfram.com/Antilogarithm.html>
- [4] Wolfram Language & System Documentation Center — Logarithm  
<https://reference.wolfram.com/language/ref/Log.html>
- [5] A reconstruction of the tables of Briggs' *Arithmetica logarithmica* (1624)  
<https://inria.hal.science/inria-00543939/PDF/briggs1624doc.pdf>
- [6] Newman's Short Proof of the Prime Number Theorem  
<https://people.mpim-bonn.mpg.de/zagier/files/doi/10.2307/2975232/fulltext.pdf>
- [7] YouTube — Log Tables — Numberphile  
<https://www.youtube.com/watch?v=VRzH4xB0GdM>
- [8] YouTube — The iPhone of Slide Rules — Numberphile  
<https://www.youtube.com/watch?v=xRpR1rmPbJE>
- [9] YouTube — The Four 4s — Numberphile  
<https://www.youtube.com/watch?v=Noo4lN-vSvw>