Gimnazija „Bora Stanković“
Niš, Srbija

MATURSKI RAD

Predmet: Matematika
Tema: Verižni razlomci

Učenik:
Luka Nešić, IV/6

Profesor:
Nenad Totić

2025.

Sadržaj

1 Uvod

1.1 Definicija

Izraz oblika

$$x = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4 + \ddots}}}}$$

u matematici se zove *verižni razlomak* (reč *verige* znači *lanac*). Brojilac ovakvog razlomka je broj, a imenilac može biti broj, običan razlomak ili verižni razlomak.

1.2 Notacija

Iako je standardni zapis verižnog razlomka jasan i onima koji nisu mnogo upoznati sa njima, često se, što zbog uštede prostora, što zbog jednostavnijeg i kraćeg pisanja, koriste i drugačije notacije.

Prva formalna skraćena notacija potiče sa početka 17. veka koju je koristio italijanski matematičar Kataldi (Pietro Antonio Cataldi)

$$x = b_0 \bullet \& \frac{a_1}{b_1 \bullet} \& \frac{a_2}{b_2 \bullet} \& \frac{a_3}{b_3 \bullet} \& \frac{a_4}{b_4 \bullet} \& \cdots$$

gde simbol '$\bullet$' označava mesto na kome se nalazi ostatak izraza, a simbol '&' predstavlja znak za sabiranje '+'. Od ovog zapisa potiče i savremena skraćena notacija verižnog razlomka

$$x = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \frac{a_3}{b_3 +} \frac{a_4}{b_4 +} \cdots$$

gde spušteni znak '+' označava mesto gde će se *ugnezditi* ostatak izraza. Ponekad se znak '+' piše van razlomačke crte, ali ostaje *poravnat* sa imeniocima

$$x = b_0 + \frac{a_1}{b_1} \underset{}{+} \frac{a_2}{b_2} \underset{}{+} \frac{a_3}{b_3} \underset{}{+} \frac{a_4}{b_4} \underset{}{+} \cdots$$

Nemački matematičar Pringzhajm (Alfred Pringsheim) je koristio sledeću notaciju

$$x = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \frac{a_4|}{|b_4} + \cdots$$

Poput simbola koji se koriste za sumu 'Σ' ili proizvod 'Π', Gaus (Carl Friedrich Gauss) je smislio, verovatno, najpogodniji način za predstavljanje verižnih razlomaka

$$x = b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{b_i}$$

gde simbol 'K' potiče od nemačke reči za *prekinuti lanac* (Kettenbruch).

2 Teorija

2.1 Vrste

U zavisnosti od toga da li imaju koanačan ili beskonačan broj članova, verižni razlomci mogu biti *konačni* ili *beskonačni*. Vrednost konačnih ralomaka može biti izračunati sa apsolutnom tačnošću, dok za beskonačne vrednost može biti izračunata kao

$$x = b_0 + \lim_{n\to\infty} \operatorname*{K}_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{b_i},$$

ili približna numerička vrednost. Ako imaju racionalne članove, konačni razlomci su racionalni, a beskonačni iracionalni brojevi, sem specijalnih slučajeva kao što je

$$\operatorname*{K}_{i=1}^{\infty} \frac{3}{2} = 1.$$

Verižni razlomak kome su svi brojioci $a_i = 1$ se zove *običan*

$$x = b_0 + \operatorname*{K}_{i=1}^{\infty} \frac{1}{b_i}.$$

2.2 Konvergent

Verižni razlomak izračunat sa prvih n članova

$$x_n = b_0 + \operatorname*{K}_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} = \frac{p_n}{q_n}$$

se zove n-ti *konvergent* i može biti predstavljen kao običan razlomak $x_n = p_n/q_n$. Važi formula

$$p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = \prod_{i=1}^{n}(-a_i)$$

koja se zove *formula determinante*.

2.3 Rekurentna formula

Parcijalni deljenik p_n i delilac q_n konvergenata $x_n = p_n/q_n$, može se izračunati rekurentnom formulom

$$\begin{aligned} p_0 &= b_0 & q_0 &= 1 \\ p_1 &= b_1p_0 + a_1 & q_1 &= b_1 \\ &\vdots & &\vdots \\ p_n &= b_np_{n-1} + a_np_{n-2} & q_n &= b_nq_{n-1} + a_nq_{n-2} \end{aligned}$$

gde se, poput Fibonačijevih brojeva, konvergent računa pomoću prethodna dva.

2.4 Standardna evaluacija

Konačni verižni razlomak može biti izračunat i standardnim načinom

$$
\begin{aligned}
& x \leftarrow 0 \\
& i = n, n-1, \dots, 1: \\
& \qquad x \leftarrow a_i/(b_i + x) \\
& x \leftarrow b_0 + x
\end{aligned}
$$

od dna ka vrhu razlomka. Tim načinom se ne dobijaju konvergenti, već samo konačna vrednost.

2.5 Transformacije

Verižni razlomak može biti *pomnožen* nizom konstanti c na sledeći način

$$
b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4 + \ddots}}}} = b_0 + \cfrac{a_1 c_1}{b_1 c_1 + \cfrac{a_2 c_1 c_2}{b_2 c_2 + \cfrac{a_3 c_2 c_3}{b_3 c_3 + \cfrac{a_4 c_3 c_4}{b_4 c_4 + \ddots}}}}
$$

Svaki verižni razlomak može biti pretvoren u obični verižni razlomak sledećom transformacijom

$$
b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{b_i} = b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{\infty} \frac{1}{b_i c_i}, \quad \text{gde je} \quad c_1 = \frac{1}{a_1}, \dots, c_n = \frac{1}{a_n c_{n-1}}, \dots
$$

Takođe važi i transformacija

$$
b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{b_i} = b_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{\infty} \frac{a_i d_i}{1}, \quad \text{gde je} \quad d_1 = \frac{1}{b_1}, \dots, d_n = \frac{1}{b_n b_{n-1}}, \dots
$$

2.6 Racionalizacija

Ako je x neki realni broj, on može biti pretvoren u verižni razlomak za željenim brojem članova n i sa željenom tačnošću ε na sledeći način

$$
\begin{aligned}
& b_0 \leftarrow [x] \\
& x \leftarrow x - b_0 \\
& i = 1, 2, \dots, n \wedge |x| > \varepsilon : \\
& \qquad x \leftarrow 1/x \\
& \qquad b_i \leftarrow [x] \\
& \qquad x \leftarrow x - b_i
\end{aligned}
$$

gde $[x]$ znači *celobrojna vrednost*. To može biti ili obično *odsecanje* decimala ili zaokružena vrednost broja na ceo broj.

Metoda racionalizacije može biti iskorištena i za *uporšćavanje* razlomka. U slučaju kada je x razlomak kome brojilac i imenilac imaju mnogo cifara, može biti pretvoren u približnu vrednost, razlomkom sa manje cifara.

3 Funkcije

Ojler (Leonhard Euler) je dokazao da red koji može biti napisan kao

$$x = c_0(1 + c_1(1 + c_2(1 + c_3(\cdots)))),$$

odnosno, kao

$$= c_0 + c_0c_1 + c_0c_1c_2 + c_0c_1c_2c_3 + \cdots ,$$

onda je on jednak verižnom razlomku

$$\begin{aligned}
&= \cfrac{c_0}{1 - \cfrac{c_1}{1 + c_1 - \cfrac{c_2}{1 + c_2 - \cfrac{c_3}{1 + c_3 - \ddots}}}} \\
&= \frac{c_0}{1+} \mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{\infty} \frac{-c_i}{1 + c_i}.
\end{aligned}$$

Pomoću ove jednakosti moguće je pretvoriti funkciju predstavljenu Tejlorovim (Brook Taylor) ili Maklorenovim (Colin Maclaurin) redom u verižni razlomak.

U nastavku ovog poglavlja biće prikazani verižni razlomci za izračunavanje *standardnih* matematičkih funkcija.

3.1 exp

Iz Maklorenovog reda za izračunavanje funkcije e^x

$$\begin{aligned}
\exp x &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \\
&= 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\
&= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2} + \frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3} + \frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{4} + \cdots
\end{aligned}$$

koristeći Ojlerovu jednakost ($c_0 = 1, c_i = x/i$) i transformaciju jednakosti, dobija se verižni razlomak

$$\begin{aligned}
\exp x &= \cfrac{1}{1 - \cfrac{x}{1 + x - \cfrac{1x}{2 + x - \cfrac{2x}{3 + x - \cfrac{3x}{4 + x - \ddots}}}}} \\
&= \frac{1}{1-} \frac{x}{1 + x+} \mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{\infty} \frac{-ix}{i + 1 + x}.
\end{aligned}$$

3.2 ln

Slično eksponencijalnoj funkciji, iz Tejlorovog reda se može dobiti verižni razlomak za izračunavanje vrednosti logarritamske funkcije, s tom razlikom da se izračunavanje vrši *u okolini* tačke 1, odnosno biće izračunata vrednost funkije za $x + 1$

$$\begin{aligned}
\ln^* x &= \ln(x+1) \\
&= \cfrac{x}{1 - 0x + \cfrac{1^2 x}{2 - 1x + \cfrac{2^2 x}{3 - 2x + \cfrac{3^2 x}{4 - 3x + \ddots}}}} \\
&= \frac{x}{1+} \operatorname*{K}_{i=1}^{\infty} \frac{i^2 x}{i + 1 - ix}.
\end{aligned}$$

Kako funkcija konvergira samo za $x < 1$, pre izračunavanja potrebno je *svesti* argument na odgovarajući opseg

$$\ln x = \begin{cases} \ln^*(x-1) & \text{za } x < 1, \\ -\ln^*(1/x - 1) & \text{za } x \geq 1. \end{cases}$$

3.3 sin

$$\begin{aligned}
\sin x &= \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{2 \cdot 3 - x^2 + \cfrac{2 \cdot 3 x^2}{4 \cdot 5 - x^2 + \cfrac{4 \cdot 5 x^2}{6 \cdot 7 - x^2 + \ddots}}}} \\
&= \frac{x}{1+} \frac{x^2}{2 \cdot 3 - x^2 +} \operatorname*{K}_{i=1}^{\infty} \frac{2i(2i+1) \cdot x^2}{(2i+2)(2i+3) - x^2}
\end{aligned}$$

3.4 cos

$$\begin{aligned}
\cos x &= \cfrac{1}{1 + \cfrac{x^2}{1 \cdot 2 - x^2 + \cfrac{1 \cdot 2 x^2}{3 \cdot 4 - x^2 + \cfrac{3 \cdot 4 x^2}{5 \cdot 6 - x^2 + \ddots}}}} \\
&= \frac{1}{1+} \frac{x^2}{1 \cdot 2 - x^2 +} \operatorname*{K}_{i=1}^{\infty} \frac{(2i-1)2i \cdot x^2}{(2i+1)(2i+2) - x^2}
\end{aligned}$$

3.5 arctan

Ojler je razvio formulu za izračunavanje vrednosti $\arctan(y/x)$ verižnim razlomkom

$$\arctan\frac{y}{x} = \cfrac{y}{1x + \cfrac{(1y)^2}{3x + \cfrac{(2y)^2}{5x + \cfrac{(3y)^2}{7x + \ddots}}}}$$

$$= \frac{y}{x+} \operatorname*{K}_{i=1}^{\infty} \frac{(iy)^2}{(2i+1)x}$$

Ako je

$$z = x + iy = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho\, e^{i\theta},$$

tačka u ravni predstavljena kompleksim brojem, formula će izračunati $\theta = \arg z$, ugao koji zaklapa vektor $(0,0)$–(x,y) sa x-osom.

$$\arg(x+iy) = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{za } x > 0, \\ \arctan(y/x) + \pi & \text{za } x < 0 \text{ i } y \geq 0, \\ \arctan(y/x) - \pi & \text{za } x < 0 \text{ i } y < 0, \\ +\pi/2 & \text{za } x = 0 \text{ i } y > 0, \\ -\pi/2 & \text{za } x = 0 \text{ i } y < 0, \\ 0 & \text{za } x = 0 \text{ i } y = 0. \end{cases}$$

Ostale inverzne trigonometrijske funkcije mogu biti izračunate pomoću funkcije arctan

$$\arcsin x = \arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \arccos x = \arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \qquad \operatorname{arccot} x = \arctan\frac{1}{x}.$$

3.6 Kvadratni koren

$$\sqrt{z} = \sqrt{x^2 + y}$$

$$= x + \cfrac{y}{2x + \cfrac{y}{2x + \cfrac{y}{2x + \cfrac{y}{2x + \ddots}}}}$$

$$= x + \operatorname*{K}_{i=1}^{\infty} \frac{y}{2x}$$

4 Konstante

4.1 Zlatna sredina φ

Možda najpoznatiji verižni razlomak je

$$\begin{aligned}\varphi &= 1 + \mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1} \\ &= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}},\end{aligned}$$

Vidimo da se ispod prve razlomačke crte opet nalazi φ, pa je

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}.$$

Rešenje

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618034$$

je poznato u matematici kao *zlatni presek* ili *zlatna sredina*. Zbog svoje prirode, ovo je nasporije mogući kovergirajući verižni razlomak, odnosno, φ predstavlja *najiracionalniji* broj. Izračunavajući uzastopne članove razlomka, φ će dobijati vrednosti

$$\varphi = \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \dots$$

odnosno, svaki konvergent će biti jednak količniku dva uzastopna Fibonačijeva (Leonardo Fibonacci) broja.

Verižni razlomak oblika

$$\delta = k + \mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k} = k + \frac{1}{\delta} = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}$$

se zove *metalna sredina*, gde se za $k = 1$ dobija *zlatna*, za $k = 2$ *srebrna*, za $k = 3$ *bronzana*, za $k = 4$ *bakarna*, ... I ovde je n-ti konvergent količnik dva uzastopna k-Fibonačijeva broja za koje važi rekurentna formula

$$F_n = k \cdot F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Veza između nagiba logaritamske spirale μ i koeficijenta metalne sredine

$$k = 2\sinh\left(90^\circ \tan\mu\right).$$

Spiralni kraci naše galaksije *Kumova slama*, čine logaritamsku spiralu sa nagibom od oko $\mu \approx 13^\circ$, što odgovara metalnoj sredini za $k \approx 43/58$, tako da ne čine zlatni presek.

4.2 π

Izračunavanje broja π je kroz istoriju uvek predstavljalo izazov. Od davnina se koristio razlomak $22/7 = 3.\overline{142857}$ koji ima tačnost 2 decimale i razlomak $355/113 \approx 3.141593$ koji ima zadivljujuću tačnost od 6 decimala. Trenutno je poznato 202 112 290 000 000 decimala. Broj π na 50 decimala je

$$\pi = 3.1415926535\,8979323846\,2643383279\,5028841971\,6939937511\,\ldots$$

Lajbnic (Gottfried Wilhelm Leibniz) je iz formule

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

izveo formulu za izračunavanje broja π verižnim razlomkom

$$\pi = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \ddots}}}} = \frac{4}{1+} \mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{\infty} \frac{(2i-1)^2}{2}$$

Na žalost, formula vrlo sporo konvergira broju π i potrebno je izračunati oko $3 \cdot 10^n$ članova izraza da bi se dobilo n tačnih decimala.

Iako je $\pi = 4\arctan(1)$, postoje formule koje brže konvergiraju. Najbrža poznata formula za izračunavanje broja π verižnim razlomkom je Mačinova (John Machin) formula koja korsiti Ojlerovu formulu za arctan

$$\begin{aligned}\pi &= 16\arctan(1/5) - 4\arctan(1/239) \\ &= \cfrac{16}{u + \cfrac{1^2}{3u + \cfrac{2^2}{5u + \cfrac{3^2}{7u + \ddots}}}} - \cfrac{4}{v + \cfrac{1^2}{3v + \cfrac{2^2}{5v + \cfrac{3^2}{7v + \ddots}}}}\end{aligned}$$

gde je $u = 5$ i $v = 239$. Tačnosti formule može se jednostavno dokazati kompleksnom aritmetikom

$$z = (5+i)^{16}/(239+i)^4 = -64$$

Tačka z ima koordinate $(-64, 0)$ i sa x-osom zaklapa ugao od $\theta = 180^\circ = \pi$ ($\arg z = \pi$). Izračunavajući verižni razlomak sa samo prva 4 člana dobija se

$$\begin{aligned}\pi &\approx \frac{53600}{16971} - \frac{1433464640}{85650012051} = \frac{507390368614240}{161507372724169} \\ &\approx \underbrace{3.1415926}_{\text{tačne cifre}}10021\ldots\end{aligned}$$

broj π sa 7 tačnih cifara. Dovoljno je izračunati navedenu formulu sa prvih 18 članova (poslednji član je $\frac{17^2}{35x}$) da bi tačnost dostigla 35 decimalnih cifara

$$\begin{aligned}\pi &\approx \frac{161905545657315000586325 44}{512630406240026708228595} - \frac{612805179969539362802668540113436766179700984826 09824}{366153231720499713456055690687374120903078240272 8252845}\\ &\approx \frac{15401094645888237198967388876652925035329985738422473132422105921623326 72}{49023206838384726789287839537358588279767762427967880644129452830271668 7}\\ &\approx \underbrace{3.14159265358979323846264338327950288}_{\text{tačne cifre}}07522\ldots\end{aligned}$$

Da bi postigao ovu tačnost, nemačko-holandski matematičar Ludolf (Ludolph van Ceulen) je krajem 16. i početkom 17. veka, koristeći Arhimedovu metodu izračunavanja površina opisanih i upisanih pravilnih 2^n-tougaonika u kružnicu, potrošio veći deo svog života. Njemu u čast broj π se ponekad zove *Ludolfov broj*.

4.3 e

Baza prirodnog logaritma

$$e = 2.7182818284\,5904523536\,0287471352\,6624977572\,4709369996\,\ldots$$

može bit izračunata kao $e = \exp(1)$, pomoću verižnog razlomka za eksponencijalnu funkciju. Međutim, postoji jednostavnija formula

$$e = 1 + \cfrac{1}{\underset{i=1}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}} \frac{i}{i}}$$

Dovoljno je izračunati prvih 10 konvergenata verižnog razlomka

$$e \approx 2, 3, \frac{8}{3}, \frac{30}{11}, \frac{144}{53}, \frac{280}{103}, \frac{5760}{2119}, \frac{45360}{16687}, \frac{44800}{16481}, \frac{3991680}{1468457}$$

da bi dobili 7 tačnih decimala, $e_{10} \approx 2.7182818$. Konvergent

$$e_{40} = \frac{83631316532909517770425155133601879162880000000 0}{30766241990558758565455689937684963380443973076 7}$$

je tačan na 50 decimala.

4.4 Borin broj

Ako broj

$$\mathcal{B} = 0.4323320871\,8590286890\,9253793241\,9999637051\,1089687765\,\ldots$$

pretvorimo u verižni razlomak, dobićemo

$$\mathcal{B} = \cfrac{1}{\boxed{2} + \cfrac{1}{\boxed{3} + \cfrac{1}{\boxed{5} + \cfrac{1}{\boxed{7} + \cfrac{1}{\boxed{11} + \cfrac{1}{\boxed{13} + \ddots}}}}}} = \underset{i=1}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}} \frac{1}{p_i}$$

verižni razlomak čiji su imenioci *svi prosti brojevi p*. Naravno, zbog svoje prirode, ovaj broj ne može biti tačno izračunat, ali je zanimljivo da postoji.

5 Literatura