Gimnazija „Bora Stanković“
Niš, Srbija

MATURSKI RAD

Predmet: Matematika

Tema: Logaritam

jednačine i nejednačine

Učenik:
Luka Nešić, IV/ 6

Profesor:
Nenad Totić

2025.

Sadržaj

1 Uvod

Ovaj rad se bavi *logaritamskom funkcijom*, jednom od najvažnijih funkcija u matematici. Zbog svoje važnosti, zajedno sa eksponencijalnom, trigonometrijskim i njima inverznim funkcijama, spada u grupu *elementarnih funkcija*. Opisane su njene osobine i dati su primeri njene upotrebe, kao i zadaci sa rešenjima (ukupno 27).

1.1 Definicija logaritma

Ako je

$$x = b^y$$

onda se može pisati

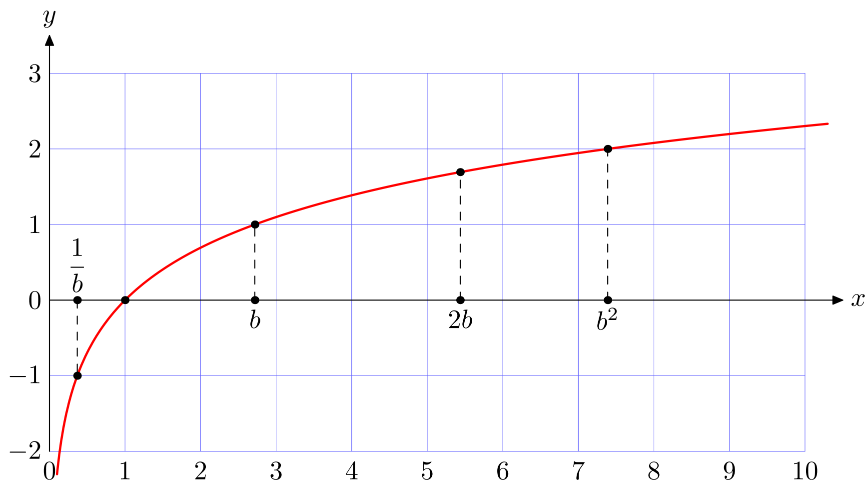
$$\boxed{y = \log_b x}\,, \tag{1}$$

gde je b *osnova* (*baza*) logaritma, a x *argument*. (Izgovara se „y je jednako logaritam od x za osnovu b“ ili kraće „y je logaritam b od x“.) Takođe važi $b = x^{1/y} = \sqrt[y]{x}$.

Sama reč *logaritam* potiče od grčkih reči $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$ (*logos*) i $\acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$ (*aritmos*), sa značenjem „broj kojim se računa“.

1.2 Grafik funkcije

Funkcija je u skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ definisana za $x > 0$ i $b > 0 \wedge b \neq 1$. Funkcija je *monotona*: za $b > 1$ funkcija je *rastuća*, dok je za $b < 1$ funkcija *opadajuća*. Zbog toga važi *bijekcija*: $\log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x = y$. Funkcija ima jednu *nulu*, uvek za $x = 1$.



Slika 1: Grafik logaritamske funkcije $y = \log_b x$.

1.3 Antilogaritam

Inverzna funkcija logaritmu je obično stepenovanje osnove logaritma argumentom i zove se *antilogaritam*

$$\boxed{\operatorname{anti}\log_b x = \log_b^{-1} x = b^x}\,. \tag{2}$$

Iz same definicije važi

$$\boxed{\log_b(\operatorname{anti}\log_b x) = \operatorname{anti}\log_b(\log_b x) = x}\,. \tag{3}$$

2 Jednakosti

Za logaritamsku funkciju važe razne *jednakosti* koje se koriste za uprošćivanje i prilagođavanje izraza prilikom rešavanja problema i zadataka.

2.1 Logaritam stepena osnove

Po samoj definiciji logaritma, ako je $x = b^a$, onda je

$$\boxed{\log_b b^a = a}\,. \tag{4}$$

Ako stavimo da je $1 = b^0$, odnosno, $b = b^1$, dobijamo da je

$$\boxed{\log_b 1 = 0} \qquad \text{i} \qquad \boxed{\log_b b = 1}\,. \tag{5}$$

Takođe je bitna jednakost

$$\boxed{b^{\log_b x} = x} \tag{6}$$

koja proizilazi iz same definicije logaritma i antilogaritma.

2.2 Logaritam proizvoda

Ako je

$$u = \log_b x \wedge v = \log_b y \quad \Rightarrow \quad x = b^u \wedge y = b^v,$$

onda je, zbog jednakosti (4)

$$x \cdot y = b^u b^v = b^{u+v} \quad \Rightarrow \quad \log_b(x \cdot y) = \log_b b^{u+v} = u + v.$$

Odavde je

$$\boxed{\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y}\,. \tag{7}$$

Iz ove jednakosti se može izvesti formula za logaritam faktorujela broja. Ako je

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k \quad \Rightarrow \quad \log(n!) = \sum_{k=1}^{n} \log k.$$

(Zanimljivo je da je $\log(1 \cdot 2 \cdot 3) = \log(1 + 2 + 3) = \log 1 + \log 2 + \log 3$.)

2.3 Logaritam količnika

Slično logaritmu proizvoda, ako je

$$u = \log_b x \wedge v = \log_b y \quad \Rightarrow \quad x = b^u \wedge y = b^v,$$

onda je, zbog jednakosti (4)

$$x/y = b^u b^{-v} = b^{u-v} \quad \Rightarrow \quad \log_b(x/y) = \log_b b^{u-v} = u - v.$$

Odavde je

$$\boxed{\log_b(x/y) = \log_b x - \log_b y}\,. \tag{8}$$

Iz ove jednakosti sledi

$$\boxed{\log_b(1/x) = -\log_b x}\,. \tag{9}$$

2.4 Logaritam stepena broja

Ako je

$$y = x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ puta}},$$

onda, iz jednakosti za logaritam proizvoda (7), sledi da je

$$\log_b y = \log_b(\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ puta}}) = \underbrace{\log_b x + \log_b x + \cdots + \log_b x}_{n \text{ puta}} = n \log_b x,$$

odakle je

$$\boxed{\log_b x^n = n \log_b x}. \tag{10}$$

Iz ove jednakosti sledi jednakost

$$\boxed{\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_b x}, \tag{11}$$

kao i jednakost

$$\boxed{x^y = b^{y \log_b x}}. \tag{12}$$

2.5 Promena osnove logaritma

Ako je

$$y = \log_a x \quad \Rightarrow \quad x = a^y,$$

onda je

$$\log_b x = \log_b a^y = y \log_b a = \log_a x \cdot \log_b a.$$

Odavde je

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}. \tag{13}$$

Iz ove jednakosti, ako stavimo da je $x = b$, se dobija i jednakost

$$\boxed{\log_a b \cdot \log_b a = 1}. \tag{14}$$

Iz jednakosti (4) i (13), ako stavimo da je $a = b^n$, sledi jednakost

$$\boxed{\log_{b^n} x = \frac{1}{n} \log_b x}. \tag{15}$$

Odavde, ako stavimo da je $n = -1$, sledi

$$\boxed{\log_{1/b} x = -\log_b x}, \tag{16}$$

a uzevši u obzir i jednakost (9) dobija se

$$\boxed{\log_{1/b} x = \log_b(1/x)}. \tag{17}$$

Treba biti oprezan kod korišćenja svih ovih jednakosti, naročito kod stepenovanja, i uvek treba proveriti interval u kome se računa. Na primer, iz jednakosti (10), sledi $\log x^2 = 2 \log x$, što je ispravno za $x > 0$, a inače, $\log x^2 = 2 \log |x|$, za bilo koje $x \neq 0$.

3 Najčešće logaritamske osnove

3.1 Osnova 10

U iniženjerstvu se najčešće koristi osnova logaritma 10, zove se *dekadni* ili *zajednički* logaritam, i piše se

$$y = \log_{10} x$$

ili, skraćeno,

$$y = \lg x.$$

Ponekad se može videti i samo

$$y = \log x,$$

bez navođenja osnove, ali treba obratiti pažnju na kontekst. Ako je neki inženjerski tekst u pitanju, najverovatnije se misli na osnovu 10.

Dekadni logaritam je pogodan i kada se koristi, takozvani *naučni* ili *inženjerski* zapis broja. Na primer, *Plankova konstanta* (Max Planck) iznosi

$$h = 6{,}62607015 \times 10^{-34}$$

koja ima dekadni logatiram

$$\log_{10} h = \log_{10}(6{,}62607015) - 34.$$

U fizici se za merenje nivoa signala ili zvuka koristi jedinica *bel* (B), ali je češće u praktičnoj upotrebi 10 puta manja jedinica *decibel* (dB), odnosno, $1\,\mathrm{B} = 10\,\mathrm{dB}$. Nivo signala L, koji zavisi od odnosa izmerene snage P i refrentne snage P_0, izražen u decibelima iznosi

$$L = 10 \log_{10}\left(\frac{P}{P_0}\right)\ \mathrm{dB}.$$

Kako se u akustici uzima da je referentna snaga $P_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W}$, moglo bi se pisati da je nivo zvuka u decibelima

$$L = 10 \log_{10}(P) - 120.$$

Normalan govor je oko 50 dB, zvuk motora mlaznog aviona pri poletanju je 150 dB, a smrtonosan je zvuk od 240 dB i više. Zvučni top Genasys LRAD ima nivo zvuka od oko 160 dB, što znači da je 10^{11} puta moćniji od govora.

Slična formula se koristi i za određivanje jačine zemljotresa, ili pH vrednosti.

3.2 Osnova 2

U informatici se često koristi logaritam sa osnovom 2, koji se zove *binarni* logaritam, i piše se

$$y = \log_2 x$$

ili, skraćeno,

$$y = \mathrm{lb}\, x.$$

Koristi se u kombinatorici, kao i u određivanju *količine informacija*, odnosno, potrebnog broja bitova memorije za smeštanje nekog podatka. Ako se zna da će u memoriju biti upisivani celi brojevi od 0 do n, onda je potrebno rezevisati

$$\mathit{bits} = \lfloor \log_2(n) \rfloor + 1$$

bitova memorije, gde $\lfloor x \rfloor$ predstavlja *najveći ceo broj koji je manji ili jednak* x (izgovara se „najveće celo od x“). Na primer, ako će u određenoj memoriji najveći broj biti milion, onda je za to potrebno rezevisati

$$bits = \lfloor \log_2(1\,000\,000) \rfloor + 1 = \lfloor 19{,}9315685693 \rfloor + 1 = 19 + 1 = 20$$

bitova memorije. Najveći broj koji može stati u ovih rezervisanih 20 bitova memorije je binarni broj koji ima 20 jedinica i iznosi

$$(1111\,1111\,1111\,1111\,1111)_2 = 2^{20} - 1 = 1\,048\,575.$$

Kako su i realni brojevi u memoriji predstavljeni kao uređeni parovi binarnih brojeva u obliku $(mantisa, eksponent)$, sa značenjem

$$x = mantisa \times 2^{eksponent},$$

binarni logaritam bi bio izračunat kao

$$\log_2(x) = \log_2(mantisa) + eksponent,$$

ako je $mantisa > 0$, inače je nedefinisan.

Binarni logaritam se koristi i u atomskoj fizici. Vreme *poluraspada* $t_{1/2}$ je vreme potrebno da se raspadne polovina jezgara atoma neke materije. Ako imamo početan broj jezgara N_0 i broj jezgara N_t nakon vremena t, njihov odnsos se može predstaviti formulom

$$\frac{N_0}{N_t} = 2^{t/t_{1/2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{t}{t_{1/2}} = \log_2\left(\frac{N_0}{N_t}\right). \tag{18}$$

Ova formula se koristi i za određivanje starosti stena ili fosila.

3.3 Osnova e

Ovu logaritamsku osnovu je otkrio Jakob Bernuli (Jacob Bernoulli) kada je proučavao *složenu kamatu* i dokazao da *kontinualna* složena kamata teži konstanti

$$\mathbf{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

ali je Ojler (Leonhard Euler) odredio njenu vrednosti i dao joj ime. Logaritam za ovu osnovu se zove *prirodni* logaritam (*logarithmus naturalis*) i piše se

$$\ln x = \log_{\mathbf{e}} x.$$

Antilogaritam je $\mathbf{e}^x$, koji se kao funkicja piše $\exp(x)$, i zove se *eksponencijalna funkcija*. Ova funkcija je poznata po tome što je to jedina funkcija čiji je izvod jednak samoj funkciji. Brojna vrednost se može izračunati formulom

$$\boxed{\mathbf{e}^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}. \tag{19}$$

Ako stavimo da je $x = 1$, brojna vrednost osnove prirodnog logaritma $\mathbf{e}$ se može odrediti

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots \\ &= 2{,}7182818284\,5904523536\,0287471352\,6624977572\,\ldots \end{aligned} \tag{20}$$

sa željenom tačnošću.

4 Brojna vrednost

4.1 Formula

Brojna vrednost prirodnog logaritma može biti izračunata pomoću formule

$$\boxed{\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2n+1}} \tag{21}$$

do željene tačnosti. Postupak kojim se računa $y = \ln x$ sa tačnošću ε izgleda ovako:

$$\boxed{\begin{array}{l} r \leftarrow (x-1)/(x+1); \quad k \leftarrow 1; \quad p \leftarrow 2r; \quad q \leftarrow r^2; \quad a \leftarrow p; \quad y \leftarrow a; \\ \text{ponavljati dok je } |a| > \varepsilon\text{:} \\ \qquad k \leftarrow k+2; \quad p \leftarrow p \cdot q; \quad a \leftarrow p/k; \quad y \leftarrow y + a; \end{array}} \tag{22}$$

(Videti zadatak 6.4.3 na strani 25.) Ovim postupkom se može izračunati vrednost

$$\begin{aligned} \ln 2 &= \frac{2}{1 \cdot 3^1} + \frac{2}{3 \cdot 3^3} + \frac{2}{5 \cdot 3^5} + \frac{2}{7 \cdot 3^7} + \frac{2}{9 \cdot 3^9} + \cdots \\ &= 0{,}6931471805\,5994530941\,7232121458\,1765680755\,\ldots \end{aligned}$$

kao i vrednost

$$\ln 10 = 2{,}3025850929\,9404568401\,7991454684\,3642076011\,\ldots$$

Ove vrednosti se koriste prilikom izračunavanja vrednosti binarnog, odnosno, dekadnog logaritma

$$\operatorname{lb} x = \log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}, \qquad \lg x = \log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

4.2 Verižni razlomak

Brojna vrednost prirodnog logaritma može se izračunati i pomoću *verižnog razlomka*

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \cfrac{x}{1 + \cfrac{1^2 x}{2 - 1x + \cfrac{2^2 x}{3 - 2x + \cfrac{3^2 x}{4 - 3x + \ddots}}}} \\ &= \cfrac{x}{1 + \underset{n=1}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}} \cfrac{n^2 x}{n + 1 - nx}}. \end{aligned}$$

Poput simbola koji se koriste za sumu 'Σ' ili proizvod 'Π', Gaus (Carl Friedrich Gauss) je smislio, verovatno, najpogodniji način za predstavljanje verižnih (lančanih) razlomaka, gde simbol 'K' potiče od nemačke reči za *prekinuti lanac* (*Kettenbruch*). Izraz iza ovog simbola pokazuje kako izgleda *opšti član* verižnog razlomka.

Ako pomoću ove formule izračunamo prvih 11 *konvergenata* $\ln 2$ kao $-\ln(1 - 1/2)$, dobićemo

$$\ln 2 \approx \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{131}{192}, \frac{661}{960}, \frac{1327}{1920}, \frac{1163}{1680}, \frac{148969}{215040}, \frac{447047}{645120}, \frac{44711}{64512}, \frac{983705}{1419264}, \ldots$$

gde je poslednji razlomak tačan na 5 decimala.

4.3 Logaritamske tablice

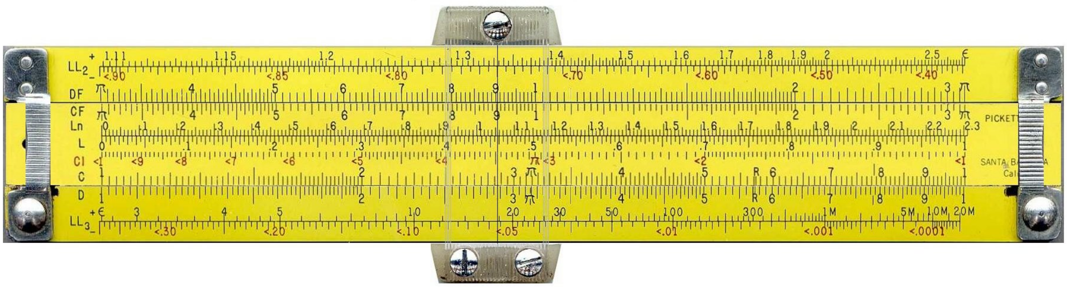
Prve tablice logaritama je izračunao Neper (John Napier of Merchiston) 1614. godine, koje su praktično sadržale logaritam za osnaovu $1/\mathbf{e}$, sa skaliranim argumentom i rezultatom, iako sam Neper nije znao za konstantu $\mathbf{e}$. Savremenim zapisom bi ovaj logaritam bio definisan kao

$$\mathrm{NapLog}(x) = 10^7 \log_{1/\mathbf{e}}(x/10^7) = -10^7 \ln(x/10^7).$$

Nekoliko godina kasnije, 1617. i 1624, Brigs (Henry Briggs) je izračunao tablice dekadnih logaritama sa 14 cifara tačnosti, koje se uz dopune i ispravke koriste i danas pod imenom *Brigsove tablice*.

4.4 Logaritmar

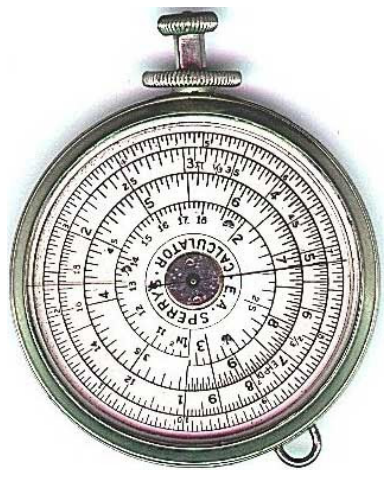
Pre pojave digitrona, za približno određivanje brojne vrednosti logaritma, koristila se je analogna mehanička sprava sa nekoliko lenjira zvana *logaritmar*.



Slika 2: Šiber.

Lenjiri imaju podeoke sa decimalom i logaritamskom, a često i sa sinusnom skalom. Jedan od lenjira je bio klizni, te otuda popularno ime *šiber* (od nemačkog *Rechenschieber*). Koristi se jednostavno, pomeranjem klizača i čitanjem vrednosti sa odgovarajuće skale. (Videti zadatke 6.4.1 i 6.4.2.)

Postojale su i kružne varijante, pa i džepne, gde je džepni sat sa logaritmarom i kompasom bio „iPhone“ XIX i prve polovine XX veka.



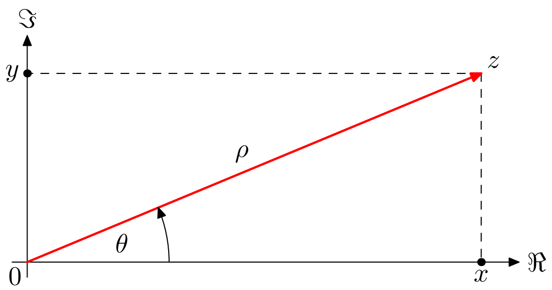
Slika 3: Džepni logaritmar.

Tablice i logaritmari se i danas koriste u vojsci, kao rezerva u slučaju otkazivanja elektronike. Prvi kompjuter ENIAC (Electronic Numerical Integrator And Computer) je napravljen 1946. godine da bi izračunao tablice za vojsku.

5 Još ponešto

5.1 Kompleksni logaritam

Ako u kompleksnoj ravni imamo kompleksan broj $z \in \mathbb{C}$,



Slika 4: Broj z u kompleksnoj ravni.

koji može biti predstavljean kao

$$\begin{aligned} z &= x + iy && \text{pravougle koordinate} \\ &= \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta) && \text{polarne koordinate} \\ &= \rho\,\mathbf{e}^{i\theta} && \text{Ojlerova formula} \end{aligned}$$

onda se, iz Ojlerove formule i jednakosti (7) i (4), dobija

$$\boxed{\ln z = \ln\rho + i\theta}\,. \tag{23}$$

Pošto je $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$, sledi da prirodni logaritam kompleksnog broja z nije definisan $(\tilde{\infty})$ samo za $z = 0$. Kako je $y/x = \tan\theta$, prirodni logaritam kompleksnog broja, predstavljenog pravouglim koordinatama, iz formule (23), može se izračunati

$$\boxed{\ln(x + iy) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}\,. \tag{24}$$

I za kompleksne brojeve važi jednakost promene baze (13), tako da za dva kompleksna broja z i w, gde je $z \neq 0$, $w \neq 0$ i $w \neq 1$, sledi

$$\log_w z = \frac{\ln z}{\ln w},$$

gde se $\ln z$ i $\ln w$ računaju pomoću formule (23), odnosno, (24). Na primer,

$$\log_{2+i}(3 + 4i) = 2, \qquad \log_i \mathbf{e} = \frac{2}{i\pi}.$$

Iz Ojlerove formule se može dobiti *najlepša formula u istoriji matematike*, u kojoj je upotrebljeno 5 najvažnijih matematičkih konstatnti $(0, 1, \pi, \mathbf{e}, i)$

$$\boxed{\mathbf{e}^{i\pi} + 1 = 0}\,, \tag{25}$$

gde, ako prebacimo 1 na desnu stranu i *logaritmujemo*, dobijamo zanimljivu jednakost

$$\frac{\ln(-1)}{\sqrt{-1}} = \pi.$$

5.2 Izvod

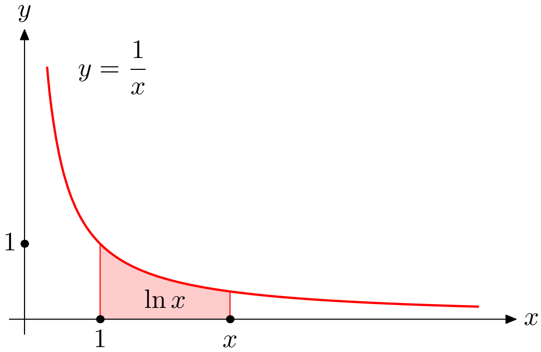
Ako je

$$y = \ln x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x},$$

odakle se, pomoću jednakosti (13) i jednakosti za izvod složene funkcije, može dobiti

$$\boxed{y = \log_b(f(x)) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{f'(x)}{f(x)\ln b}}. \tag{26}$$

Površina figure ispod funkcije $y = 1/x$ do x-ose, u opsegu od 1 do x iznosi $\ln x$. Matematički zapisano: $\int_1^x dx/x = \ln x$.



Slika 5: Geometrijsko značenje $\ln x$.

(Na slici je $x = \mathbf{e}$, tako da je površina osenčane figure jednaka 1.)

5.3 Limes

Ojler je dokazao da je

$$\ln x = \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1).$$

5.4 Benfordov zakon

Verovatnoća da *početne cifre* neke matematičke ili fizičke konstante (kao i dužine reke, visine planine, broja stanovnika, rastojanja, stanja na računu, ...), budu ℓ za brojnu osnovu b, prati takozvani *Benfordov zakon* (Frank Benford), i iznosi

$$p(b, \ell) = \log_b \left(1 + \frac{1}{\ell}\right). \tag{27}$$

5.5 Teorema prostih brojeva

Još jedno mesto gde se pojavljuje prirodni logaritam u *teoriji brojeva* je, takozvana, *teorema prostih brojeva* (PNT), kojom se je bavio Gaus kada je imao samo 15–16 godina.

Ako funkcija $\pi(n)$ ima vrednost *ukupan broj prostih brojeva manjih ili jednakih od* n, onda važi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)\ln n}{n} = 1.$$

Posledica ove teoreme je da je n-ti prost broj p_n, za veliko n, otprilike

$$p_n \sim n \ln n.$$

6 Zadaci i rešenja

6.1 Jednačine

6.1.1 FIT

▷ **Zadatak:** Nađi rešenje jednačne 1

$$\log_2(x-2) + \log_4(x-2) + \log_{16}(x-2) = 7.$$

(Zadatak sa mog prijemnog ispita na FIT „Metropolitan".)

▶ **Rešenje:** Vidimo da su osnove logaritama stepeni broja 2, pa iz jednakosti za logaritam stepena osnove (15) sledi

$$\begin{aligned}\log_2(x-2) + \log_{2^2}(x-2) + \log_{2^4}(x-2) &= \\ \log_2(x-2) + \frac{1}{2}\log_2(x-2) + \frac{1}{4}\log_2(x-2) &= \\ \frac{7}{4}\log_2(x-2) &= 7,\end{aligned}$$

odnosno, posle skraćivanja,

$$\log_2(x-2) = 4.$$

Odavde je

$$x - 2 = 2^4 = 16 \quad \Rightarrow \quad x = \boxed{18}.$$

6.1.2 Jednačina 2

▷ **Zadatak:** Reši jednačinu 2

$$2\log(x) - \log(6-x) = 0.$$

▶ **Rešenje:** Da bi logaritam u jednačini bio definisan mora biti

$$x > 0 \land 6 - x > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < x < 6.$$

Zbog jednakosti (10) možemo pisati

$$\log(x^2) = \log(6-x)$$

odakle sledi

$$\begin{aligned}x^2 &= 6 - x \\ x^2 + x - 6 &= 0.\end{aligned}$$

Rešavanjem kvadratne jednačine

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm 5}{2},\end{aligned}$$

dobijamu rešenja $x_1 = 2$ i $x_2 = -3$, odakle je jedinstveno rešenje

$$x = \boxed{2}.$$

6.1.3 Jjjj (yafe)

▷ **Zadatak:** Reši jednačinu 3

$$\ln(x) = \ln(15 - x) - \ln(x + 1).$$

▶ **Rešenje:** Jednačina je definisana za

$$x > 0 \wedge 15 - x > 0 \wedge x + 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < x < 15.$$

Ako zapišemo jednačinu kao

$$\ln(x) + \ln(x + 1) = \ln(15 - x)$$

iz jednakosti za logaritam proizvoda (7), možemo pisati

$$\begin{aligned} \ln(x(x + 1)) &= \ln(15 - x) \\ \ln(x^2 + x) &= \ln(15 - x) \\ x^2 + x &= 15 - x \\ x^2 + 2x - 15 &= 0 \end{aligned}$$

Rešavanjem kvadratne jednačine dobijamo 2 rešenja, $x_1 = 3$ i $x_2 = -5$, ali zbog uslova, ostaje jedinstveno

$$x = \boxed{3}.$$

6.1.4 Četiri četvorke

▷ **Zadatak:** Dokazati da svaki prirodan broj $n \in \mathbb{N}$, može biti predstavljen sa 4 broja 4, pomoću logaritamske funkcije i kvadratnog korena 4

$$n = \log_{\sqrt{4}/4}\left(\log_4 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{4}}}}_{n \text{ korena}}\right).$$

▶ **Rešenje:** Kako je

$$\frac{\sqrt{4}}{4} = \frac{1}{2} \qquad \text{i} \qquad \underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{4}}}}_{n \text{ korena}} = 4^{(1/2)^n},$$

izraz može biti uprošćen

$$\log_{\sqrt{4}/4}\left(\log_4 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{4}}}}_{n \text{ korena}}\right) = \log_{1/2}\left(\log_4 4^{(1/2)^n}\right),$$

gde iz jednakosti za logaritam stepena osnove (4), sledi

$$\begin{aligned} &= \log_{1/2}(1/2)^n \\ &= \boxed{n}. \end{aligned}$$

★ **Dodatak:** *Davno je u jednom časopisu postavljen sličan zadatak: da se sa što manje istih brojeva, koristeći bilo koju matematičku funkciju, predstavi svaki prirodan broj n. Rešio ga je nobelovac Pol Dirak (Paul Dirac) sa 3 broja 2, čije originalno rešenje izgleda*

$$-\log_2 \log_2 \sqrt{\cdots n \cdots \sqrt{2}} = -\log_2 \log_2 2^{2^{-n}} = -\log_2 2^{-n} = n. \qquad \square$$

6.1.5 Sveska 7

▷ **Zadatak:** Nađi x ako je 5

$$x^{\log x} = 1000x^2.$$

▶ **Rešenje:** Ako logaritmujemo obe strane dobijamo

$$\begin{aligned}\log x^{\log x} &= \log(1000x^2)\\ \log x \log x &= \log 1000 + \log x^2\\ \log^2 x &= 3 + 2\log x,\end{aligned}$$

gde, posle smene $t = \log x$, dobijamo kvadratnu jednačinu

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

čija su rešenja $t_1 = 3$ i $t_2 = -1$, odakle su

$$x_1 = 10^3 = \boxed{1000} \quad \text{i} \quad x_2 = 10^{-1} = \boxed{\frac{1}{10}}.$$

6.1.6 Beskonačni koren

▷ **Zadatak:** Odredi vrednost 6

$$x = \ln\left(\mathbf{e}\sqrt[2]{\mathbf{e}\sqrt[3]{\mathbf{e}\sqrt[4]{\mathbf{e}\sqrt[5]{\cdots}}}}\right)$$

gde je $\mathbf{e}$ osnova prirodnog logaritma.

▶ **Rešenje:** Kako je $\ln \mathbf{e} = 1$, a koristeći jednakost za logaritam proizvoda (7) i jednakost za logaritam korena (11), možemo pisati

$$\begin{aligned}&= 1 + \frac{1}{2}\ln\left(\mathbf{e}\sqrt[3]{\mathbf{e}\sqrt[4]{\mathbf{e}\sqrt[5]{\cdots}}}\right)\\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\ln\left(\mathbf{e}\sqrt[4]{\mathbf{e}\sqrt[5]{\cdots}}\right)\right)\\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{4}\ln\left(\mathbf{e}\sqrt[5]{\cdots}\right)\right)\right)\\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{5}\ln(\cdots)\right)\right)\right)\\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} + \cdots\\ &= \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots\end{aligned}$$

Ako pogledamo formulu (20) na strani 7, možemo videti da je ovaj zbir jednak

$$x = \boxed{\mathbf{e} - 1},$$

jer iz sume za izračunavanje $\mathbf{e}$ nedostaje *nulti* član $1/0! = 1$.

6.1.7 Net 3

▷ **Zadatak:** Odredi n^3 ako je 7

$$\log_{5n} 30\sqrt{5} = \log_{4n} 48.$$

▶ **Rešenje:** Prebacimo u osnovu 6, jer je 6 *nzd* za 30 i 48 iz izraza

$$\begin{aligned}
\frac{\log_6 30\sqrt{5}}{\log_6 5n} &= \frac{\log_6 48}{\log_6 4n} \\
\frac{\log_6 6 + \log_6 5 + \frac{1}{2}\log_6 5}{\log_6 5 + \log_6 n} &= \frac{\log_6 6 + \log_6 8}{\log_6 4 + \log_6 n} \\
\frac{1 + \frac{3}{2}\log_6 5}{\log_6 5 + \log_6 n} &= \frac{1 + 3\log_6 2}{2\log_6 2 + \log_6 n}.
\end{aligned}$$

Izvršimo zamenu: $n = 6^t$, odnosno, $t = \log_6 n$ i $u = \log_6 2$ i $v = \log_6 5$. Dobijamo

$$\begin{aligned}
\frac{1 + \frac{3}{2}v}{v + t} &= \frac{1 + 3u}{2u + t} \\
(1 + \tfrac{3}{2}v)(2u + t) &= (1 + 3u)(v + t) \\
2u + 3uv + t + \tfrac{3}{2}vt &= v + 3uv + t + 3ut \qquad / -3uv;\ -t;\ \times 2; \\
4u + 3vt &= 2v + 6ut \\
6ut - 3vt &= 4u - 2v \\
t(6u - 3v) &= 4u - 2v \\
t &= \frac{4u - 2v}{6u - 3v} \\
t &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2u - v}{2u - v} \\
t &= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Odavde je

$$n^3 = 6^{3t} = \boxed{36}.$$

6.1.8 Izumiranje

▷ **Zadatak:** Nađi n ako je 8

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdots \log_n (n+1) = 10.$$

▶ **Rešenje:** Ako prebacimo sve logartime u osnovu 2, dobijamo

$$\log_2 3 \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 6}{\log_2 5} \cdots \frac{\log_2 (n+1)}{\log_2 n} = 10.$$

Vidimo da će, nakon *masovnog* skraćivanja, *izumreti* svi izrazi osim

$$\log_2 (n+1) = 10 \quad \Rightarrow \quad n + 1 = 2^{10} = 1024,$$

odnosno,

$$n = \boxed{1023}.$$

6.2 Nejednačine

6.2.1 Sveska 11

▷ **Zadatak:** Reši nejednačinu 9

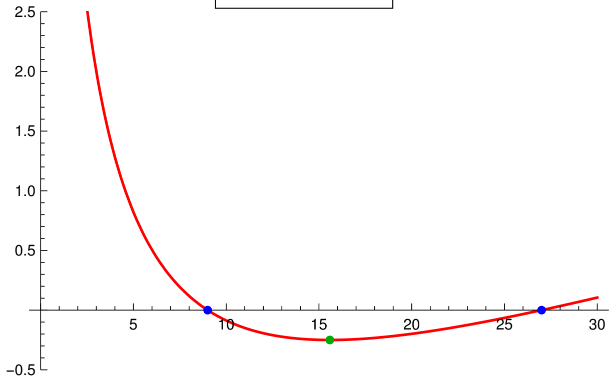
$$\log_3^2 x - 5\log_3 x + 6 \leq 0.$$

▶ **Rešenje:** Kada izvršimo zamenu $t = \log_3 x$, možemo pisati da je

$$t^2 - 5t + 6 \leq 0$$

Kako su rešenja kvadratne jednačine $t_1 = 2$ i $t_2 = 3$, nejednačina je zadovoljena kada je $t \in [2, 3]$. Pošto je $x = 3^t$, sledi da je nejednačina zadovoljena za $x \in [3^2, 3^3]$, odnosno,

$$\boxed{9 \leq x \leq 27}.$$



Slika 6: $y = \log_3^2 x - 5\log_3 x + 6$.

★ **Dodatak:** Funkcija ima minimum za $t = 5/2$, odnosno, u tački $(9\sqrt{3}, -1/4)$.

6.2.2 Sveska 9

▷ **Zadatak:** Odredi u kojim granicama je zadovoljen uslov 10

$$\log_3(x^2 - 4) < \log_3 5.$$

▶ **Rešenje:** Ako se oslobodimo logaritma

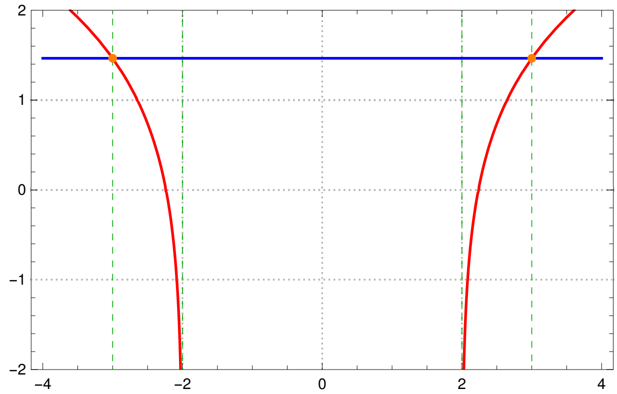
$$\begin{aligned} x^2 - 4 &< 5 \\ x^2 &< 9, \end{aligned}$$

dobićemo da je $-3 < x < 3$. Međutim, da bi logaritam bio definisan mora biti

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &> 0 \\ x^2 &> 4, \end{aligned}$$

odnosno, $x < -2$ ili $x > 2$. Odavde je

$$x \in \boxed{(-3, -2) \cup (2, 3)}.$$



Slika 7: $y = \log_3(x^2 - 4)$; $\log_3 5$.

6.2.3 Sveska 10

▷ **Zadatak:** Reši nejednačinu 11

$$\log_5 x \geq \frac{1}{2} \log_5(3x - 2).$$

▶ **Rešenje:** Da bi logaritam bio definisan, vidimo da mora biti

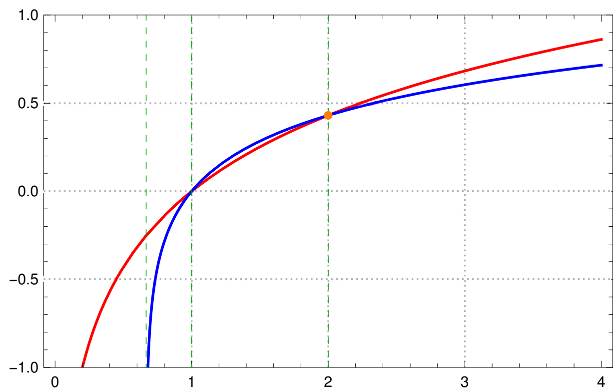
$$3x - 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{2}{3}.$$

Ako nejednačinu pomožimo sa 2 , dobijamo

$$\begin{aligned} 2\log_5 x &\geq \log_5(3x - 2) \\ \log_5 x^2 &\geq \log_5(3x - 2) \\ x^2 &\geq 3x - 2 \\ x^2 - 3x + 2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Kvadratna jednačina ima rešenja $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$, pa je rešenje nejednačine

$$x \in \boxed{\left(\frac{2}{3}, 1\right] \cup [2, \infty)}.$$



Slika 8: $y = \log_5 x$; $\frac{1}{2}\log_5(3x - 2)$.

6.2.4 Net 1

▷ **Zadatak:** Reši 12

$$\log_{3x+5}(9x^2+8x+8) > 2.$$

▶ **Rešenje:** Ako se oslobodimo logaritma dobijamo

$$9x^2+8x+8 > (3x+5)^2$$
$$9x^2+8x+8 > 9x^2+30x+25$$

gde je nakon sređivanja

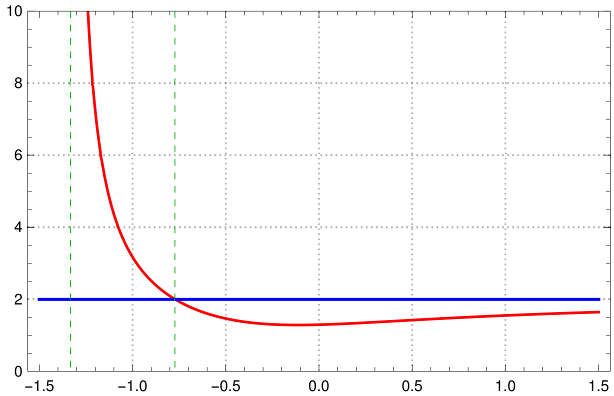
$$x < -\frac{17}{22}$$

Sledeći uslov je da osnova bude veća od 1, to jest

$$3x+5 > 1$$
$$x > -\frac{4}{3},$$

odakle sledi rešenje

$$x \in \boxed{\left(-\frac{4}{3}, -\frac{17}{22}\right)}.$$



Slika 9: $y = \log_{3x+5}(9x^2+8x+8)$; 2.

6.2.5 Net 2

▷ **Zadatak:** Koje vrednosti zadovoljavaju sledeću nejednačinu 13

$$\log_7(x+5) > \log_5(x+5).$$

▶ **Rešenje:** Prebacimo izraz u zajednički logaritam

$$\frac{\log(x+5)}{\log 7} > \frac{\log(x+5)}{\log 5}$$
$$\log 5 \log(x+5) > \log 7 \log(x+5).$$

Kako je $\log 5 < \log 7$ i pozitivni su, da bi uslov važio, mora biti

$$\log(x+5) < 0,$$

odakle je

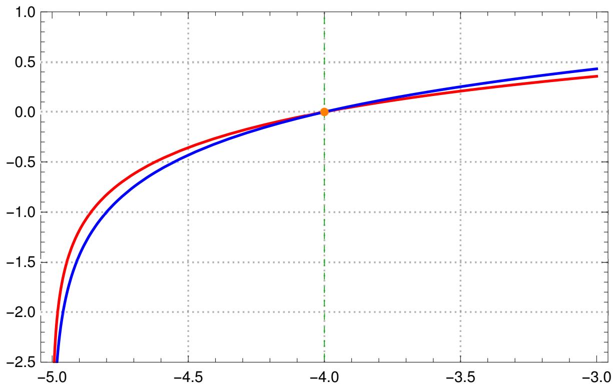
$$\begin{aligned} x+5 &< 1 \\ x &< -4, \end{aligned}$$

a da bi logaritam bio definisan mora da važi i

$$\begin{aligned} x+5 &> 0 \\ x &> -5, \end{aligned}$$

odakle je rešenje

$$x \in \boxed{(-5,-4)}.$$



Slika 10: $y = \log_7(x+5)$; $\log_5(x+5)$.

6.2.6 Net 4

▷ **Zadatak:** Proveri kada važi 14

$$\log_{\frac{x+4}{2}}\left(\log_2 \frac{2x-1}{3+x}\right) < 0.$$

▶ **Rešenje:** Da bi prvi logaritam bio definisan mora da važi

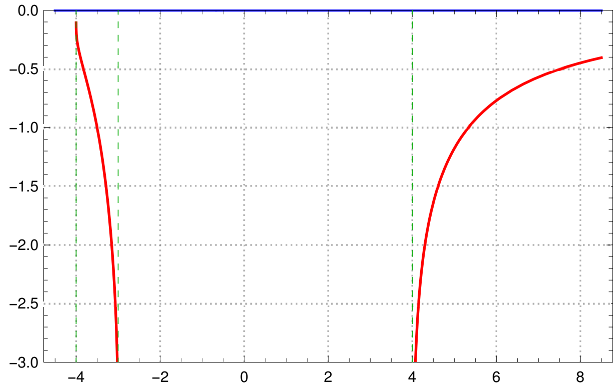
$$\frac{x+4}{2} > 0 \land \frac{x+4}{2} \neq 1 \quad \Rightarrow \quad x > -4 \land x \neq -2,$$

a kako vrednost binarnog logaritma mora biti pozitivna, onda argument mora biti

$$\frac{2x-1}{3+x} > 1 \quad \Rightarrow \quad x < -3 \lor x > 4.$$

Rešenje je

$$x \in \boxed{(-4,-3) \cup (4,\infty)}.$$



Slika 11: $y = \log_{\frac{x+4}{2}}\left(\log_2 \dfrac{2x-1}{3+x}\right)$.

6.2.7 Net 6

▷ **Zadatak:** Koje vrednosti zadovoljavaju uslov 15

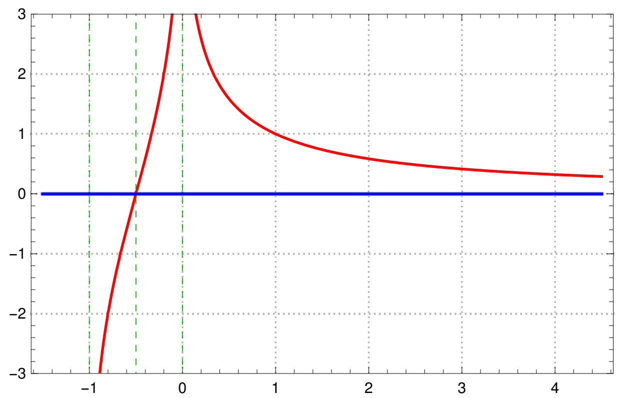
$$\log_2(x+1) > \log_4 x^2?$$

▶ **Rešenje:** Ako levu stranu zapišemo kao $2 \cdot \frac{1}{2}\log_2(x+1) = \log_{2^2}(x+1)^2$, što sledi iz jednakosti (15) i (10), dobićemo

$$\begin{aligned}
\log_4(x+1)^2 &> \log_4 x^2 \\
(x+1)^2 &> x^2 \\
x^2+2x+1 &> x^2 \\
2x+1 &> 0 \\
x &> -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Kako mora da važi i $x \neq 0$, dobijamo konačno rešenje

$$x \in \boxed{\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (0, \infty)}.$$



Slika 12: $y = \log_2(x+1) - \log_4 x^2$.

⋆ **Dodatak:** Kao što je na strani 5 napomenuto, da smo $\log_4 x^2$ jednostavno predstavili kao $\log_{2^2} x^2 = \log_2 x$, dobili bismo netačno rešenje. Ispravno bi bilo $\log_4 x^2 = \log_2 |x|$, kada bismo posebno gledali 2 slučaja: za $x > 0$ i za $x < 0$.

6.2.8 Granice

▷ **Zadatak:** Dokaži da važi nejednakost 16

$$\boxed{1-\frac{1}{x}\le \ln x \le x-1}\,, \tag{28}$$

kojom se definišu *donja* i *gornja* granica prirodnog logaritma.

▶ **Rešenje:** Pogledajmo prvo desni deo nejednakosti. Ako definišemo funkciju

$$y=\ln x-(x-1),$$

potrebno je da dokažemo da je $y\le 0$ za svako $x>0$. Intuitivno je jasno da tvrđenje važi, jer $\ln x$ mnogo sporije raste od $x-1$, i formalni dokaz ćemo bazirati na tome. Prvi izvod funkcije je

$$y'=\frac{1}{x}-1,$$

koji ima jedinstvenu nulu $y'=0$ za $x=1$. Kako je drugi izvod

$$y''=-\frac{1}{x^2}<0,$$

uvek negativan, to znači da funkcija y nema *prevojnih tačaka* i da tačka $(1,0)$ predstavlja *maksimum* funkcije y, odakle je $y\le 0$, odnosno,

$$\boxed{\ln x\le x-1}\,.$$

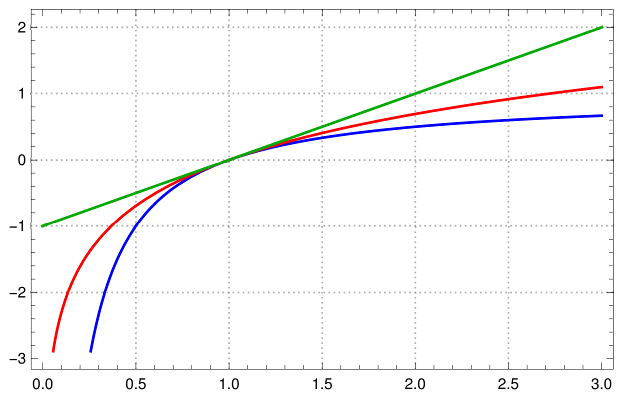
Ako u ovu nejednakost umesto x stavimo $1/x$, možemo pisati

$$\begin{aligned}\ln(1/x) &\le \frac{1}{x}-1\\ -\ln x &\le \frac{1}{x}-1,\end{aligned}$$

gde, kada izrazi zamene strane, dobijamo

$$\boxed{1-\frac{1}{x}\le \ln x}\,,$$

što predstavlja levi deo nejednakosti iz zadatka. □



Slika 13: $y=1-1/x$; $y=\ln x$; $y=x-1$.

★ **Dodatak:** Sve tri funkcije se *dodiruju* u tački $(1,0)$, što znači da u toj tački sve tri imaju istu *tangentu*, odnosno, isti prvi izvod $y'(1)=1$; inače bi se sekle i nejednakost ne bi važila.

6.3 Sitni primeri

6.3.1 Zemljotres

▷ **Zadatak:** Magnituda zemljotresa M po *Rihterovoj skali* zavisi logaritamski od intenziteta zemljotresa I 17

$$M = \log_{10} I.$$

U avgustu 2009, japansko ostrvo Honšu je pogodio zemljotres magnitude 6,1 po Rihteru, a u martu 2011, razarajući zemljotres koji je bio oko 800 puta jači od prvog. Koliko stepeni po Rihteru je imao drugi? (Koristi logaritamske tablice ili logaritmar.)

▶ **Rešenje:** $M_2 = 6{,}1 + \log_{10} 800 \approx 6{,}1 + 2{,}9 = \boxed{9{,}0}$ stepeni Rihtera.

6.3.2 Decimalne cifre

▷ **Zadatak:** Koliko decimalnih cifara d ima 128-bitna promenljiva? ($\log_{10} 2 \approx 0{,}30103$) 18

▶ **Rešenje:** $d = \lfloor \log_{10} 2^{128} \rfloor + 1 = \lfloor 128 \log_{10} 2 \rfloor + 1 = \lfloor 38{,}53184 \rfloor + 1 = 38 + 1 = \boxed{39}$.

6.3.3 Poluraspad joda

▷ **Zadatak:** Ako imamo 63 g izotopa joda ^{131}I, a znamo da smo pre 11 dana imali 163 g, koje je vreme poluraspada ovog izotopa? (Koristi prirodni logaritam.) 19

▶ **Rešenje:** Iz formule (18) na strani 7, sledi da se vreme poluraspada može izračunati

$$t_{1/2} = \frac{t}{\log_2(m_0/m_t)} = \frac{t \ln 2}{\ln(m_0/m_t)} = \frac{11 \ln 2}{\ln(163/63)} \approx \boxed{8{,}02 \,\text{dana}}.$$

6.3.4 Geometrijski niz

▷ **Zadatak:** Za $0 \leq x < 1$, uprostiti izraz 20

$$y = \log(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots).$$

▶ **Rešenje:** Kako je zbir[1] beskonačnog geometrijskog niza

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x},$$

može se pisati

$$y = \log\left(\frac{1}{1-x}\right),$$

gde iz jednakosti za recipročnu vrednost (9), sledi

$$= \boxed{-\log(1-x)}.$$

[1] **Dokaz:** Ako je $s = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = 1 + x \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots) = 1 + x \cdot s$, odakle je $s - x \cdot s = 1$, sledi da je $s = 1/(1-x)$. □

6.3.5 Izvod

▷ **Zadatak:** Odredi izvod funkcije $f(\alpha) = \ln\left(\frac{\alpha}{\cos\alpha}\right)$. 21

▶ **Rešenje:** Pomoću jednakosti (8) razložimo funkciju na

$$f(\alpha) = \ln\alpha - \ln\cos\alpha,$$

a kako je izvod $\cos\alpha$ jednak $-\sin\alpha$ i iz jednakosti (26) za izvod logaritma funkcije, sledi da je

$$f'(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = \boxed{\frac{1}{\alpha} + \tan\alpha}.$$

6.3.6 *i* na *i*

▷ **Zadatak:** Odredi vrednost i^i gde je $i = \sqrt{-1}$, *imaginarna jedinica*. 22

▶ **Rešenje:** Kako u kompleksnoj ravni i ima polarne koordinate $\rho = 1$ i $\theta = \pi/2$, ako ga predstavimo Ojlerovom formulom kao $i = \mathbf{e}^{i\pi/2}$ i iz jednakosti (12) i (4), sledi da je

$$i^i = \mathbf{e}^{i\ln i} = \mathbf{e}^{i\ln\mathbf{e}^{i\pi/2}} = \mathbf{e}^{i^2\pi/2} = \boxed{\mathbf{e}^{-\pi/2}} \approx 0{,}20788$$

realan broj.

6.3.7 ln(−*z*)

▷ **Zadatak:** U skupu kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, ako znamo vrednost $\ln z$, koliko je $\ln(-z)$? 23

▶ **Rešenje:** Kako je u kompleksnoj ravni $-z$ jednako z zarotirano oko koordinatnog početka za ugao od $180^\circ = \pi$, dobijamo

$$\ln(-z) = \boxed{\ln z + i\pi}.$$

Ako proverimo, iz Ojlerove jednačine (25), dobijamo

$$\mathbf{e}^{\ln(-z)} = \mathbf{e}^{\ln z + i\pi} = \mathbf{e}^{\ln z}\cdot\mathbf{e}^{i\pi} = z\cdot(-1) = -z.$$

★ **Dodatak:** Xmmm ..., trik sa rotacijom nije baš potpuno tačan: dobili bismo $-z$ i za ugao $-\pi$, pa bi bilo $\ln(-z) = \ln z - i\pi$, što je takođe tačno; ustvari, tačno je za bilo koji ugao $\pi + 2k\pi$ gde je $k \in \mathbb{Z}$ ceo broj. Odavde bi sledilo da je

$$\ln(-z) = \ln z + i(\pi + 2k\pi),\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

I sama formula (23), $\ln z = \ln\rho + i\theta$, predstavlja samo *glavnu granu* kompleksnog logaritma, koji je nekakva vrsta 4D spirale. Potpuna formula bi bila

$$\boxed{\ln z = \ln\rho + i(\theta + 2k\pi),\ \ k \in \mathbb{Z}}. \tag{29}$$

6.3.8 Prvo, pa 1

▷ **Zadatak:** Koliki procenat cena *od igle do lokomotive* počinje cifrom 1? 24

▶ **Rešenje:** Iz formule (27) sa strane 11 sledi da je $p_1 = \log_{10} 2 \approx \boxed{30\%}$.

★ **Dodatak:** Ovu zakonitost je prvi otkrio 1881. astronom Njucom (Simon Newcomb), kada je primetio da su listovi logaritamskih tablica koje je dugo koristio najprljaviji na početku.

6.4 Ručni rad

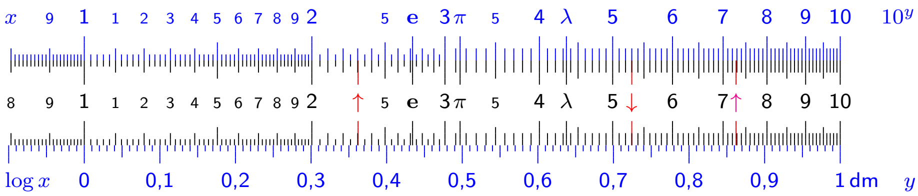
6.4.1 Analogni kvadratni koren

▷ **Zadatak:** Objasni način za određivanje vrednosti $\sqrt{x}$ logaritmarom. 25

▶ **Rešenje:** Kvadratni koren se može direktno čitati sa logaritmara ako *u glavi* izvršimo deljenje sa 2, i po potrebi, sabiranje sa 0,5, što je vrlo jednostavno, jer se radi o brojevima između 0 i 1 sa najviše 3 decimale. Kako je

$$\sqrt{x} = 10^{\frac{1}{2}\log x},$$

potrebno je pročitati vrednost $\log x$, a onda za dvostruko manju vrednost od nje, pročitati vrednost 10^y. Na primer, za izračunavanje $\sqrt{5{,}3}$, čitamo da je $\log 5{,}3 \approx 0{,}724$ ($\downarrow$), a onda čitamo vrednost 10^y za $y = 0{,}724/2 = 0{,}362$ ($\uparrow$) i dobijamo $\sqrt{5{,}3} \approx 2{,}3$.



Za $\sqrt{53}$ treba u y dodati još 0,5 tako da je $y = 0{,}362 + 0{,}5 = 0{,}862$ ($\uparrow$), odakle je $\sqrt{53} \approx 7{,}28$. Naravno, $\sqrt{530}$ se računa kao $10\sqrt{5{,}3}$, ili $\sqrt{0{,}53} = \frac{1}{10}\sqrt{53}$.

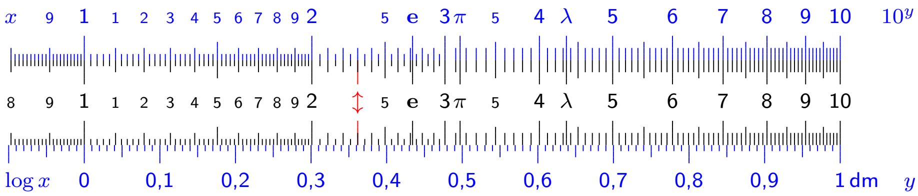
6.4.2 Analogni stepen

▷ **Zadatak:** Odredi logaritmarom približnu vrednost $z = 2{,}3^{1{,}7}$. 26

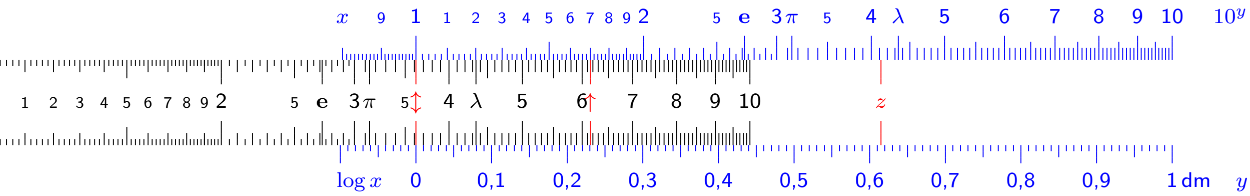
▶ **Rešenje:** Pomoću jednakosti (12) predstavimo

$$z = 2{,}3^{1{,}7} = 10^{1{,}7\cdot\log(2{,}3)}.$$

Prvo određujemo vrednost $\log(2{,}3)$ tako što nalazimo $x = 2{,}3$ i čitamo ispod njega vrednost $\log x$ (vidi nit obeleženu sa '$\updownarrow$').



Nalazimo da je $\log(2{,}3) \approx 0{,}362$. Nakon toga, tu vrednost na klizaču poravnavamo sa $x = 1$. Kako na klizaču ne postoji 0,362, postavićemo na 3,62, s tim što ćemo rezultat podeliti sa 10. Sada, za $x = 1{,}7$ čitamo vrednost na klizaču ispod



i nalazimo da je oko 6,15, što znači da je $1{,}7 \cdot \log(2{,}3) \approx 0{,}615$. Nakon toga, za $y = 0{,}615$ čitamo vrednost 10^y i nalazimo da je oko 4,12 što je i rešenje

$$z = 2{,}3^{1{,}7} \approx \boxed{4{,}12},$$

a tačna vrednost je $z = 4{,}120380\ldots$

6.4.3 ln 3

▷ **Zadatak:** U čast Nepera i Brigsa, pomoću postupka (22) sa strane 8, izračunaj *peške* približnu vrednost $\ln 3$ u 5 koraka. Za upoređivanje, tačna vrednost je 27

$$\ln 3 = 1{,}0986122886\,6810969139\,5245236922\,5257046475\,\ldots$$

▶ **Rešenje:** Za $x = 3$, izraz $r = (x-1)/(x+1) = 1/2$. U nultom koraku postavljamo početne vrednosti:

Korak *0.* $\quad k = 1, \quad p = 2r = 1, \quad q = r^2 = 1/4, \quad a = p = 1, \quad y = a = 1.$

Slede koraci iteracije — povećamo k za 2, pomnožimo p sa q, član sume a postaje p/k, koga dodajemo u rezultat y:

Korak *1.* $\quad k = 3, \quad p = 1/4, \quad a = 1/12, \quad y = 13/12;$
Korak *2.* $\quad k = 5, \quad p = 1/16, \quad a = 1/80, \quad y = 263/240;$
Korak *3.* $\quad k = 7, \quad p = 1/64, \quad a = 1/448, \quad y = 7379/6720;$
Korak *4.* $\quad k = 9, \quad p = 1/256, \quad a = 1/2304, \quad y = 88583/80640;$
Korak *5.* $\quad k = 11, \quad p = 1/1024, \quad a = 1/11264, \quad y = 3897967/3548160.$

Rezultat je

$$\ln 3 \approx \frac{3897967}{3548160} \approx \boxed{1{,}0986},$$

što nije loše za samo 5 koraka, jer je apsolutna greška oko $2{,}4 \times 10^{-5}$. Ali, može bolje...

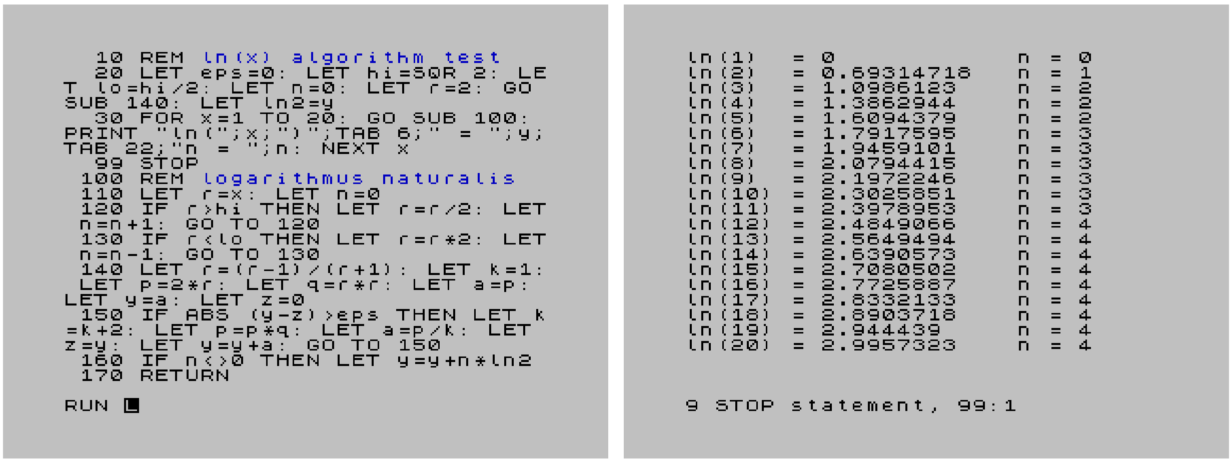
★ **Dodatak:** Ako već imamo precizno izračunatu vrednost $\ln 2$, onda je bolje računati $\ln 3$ kao $\ln(3/4)+2\ln 2$, jer će u postupku, umesto $r = 1/2$, biti $r = (3/4-1)/(3/4+1) = -1/7$, odnosno, umesto $q = 1/4$, biće $q = 1/49$, što dovodi do mnogo bržeg izračunavanja. U istom broju koraka bismo dobili

$$\ln\frac{3}{4} \approx -\frac{2}{7}, -\frac{296}{1029}, -\frac{72526}{252105}, -\frac{24876448}{86472015}, -\frac{522405418}{1815912315}, -\frac{281576520392}{978776737785},$$

gde poslednji razlomak ima grešku od oko $1{,}6 \times 10^{-12}$, što je više od dvostruko tačnih cifara. Kada mu (sa strane 8) dodamo $2\ln 2$, dobićemo

$$\ln 3 \approx 2\ln 2 - \frac{281576520392}{978776737785} = \underbrace{1{,}098612288669}_{\text{12 tačnih cifara}}726\ldots$$

Generalno, ovakav način je najbrži ako računamo $\ln x = \ln(x/2^n)+n\ln 2$, gde biramo n takvo da $x/2^n$ bude što bilže 1, odnosno, da q bude najmanje moguće (vidi program).



Slika 14: ZX Spectrum BASIC program.

7 Reference

7.1 Linkovi

[*1*] GitHub — Luka S. Nešić — Maturski rad — Logaritam
https://github.com/Nasumica/LukaMaturski/raw/refs/heads/main/log.pdf

[*2*] WIKIPEDIA — Logarithm
https://en.wikipedia.org/wiki/Logarithm

[*3*] Wolfram MathWorld — Logarithm
https://mathworld.wolfram.com/Logarithm.html

[*4*] Wolfram MathWorld — Antiogarithm
https://mathworld.wolfram.com/Antilogarithm.html

[*5*] Wolfram Language & System Documentation Center — Logarithm
https://reference.wolfram.com/language/ref/Log.html

[*6*] WolframAlpha — Computational Intelligence
https://www.wolframalpha.com/

[*7*] A reconstruction of the tables of Briggs' *Arithmetica logarithmica* (1624)
https://inria.hal.science/inria-00543939/PDF/briggs1624doc.pdf

[*8*] Newman's Short Proof of the Prime Number Theorem
https://people.mpim-bonn.mpg.de/zagier/files/doi/10.2307/2975232/fulltext.pdf

[*9*] YouTube — Log Tables — Numberphile
https://www.youtube.com/watch?v=VRzH4xB0GdM

[*10*] YouTube — The iPhone of Slide Rules — Numberphile
https://www.youtube.com/watch?v=xRpR1rmPbJE

[*11*] YouTube — The Four 4s — Numberphile
https://www.youtube.com/watch?v=Noo4lN-vSvw

[*12*] GitHub — Srbislav D. Nešić — Numerical recipes in Pascal
https://github.com/Nasumica/Wirth

7.2 Literatura

[*1*] Larousse: „Matematika“, *Opšta enciklopedija* (1967)

[*2*] Nebojša Ikodinović, Slađana Dimitrijević, Suzana Aleksić: „Udžbenik sa zbirkom zadataka za 2. razred gimnazije“, *Matematika 2* (2019)

[*3*] Vene Bogoslavov: „Zbirka rešenih zadataka iz matematike 2“, (2008–2011)

[*4*] Marjan M. Matejić, Lidija V. Stefanović, Branislav M. Ranđelović, Igor Ž. Milovanović: „Kompleti zadataka za prijemni ispit“, *Matematika* (2011)

[*5*] Rade Nikolić: „Zadaci za prijemni ispit iz matematike na Fakultet informacionih tehnologija“, (2020)

[*6*] Gradimir V. Milovanović, Đorđe R. Đorđević: „Programiranje numeričkih metoda“, (1981)

[*7*] Donald E. Knuth: „Seminumerical Algorithms“, *The Art of Computer Programming* (1968–)

[8] Dragoljub Vasić, Vene Bogoslavov, Gliša Nešković: „Logaritamske tablice“, (2008)
[9] Henry Briggs: „Arithmetica logarithmica“, (1624)
[10] Donald E. Knuth: „The TEXbook“, *Computers and Typesetting* (1996)
[11] John D. Hobby: „User's manual“, METAPOST (2024)

7.3 Software

[1] Mathematica — Wolfram Research
[2] Visual Studio Code (Integrated Development Environment) — Microsoft
[3] TEX (typesetting system) — Donald E. Knuth
[4] LATEX (TEX macros) — Leslie Lamport
[5] AMS-TEX (TEX macros) — American Mathematical Society
[6] METAPOST (PostScript programming language)— John D. Hobby
[7] **Pascal** (programming language) — Niklaus Wirth
[8] **Python** (programming language) — Python Software Foundation
[9] GO (programming language) — Google
[10] ZX BASIC (programming language) — Sinclair Research Ltd.

— *Luka S. Nešić*, ponedeljak 21.04.2025. 08:30