

Gimnazija „Bora Stanković“
Niš, Srbija

MATURSKI RAD

Predmet: Matematika

Tema: Logaritam
jednačine i nejednačine

Učenik:
Luka Nešić, IV/6

Profesor:
Nenad Totić

2025.

Sadržaj

1	Uvod	3
1.1	Definicija logaritma	3
1.2	Grafik funkcije	3
1.3	Antilogaritam	3
2	Jednakosti	4
2.1	Logaritam stepena osnove	4
2.2	Logaritam proizvoda	4
2.3	Logaritam količnika	4
2.4	Logaritam stepena broja	5
2.5	Promena osnove logaritma	5
3	Najčešće logaritamske osnove	6
3.1	Osnova 10	6
3.2	Osnova 2	6
3.3	Osnova e	7
4	Brojna vrednost	8
4.1	Formula	8
4.2	Verižni razlomak	8
4.3	Logaritamske tablice	9
4.4	Logaritmar	9
5	Razno	10
5.1	Kompleksni logaritam	10
5.2	Izvod	11
5.3	Limes	11
5.4	Teorema prostih brojeva	11
6	Zadaci i rešenja	12
6.1	Jednačine	12
6.1.1	FIT	12
6.1.2	Jednačina 2	12
6.1.3	Jjjj (yafe)	13
6.1.4	Četiri četvorke	13
6.1.5	Sveska 7	14
6.1.6	Beskonačni koren	14
6.1.7	Net 3	15
6.1.8	Skraćivanje	15
6.2	Nejednačine	16
6.2.1	Sveska 11	16
6.2.2	Sveska 10	16
6.2.3	Sveska 9	17
6.2.4	Net 1	18
6.2.5	Net 2	18
6.3	Razni primeri	19

6.3.1	Zemljotres	19
6.3.2	Decimalne cifre	19
6.3.3	Poluraspad joda	19
6.3.4	Izvod	19
6.3.5	Geometrijski niz	20
6.3.6	i na i	20
6.4	Ručni rad	21
6.4.1	Analogni kvadratni koren	21
6.4.2	Analogni stepen	21
6.4.3	$\ln 3$	22
7	Reference	23
7.1	Linkovi	23
7.2	Literatura	23
7.3	Software	24

1 Uvod

1.1 Definicija logaritma

Ako je

$$x = b^y$$

onda se može pisati

$$y = \log_b x, \quad (1)$$

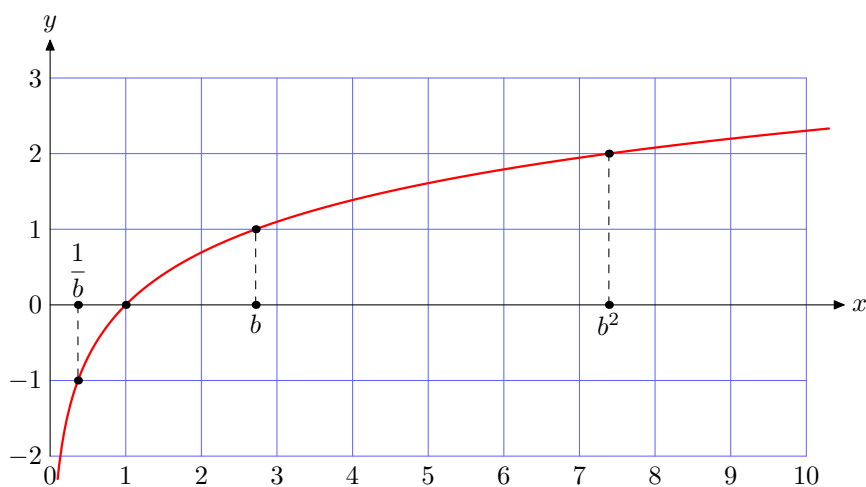
gde je b *osnova* (*baza*) logaritma, a x *argument*. (Izgovara se „ y je jednako logaritam od x za osnovu b “ ili kraće „ y je logaritam b od x “.) Takođe važi

$$b = x^{1/y} = \sqrt[y]{x}.$$

Sama reč *logaritam* potiče od grčkih reči $\lambda\acute{o}\gamma\omicron\varsigma$ (*logos*) i $\acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$ (*arimos*), sa značenjem „broj kojim se računa“.

1.2 Grafik funkcije

Funkcija je u skupu realnih brojeva \mathbb{R} definisana za $x > 0$ i $b > 0 \wedge b \neq 1$. Za $b > 1$ funkcija je rastuća, dok je za $b < 1$ funkcija opadajuća. Funkcija ima samo jednu *nulu*, uvek za $x = 1$. Važi *bijekcija*: $\log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x = y$.



Slika 1: Grafik logaritamske funkcije $y = \log_b x$.

1.3 Antilogaritam

Inverzna funkcija logaritmu je obično stepenovanje osnove logaritma argumentom i zove se *antilogaritam*

$$\text{anti } \log_b x = \log_b^{-1} x = b^x. \quad (2)$$

Iz same definicije važi

$$\log_b(\text{anti } \log_b x) = \text{anti } \log_b(\log_b x) = x. \quad (3)$$

2 Jednakosti

2.1 Logaritam stepena osnove

Po samoj definiciji logaritma, ako je $x = b^a$, onda je

$$\log_b b^a = a. \quad (4)$$

Ako stavimo da je $1 = b^0$, odnosno, $b = b^1$, dobijamo da je

$$\log_b 1 = 0 \quad \text{ i } \quad \log_b b = 1. \quad (5)$$

Takođe je bitna jednakost

$$b^{\log_b x} = x \quad (6)$$

koja proizilazi iz same definicije logaritma i antilogaritma.

2.2 Logaritam proizvoda

Ako je

$$u = \log_b x \wedge v = \log_b y \Rightarrow x = b^u \wedge y = b^v,$$

onda je, zbog jednakosti (4)

$$x \cdot y = b^u b^v = b^{u+v} \Rightarrow \log_b(x \cdot y) = \log_b b^{u+v} = u + v.$$

Odavde je

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y. \quad (7)$$

Iz ove jednakosti se može izvesti formula za logaritam faktorijela broja. Ako je

$$n! = \prod_{k=1}^n k \Rightarrow \log(n!) = \sum_{k=1}^n \log k.$$

(Zanimljivo je da je $\log(1 \cdot 2 \cdot 3) = \log(1 + 2 + 3) = \log 1 + \log 2 + \log 3$.)

2.3 Logaritam količnika

Slično logaritmu proizvoda, ako je

$$u = \log_b x \wedge v = \log_b y \Rightarrow x = b^u \wedge y = b^v,$$

onda je, zbog jednakosti (4)

$$x/y = b^u b^{-v} = b^{u-v} \Rightarrow \log_b(x/y) = \log_b b^{u-v} = u - v.$$

Odavde je

$$\log_b(x/y) = \log_b x - \log_b y. \quad (8)$$

Iz ove jednakosti sledi

$$\log_b(1/x) = -\log_b x. \quad (9)$$

2.4 Logaritam stepena broja

Ako je

$$y = x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ puta}},$$

onda, iz jednakosti za logaritam proizvoda (7), sledi da je

$$\log_b y = \log_b (\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ puta}}) = \underbrace{\log_b x + \log_b x + \cdots + \log_b x}_{n \text{ puta}} = n \log_b x,$$

odakle je

$$\log_b x^n = n \log_b x. \quad (10)$$

Iz ove jednakosti može se izvesti i jednakost

$$\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_b x. \quad (11)$$

Odavde se može izvesti jednakost

$$x^y = b^{y \log_b x}. \quad (12)$$

2.5 Promena osnove logaritma

Ako je

$$y = \log_a x \Rightarrow x = a^y,$$

onda je

$$\log_b x = \log_b a^y = y \log_b a = \log_a x \cdot \log_b a.$$

Odavde je

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}. \quad (13)$$

Iz ove jednakosti, ako stavimo da je $x = b$, se dobija i jednakost

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1. \quad (14)$$

Iz jednakosti (4) i (13), ako stavimo da je $a = b^n$, sledi jednakost

$$\log_{b^n} x = \frac{1}{n} \log_b x. \quad (15)$$

Odavde, ako stavimo da je $n = -1$, sledi

$$\log_{1/b} x = -\log_b x, \quad (16)$$

a uzevši u obzir i jednakost (9) dobija se

$$\log_{1/b} x = \log_b (1/x). \quad (17)$$

3 Najčešće logaritamske osnove

3.1 Osnova 10

U inženjerstvu se najčešće koristi osnova logaritma 10, zove se *dekadni* ili *zajednički* logaritam, i piše se

$$y = \log_{10} x$$

ili, skraćeno,

$$y = \lg x.$$

Ponekad se može videti i samo

$$y = \log x,$$

bez navođenja osnove, ali treba obratiti pažnju na kontekst. Ako je neki inženjerski tekst u pitanju, najverovatnije se misli na osnovu 10.

Dekadni logaritam je pogodan i kada se koristi, takozvani *naučni* ili *inženjerski* zapis broja. Na primer, *Plankova konstanta* (Max Planck) iznosi

$$h = 6,62607015 \times 10^{-34}$$

koja ima dekadni logaritam

$$\log_{10} h = \log_{10}(6,62607015) - 34.$$

U fizici se za merenje nivoa signala ili zvuka koristi jedinica *bel* (B), ali je češće u praktičnoj upotrebi 10 puta manja jedinica *decibel* (dB), odnosno, $1 \text{ B} = 10 \text{ dB}$. Nivo signala L , koji zavisi od odnosa izmerene snage P i referentne snage P_0 , izražen u decibelima iznosi

$$L = 10 \log_{10} \left(\frac{P}{P_0} \right) \text{ dB}.$$

Kako se u akustici uzima da je referentna snaga $P_0 = 10^{-12} \text{ W}$, moglo bi se pisati da je nivo zvuka u decibelima

$$L = 10 \log_{10}(P) - 120.$$

Normalan govor je oko 50 dB, zvuk motora mlaznog aviona pri poletanju je 150 dB, a smrtonosan je zvuk od 240 dB i više. Zvučni top Genasys LRAD ima nivo zvuka od oko 160 dB, što znači da je 10^{11} puta moćniji od govora.

Slična formula se koristi i za određivanje jačine zemljotresa, ili pH vrednosti.

3.2 Osnova 2

U informatici se često koristi logaritam sa osnovom 2, koji se zove *binarni* logaritam, i piše se

$$y = \log_2 x$$

ili, skraćeno,

$$y = \lg x.$$

Koristi se u kombinatorici, kao i u određivanju *količine informacija*, odnosno, potrebnog broja bitova memorije za smeštanje nekog podatka. Ako se zna da će u memoriju biti upisivani celi brojevi od 0 do n , onda je potrebno rezervisati

$$\text{bits} = \lfloor \log_2(n) \rfloor + 1$$

bitova memorije, gde $\lfloor x \rfloor$ predstavlja *najveći ceo broj koji je manji ili jednak x* (izgovara se „najveće celo od x “). Na primer, ako će u određenoj memoriji najveći broj biti milion, onda je za to potrebno rezervisati

$$bits = \lfloor \log_2(1\,000\,000) \rfloor + 1 = \lfloor 19,9315685693 \rfloor + 1 = 19 + 1 = 20$$

bitova memorije. Najveći broj koji može stati u ovih rezervisanih 20 bitova memorije je binarni broj koji ima 20 jedinica i iznosi

$$(1111\,1111\,1111\,1111\,1111)_2 = 2^{20} - 1 = 1\,048\,575.$$

Kako su i realni brojevi u memoriji predstavljeni kao uređeni parovi binarnih brojeva u obliku (*mantisa*, *eksponent*), sa značenjem

$$x = mantisa \times 2^{eksponent},$$

binarni logaritam bi bio izračunat kao

$$\log_2(x) = \log_2(mantisa) + eksponent,$$

ako je *mantisa* > 0 , inače je nedefinisan.

Binarni logaritam se koristi i u atomskoj fizici. Vreme *poluraspada* $t_{1/2}$ je vreme potrebno da se raspadne polovina jezgara atoma neke materije. Ako imamo početan broj jezgara N_0 i broj jezgara N_t nakon vremena t , njihov odnos se može predstaviti formulom

$$\frac{N_0}{N_t} = 2^{t/t_{1/2}} \Rightarrow \frac{t}{t_{1/2}} = \log_2 \left(\frac{N_0}{N_t} \right). \quad (18)$$

Ova formula se koristi i za određivanje starosti stena ili fosila.

3.3 Osnova e

Ovu logaritamsku osnovu je otkrio Jakob Bernuli (Jacob Bernoulli) kada je proučavao *složenu kamatu* i dokazao da *kontinualna* složena kamata teži konstanti

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n,$$

ali je Ojler (Leonhard Euler) odredio njenu vrednosti i dao joj ime. Logaritam za ovu osnovu se zove *prirodni* logaritam (*logarithmus naturalis*) i piše se

$$\ln x = \log_e x.$$

Antilogaritam je e^x , koji se kao funkcija piše $\exp(x)$, i zove se *eksponencijalna funkcija*. Ova funkcija je poznata po tome što je to jedina funkcija čiji je izvod jednak samoj funkciji. Brojna vrednost se može izračunati formulom

$$e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (19)$$

Ako stavimo da je $x = 1$, brojna vrednost osnove prirodnog logaritma e se može odrediti

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots \\ &= 2,7182818284\,5904523536\,0287471352\,6624977572 \dots \end{aligned} \quad (20)$$

sa željenom tačnošću.

4 Brojna vrednost

4.1 Formula

Brojna vrednost prirodnog logaritma može biti izračunata pomoću formule

$$\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2n+1} \quad (21)$$

do željene tačnosti. Postupak kojim se računa $y = \ln x$ sa tačnošću ε izgleda ovako:

$$\begin{aligned} r &\leftarrow (x-1)/(x+1); & k &\leftarrow 1; & p &\leftarrow 2r; & q &\leftarrow r^2; & a &\leftarrow p; & y &\leftarrow a; \\ \text{ponavljati dok je } |a| &> \varepsilon: \\ k &\leftarrow k+2; & p &\leftarrow p \cdot q; & a &\leftarrow p/k; & y &\leftarrow y+a; \end{aligned} \quad (22)$$

(Videti zadatak 6.4.3 na strani 22.) Ovim postupkom se može izračunati konstanta

$$\begin{aligned} \ln 2 &= \frac{2}{1 \cdot 3^1} + \frac{2}{3 \cdot 3^3} + \frac{2}{5 \cdot 3^5} + \frac{2}{7 \cdot 3^7} + \frac{2}{9 \cdot 3^9} + \dots \\ &= 0,6931471805\,5994530941\,7232121458\,1765680755 \dots \end{aligned}$$

kao i konstanta

$$\ln 10 = 2,3025850929\,9404568401\,7991454684\,3642076011 \dots$$

Ove konstante se koriste prilikom izračunavanja vrednosti binarnog, odnosno, dekadnog logaritma

$$\text{lb } x = \log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}, \quad \lg x = \log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

4.2 Verižni razlomak

Brojna vrednost prirodnog logaritma može se izračunati i pomoću *verižnog razlomka*

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \frac{x}{1 + \frac{1^2 x}{2 - 1x + \frac{2^2 x}{3 - 2x + \frac{3^2 x}{4 - 3x + \ddots}}}} \\ &= \frac{x}{1 + \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{n+1-nx}}. \end{aligned}$$

Poput simbola koji se koriste za sumu ‘ Σ ’ ili proizvod ‘ Π ’, Gaus (Carl Friedrich Gauss) je smislio, verovatno, najpogodniji način za predstavljanje verižnih (lančanih) razlomaka, gde simbol ‘K’ potiče od nemačke reči za *prekinuti lanac* (*Kettenbruch*). Izraz iza ovog simbola pokazuje kako izgleda *opšti član* verižnog razlomka.

Ako pomoću ove formule izračunamo prvih 11 *konvergenata* $\ln 2$ kao $-\ln(1-1/2)$, dobićemo

$$\ln 2 \approx \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{131}{192}, \frac{661}{960}, \frac{1327}{1920}, \frac{1163}{1680}, \frac{148969}{215040}, \frac{447047}{645120}, \frac{44711}{64512}, \frac{983705}{1419264}, \dots$$

gde je poslednji razlomak tačan na 5 decimala.

4.3 Logaritamske tablice

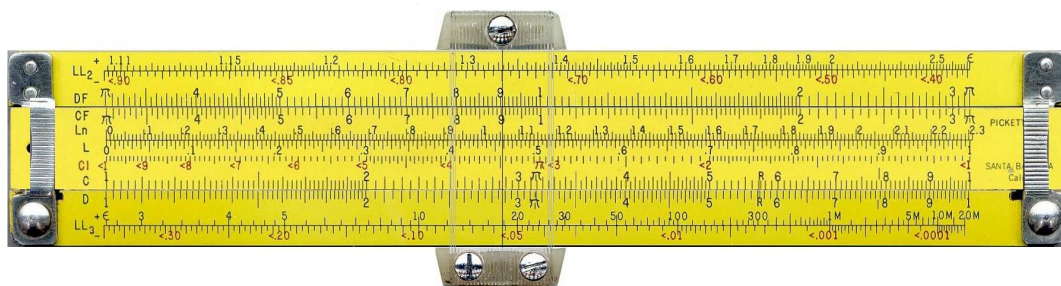
Prve tablice logaritama je izračunao Neper (John Napier of Merchiston) 1614. godine, koje su praktično sadržale logaritam za osnovu $1/e$, sa skaliranim argumentom i rezultatom, iako sam Neper nije znao za konstantu e . Savremenim zapisom bi ovaj logaritam bio definisan kao

$$\text{NapLog}(x) = 10^7 \log_{1/e}(x/10^7) = -10^7 \ln(x/10^7).$$

Nekoliko godina kasnije, 1617. i 1624, Briggs (Henry Briggs) je izračunao tablice dekadnih logaritama sa 14 cifara tačnosti, koje se uz dopune i ispravke koriste i danas pod imenom *Brigsove tablice*.

4.4 Logaritmar

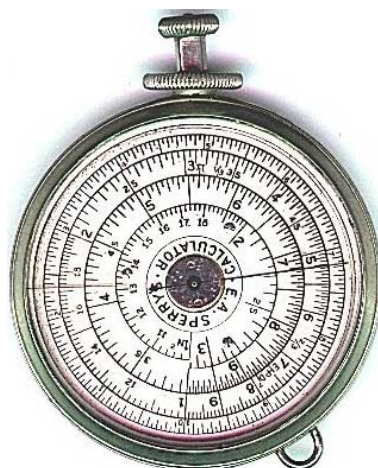
Pre pojave digitrona, za približno određivanje brojne vrednosti logaritma, koristila se je analogna mehanička sprava sa nekoliko lenjira zvana *logaritmar*.



Slika 2: Šiber.

Lenjiri imaju podeoke sa decimalom i logaritamskom, a često i sa sinusnom skalom. Jedan od lenjira je bio klizni, te otuda popularno ime *šiber* (od nemačkog *Rechenschieber*). Koristi se jednostavno, pomeranjem klizača i čitanjem vrednosti sa odgovarajuće skale. (Videti zadatke 6.4.1 i 6.4.2.)

Postojale su i kružne varijante, pa i džepne, gde je džepni sat sa logaritmarom i kompasom bio „iPhone“ XIX i prve polovine XX veka.



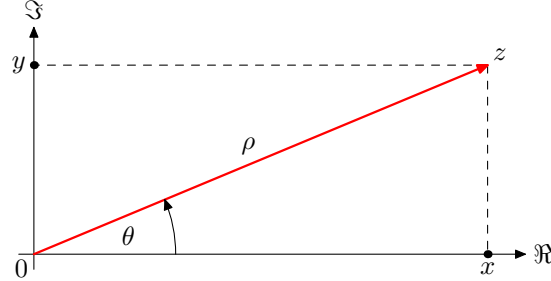
Slika 3: Džepni logaritmar.

Tablice i logaritmari se i danas koriste u vojsci, kao rezerva u slučaju otkazivanja elektronike. Prvi kompjuter ENIAC (Electronic Numerical Integrator And Computer) je napravljen 1946. godine da bi izračunao tablice za vojsku.

5 Razno

5.1 Kompleksni logaritam

Ako u kompleksnoj ravni imamo kompleksan broj $z \in \mathbb{C}$,



Slika 4: Broj z u kompleksnoj ravni.

koji može biti predstavljen kao

$$\begin{aligned} z &= x + iy && \text{pravougle koordinate} \\ &= \rho (\cos \theta + i \sin \theta) && \text{polarne koordinate} \\ &= \rho e^{i\theta} && \text{Ojlerova formula} \end{aligned}$$

onda se, iz Ojlerove formule i jednakosti (7) i (4), dobija

$$\ln z = \ln \rho + i\theta. \quad (23)$$

Pošto je $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$, sledi da prirodni logaritam kompleksnog broja z nije definisan (∞) samo za $z = 0$. Kako je $y/x = \tan \theta$, prirodni logaritam kompleksnog broja, predstavljenog pravouglim koordinatama, iz formule (23), može se izračunati

$$\ln(x + iy) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \quad (24)$$

I za kompleksne brojeve važi jednakost promene baze (13), tako da za dva kompleksna broja z i w , gde je $z \neq 0$, $w \neq 0$ i $w \neq 1$, sledi

$$\log_w z = \frac{\ln z}{\ln w},$$

gde se $\ln z$ i $\ln w$ računaju pomoću formule (23), odnosno, (24). Na primer,

$$\log_{2+i}(3 + 4i) = 2, \quad \log_i e = \frac{2}{i\pi}.$$

Iz Ojlerove formule se može dobiti, kako je nazvana, *najlepša formula u istoriji matematike*, u kojoj je upotrebljeno 5 najvažnijih matematičkih konstanti ($0, 1, \pi, e, i$)

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

gde, ako prebacimo 1 na desnu stranu i *logaritmujemo*, dobijamo zanimljivu jednakost

$$\frac{\ln(-1)}{\sqrt{-1}} = \pi.$$

5.2 Izvod

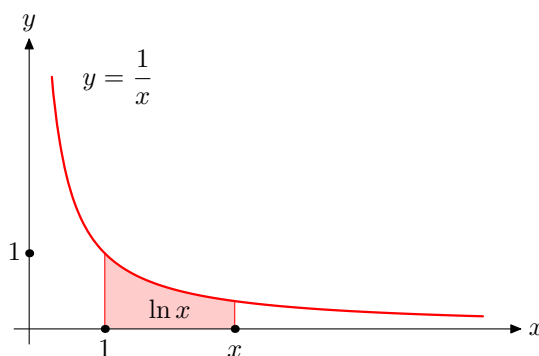
Ako je

$$y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x},$$

odakle se, pomoću jednakosti (13) i jednakosti za izvod složene funkcije, može dobiti

$$y = \log_b(f(x)) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{f(x) \ln b}. \quad (25)$$

Površina figure ispod funkcije $y = 1/x$ do x -ose, u opsegu od 1 do x iznosi $\ln x$.
(Matematički zapisano: $\int_1^x dx/x = \ln x$.)



Slika 5: Geometrijsko značenje $\ln x$.

(Na slici je $x = e$, tako da je površina osenčane figure jednaka 1.)

5.3 Limes

Ojler je dokazao da je

$$\ln x = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1).$$

5.4 Teorema prostih brojeva

Još jedno mesto gde se pojavljuje prirodni logaritam u *teoriji brojeva* je, takozvana, *teorema prostih brojeva* (PNT), kojom se je bavio Gaus kada je imao samo 15–16 godina.

Ako funkcija $\pi(n)$ ima vrednost *ukupan broj prostih brojeva manjih ili jednakih od n* , onda važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n) \ln n}{n} = 1.$$

Posledica ove teoreme je da je n -ti prost broj p_n , za veliko n , otprilike

$$p_n \sim n \ln n.$$

6 Zadaci i rešenja

6.1 Jednačine

6.1.1 FIT

▷ **Zadatak:** Nađi rešenje jednačine

$$\log_2(x-2) + \log_4(x-2) + \log_{16}(x-2) = 7.$$

(Zadatak sa mog prijemnog ispita na FIT „Metropolitan“.)

► **Rešenje:** Vidimo da su osnove logaritama stepeni broja 2, pa iz jednakosti za logaritam stepena osnove (15) sledi

$$\begin{aligned}\log_2(x-2) + \log_{2^2}(x-2) + \log_{2^4}(x-2) &= \\ \log_2(x-2) + \frac{1}{2}\log_2(x-2) + \frac{1}{4}\log_2(x-2) &= \\ \frac{7}{4}\log_2(x-2) &= 7,\end{aligned}$$

odnosno, posle skraćivanja,

$$\log_2(x-2) = 4.$$

Odavde je

$$x-2 = 2^4 = 16 \Rightarrow x = \boxed{18}.$$

6.1.2 Jednačina 2

▷ **Zadatak:** Reši jednačinu

$$2\log(x) - \log(6-x) = 0.$$

► **Rešenje:** Da bi logaritam u jednačini bio definisan mora biti

$$x > 0 \wedge 6-x > 0 \Rightarrow 0 < x < 6.$$

Zbog jednakosti (10) možemo pisati

$$\log(x^2) = \log(6-x)$$

odakle sledi

$$\begin{aligned}x^2 &= 6-x \\ x^2 + x - 6 &= 0.\end{aligned}$$

Rešavanjem kvadratne jednačine

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm 5}{2},\end{aligned}$$

dobijamo rešenja $x_1 = 2$ i $x_2 = -3$, odakle je jedinstveno rešenje

$$x = \boxed{2}.$$

6.1.3 Jjjj (yafe)

► **Zadatak:** Reši jednačinu

$$\ln(x) = \ln(15 - x) - \ln(x + 1).$$

► **Rešenje:** Jednačina je definisana za

$$x > 0 \wedge 15 - x > 0 \wedge x + 1 > 0 \Rightarrow 0 < x < 15.$$

Ako zapišemo jednačinu kao

$$\ln(x) + \ln(x + 1) = \ln(15 - x)$$

iz jednakosti za logaritam proizvoda (7), možemo pisati

$$\ln(x(x + 1)) = \ln(15 - x)$$

$$\ln(x^2 + x) = \ln(15 - x)$$

$$x^2 + x = 15 - x$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

Rešavanjem kvadratne jednačine dobijamo 2 rešenja, $x_1 = 3$ i $x_2 = -5$, ali zbog uslova, ostaje jedinstveno

$$x = \boxed{3}.$$

6.1.4 Četiri četvorke

► **Zadatak:** Dokazati da svaki prirodan broj $n \in \mathbb{N}$, može biti predstavljen sa 4 broja 4, pomoću logaritamske funkcije i kvadratnog korena

$$n = \log_{\sqrt{4}/4} \left(\log_4 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{4}}}}_{n \text{ korena}} \right).$$

► **Rešenje:** Kako je

$$\frac{\sqrt{4}}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{4}}}}_{n \text{ korena}} = 4^{(1/2)^n},$$

izraz može biti uprošćen

$$\log_{\sqrt{4}/4} \left(\log_4 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{4}}}}_{n \text{ korena}} \right) = \log_{1/2} (\log_4 4^{(1/2)^n}),$$

gde iz jednakosti za logaritam stepena osnove (4), sledi

$$= \log_{1/2} (1/2)^n$$

$$= \boxed{n}.$$

★ **Dodatak:** Davno je u jednom časopisu postavljen sličan zadatak: da se sa što manje istih brojeva, koristeći bilo koju matematičku funkciju, predstavi svaki prirodan broj n . Rešio ga je nobelovac Pol Dirak (Paul Dirac) sa 3 broja 2, čije originalno rešenje izgleda

$$-\log_2 \log_2 \sqrt{\dots n \dots \sqrt{2}} = -\log_2 \log_2 2^{2^{-n}} = -\log_2 2^{-n} = n. \quad \square$$

6.1.5 Sveska 7

▷ **Zadatak:** Nađi x ako je

5

$$x^{\log x} = 1000x^2.$$

► **Rešenje:** Ako logaritmujemo obe strane dobijamo

$$\begin{aligned}\log x^{\log x} &= \log(1000x^2) \\ \log x \log x &= \log 1000 + \log x^2 \\ \log^2 x &= 3 + 2 \log x,\end{aligned}$$

gde, posle smene $t = \log x$, dobijamo kvadratnu jednačinu

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

čija su rešenja $t_1 = 3$ i $t_2 = -1$, odakle su

$$x_1 = 10^3 = \boxed{1000} \quad \text{i} \quad x_2 = 10^{-1} = \boxed{\frac{1}{10}}.$$

6.1.6 Beskonačni koren

▷ **Zadatak:** Odredi vrednost

6

$$x = \ln \left(e^{\sqrt[2]{e^{\sqrt[3]{e^{\sqrt[4]{e^{\sqrt[5]{\dots}}}}}}}} \right)$$

gde je e osnova prirodnog logaritma.

► **Rešenje:** Kako je $\ln e = 1$, a koristeći jednakost za logaritam proizvoda (7) i jednakost za logaritam korena (11), možemo pisati

$$\begin{aligned}&= 1 + \frac{1}{2} \ln \left(e^{\sqrt[3]{e^{\sqrt[4]{e^{\sqrt[5]{\dots}}}}}} \right) \\&= 1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \ln \left(e^{\sqrt[4]{e^{\sqrt[5]{\dots}}}} \right) \right) \\&= 1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{4} \ln \left(e^{\sqrt[5]{\dots}} \right) \right) \right) \\&= 1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{5} \ln(\dots) \right) \right) \right) \\&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + \dots \\&= \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots\end{aligned}$$

Ako pogledamo formulu (20) na strani 7, možemo videti da je ovaj zbir jednak

$$x = \boxed{e - 1},$$

jer iz sume za izračunavanje e nedostaje *nulti* član $1/0! = 1$.

6.1.7 Net 3

▷ **Zadatak:** Odredi n^3 ako je

7

$$\log_{5n} 30\sqrt{5} = \log_{4n} 48.$$

► **Rešenje:** Prebacimo u osnovu 6, jer je 6 *nzd* za 30 i 48 iz izraza.

$$\begin{aligned} \frac{\log_6 30\sqrt{5}}{\log_6 5n} &= \frac{\log_6 48}{\log_6 4n} \\ \frac{\log_6 6 + \log_6 5 + \frac{1}{2} \log_6 5}{\log_6 5 + \log_6 n} &= \frac{\log_6 6 + \log_6 8}{\log_6 4 + \log_6 n} \\ \frac{1 + \frac{3}{2} \log_6 5}{\log_6 5 + \log_6 n} &= \frac{1 + 3 \log_6 2}{2 \log_6 2 + \log_6 n}. \end{aligned}$$

Izvršimo zamenu: $n = 6^t$, odnosno, $t = \log_6 n$ i $u = \log_6 2$ i $v = \log_6 5$. Dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{1 + \frac{3}{2}v}{v + t} &= \frac{1 + 3u}{2u + t} \\ (1 + \frac{3}{2}v)(2u + t) &= (1 + 3u)(v + t) \\ 2u + 3uv + t + \frac{3}{2}vt &= v + 3uv + t + 3ut \quad / -3uv; -t; \times 2; \\ 4u + 3vt &= 2v + 6ut \\ 6ut - 3vt &= 4u - 2v \\ t(6u - 3v) &= 4u - 2v \\ t &= \frac{4u - 2v}{6u - 3v} \\ t &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2u - v}{2u - v} \\ t &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Oдавde je

$$n^3 = 6^{3t} = \boxed{36}.$$

6.1.8 Skraćivanje

▷ **Zadatak:** Nađi n ako je

8

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdots \log_n(n+1) = 10.$$

► **Rešenje:** Ako prebacimo sve logaritme u osnovu 2, dobijamo

$$\log_2 3 \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 6}{\log_2 5} \cdots \frac{\log_2(n+1)}{\log_2 n} = 10.$$

Vidimo da će, nakon *masovnog* skraćivanja, ostati samo

$$\log_2(n+1) = 10 \Rightarrow n+1 = 2^{10} = 1024,$$

odnosno,

$$n = \boxed{1023}.$$

6.2 Nejednačine

6.2.1 Sveska 11

▷ **Zadatak:** Reši nejednačinu

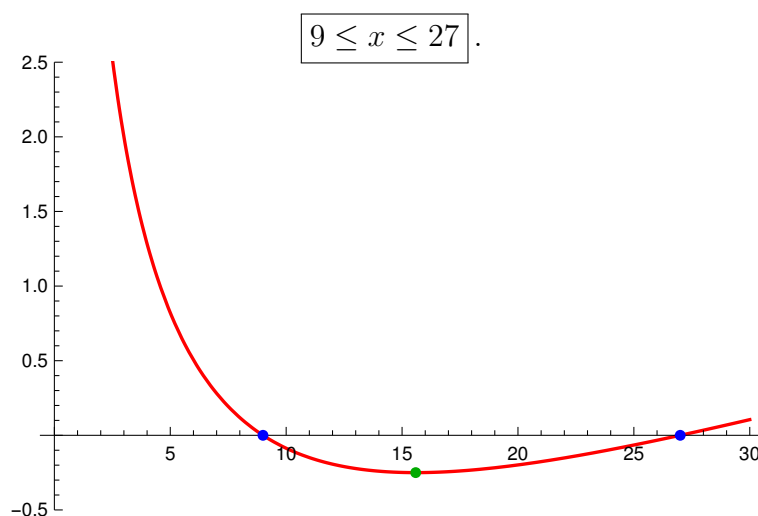
9

$$\log_3^2 x - 5 \log_3 x + 6 \leq 0.$$

► **Rešenje:** Kada izvršimo zamenu $t = \log_3 x$, možemo pisati da je

$$t^2 - 5t + 6 \leq 0$$

Kako su rešenja kvadratne jednačine $t_1 = 2$ i $t_2 = 3$, nejednačina je zadovoljena kada je $t \in [2, 3]$. Pošto je $x = 3^t$, sledi da je nejednačina zadovoljena za $x \in [3^2, 3^3]$, odnosno,



Slika 6: $y = \log_3^2 x - 5 \log_3 x + 6$.

★ **Dodatak:** Funkcija ima minimum za $t = 5/2$, odnosno, u tački $(9\sqrt{3}, -1/4)$.

6.2.2 Sveska 10

▷ **Zadatak:** Reši nejednačinu

10

$$\log_5 x \geq \frac{1}{2} \log_5 (3x - 2).$$

► **Rešenje:** Da bi logaritam bio definisan, vidimo da mora biti

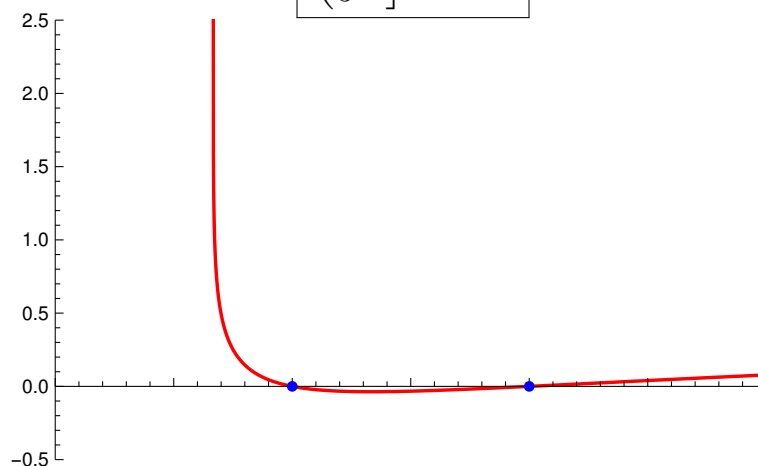
$$3x - 2 > 0 \Rightarrow x > \frac{2}{3}.$$

Ako nejednačinu pomožimo sa 2, dobijamo

$$\begin{aligned} 2 \log_5 x &\geq \log_5 (3x - 2) \\ \log_5 x^2 &\geq \log_5 (3x - 2) \\ x^2 &\geq 3x - 2 \\ x^2 - 3x + 2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Kvadratna jednačina ima rešenja $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$, pa je rešenje nejednačine

$$x \in \left[\frac{2}{3}, 1 \right] \cup [2, \infty).$$



Slika 7: $y = \log_5 x - \frac{1}{2} \log_5(3x - 2)$

6.2.3 Sveska 9

▷ **Zadatak:** Odredi u kojim granicama je zadovoljen uslov

11

$$\log_3(x^2 - 4) < \log_3 5.$$

► **Rešenje:** Ako se oslobodimo logaritma

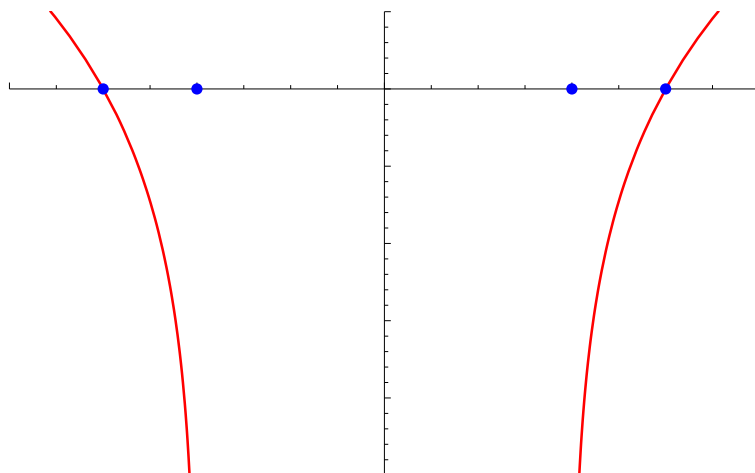
$$\begin{aligned} x^2 - 4 &< 5 \\ x^2 &< 9, \end{aligned}$$

dobićemo da je $-3 < x < 3$. Međutim, da bi logaritam bio definisan mora biti

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &> 0 \\ x^2 &> 4, \end{aligned}$$

odnosno, $x < -2$ ili $x > 2$. Odavde je

$$x \in (-3, -2) \cup (2, 3).$$



Slika 8: $y = \log_3(x^2 - 4) - \log_3 5$.

6.2.4 Net 1

▷ **Zadatak:** Reši

12

$$\log_{3x+5}(9x^2 + 8x + 8) > 2.$$

► **Rešenje:** Ako se oslobodimo logaritma dobijamo

$$\begin{aligned} 9x^2 + 8x + 8 &> (3x + 5)^2 \\ 9x^2 + 8x + 8 &> 9x^2 + 30x + 25 \end{aligned}$$

gde je nakon sređivanja

$$x < -\frac{17}{22}$$

Sledeći uslov je da osnova bude veća od 1, to jest

$$\begin{aligned} 3x + 5 &> 1 \\ x &> -\frac{4}{3}, \end{aligned}$$

odakle sledi rešenje

$$x \in \left(-\frac{4}{3}, -\frac{17}{22} \right).$$

6.2.5 Net 2

▷ **Zadatak:** Koje vrednosti zadovoljavaju sledeću nejednačinu

13

$$\log_7(x + 5) > \log_5(x + 5).$$

► **Rešenje:** Prebacimo izraz u zajednički logaritam

$$\begin{aligned} \frac{\log(x + 5)}{\log 7} &> \frac{\log(x + 5)}{\log 5} \\ \log 5 \log(x + 5) &> \log 7 \log(x + 5). \end{aligned}$$

Kako je $\log 5 < \log 7$ i pozitivni su, da bi uslov važio, mora biti

$$\log(x + 5) < 0,$$

odakle je

$$\begin{aligned} x + 5 &< 1 \\ x &< -4, \end{aligned}$$

a da bi logaritam bio definisan mora da važi i

$$\begin{aligned} x + 5 &> 0 \\ x &> -5, \end{aligned}$$

odakle je rešenje

$$x \in (-5, -4).$$

6.3 Razni primeri

6.3.1 Zemljotres

- ▷ **Zadatak:** Magnituda zemljotresa M po *Rihterovoj skali* zavisi logaritamski od intenziteta zemljotresa I 14

$$M = \log_{10} I.$$

U avgustu 2009, japansko ostrvo Honšu je pogodio zemljotres magnitude 6,1 po Rihteru, a u martu 2011, razarajući zemljotres koji je bio oko 800 puta jači od prvog. Koliko stepeni po Rihteru je imao drugi?

- **Rešenje:** $M_2 = 6,1 + \log_{10} 800 \approx 6.1 + 2.9 = \boxed{9,0}$ stepeni Rihtera.

6.3.2 Decimalne cifre

- ▷ **Zadatak:** Koliko decimalnih cifara d ima 128-bitna promenljiva? 15

- **Rešenje:** $d = \lfloor \log_{10} 2^{128} \rfloor + 1 = \lfloor 128 \log_{10} 2 \rfloor + 1 = \lfloor 38.5318 \rfloor + 1 = 38 + 1 = \boxed{39}$.

6.3.3 Poluraspad joda

- ▷ **Zadatak:** Ako imamo 63 g izotopa joda ^{131}I , a znamo da smo pre 11 dana imali 163 g, koje je vreme poluraspada ovog izotopa? (Koristi prirodni logaritam.) 16

- **Rešenje:** Iz formule (18) na strani 7, sledi da se vreme poluraspada može izračunati

$$t_{1/2} = \frac{t}{\log_2(m_0/m_t)} = \frac{t \ln 2}{\ln(m_0/m_t)} = \frac{11 \ln 2}{\ln(163/63)} \approx \boxed{8.02 \text{ dana}}.$$

6.3.4 Izvod

- ▷ **Zadatak:** Odredi izvod funkcije 17

$$f(x) = \ln \left(\frac{x^5(1 - \sin^2 x)}{3x + 1} \right).$$

- **Rešenje:** Zamenimo $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ i razložimo funkciju

$$f(x) = 5 \ln x + 2 \ln \cos x - \ln(3x + 1).$$

Iz jednakosti (25) za izvod logaritma funkcije, sledi da je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{5}{x} + 2 \cdot \frac{-\sin x}{\cos x} - \frac{3}{3x + 1} \\ &= \boxed{\frac{5}{x} - 2 \tan x - \frac{3}{3x + 1}}. \end{aligned}$$

6.3.5 Geometrijski niz

▷ **Zadatak:** Za $0 \leq x < 1$, uprostiti izraz

18

$$y = \log(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots).$$

► **Rešenje:** Kako je zbir¹ beskonačnog geometrijskog niza

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1 - x},$$

može se pisati

$$y = \log\left(\frac{1}{1 - x}\right),$$

gde iz jednakosti za recipročnu vrednost (9), sledi

$$= \boxed{-\log(1 - x)}.$$

6.3.6 i na i

▷ **Zadatak:** Odredi vrednost i^i gde je $i = \sqrt{-1}$, imaginarna jedinica.

19

► **Rešenje:** Kako u kompleksnoj ravni i ima polarne koordinate $\rho = 1$ i $\theta = \pi/2$, ako ga predstavimo Ojlerovom formulom kao $i = e^{i\pi/2}$ i iz jednakosti (12) i (4), sledi da je

$$i^i = e^{i \ln i} = e^{i \ln e^{i\pi/2}} = e^{i^2 \pi/2} = \boxed{e^{-\pi/2}} \approx 0.20788$$

realan broj.

¹**Dokaz:** Ako je $s = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = 1 + x \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots) = 1 + x \cdot s$, odakle je $s - x \cdot s = 1$, sledi da je $s = 1/(1 - x)$. \square

6.4 Ručni rad

6.4.1 Analogni kvadratni koren

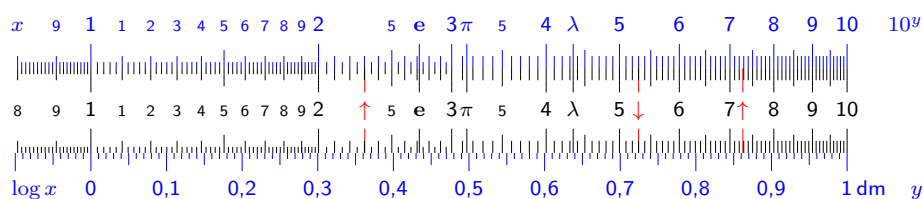
▷ **Zadatak:** Objasni način za određivanje vrednosti \sqrt{x} logaritmarom.

20

► **Rešenje:** Kvadratni koren se može direktno čitati sa logaritmara ako u glavi izvršimo deljenje sa 2, i po potrebi, sabiranje sa 0,5, što je vrlo jednostavno, jer se radi o brojevima između 0 i 1 sa najviše 3 decimale. Kako je

$$\sqrt{x} = 10^{\frac{1}{2} \log x},$$

potrebno je pročitati vrednost $\log x$, a onda za dvostruko manju vrednost od nje, pročitati vrednost 10^y . Na primer, za izračunavanje $\sqrt{5,3}$, čitamo da je $\log 5,3 \approx 0,724$, a onda čitamo vrednost 10^y za $y = 0,724/2 = 0,362$ i dobijamo $\sqrt{5,3} \approx 2,3$.



Za $\sqrt{53}$ treba u y dodati još 0,5 tako da je $y = 0,362 + 0,5 = 0,862$, odakle je $\sqrt{53} \approx 7,28$. Naravno, $\sqrt{530}$ se računa kao $10\sqrt{5,3}$, ili $\sqrt{0,53} = \frac{1}{10}\sqrt{53}$.

6.4.2 Analogni stepen

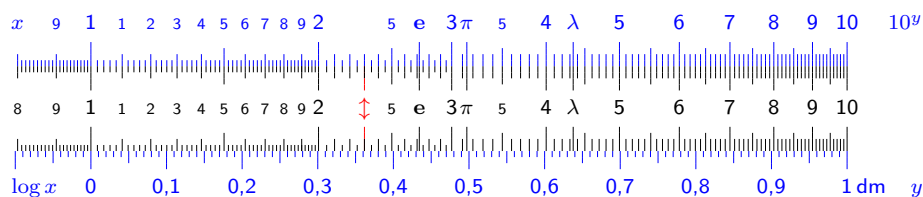
▷ **Zadatak:** Odredi logaritmarom približnu vrednost $z = 2,3^{1,7}$.

21

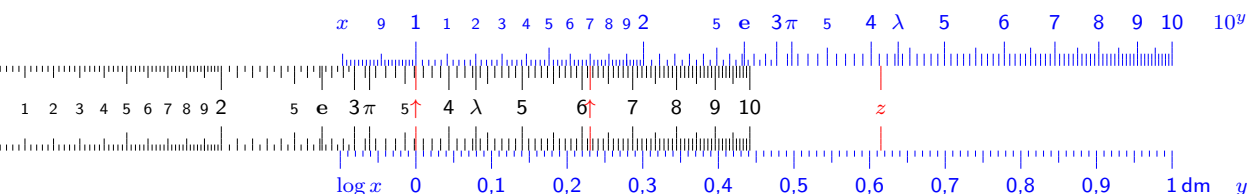
► **Rešenje:** Pomoću jednakosti (12) predstavimo

$$z = 2,3^{1,7} = 10^{1,7 \cdot \log(2,3)}.$$

Prvo određujemo vrednost $\log(2,3)$ tako što nalazimo $x = 2,3$ i čitamo ispod njega vrednost $\log x$ (vidi nit obeleženu sa '↑').



Nalazimo da je $\log(2,3) \approx 0,362$. Nakon toga, tu vrednost na klizaču poravnavamo sa $x = 1$. Kako na klizaču ne postoji 0,362, postavimo na 3,62, s tim što ćemo rezultat podeliti sa 10. Sada, za $x = 1,7$ čitamo vrednost na klizaču ispod



i nalazimo da je oko 6,15, što znači da je $1,7 \cdot \log(2,3) \approx 0,615$. Nakon toga, za $y = 0,615$ čitamo vrednost 10^y i nalazimo da je oko 4,12 što je i rešenje

$$z = 2,3^{1,7} \approx \boxed{4,12},$$

a tačna vrednost je $z = 4,120380 \dots$

6.4.3 $\ln 3$

► **Zadatak:** U čast Nepera i Briggsa, pomoću postupka (22) sa strane 8, izračunaj *peške* približnu vrednost $\ln 3$ u 5 koraka. Za upoređivanje, tačna vrednost je

$$\ln 3 = 1,0986122886\ 6810969139\ 5245236922\ 5257046475 \dots$$

► **Rešenje:** Za $x = 3$, izraz $r = (x - 1)/(x + 1) = 1/2$. U nultom koraku postavljamo početne vrednosti:

$$\text{Korak } 0. \quad k = 1, \quad p = 2r = 1, \quad q = r^2 = 1/4, \quad a = p = 1, \quad y = a = 1.$$

Slede koraci iteracije — povećamo k za 2, pomnožimo p sa q , član sume a postaje p/k , koga dodajemo u rezultat y :

$$\text{Korak } 1. \quad k = 3, \quad p = 1/4, \quad a = 1/12, \quad y = 13/12;$$

$$\text{Korak } 2. \quad k = 5, \quad p = 1/16, \quad a = 1/80, \quad y = 263/240;$$

$$\text{Korak } 3. \quad k = 7, \quad p = 1/64, \quad a = 1/448, \quad y = 7379/6720;$$

$$\text{Korak } 4. \quad k = 9, \quad p = 1/256, \quad a = 1/2304, \quad y = 88583/80640;$$

$$\text{Korak } 5. \quad k = 11, \quad p = 1/1024, \quad a = 1/11264, \quad y = 3897967/3548160.$$

Rezultat je

$$\ln 3 \approx \frac{3897967}{3548160} \approx \boxed{1,0986},$$

što nije loše za samo 5 koraka, jer je apsolutna greška oko $2,4 \times 10^{-5}$. Ali, može bolje...

★ **Dodatak:** Ako već imamo precizno izračunatu konstantu $\ln 2$, onda je bolje računati $\ln 3$ kao $\ln(3/4) + 2 \ln 2$, jer će u postupku, umesto $r = 1/2$, biti $r = (3/4 - 1)/(3/4 + 1) = -1/7$, odnosno, umesto $q = 1/4$, biće $q = 1/49$, što dovodi do mnogo bržeg izračunavanja. U istom broju koraka bismo dobili

$$\ln \frac{3}{4} \approx -\frac{2}{7}, -\frac{296}{1029}, -\frac{72526}{252105}, -\frac{24876448}{86472015}, -\frac{522405418}{1815912315}, -\frac{281576520392}{978776737785},$$

gde poslednji razlomak ima grešku od oko $1,6 \times 10^{-12}$, što je više od dvostruko tačnih cifara. Kada mu dodamo $2 \ln 2$ (vidi stranu 8), dobićemo

$$\ln 3 \approx \underbrace{1,098612288669726}_{\text{tačne cifre}} \dots$$

Generalno, ovakav način je najbrži ako računamo $\ln x = \ln(x/2^n) + n \ln 2$, gde biramo n takvo da $x/2^n$ bude što bliže 1, odnosno, da q bude najmanje moguće (vidi program).

```

10 REM logarithmus naturalis
20 LET m=100: LET eps=0: LET h
=SQRT 2: LET l=1/h: LET n=0: LET
r=2: GO SUB 140: LET ln2=y
30>FOR x=1 TO 20: GO SUB 100:
PRINT "ln ";x;TAB 5;" = ";y: NEX
T x
99 STOP
100 REM algorithm
110 LET r=x: LET n=0
120 IF r>h THEN LET r=r/2: LET
n=n+1: GO TO 120
130 IF r<l THEN LET r=r*2: LET
n=n-1: GO TO 130
140 LET r=(r-1)/(r+1): LET k=1:
LET p=2*r: LET q=r*r: LET a=p:
LET y=a: LET i=0
150 IF i<m AND ABS a>eps THEN L
ET k=k+2: LET p=p*q: LET a=p/k:
LET y=y+a: LET i=i+1: GO TO 150
160 IF n<>0 THEN LET y=y+n*ln2
170 RETURN
RUN

```

```

ln 1 = 0
ln 2 = 0.69314718
ln 3 = 1.09861228
ln 4 = 1.3862944
ln 5 = 1.6094379
ln 6 = 1.7917595
ln 7 = 1.9459101
ln 8 = 2.0794415
ln 9 = 2.1972246
ln 10 = 2.3025851
ln 11 = 2.3978953
ln 12 = 2.4849066
ln 13 = 2.5649494
ln 14 = 2.6390573
ln 15 = 2.7080502
ln 16 = 2.7725887
ln 17 = 2.8332133
ln 18 = 2.8903718
ln 19 = 2.944439
ln 20 = 2.9957323

9 STOP statement, 99:1

```

Slika 9: ZX Spectrum **BASIC** program.

7 Reference

7.1 Linkovi


- [1] GitHub — Luka S. Nešić — Maturski rad — Logaritam
<https://github.com/Nasumica/LukaMaturski/blob/main/log.pdf>
- [2] WIKIPEDIA — Logarithm
<https://en.wikipedia.org/wiki/Logarithm>
- [3] Wolfram MathWorld — Logarithm
<https://mathworld.wolfram.com/Logarithm.html>
- [4] Wolfram MathWorld — Antiogarithm
<https://mathworld.wolfram.com/Antilogarithm.html>
- [5] Wolfram Language & System Documentation Center — Logarithm
<https://reference.wolfram.com/language/ref/Log.html>
- [6] WolframAlpha — Computational Intelligence
<https://www.wolframalpha.com/>
- [7] A reconstruction of the tables of Briggs' *Arithmetica logarithmica* (1624)
<https://inria.hal.science/inria-00543939/PDF/briggs1624doc.pdf>
- [8] Newman's Short Proof of the Prime Number Theorem
<https://people.mpim-bonn.mpg.de/zagier/files/doi/10.2307/2975232/fulltext.pdf>
- [9] YouTube — Log Tables — Numberphile
<https://www.youtube.com/watch?v=VRzH4xBOGdM>
- [10] YouTube — The iPhone of Slide Rules — Numberphile
<https://www.youtube.com/watch?v=xRpR1rmPbJE>
- [11] YouTube — The Four 4s — Numberphile
<https://www.youtube.com/watch?v=Noo4lN-vSvw>
- [12] GitHub — Srbslav D. Nešić — Numerical recipes in Pascal
<https://github.com/Nasumica/Wirth>

7.2 Literatura

- [1] Larousse: „Matematika“, *Opšta enciklopedija* (1967)
- [2] Nebojša Ikodinović, Slađana Dimitrijević, Suzana Aleksić: „Udžbenik sa zbirkom zadataka za 2. razred gimnazije“, *Matematika 2* (2019)
- [3] Vene Bogoslavov: „Zbirka rešenih zadataka iz matematike 2“, (2008–2011)
- [4] Marjan M. Matejić, Lidiya V. Stefanović, Branislav M. Randelović, Igor Ž. Milovanović: „Kompleti zadataka za prijemni ispit“, *Matematika* (2011)
- [5] Rade Nikolić: „Zadaci za prijemni ispit iz matematike na Fakultet informacionih tehnologija“, (2020)
- [6] Gradimir V. Milovanović, Đorđe R. Đorđević: „Programiranje numeričkih metoda“, (1981)
- [7] Donald E. Knuth: „Seminumerical Algorithms“, *The Art of Computer Programming* (1968–)

- [8] Dragoljub Vasić, Vene Bogoslavov, Gliša Nešković: „Logaritamske tablice“, (2008)
- [9] Henry Briggs: „Arithmetica logarithmica“, (1624)
- [10] Donald E. Knuth: „The T_EXbook“, *Computers and Typesetting* (1996)
- [11] John D. Hobby: „User’s manual“, METAPOST (2024)

7.3 Software

- [1] Mathematica — Wolfram Research
- [2] Visual Studio Code (Integrated Development Environment) — Microsoft
- [3] T_EX (typesetting system) — Donald E. Knuth
- [4] L^AT_EX (T_EX macros) — Leslie Lamport
- [5] $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ -T_EX (T_EX macros) — American Mathematical Society
- [6] METAPOST (PostScript programming language)— John D. Hobby
- [7] **Pascal** (programming language) — Niklaus Wirth
- [8] **Python** (programming language) — Python Software Foundation
- [9]  (programming language) — Google
- [10] **ZX BASIC** (programming language) — Sinclair Research Ltd.