Гимназија „Бора Станковић“
Ниш, Србија

МАТУРСКИ РАД

Предмет: Математика

Тема: Логаритам
једначине и неједначине

Ученик:
Лука Нешић, IV/6

Професор:
Ненад Тотић

2025.

Садржај

1 Увод

Овај рад се бави *логаритамском функцијом*, једном од најважнијох функција у математици. Због своје важности, заједно са експоненцијалном, тригонометријским и њима инверзним функцијама, спада у групу *елементарних* функција. Описане су њене особине и дати пример њене употребе, као и задаци са решењама (укупно 27).

Сама реч *логаритам* потиче од грчких речи $\lambda \acute{o} \gamma o \varsigma$ (*логос*) и $\alpha \rho \iota \theta \mu \acute{o} \varsigma$ (*аритмос*), са значењем „одговарајући број“.

1.1 Дефиниција логаритма

Функција

$$\boxed{y = \log_b x} \tag{1}$$

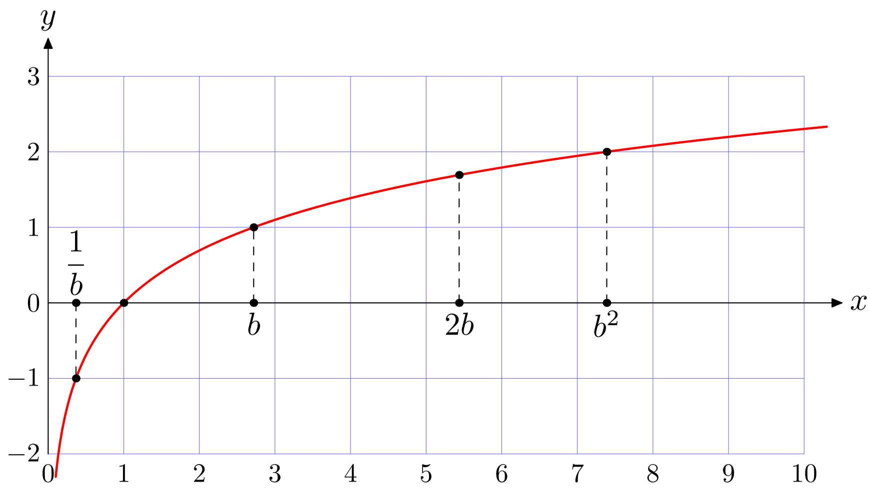
је решење по y једначине

$$x = b^y,$$

где је b *основа* (*база*) логаритма, а x *аргумент*. (Изговара се „y је једнако логаритам од x за основу b“ или краће „y је логаритам b од x“.)

1.2 Ток и график функције

Функција је у скупу реалних бројева $\mathbb{R}$ дефинисана за $x > 0$ и $b > 0 \wedge b \neq 1$. Функција је *монотона*: за $b > 1$ функција је *растућа*, док за $b < 1$ функција је *опадајуће*. Због тога важи *бијекција*: $\log_b u = \log_b v \Leftrightarrow u = v$. Функција има једну *нулу*, увек за $x = 1$. Када $x \to 0$, онда $y \to -\infty$ за $b > 1$, односно, $y \to +\infty$ за $b < 1$.



Слика 1: График логаритамске функције $y = \log_b x$.

1.3 Антилогаритам

Инверзна функција логаритму је обично степеновање основе логаритма аргументом и зове се *антилогаритам*

$$\boxed{\operatorname{antilog}_b x = \log_b^{-1} x = b^x}\,. \tag{2}$$

Из саме дефиниције важи

$$\boxed{\log_b(\operatorname{antilog}_b x) = \operatorname{antilog}_b(\log_b x) = x}\,. \tag{3}$$

2 Логаритамске једнакости

За логаритамску функцију важе разне *једнакости* које се користе за упрошћивање и прилагођавање израза приликом решавања проблема и задатака.

2.1 Логаритам степена основе

По самој дефиницији логаритма, ако је $x = b^a$, онда је

$$\boxed{\log_b b^a = a}. \tag{4}$$

Ако ставимо да је $1 = b^0$, односно, $b = b^1$, добијамо да је

$$\boxed{\log_b 1 = 0} \quad \text{и} \quad \boxed{\log_b b = 1}. \tag{5}$$

Такође је битна једнакост

$$\boxed{b^{\log_b x} = x} \tag{6}$$

која произилази из саме дефиниције логаритма и антилогаритма.

2.2 Логаритам производа

Ако је

$$u = \log_b x \ \wedge \ v = \log_b y \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad x = b^u \ \wedge \ y = b^v,$$

онда је, због једнакости (4)

$$x \cdot y = b^u b^v = b^{u+v} \quad \Rightarrow \quad \log_b(x \cdot y) = \log_b b^{u+v} = u + v.$$

Одавде је

$$\boxed{\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y}. \tag{7}$$

Из ове једнакости се може извести и формула за логаритам факторијела броја. Ако је

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k \quad \Rightarrow \quad \log(n!) = \sum_{k=1}^{n} \log k.$$

(Занимљиво је да је $\log(1 \cdot 2 \cdot 3) = \log 1 + \log 2 + \log 3 = \log(1 + 2 + 3)$.)

2.3 Логаритам количника

Слично логаритму производа, ако је

$$u = \log_b x \ \wedge \ v = \log_b y \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad x = b^u \ \wedge \ y = b^v,$$

онда је, због једнакости (4)

$$x/y = b^u b^{-v} = b^{u-v} \quad \Rightarrow \quad \log_b(x/y) = \log_b b^{u-v} = u - v.$$

Одавде је

$$\boxed{\log_b(x/y) = \log_b x - \log_b y}. \tag{8}$$

Из ове једнакости следи

$$\boxed{\log_b(1/x) = -\log_b x}. \tag{9}$$

2.4 Логаритам степена броја

Ако је

$$y = x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ пута}},$$

онда, из једнакости за логаритам производа (7), следи да је

$$\log_b y = \log_b(\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ пута}}) = \underbrace{\log_b x + \log_b x + \cdots + \log_b x}_{n \text{ пута}} = n \log_b x,$$

одакле је

$$\boxed{\log_b x^n = n \log_b x}\,. \tag{10}$$

Из ове једнакости следи једнакост

$$\boxed{\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_b x}\,, \tag{11}$$

као и једнакост

$$\boxed{x^y = b^{y \log_b x}}\,. \tag{12}$$

2.5 Промена основе логаритма

Ако је

$$y = \log_a x \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad x = a^y,$$

онда је

$$\log_b x = \log_b a^y = y \log_b a = \log_a x \cdot \log_b a.$$

Одавде је

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}\,. \tag{13}$$

Из ове једнакости, ако ставимо да је $x = b$, се добија и једнакост

$$\boxed{\log_a b \cdot \log_b a = 1}\,. \tag{14}$$

Из једнакости (4) и (13), ако ставимо да је $a = b^n$, следи једнакост

$$\boxed{\log_{b^n} x = \frac{1}{n} \log_b x}\,. \tag{15}$$

Одавде, ако ставимо да је $n = -1$, следи

$$\boxed{\log_{1/b} x = -\log_b x}\,, \tag{16}$$

а узевши у обзир и једнакост (9) добија се

$$\boxed{\log_{1/b} x = \log_b(1/x)}\,. \tag{17}$$

Треба бити опрезан код коришћења свих ових једнакости, нарочито код степеновања, и увек треба проверити опсег у коме се рачуна. На пример, из једнакости (10), следи $\log x^2 = 2 \log x$, што је исправно за $x > 0$, међутим, $\log x^2 = 2 \log |x|$ за било које $x \neq 0$.

3 Најчешће логаритамске основе

3.1 Основа 10

У инжењерству се најчешће користи логаритам са основом 10, зове се *декадни* или *заједнички* логаритам, и пише се

$$y = \log_{10} x.$$

Понекад се може видети и само

$$y = \log x,$$

без навођења основе, али треба обратити пажњу на контекст. Ако је неки инжењерски текст у питању, нејвероватније се мисли на основу 10.

Декадни логаритам је погодан и када се користи, такозвани *научни* или *инжењерски* запис броја. На пример, *Планкова константа* (Max Planck) износи

$$h = 6{,}62607015 \times 10^{-34}\,\mathrm{J/Hz}$$

која има декадни логаритам

$$\log_{10} h = \log_{10}(6{,}62607015) - 34.$$

У физици се за мерење нивоа сигнала или звука користи јединица *бел* (B), али је чешће у практичној употреби 10 пута мања јединица *децибел* (dB), односно, $1\,\mathrm{B} = 10\,\mathrm{dB}$. Ниво сигнала L, који зависи од односа измерене снаге P и референтне снаге P_0, изражен у децибалима износи

$$L = 10 \log_{10}\left(\frac{P}{P_0}\right)\,\mathrm{dB}.$$

Како се у акустици узима да је референтна снага $P_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W}$, могло би се писати да је ниво звука у децибелима

$$L = 10 \log_{10}(P) - 120.$$

Нормалан говор је око $50\,\mathrm{dB}$, звук мотора млазног авиона при полетању је $150\,\mathrm{dB}$, а смртоносан је звук од $240\,\mathrm{dB}$ и више. Звучни топ Genasys LRAD има ниво звука око $160\,\mathrm{dB}$, што значи да је 10^{11} пута моћнији од говора.

Слична формула се користи и за одређивање јачине земљотреса, или pH вредности $\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H}^+]$.

3.2 Основа 2

У информатици се често користи логаритам са основом 2, који се зове *бинарни* логаритам, и пише се

$$y = \log_2 x.$$

Користи се у комбинаторици, као за одређивање *количине информација*, односно, потербног броја битова меморије за смештање неког податка. Ако се зна да ће у меморију бити уписивани цели бројеви од 0 до n, онда је потребно резервисати

$$bits = \lfloor \log_2(n) \rfloor + 1 \tag{18}$$

битова меморије, где $\lfloor x \rfloor$ представља *највећи сео број који је мањи или једнак* x (изговара се „највеће цело од x“). На пример, ако ће у одређеној меморији највећи број бити милион, онда је за то потребно резервисати

$$bits = \lfloor \log_2(1\,000\,000) \rfloor + 1 = \lfloor 19{,}9315685693 \rfloor + 1 = 19 + 1 = 20$$

битова меморије. Највећи број који може стати у овим резервисаних 20 битова меморије је бинарни број који има 20 јединица и износи

$$(1111\,1111\,1111\,1111\,1111)_2 = 2^{20} - 1 = 1\,048\,575.$$

Како су и реални бројеви у меморији представљени као уређени парови бинарних бројева у облику $x = (mantissa, exponent)$, са значењем

$$x = mantissa \times 2^{exponent},$$

бинарни логаритам би био израчунат као

$$\log_2(x) = \log_2(mantissa) + exponent,$$

ако је $mantissa > 0$, иначе је недефинисан.

Бинарни логаритам се користи и у атомској физици. Време *полураспада* $t_{1/2}$ је време потребно да се распадне половина језгара атома неке материје. Ако имамо почетан број језгара N_0 и број језгара N_t након времена t, њихов однос се може представити формулом

$$\frac{N_0}{N_t} = 2^{t/t_{1/2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{t}{t_{1/2}} = \log_2\left(\frac{N_0}{N_t}\right). \tag{19}$$

Ова формула се користи и за одређивање старости стена или фосила.

3.3 Основа e

Ову логаритамску основу је открио Јакоб Бернули (Jacob Bernoulli) када је проучавао *сложену камату* и доказао да *континуална* сложена камата тежи константи

$$\mathbf{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

али је тек Ојлер (Leonhard Euler) одредио њену тачну вредност и дао јој име. Логаритам за ову основу се зове *природни* логаритам (*logarithmus naturalis*) и пише се

$$\ln x = \log_{\mathbf{e}} x.$$

Антилогаритам је *експоненцијална* функција $\mathbf{e}^x = \exp(x)$, која је позната по томе што је то једина функција чији је први извод једнак самој функцији: $\exp'(x) = \exp(x)$. Бројна вредност се може израчунати формулом

$$\boxed{\mathbf{e}^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}. \tag{20}$$

Ако ставимо да је $x = 1$, бројна вредност основе природног логаритма $\mathbf{e}$ се може одредити

$$\begin{aligned}\mathbf{e} &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots \\ &= 2{,}7182818284\,5904523536\,0287471352\,6624977572\,\ldots\end{aligned} \tag{21}$$

са жељеном тачношћу.

4 Brojna vrednost logaritma

4.1 Formula

Brojna vrednost prirodnog logaritma može biti izračunata pomoću formule

$$\boxed{\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2n+1}} \tag{22}$$

do željene tačnosti. Postupak kojim se računa $y = \ln x$ sa tačnošću ε izgleda ovako:

$$\boxed{\begin{array}{l} r \leftarrow (x-1)/(x+1); \quad k \leftarrow 1; \quad p \leftarrow 2r; \quad q \leftarrow r^2; \quad a \leftarrow p; \quad y \leftarrow a; \\ \text{ponavljati dok je } |a| > \varepsilon\text{:} \\ \qquad k \leftarrow k+2; \quad p \leftarrow p \cdot q; \quad a \leftarrow p/k; \quad y \leftarrow y + a; \end{array}} \tag{23}$$

Ovim postupkom se može izračunati vrednost

$$\begin{aligned} \ln 2 &= \frac{2}{1 \cdot 3^1} + \frac{2}{3 \cdot 3^3} + \frac{2}{5 \cdot 3^5} + \frac{2}{7 \cdot 3^7} + \frac{2}{9 \cdot 3^9} + \cdots \\ &= 0{,}6931471805\,5994530941\,7232121458\,1765680755\ldots \end{aligned} \tag{24}$$

kao i vrednost

$$\begin{aligned} \ln 10 &= \frac{2}{1 \cdot 9^1} + \frac{2}{3 \cdot 9^3} + \frac{2}{5 \cdot 9^5} + \frac{2}{7 \cdot 9^7} + \frac{2}{9 \cdot 9^9} + \cdots + 3 \ln 2 \\ &= 2{,}3025850929\,9404568401\,7991454684\,3642076011\ldots \end{aligned} \tag{25}$$

(Videti zadatak 6.4.3 na strani 26.) Pomoću njih se mogu izračunati brojne vrednosti binarnog $\log_2 x = \ln x / \ln 2$, odnosno, dekadnog $\log_{10} x = \ln x / \ln 10$ logaritma.

4.2 Verižni razlomak

Brojna vrednost prirodnog logaritma može se izračunati i pomoću *verižnog razlomka*

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \cfrac{x}{1 + \cfrac{1^2 x}{2 - 1x + \cfrac{2^2 x}{3 - 2x + \cfrac{3^2 x}{4 - 3x + \ddots}}}} \\ &= \cfrac{x}{1 + \underset{n=1}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}} \cfrac{n^2 x}{n + 1 - nx}}. \end{aligned} \tag{26}$$

Poput simbola koji se koriste za sumu 'Σ' ili proizvod 'Π', Gaus (Johann Carl Friedrich Gauß) je smislio, verovatno, najpogodniji način za predstavljanje verižnih (*lančanih*) razlomaka, gde simbol 'K' potiče od nemačke reči za *prekinuti lanac* (*Kettenbruch*). Izraz iza ovog simbola pokazuje kako izgleda *opšti član* verižnog razlomka.

Ako pomoću ove formule izračunamo prvih 11 *konvergenata* $\ln 2$ kao $-\ln(1+x)$, gde je $x = -1/2$, dobićemo

$$\ln 2 \approx \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{131}{192}, \frac{661}{960}, \frac{1327}{1920}, \frac{1163}{1680}, \frac{148969}{215040}, \frac{447047}{645120}, \frac{44711}{64512}, \frac{983705}{1419264}, \ldots$$

gde je poslednji razlomak tačan na 5 decimala.

4.3 Logaritamske tablice

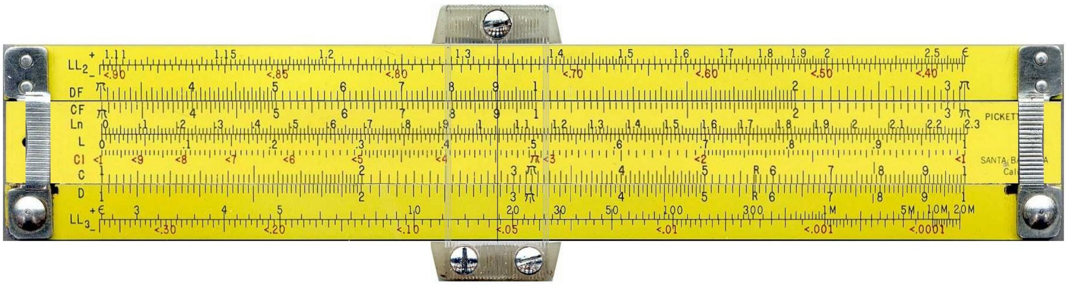
Prve tablice logaritama je 1614. godine izračunao škotski matematičar Neper (John Napier of Merchiston), koje su praktično sadržale logaritam za osnaovu $1/\mathbf{e}$, sa skaliranim argumentom i rezultatom, iako sam Neper nije znao za konstantu $\mathbf{e}$. Savremenim zapisom bi logaritam iz Neperovih tablica bio definisan kao

$$\mathrm{NapLog}(x) = 10^7 \log_{1/\mathbf{e}}(x/10^7) = -10^7 \ln(x/10^7).$$

Nekoliko godina kasnije, 1617. i 1624, engleski matematičar Brigs (Henry Briggs) je izračunao tablice dekadnih logaritama sa 14 cifara tačnosti, koje se uz dopune i ispravke koriste i danas pod imenom *Brigsove tablice*.

4.4 Logaritmar

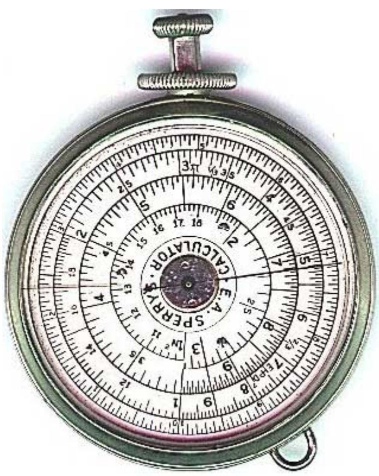
Pre pojave digitrona, za približno određivanje brojne vrednosti logaritma, koristila se je analogna mehanička sprava sa nekoliko lenjira zvana *logaritmar*.



Слика 2: Šiber.

Lenjiri imaju podeoke sa decimalom i logaritamskom, a često i sa sinusnom i nekom drugom skalom. Jedan od lenjira je bio klizni, te otuda popularno ime *šiber* (od nemačkog *Rechenschieber*). Koristi se jednostavno, pomeranjem klizača i čitanjem vrednosti sa odgovarajuće skale. (Videti zadatke 6.4.1 i 6.4.2.)

Postojale su i kružne varijante, pa i džepne, gde je džepni sat sa logaritmarom i kompasom bio „iPhone“ XIX i prve polovine XX veka.



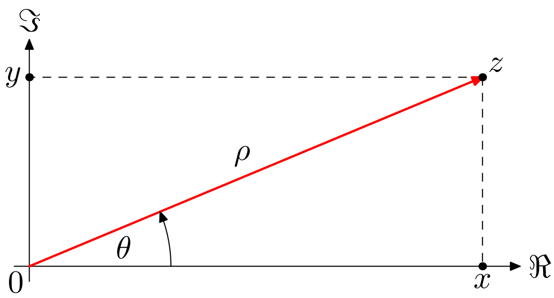
Слика 3: Džepni logaritmar.

Tablice i logaritmari se i danas koriste u vojsci, kao rezerva u slučaju otkazivanja elektronike. Prvi kompjuter ENIAC (Electronic Numerical Integrator And Computer) je napravljen 1946. godine sa jednom namenom: da izračuna tablice za vojsku.

5 Razno

5.1 Kompleksni logaritam

Ako u kompleksnoj ravni imamo kompleksan broj $z \in \mathbb{C}$,



Слика 4: Broj z u kompleksnoj ravni.

on može biti predstavljen kao

$$\begin{aligned} z &= x + iy && \text{pravougle koordinate,} \\ &= \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta) && \text{polarne koordinate.} \end{aligned}$$

Iz Ojlerove formule[1]

$$\boxed{\mathbf{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}\,, \tag{27}$$

sledi da je $z = \rho\,\mathbf{e}^{i\theta}$, odakle, iz jednakosti (7) i (4) se dobija

$$\boxed{\ln z = \ln\rho + i\theta}\,. \tag{28}$$

Pošto je $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$, sledi da prirodni logaritam kompleksnog broja z nije definisan samo za $z = 0$, kada je $\ln z = \tilde{\infty}$. Kako je $y/x = \tan\theta$, prirodni logaritam kompleksnog broja, predstavljenog pravouglim koordinatama, iz formule (28), može se izračunati

$$\boxed{\ln(x + iy) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}\,, \tag{29}$$

kao i

$$\boxed{\exp(x + iy) = \mathbf{e}^x\,(\cos y + i\sin y)}\,. \tag{30}$$

I za kompleksne brojeve važi jednakost promene osnove (13), tako da za dva kompleksna broja z i w, gde je $z \neq 0$, $w \neq 0$ i $w \neq 1$, sledi $\log_w z = \ln z/\ln w$, gde se $\ln z$ i $\ln w$ računaju pomoću formule (28), odnosno, (29). Na primer,

$$\log_{2+i}(3 + 4i) = 2, \qquad \log_i \mathbf{e} = \frac{2}{i\pi}, \qquad \log_2(-4) = 2 + \frac{i\pi}{\ln 2}.$$

Iz Ojlerove formule se, takođe, može dobiti *najlepša formula u istoriji matematike*, u kojoj je upotrebljeno 5 najvažnijih matematičkih konstatnti $(0, 1, \pi, \mathbf{e}, i)$

$$\boxed{\mathbf{e}^{i\pi} + 1 = 0}\,, \tag{31}$$

gde, ako prebacimo 1 na desnu stranu i *logaritmujemo*, dobijamo zanimljivu jednakost

$$\frac{\ln(-1)}{\sqrt{-1}} = \pi.$$

[1] Ojlerova formula se lako dokazuje pomoću formule (20) i sličnih formula za $\sin x$ i $\cos x$, koje se dobijaju iz *Meklorenovog reda* (Cailean MacLabhruinn): $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\,(x^n/n!)$, gde $f^{(n)}$ predstavlja n-ti izvod funkcije f.

5.2 Kvaternioni

Poput skupa kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, koji predstavlja objekte u 2D prostoru, skup *kvaterniona* $\mathbb{H}$, predstavlja objekte u 3D prostoru. Prvi ih je opisao 1843. godine irski matematičar Hamilton (William Rowan Hamilton), te njemu u čast i oznaka skupa $\mathbb{H}$.

U informatici su neizbežni deo svega što se dešava u 3D: navigacija aviona, podmornica, raketa, satelita, nebeska i kvantna mehanika, robotika, igre, grafika, ...

Kvaternion $q \in \mathbb{H}$ može biti predstavljen kao zbir

$$q = s + v \tag{32}$$

koji se sastoji od *skalarnog* dela $s \in \mathbb{R}$ i *vektorskog* dela $v \in \mathbb{R}^3$, gde je

$$v = xi + yj + zk \tag{33}$$

3D vektor sa koordinatama (x, y, z), a gde su i, j i k jedinični vektori po x, y i z osi, za koje važi

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \quad ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j. \tag{34}$$

U skupu kvaterniona $\mathbb{H}$ za operaciju množenja, uopšteno, ne važi *zakon komutacije*: $ji = -ij = -k$, $kj = -jk = -i$, $ik = -ki = -j$. Ovo je logično kad se setimo da i kod *Rubikove kocke* najčešće nije svejedno kojim redosledom okrećemo stranice. Važi *asocijativnost*: $(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$.

Da bi $q = s + v$ bio *pravi* kvaternion, mora biti $v \neq 0$, inače je q običan realan broj, kada se primenjuju operacije i funkcije iz skupa $\mathbb{R}$. Ako odredimo apsolutnu vrednost kvaterniona

$$\lambda = |v| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \rho = |q| = \sqrt{s^2 + \lambda^2}$$

koja se zove *norma*, odredimo *jedinični vektor* (*unit*) vektorskog dela kvaterniona

$$u = \frac{v}{\lambda},$$

koji se zove *versor* i gde je po definiciji[2] $|u| = 1$ i $u^2 = -1$, kao i ugao orijentacije

$$\varphi = \arccos\left(\frac{s}{\rho}\right),$$

možemo dobiti polarni zapis kvaterniona

$$q = \rho\,(\cos\varphi + u\sin\varphi) = \rho\,\mathbf{e}^{u\varphi}. \tag{35}$$

Iz svega ovoga se može dobiti

$$\boxed{\ln(q) = \ln\rho + u\varphi} \tag{36}$$

i

$$\boxed{\exp(q) = \mathbf{e}^s\,(\cos\lambda + u\sin\lambda)}\,. \tag{37}$$

Ostale operacije i funkcije nisu tema ovog rada, ali sabiranje i oduzimanje je uobičajeno, kod množenja treba obratiti pažnju na formulu (34) i komutativnost, a recipročna vrednost je $q^{-1} = \bar{q}/\rho^2$, gde je $\bar{q} = s - v$, *konjugovana* vrednost. Trigonometrijske i hiperbolične funkcije se mogu izraziti pomoću eksponencijalne, a njihove inverzne pomoću logaritamske funkcije.

[2] U skupu $\mathbb{H}$, $\sqrt{-1}$ ima beskonačno rešenja: svaki kvaternion koji se nalazi na *jediničnoj sferi* je rešenje $(s = 0 \,\wedge\, x^2 + y^2 + z^2 = 1)$, odnosno, svaki versor.

5.3 Izvod

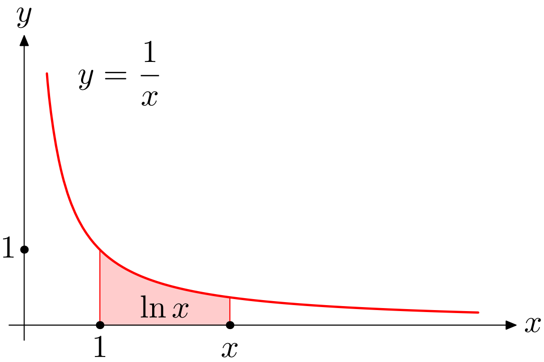
Ako je

$$y = \ln x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x},$$

odakle se, pomoću jednakosti (13) i jednakosti za izvod složene funkcije, može dobiti

$$\boxed{y = \log_b(f(x)) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{f'(x)}{f(x)\ln b}}\,. \tag{38}$$

Površina figure ispod funkcije $y = 1/x$ do x-ose, u opsegu od 1 do x iznosi $\ln x$. Matematički zapisano: $\int_1^x dx/x = \ln x$.



Слика 5: Geometrijsko značenje $\ln x$.

(Na slici je $x = \mathbf{e}$, tako da je površina osenčane figure jednaka 1.)

5.4 Integral

Neodređeni integral prirodnog logaritma je

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + \text{constant}. \tag{39}$$

5.5 Limes

Ojler je dokazao da je

$$\ln x = \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1). \tag{40}$$

5.6 Benfordov zakon

Verovatnoća da *početne cifre* neke matematičke ili fizičke konstante (kao i dužine reke, visine planine, broja stanovnika, rastojanja, stanja na računu, ...), budu ℓ za brojnu osnovu b, prati takozvani *Benfordov zakon* (Frank Benford), i iznosi

$$P(b, \ell) = \log_b\left(1 + \frac{1}{\ell}\right). \tag{41}$$

Na primer, u *Fibonačijevom nizu* (Leonardo Bonacci): 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, ..., verovatnoća da prva cifra nekog člana niza bude 9 iznosi $\log_{10}(1 + 1/9) \approx 4{,}58\%$. Ovu zakonitost je prvi otkrio 1881. godine astronom Njucom (Simon Newcomb), kada je primetio da su listovi logaritamskih tablica koje je dugo koristio najprljaviji na početku: . (Videti zadatak 6.3.8 na strani 24.)

6 Zadaci i rešenja

6.1 Jednačine

6.1.1 FIT

▷ **Задатак:** Nađi rešenje jednačne 1

$$\log_2(x-2) + \log_4(x-2) + \log_{16}(x-2) = 7.$$

(Zadatak sa mog prijemnog ispita na FIT „Metropolitan“.)

▶ **Решење:** Vidimo da su osnove logaritama stepeni broja 2, pa iz jednakosti za logaritam stepena osnove (15) sledi

$$\begin{aligned} \log_2(x-2) + \log_{2^2}(x-2) + \log_{2^4}(x-2) &= \\ \log_2(x-2) + \frac{1}{2}\log_2(x-2) + \frac{1}{4}\log_2(x-2) &= \\ \frac{7}{4}\log_2(x-2) &= 7, \end{aligned}$$

odnosno, posle skraćivanja,

$$\log_2(x-2) = 4.$$

Odavde je

$$x - 2 = 2^4 = 16 \quad \Rightarrow \quad x = \boxed{18}.$$

6.1.2 Jednačina 2

▷ **Задатак:** Reši jednačinu 2

$$2\log(x) - \log(6-x) = 0.$$

▶ **Решење:** Da bi logaritam u jednačini bio definisan mora biti

$$x > 0 \wedge 6 - x > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < x < 6.$$

Zbog jednakosti (10) možemo pisati

$$\log(x^2) = \log(6-x)$$

odakle sledi

$$\begin{aligned} x^2 &= 6 - x \\ x^2 + x - 6 &= 0. \end{aligned}$$

Rešavanjem[3] kvadratne jednačine

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}, \end{aligned}$$

dobijamu rešenja $x_1 = 2$ i $x_2 = -3$, odakle je jedinstveno rešenje

$$x = \boxed{2}.$$

[3] U nastavku rada, postupak rešavanja linearne i kvadratne jednačine će biti izostavljen.

6.1.3 Jjjj (yafe)

▷ **Задатак:** Reši jednačinu 3

$$\ln(x) = \ln(15 - x) - \ln(x + 1).$$

► **Решење:** Jednačina je definisana za

$$x > 0 \ \wedge\ 15 - x > 0 \ \wedge\ x + 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < x < 15.$$

Ako zapišemo jednačinu kao

$$\ln(x) + \ln(x + 1) = \ln(15 - x)$$

iz jednakosti za logaritam proizvoda (7), možemo pisati

$$\begin{aligned} \ln(x(x+1)) &= \ln(15 - x) \\ \ln(x^2 + x) &= \ln(15 - x) \\ x^2 + x &= 15 - x \\ x^2 + 2x - 15 &= 0 \end{aligned}$$

Rešavanjem kvadratne jednačine dobijamo 2 rešenja, $x_1 = 3$ i $x_2 = -5$, ali zbog uslova, ostaje jedinstveno

$$x = \boxed{3}.$$

6.1.4 Četiri četvorke

▷ **Задатак:** Dokazati da svaki prirodan broj $n \in \mathbb{N}$, može biti predstavljen sa 4 broja 4, pomoću logaritamske funkcije i kvadratnog korena 4

$$n = \log_{\sqrt{4}/4}\left(\log_4 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{4}}}}_{n \text{ korena}}\right).$$

► **Решење:** Kako je

$$\frac{\sqrt{4}}{4} = \frac{1}{2} \qquad \text{i} \qquad \underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{4}}}}_{n \text{ korena}} = 4^{(1/2)^n},$$

izraz može biti uprošćen

$$\log_{\sqrt{4}/4}\left(\log_4 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{4}}}}_{n \text{ korena}}\right) = \log_{1/2}\left(\log_4 4^{(1/2)^n}\right),$$

gde iz jednakosti za logaritam stepena osnove (4), sledi

$$\begin{aligned} &= \log_{1/2}(1/2)^n \\ &= \boxed{n}. \end{aligned}$$

★ **Додатак:** *Davno je u jednom časopisu postavljen sličan zadatak: da se sa što manje istih brojeva, koristeći bilo koju matematičku funkciju, predstavi svaki prirodan broj n. Rešio ga je nobelovac Pol Dirak (Paul Dirac) sa 3 broja 2, čije originalno rešenje izgleda*

$$-\log_2 \log_2 \sqrt{\cdots n \cdots \sqrt{2}} = -\log_2 \log_2 2^{2^{-n}} = -\log_2 2^{-n} = n. \qquad \square$$

6.1.5 Sveska 7

▷ **Задатак:** Nađi x ako je 5

$$x^{\log x} = 1000x^2.$$

▶ **Решење:** Ako logaritmujemo obe strane dobijamo

$$\begin{aligned} \log x^{\log x} &= \log(1000x^2) \\ \log x \log x &= \log 1000 + \log x^2 \\ \log^2 x &= 3 + 2\log x, \end{aligned}$$

gde, posle smene $t = \log x$, dobijamo kvadratnu jednačinu

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

čija su rešenja $t_1 = 3$ i $t_2 = -1$, odakle su

$$x_1 = 10^3 = \boxed{1000} \quad \text{i} \quad x_2 = 10^{-1} = \boxed{\frac{1}{10}}.$$

6.1.6 Beskonačni koren

▷ **Задатак:** Odredi vrednost 6

$$x = \ln\left(\mathbf{e}\sqrt[2]{\mathbf{e}\sqrt[3]{\mathbf{e}\sqrt[4]{\mathbf{e}\sqrt[5]{\cdots}}}}\right).$$

▶ **Решење:** Kako je $\ln \mathbf{e} = 1$ i koristeći jednakost za logaritam proizvoda (7) i jednakost za logaritam korena (11), možemo pisati

$$\begin{aligned} x &= 1 + \frac{1}{2}\ln\left(\mathbf{e}\sqrt[3]{\mathbf{e}\sqrt[4]{\mathbf{e}\sqrt[5]{\cdots}}}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\ln\left(\mathbf{e}\sqrt[4]{\mathbf{e}\sqrt[5]{\cdots}}\right)\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{4}\ln\left(\mathbf{e}\sqrt[5]{\cdots}\right)\right)\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{5}\ln(\cdots)\right)\right)\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} + \cdots \\ &= \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots \end{aligned}$$

Ako pogledamo formulu (21) na strani 7, možemo videti da je ovaj zbir jednak

$$x = \boxed{\mathbf{e} - 1},$$

jer iz sume za izračunavanje $\mathbf{e}$ nedostaje *nulti* član $1/0! = 1$.

6.1.7 Нет 3

▷ **Задатак:** Одреди n^3 ако је 7

$$\log_{5n} 30\sqrt{5} = \log_{4n} 48.$$

▶ **Решење:** Пребацимо логаритме у основу 6, јер је 6 *нзд* за 30 и 48 из израза

$$\begin{aligned}
\frac{\log_6 30\sqrt{5}}{\log_6 5n} &= \frac{\log_6 48}{\log_6 4n}\\
\frac{\log_6 6 + \log_6 5 + \frac{1}{2}\log_6 5}{\log_6 5 + \log_6 n} &= \frac{\log_6 6 + \log_6 8}{\log_6 4 + \log_6 n}\\
\frac{1 + \frac{3}{2}\log_6 5}{\log_6 5 + \log_6 n} &= \frac{1 + 3\log_6 2}{2\log_6 2 + \log_6 n}.
\end{aligned}$$

Када извршимо смену $n = 6^t$, односно, $t = \log_6 n$ и $u = \log_6 2$ и $v = \log_6 5$, добијамо

$$\begin{aligned}
\frac{1 + \frac{3}{2}v}{v + t} &= \frac{1 + 3u}{2u + t}\\
(1 + \tfrac{3}{2}v)(2u + t) &= (1 + 3u)(v + t)\\
2u + 3uv + t + \tfrac{3}{2}vt &= v + 3uv + t + 3ut \qquad / -3uv;\ -t;\ \times 2;\\
4u + 3vt &= 2v + 6ut\\
6ut - 3vt &= 4u - 2v\\
t(6u - 3v) &= 4u - 2v\\
t &= \frac{4u - 2v}{6u - 3v}\\
t &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2u - v}{2u - v}\\
t &= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Одавде је

$$n^3 = 6^{3t} = \boxed{36}.$$

6.1.8 Изумирање

▷ **Задатак:** Нађи n ако је 8

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdots \log_n (n+1) = 10.$$

▶ **Решење:** Ако пребацимо све логаритме у основу 2, добијамо

$$\log_2 3 \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 6}{\log_2 5} \cdots \frac{\log_2 (n+1)}{\log_2 n} = 10.$$

Видимо да ће, након *масовног* скраћивања, *изумрети* сви изрази осим

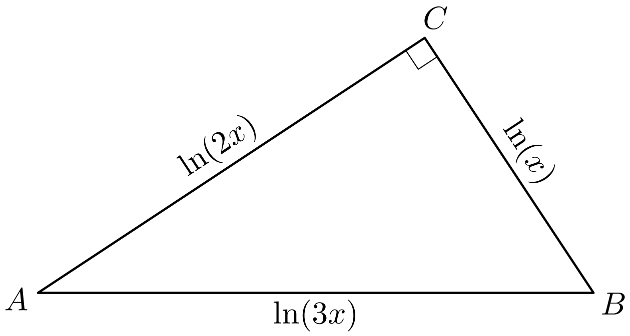
$$\log_2 (n+1) = 10,$$

одакле је,

$$n + 1 = 2^{10} = 1024 \quad \Rightarrow \quad n = \boxed{1023}.$$

6.1.9 Питагора

▷ **Задатак:** Одреди x са слике. 9



Слика 6: Правоугли троугао $\triangle ABC$.

(Задатак са Tik-Toka.)

▶ **Решење:** Нађимо најпре решење општег случаја

$$a = \ln(px), \quad b = \ln(qx), \quad c = \ln(rx).$$

Због лакшег писања, извршимо смену

$$t = \ln x, \quad u = \ln p, \quad v = \ln q, \quad w = \ln r,$$

одакле је

$$a = t + u, \quad b = t + v, \quad c = t + w.$$

Из *Питагорине теореме* $a^2 + b^2 = c^2$, следи да је

$$(t+u)^2 + (t+v)^2 = (t+w)^2$$
$$t^2 + 2tu + u^2 + t^2 + 2tv + v^2 = t^2 + 2tw + w^2$$

где, након сређивања, добијамо квадратну једначину

$$t^2 + 2(u + v - w)t + (u^2 + v^2 - w^2) = 0,$$

чија су решења

$$t_{1,2} = w - u - v \pm \sqrt{2(w-u)(w-v)},$$

али нас занима само позитивно. Када вратимо смену добијамо

$$\ln x = \ln\left(\frac{r}{pq}\right) + \sqrt{2\ln\left(\frac{r}{p}\right)\ln\left(\frac{r}{q}\right)},$$

где је, после антилогаритмовања

$$x = \frac{r}{pq} \cdot \mathbf{e}^{\sqrt{2\ln(r/p)\ln(r/q)}}.$$

Због логаритама испод корена видимо да мора бити $p, q, r > 0$ или $p, q, r < 0$, и $|p|, |q| < |r|$, где ће x имати исти знак као p, q и r.

Када заменимо вредности са слике, $p = 1$, $q = 2$ и $r = 3$, добијамо да је

$$x = \boxed{\frac{3}{2}\,\mathbf{e}^{\sqrt{2\ln(3)\ln(3/2)}}} \approx 3{,}85488,$$

а странице троугла су приближно

$$a \approx 1{,}34934, \quad b \approx 2{,}04249, \quad c \approx 2{,}44795.$$

(На слици је 1 = ‘————————’.)

6.2 Nejednačine

6.2.1 Sveska 11

▷ **Задатак:** Reši nejednačinu 10

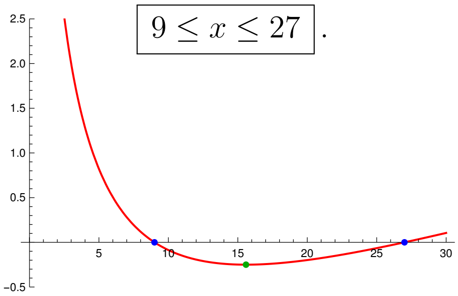
$$\log_3^2 x - 5\log_3 x + 6 \leq 0.$$

▶ **Решење:** Kada izvršimo smenu $t = \log_3 x$, možemo pisati da je

$$t^2 - 5t + 6 \leq 0$$

Kako su rešenja kvadratne jednačine $t_1 = 2$ i $t_2 = 3$, nejednačina je zadovoljena kada je $t \in [2, 3]$. Pošto je $x = 3^t$, sledi da je nejednačina zadovoljena za $x \in [3^2, 3^3]$, odnosno,

$$\boxed{9 \leq x \leq 27}.$$



Слика 7: $y = \log_3^2 x - 5\log_3 x + 6$.

★ **Додатак:** Funkcija ima minimum za $t = 5/2$, odnosno, u tački $(9\sqrt{3}, -1/4)$.

6.2.2 Sveska 9

▷ **Задатак:** Odredi u kojim granicama je zadovoljen uslov 11

$$\log_3(x^2 - 4) < \log_3 5.$$

▶ **Решење:** Ako se oslobodimo logaritma

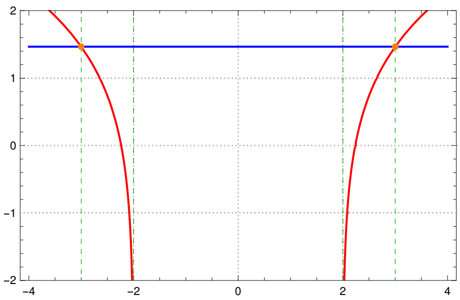
$$\begin{aligned} x^2 - 4 &< 5 \\ x^2 &< 9, \end{aligned}$$

dobićemo da je $-3 < x < 3$. Međutim, da bi logaritam bio definisan mora biti

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &> 0 \\ x^2 &> 4, \end{aligned}$$

odnosno, $x < -2$ ili $x > 2$. Odavde je

$$x \in \boxed{(-3, -2) \cup (2, 3)}.$$



Слика 8: $y = \log_3(x^2 - 4)$; $\log_3 5$.

6.2.3 Sveska 10

▷ **Задатак:** Reši nejednačinu 12

$$\log_5 x \geq \frac{1}{2}\log_5(3x-2).$$

▶ **Решење:** Da bi logaritam bio definisan, vidimo da mora biti

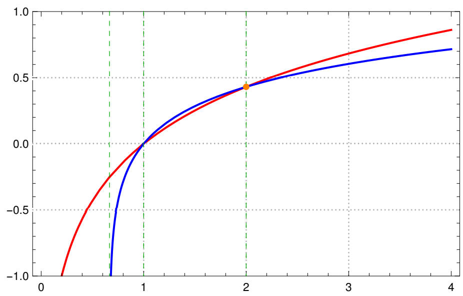
$$3x-2>0 \quad \Rightarrow \quad x>\frac{2}{3}.$$

Ako nejednačinu pomožimo sa 2 , dobijamo

$$\begin{aligned} 2\log_5 x &\geq \log_5(3x-2) \\ \log_5 x^2 &\geq \log_5(3x-2) \\ x^2 &\geq 3x-2 \\ x^2-3x+2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Kvadratna jednačina ima rešenja $x_1=1$ i $x_2=2$, pa je rešenje nejednačine

$$x \in \boxed{\left(\frac{2}{3},1\right] \cup [2,\infty)}.$$



Слика 9: $y=\log_5 x$; $\frac{1}{2}\log_5(3x-2)$.

6.2.4 Net 1

▷ **Задатак:** Reši 13

$$\log_{3x+5}(9x^2+8x+8)>2.$$

▶ **Решење:** Ako *antilogaritmujemo* obe strane dobijamo

$$\begin{aligned} 9x^2+8x+8 &> (3x+5)^2 \\ 9x^2+8x+8 &> 9x^2+30x+25 \\ 8x+8 &> 30x+25, \end{aligned}$$

gde je nakon sređivanja

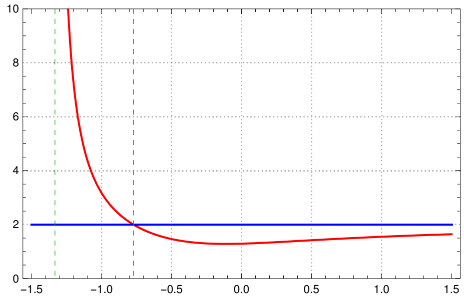
$$x<-\frac{17}{22}$$

Sledeći uslov je da osnova bude veća od 1, to jest

$$\begin{aligned} 3x+5 &> 1 \\ x &> -\frac{4}{3}, \end{aligned}$$

odakle sledi rešenje

$$x \in \boxed{\left(-\frac{4}{3}, -\frac{17}{22}\right)}.$$



Слика 10: $y = \log_{3x+5}(9x^2+8x+8)$; 2.

6.2.5 Net 2

▷ **Задатак:** Nađi vrednosti koje zadovoljavaju nejednačinu 14

$$\log_7(x+5) > \log_5(x+5).$$

► **Решење:** Prebacimo izraz u zajednički logaritam

$$\begin{aligned} \frac{\log(x+5)}{\log 7} &> \frac{\log(x+5)}{\log 5} \\ \log 5 \log(x+5) &> \log 7 \log(x+5). \end{aligned}$$

Kako je $\log 5 < \log 7$ i pozitivni su, da bi uslov važio, mora biti

$$\log(x+5) < 0,$$

odakle je

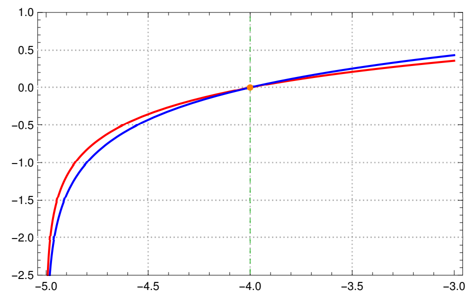
$$\begin{aligned} x+5 &< 1 \\ x &< -4, \end{aligned}$$

a da bi logaritam bio definisan mora da važi i

$$\begin{aligned} x+5 &> 0 \\ x &> -5, \end{aligned}$$

odakle je rešenje

$$x \in \boxed{(-5, -4)}.$$



Слика 11: $y = \log_7(x+5)$; $\log_5(x+5)$.

6.2.6 Net 6

▷ **Задатак:** Koje vrednosti zadovoljavaju uslov 15

$$\log_2(x+1) > \log_4 x^2?$$

► **Решење:** Ako levu stranu zapišemo kao

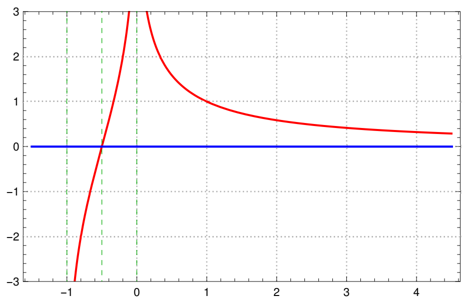
$$2 \cdot \frac{1}{2} \log_2(x+1) = \log_{2^2}(x+1)^2$$

što sledi iz jednakosti (15) i (10), dobićemo

$$\begin{aligned} \log_4(x+1)^2 &> \log_4 x^2 \\ (x+1)^2 &> x^2 \\ x^2 + 2x + 1 &> x^2 \\ 2x + 1 &> 0 \\ x &> -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Kako mora da važi $x > -1$ i $x \neq 0$, dobijamo konačno rešenje

$$x \in \boxed{\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (0, \infty)}.$$



Слика 12: $y = \log_2(x+1) - \log_4 x^2$.

★ **Додатак:** Kao što je na strani 5 napomenuto, da smo $\log_4 x^2$ jednostavno predstavili kao $\log_{2^2} x^2 = \log_2 x$, dobili bismo netačno rešenje. Ispravno bi bilo $\log_4 x^2 = \log_2 |x|$, kada bismo posebno gledali 2 slučaja: za $x > 0$ i za $x < 0$.

6.2.7 Granice

▷ **Задатак:** Dokaži da važi nejednakost

$$\boxed{1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1}, \tag{42}$$

16

kojom se definišu *donja* i *gornja* granica prirodnog logaritma.

▶ **Решење:** Pogledajmo prvo desni deo nejednakosti. Ako definišemo funkciju

$$y = \ln x - (x - 1),$$

potrebno je da dokažemo da je $y \leq 0$ za svako $x > 0$. Intuitivno je jasno da tvrđenje važi, jer $\ln x$ mnogo sporije raste od $x - 1$, i formalni dokaz će nam se zasnivati na tome.

Prvi izvod funkcije je

$$y' = \frac{1}{x} - 1,$$

koji ima jedinstvenu nulu $y' = 0$ za $x = 1$, gde je i $y = 0$. Kako je drugi izvod

$$y'' = -\frac{1}{x^2} < 0,$$

uvek negativan, to znači da funkcija y nema *prevojnih tačaka* i da tačka $(1, 0)$ predstavlja *maksimum* funkcije y, odakle je $y \leq 0$, odnosno,

$$\boxed{\ln x \leq x - 1}.$$

Ako u ovu nejednakost umesto x stavimo $1/x$, možemo pisati

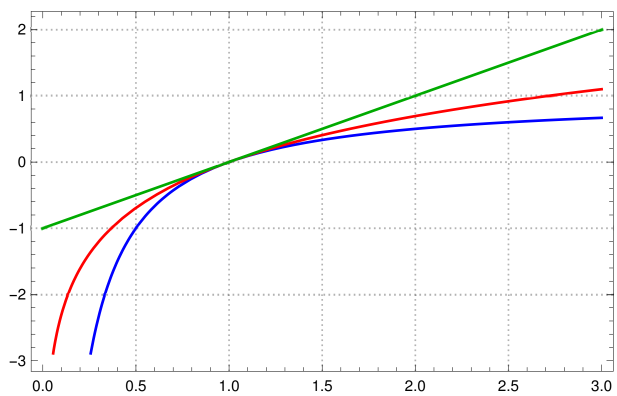
$$\ln(1/x) \leq \frac{1}{x} - 1$$
$$-\ln x \leq \frac{1}{x} - 1,$$

gde, kada izrazi zamene strane i znak, dobijamo

$$\boxed{1 - \frac{1}{x} \leq \ln x},$$

što predstavlja levi deo nejednakosti iz zadatka. □

★ **Додатак:** Sve tri funkcije iz nejednakosti se *dodiruju* u tački $(1, 0)$, što znači da u toj tački sve tri imaju istu *tangentu*, odnosno, isti prvi izvod $y'(1) = 1$; inače bi se sekle i nejednakost ne bi važila.



Слика 13: $y = 1 - 1/x$; $\ln x$; $x - 1$.

6.3 Kratki primeri

6.3.1 Zemljotres

▷ **Задатак:** Magnituda zemljotresa M po *Rihterovoj skali* u epicentru zavisi logaritamski od intenziteta zemljotresa I 17

$$M = \log_{10} I.$$

U avgustu 2009, japansko ostrvo Honšu je pogodio zemljotres magnitude $M_1 = 6{,}1$ po Rihteru, a u martu 2011, razarajući zemljotres koji je bio oko 800 puta jači od prvog. Koliko stepeni po Rihteru je imao drugi? (Koristi logaritamske tablice ili logaritmar.)

▶ **Решење:** $M_2 = M_1 + \log_{10} 800 \approx 6{,}1 + 2{,}9 = \boxed{9{,}0}$ stepeni Rihtera.

6.3.2 Decimalne cifre

▷ **Задатак:** Koliko decimalnih cifara d ima 128-bitna promenljiva? ($\log_{10} 2 \approx 0{,}30103$) 18

▶ **Решење:** $d = \lfloor \log_{10} 2^{128} \rfloor + 1 = \lfloor 128 \log_{10} 2 \rfloor + 1 = \lfloor 38{,}53184 \rfloor + 1 = 38 + 1 = \boxed{39}$.

6.3.3 Полураспад јода

▷ **Задатак:** Ако имамо 63 g изотопа јода ^{131}I, а знамо да смо пре 11 дана имали 163 g, које је време полураспада овог изотопа? (Користи природни логаритам.) 19

▶ **Решење:** Из формуле (19) на страни 7, следи да се време полураспада може израчунати

$$t_{1/2} = \frac{t}{\log_2(m_0/m_t)} = \frac{t \ln 2}{\ln(m_0/m_t)} = \frac{11 \ln 2}{\ln(163/63)} \approx \boxed{8{,}02}.$$

6.3.4 Geometrijski niz

▷ **Задатак:** Za $0 \leq x < 1$, uprostiti izraz 20

$$y = \log(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots).$$

▶ **Решење:** Kako je zbir beskonačnog geometrijskog niza[4]

$$s = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x},$$

može se pisati

$$y = \log\left(\frac{1}{1-x}\right),$$

gde iz jednakosti za recipročnu vrednost (9), sledi

$$= \boxed{-\log(1-x)}.$$

[4]**Dokaz:** $s = 1 + x \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots) = 1 + x \cdot s$, odakle je $s - x \cdot s = 1$, sledi da je $s = 1/(1-x)$. □

6.3.5 Izvod

▷ **Задатак:** Odredi izvod funkcije $f(\alpha) = \ln \operatorname{sinc} \alpha$, gde je $\operatorname{sinc} \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\alpha}$. 21

▶ **Решење:** Pomoću jednakosti (8) razložimo funkciju na

$$f(\alpha) = \ln \sin \alpha - \ln \alpha,$$

a kako je izvod $\sin \alpha$ jednak $\cos \alpha$ i iz jednakosti (38) za izvod logaritma funkcije, sledi da je

$$f'(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} = \boxed{\cot \alpha - \frac{1}{\alpha}}.$$

6.3.6 *i* na *i*

▷ **Задатак:** Odredi vrednost i^i gde je $i = \sqrt{-1}$, *imaginarna jedinica.* 22

▶ **Решење:** Kako u kompleksnoj ravni i ima polarne koordinate $\rho = 1$ i $\theta = \pi/2$, ako ga predstavimo Ojlerovom formulom kao $i = \mathbf{e}^{i\pi/2}$ i iz jednakosti (12) i (4), sledi da je

$$i^i = \mathbf{e}^{i \ln i} = \mathbf{e}^{i \ln \mathbf{e}^{i\pi/2}} = \mathbf{e}^{i^2 \pi/2} = \boxed{\mathbf{e}^{-\pi/2}} \approx 0{,}20788$$

realan broj.

6.3.7 ln(−*z*)

▷ **Задатак:** U skupu kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, ako znamo vrednost $\ln z$, koliko je $\ln(-z)$? 23

▶ **Решење:** Kako je u kompleksnoj ravni $-z$ jednako z zarotirano oko koordinatnog početka za ugao od $180° = \pi$, dobijamo

$$\ln(-z) = \boxed{\ln z + i\pi}.$$

Ako proverimo, iz Ojlerove jednakostu (31), dobijamo

$$\mathbf{e}^{\ln(-z)} = \mathbf{e}^{\ln z + i\pi} = \mathbf{e}^{\ln z} \cdot \mathbf{e}^{i\pi} = z \cdot (-1) = -z.$$

★ **Додатак:** Hmmm ..., trik sa rotacijom nije baš potpuno tačan: dobili bismo $-z$ i za ugao $-\pi$, pa bi bilo $\ln(-z) = \ln z - i\pi$, što je takođe tačno; u stvari, tačno je za bilo koji ugao $\pi + 2k\pi$ gde je $k \in \mathbb{Z}$ ceo broj. Odavde bi sledilo da je

$$\ln(-z) = \ln z + i(\pi + 2k\pi), \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

I sama formula (28), $\ln z = \ln \rho + i\theta$, predstavlja samo *glavnu granu* kompleksnog logaritma, koji je nekakva vrsta 4D spirale. Potpuna formula bi bila

$$\boxed{\ln z = \ln \rho + i(\theta + 2k\pi), \;\; k \in \mathbb{Z}}. \tag{43}$$

6.3.8 Прво, па 1

▷ **Задатак:** Колики проценат цена *од игле до локомотиве* почиње цифром 1? 24

▶ **Решење:** Из формуле (41) са стране 12, следи да је $P(10,1) = \log_{10} 2 \approx \boxed{30\%}$.

★ **Додатак:** У филму *Рачуновођа* (*The Accountant*), главни лик (Ben Afflec) открива да су финансијски извештаји преправљани, јер увиђа да износи не прате ово правило.

6.4 Ручни рад

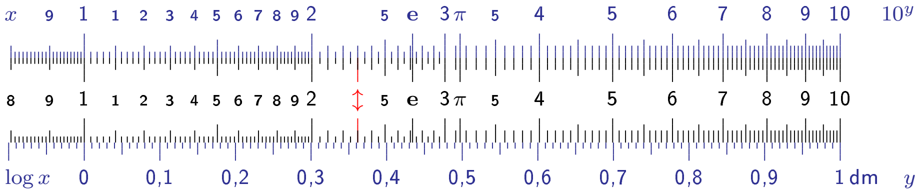
6.4.1 Аналогни степен

▷ **Задатак:** Одреди логаритмаром приближну вредност $z = 2{,}3^{1{,}7}$. 25

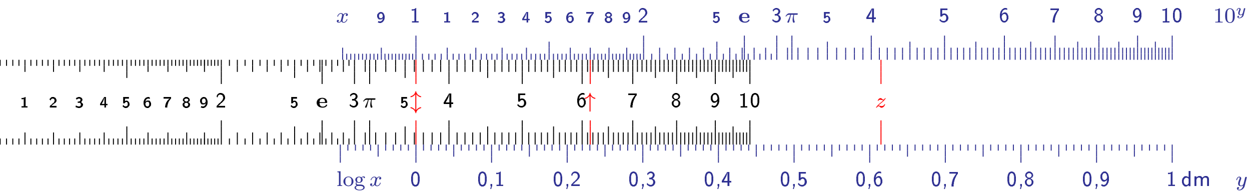
▶ **Решење:** Помоћу једнакости (12) представимо

$$z = 2{,}3^{1{,}7} = 10^{1{,}7\cdot\log(2{,}3)}.$$

Прво одређујемо вредност $\log(2{,}3)$ тако што за $x = 2{,}3$ читамо испод вредност $\log x$. Налазимо да је $\log(2{,}3) \approx 0{,}362$ (види нит обележену са '$\updownarrow$').



Након тога, ту вредност на клизачу поравнавано са $x = 1$. Како на клизачу не постоји 0,362, поставићемо на 3,62, с тим што ћемо резултат поделити са 10. Сада, за $x = 1{,}7$ читамо вредност на клизачу испод ($\uparrow$)



и налазимо да је око 6,15, што значи да је $1{,}7 \cdot \log(2{,}3) \approx 0{,}615$. Потом, за $y = 0{,}615$ читамо вредност 10^y и налазомо да је око 4,12 што је и решење

$$z = 2{,}3^{1{,}7} \approx \boxed{4{,}12},$$

а тачна вредност је $z = 4{,}120380\ldots$

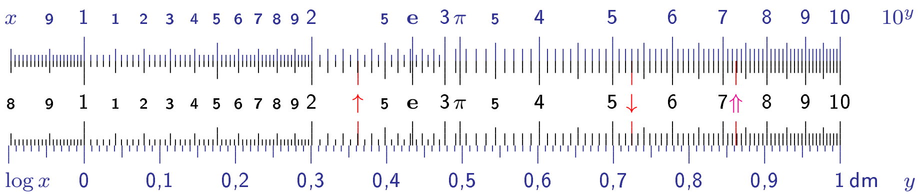
6.4.2 Analogni kvadratni koren

▷ **Задатак:** Objasni način za određivanje vrednosti $\sqrt{x}$ logaritmarom. 26

▶ **Решење:** Uz malo vežbe, kvadratni koren možemo direktno čitati sa logaritmara ako *u glavi* izvršimo deljenje sa 2 i, po potrebi, sabiranje sa 0,5 što je vrlo jednostavno jer se radi o brojevima između 0 i 1 sa najviše 3 decimale. Kako je

$$\sqrt{x} = 10^{\frac{1}{2}\log x},$$

potrebno je pročitati vrednost $\log x$, a onda, za dvostruko manju vrednost od nje, pročitati vrednost 10^y. Na primer, za izračunavanje $\sqrt{5{,}3}$, čitamo da je $\log(5{,}3) \approx 0{,}724$ ($\downarrow$), potom, za $y = 0{,}724/2 = 0{,}362$ ($\uparrow$), čitamo vrednost 10^y i dobijamo $\sqrt{5{,}3} \approx 2{,}3$ ($2{,}3^2 = 5{,}29$).



Za $\sqrt{53}$ treba u y dodati još 0,5 tako da je $y = 0{,}362 + 0{,}5 = 0{,}862$ ($\Uparrow$), odakle je $\sqrt{53} \approx 7{,}28$ ($7{,}28^2 = 52{,}9984$). Naravno, $\sqrt{530}$ se računa kao $10\sqrt{5{,}3}$, ili $\sqrt{0{,}53} = \frac{1}{10}\sqrt{53}$.

6.4.3 ln 3

▷ **Задатак:** У част Непера и Бригса, помоћу поступка (23) са стране 8, израчунај *пешке* приближну вредност $\ln 3$ у 5 корака. За упоређивање, тачна вредност је

$$\ln 3 = 1{,}0986122886\,6810969139\,5245236922\,5257046475\,\ldots$$

▶ **Решење:** За $x = 3$ биће $r = (x-1)/(x+1) = 1/2$. У нултом кораку постављамо почетне вредности:

Корак *0.* $\quad k = 1, \quad p = 2r = 1, \quad q = r^2 = 1/4, \quad a = p = 1, \quad y = a = 1.$

Следе кораци итерације — повећамо k за 2, помножимо p са q, члан суме a постаје p/k, кога додајемо у резултат y:

Корак *1.* $\quad k = 3, \quad p = 1/4, \quad a = 1/12, \quad y = 13/12;$
Корак *2.* $\quad k = 5, \quad p = 1/16, \quad a = 1/80, \quad y = 263/240;$
Корак *3.* $\quad k = 7, \quad p = 1/64, \quad a = 1/448, \quad y = 7379/6720;$
Корак *4.* $\quad k = 9, \quad p = 1/256, \quad a = 1/2304, \quad y = 88583/80640;$
Корак *5.* $\quad k = 11, \quad p = 1/1024, \quad a = 1/11264, \quad y = 3897967/3548160.$

Резултат је

$$\ln 3 \approx \frac{3897967}{3548160} = \boxed{1.098588\ldots}$$

што није лоше за само 5 корака, јер је апсолутна грешка око $2{,}4 \times 10^{-5}$. Али, може боље …

★ **Додатак:** Ако већ имамо прецизно израчунату вредност $\ln 2$, онда је боље рачунати $\ln 3$ као $\ln(3/4) + 2\ln 2$, јер ће, уместо $r = 1/2$, бити $r = (3/4-1)/(3/4+1) = -1/7$, односно, уместо $q = 1/4$, биће $q = 1/49$, што доводи до много бржег израчунавања. У истом броју корака бисмо добили

$$\ln\frac{3}{4} \approx -\frac{2}{7}, -\frac{296}{1029}, -\frac{72526}{252105}, -\frac{24876448}{86472015}, -\frac{522405418}{1815912315}, -\frac{281576520392}{978776737785},$$

где последњи разломак има грешку од око $1{,}6 \times 10^{-12}$, што је вишее од двоструко тачних цифара. Када му (са стране 8) додамо $2\ln 2$, добићемо

$$\ln 3 \approx 2\ln 2 - \frac{281576520392}{978776737785} = \underbrace{1{,}0986122886}_{\text{12 тачних цифара}}6972615081\,\ldots$$

Уопштено, поступак је најбржи ако рачунамо $\ln x = \ln(x/2^n) + n\ln 2$, где бирамо n такво да $x/2^n$ буде што ближе 1, односно, да q буде најмање могуће (види програм).

```
  10 REM ln(x) algorithm test
  20 LET eps=0: LET hi=SQR 2: LE
T lo=1/hi: LET n=0: LET r=2: GO
SUB 140: LET ln2=y
  30 FOR x=1 TO 20: GO SUB 100:
PRINT "ln(";x;")";TAB 6;" = ";y;
TAB 22;"n = ";n: NEXT x
  99 STOP
 100 REM logarithmus naturalis
 110 LET r=x: LET n=0
 120 IF r>hi THEN LET r=r/2: LET
 n=n+1: GO TO 120
 130 IF r<lo THEN LET r=r*2: LET
 n=n-1: GO TO 130
 140 LET r=(r-1)/(r+1): LET k=1:
 LET p=2*r: LET q=r*r: LET a=p:
LET y=a: LET z=0
 150 IF ABS (y-z)>eps THEN LET k
=k+2: LET p=p*q: LET a=p/k: LET
z=y: LET y=y+a: GO TO 150
 160 IF n<>0 THEN LET y=y+n*ln2
 170 RETURN

RUN
```

```
ln(1)   = 0             n = 0
ln(2)   = 0.69314718    n = 1
ln(3)   = 1.0986123     n = 2
ln(4)   = 1.3862944     n = 2
ln(5)   = 1.6094379     n = 2
ln(6)   = 1.7917595     n = 3
ln(7)   = 1.9459101     n = 3
ln(8)   = 2.0794415     n = 3
ln(9)   = 2.1972246     n = 3
ln(10)  = 2.3025851     n = 3
ln(11)  = 2.3978953     n = 3
ln(12)  = 2.4849066     n = 4
ln(13)  = 2.5649494     n = 4
ln(14)  = 2.6390573     n = 4
ln(15)  = 2.7080502     n = 4
ln(16)  = 2.7725887     n = 4
ln(17)  = 2.8332133     n = 4
ln(18)  = 2.8903718     n = 4
ln(19)  = 2.944439      n = 4
ln(20)  = 2.9957323     n = 4


9 STOP statement, 99:1
```

Слика 14: ZX Spectrum BASIC програм.

7 Одреднице

7.1 Литература

[*1*] Larousse: „Математика“, *Општа енциклопедија* (1967)

[*2*] Небојша Икодиновић, Слађана Димитријевић, Сузана Алексић: „Уџбеник са збирком задатака за 2. разред гимназије“, *Математика 2* (2019)

[*3*] Вене Боглославов: „Збирка решених задатака из математике 2“, (2008–2011)

[*4*] Марјан М. Матејић, Лидија В. Стефановић, Бранислав М. Ранђеловић, Игор Ж. Миловановић: „Комплети задатака за пријемни испит“, *Математика* (2011)

[*5*] Раде Николић: „Задаци за пријемни испит из математике на Факултет информационих технологија“, (2020)

[*6*] Milton Abramowitz, Irene Stegun: „Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables“, *Applied Mathematics* (1964)

[*7*] Градимир В. Миловановић, Ђорђе Р. Ђорђевић: „Програмирање нумеричких метода“, (1981)

[*8*] Donald E. Knuth: „Seminumerical Algorithms“, *The Art of Computer Programming* (1968–)

[*9*] Драгољуб Васић, Вене Богославов, Глиша Нешковић: „Логаритамске таблице“, (2008)

[*10*] Henry Briggs: „Arithmetica logarithmica“, (1624)

[*11*] Donald E. Knuth: „The TeXbook“, *Computers and Typesetting* (1996)

[*12*] John D. Hobby: „User’s manual“, *METAPOST* (2024)

7.2 Софтвер

[*1*] Mathematica — Wolfram Research

[*2*] Visual Studio Code (Integrated Development Environment) — Microsoft

[*3*] ZX BASIC (programming language) — Sinclair Research Ltd.

[*4*] **Pascal** (programming language) — Niklaus Wirth

[*5*] GO (programming language) — Google

[*6*] **Python** (programming language) — Python Software Foundation

[*7*] METAPOST (PostScript programming language)— John D. Hobby

[*8*] TeX (typesetting system) — Donald E. Knuth

[*9*] LaTeX (TeX macros) — Leslie Lamport

[*10*] AMS-TeX (TeX macros) — American Mathematical Society

7.3 Линкови

[1] GitHub — Лука С. Нешић — Матурски рад
https://github.com/Nasumica/LukaMaturski-cyr/

[2] WIKIPEDIA — Logarithm
https://en.wikipedia.org/wiki/Logarithm

[3] Wolfram MathWorld — Logarithm
https://mathworld.wolfram.com/Logarithm.html

[4] Wolfram MathWorld — Antiogarithm
https://mathworld.wolfram.com/Antilogarithm.html

[5] Wolfram Language & System Documentation Center — Logarithm
https://reference.wolfram.com/language/ref/Log.html

[6] WolframAlpha — Computational Intelligence
https://www.wolframalpha.com/

[7] A reconstruction of the tables of Briggs' *Arithmetica logarithmica* (1624)
https://inria.hal.science/inria-00543939/PDF/briggs1624doc.pdf

[8] WIKIPEDIA — Benford's law
https://en.wikipedia.org/wiki/Benford's_law

[9] IMDb — The Accountant (2016)
https://www.imdb.com/title/tt2140479/

[10] WIKIPEDIA — Quaternion
https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion

[11] Wolfram Language & System Documentation Center — Quaternions Package
https://reference.wolfram.com/language/Quaternions/tutorial/Quaternions.html

[12] YouTube — Log Tables — Numberphile
https://www.youtube.com/watch?v=VRzH4xB0GdM

[13] YouTube — The iPhone of Slide Rules — Numberphile
https://www.youtube.com/watch?v=xRpR1rmPbJE

[14] YouTube — The Four 4s — Numberphile
https://www.youtube.com/watch?v=Noo4lN-vSvw

[15] YouTube — Fantastic Quaternions — Numberphile
https://www.youtube.com/watch?v=3BR8tK-LuB0

[16] GitHub — Србислав Д. Нешић — Numerical recipes in Pascal
https://github.com/Nasumica/Wirth/

— *Лука С. Нешић*, понедељак 02.06.2025. 09:33