Гимназија „Бора Станковић“
Ниш, Србија

МАТУРСКИ РАД

Предмет: Математика

Тема: Логаритам

једначине и неједначине

Ученик:
Лука Нешић, IV/6

Професор:
Ненад Тотић

2006.

Садржај

1 Увод

Овај рад се бави *логаритамском функцијом*, једном од најважнијих функција у математици. Због своје важности, заједно са експоненцијалном, тригонометријским и њима инверзним функцијама, спада у групу *елементарних* функција. Описане су њене особине и дати примери њене употребе, као и задаци са решењама (укупно 27).

Сама реч *логаритам* потиче од грчких речи $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$ (*логос*) и $\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$ (*аритмос*), што се може превести као „одговарајући број“, са значењем *ред величине*.

1.1 Дефиниција логаритма

Функција

$$\boxed{y = \log_b x} \tag{1}$$

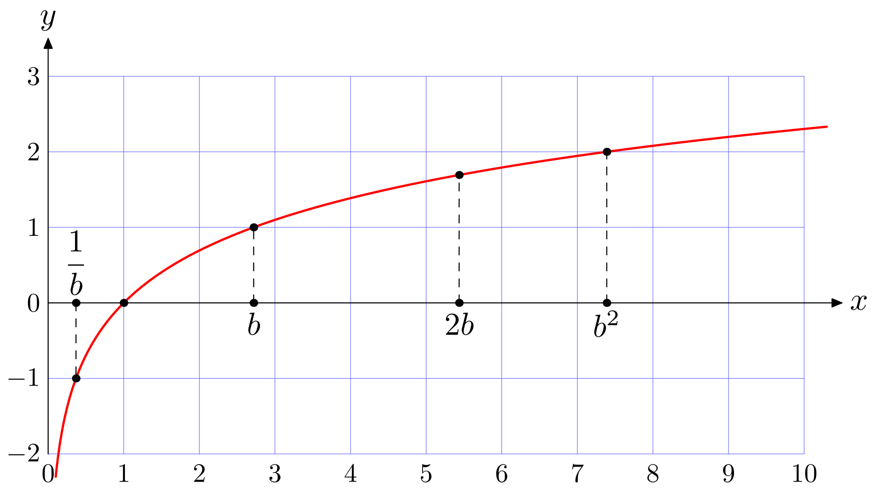
је решење по y једначине

$$x = b^y,$$

где је b *основа* (*база*) логаритма, а x *аргумент*. (Изговара се „y је једнако логаритам од x за основу b“ или краће „y је логаритам b од x“.)

1.2 Ток и график функције

Функција је у скупу реалних бројева $\mathbb{R}$ дефинисана за $x > 0$ и $b > 0 \wedge b \neq 1$. Функција је *монотона*: за $b > 1$ функција је *растућа*, док, за $b < 1$ функција је *опадајућа*. Због тога важи *бијекција*: $\log_b u = \log_b v \Leftrightarrow u = v$. Функција има једну *нулу*, увек за $x = 1$. Када $x \to 0$, онда $y \to -\infty$ за $b > 1$, односно, $y \to +\infty$ за $b < 1$.



Слика 1: График логаритамске функције $y = \log_b x$.

1.3 Антилогаритам

Инверзна функција логаритму је обично степеновање основе логаритма аргументом и зове се *антилогаритам*

$$\boxed{\operatorname{antilog}_b x = \log_b^{-1} x = b^x}\,. \tag{2}$$

Из саме дефиниције важи

$$\boxed{\log_b(\operatorname{antilog}_b x) = \operatorname{antilog}_b(\log_b x) = x}\,. \tag{3}$$

2 Логаритамске једнакости

За логаритамску функцију важе разне *једнакости* које се користе за упрошћивање и прилагођавање израза приликом решавања проблема и задатака.

2.1 Логаритам степена основе

По самој дефиницији логаритма, ако је $x = b^a$, онда је

$$\boxed{\log_b b^a = a}\,. \tag{4}$$

Ако ставимо да је $1 = b^0$, односно, $b = b^1$, добијамо да је

$$\boxed{\log_b 1 = 0} \qquad \text{и} \qquad \boxed{\log_b b = 1}\,. \tag{5}$$

Такође је битна једнакост

$$\boxed{b^{\log_b x} = x} \tag{6}$$

која произилази из саме дефиниције логаритма и антилогаритма.

2.2 Логаритам производа

Ако је

$$u = \log_b x \ \wedge \ v = \log_b y \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad x = b^u \ \wedge \ y = b^v,$$

онда је, због једнакости (4)

$$x \cdot y = b^u \cdot b^v = b^{u+v} \quad \Rightarrow \quad \log_b(x \cdot y) = \log_b b^{u+v} = u + v.$$

Одавде је

$$\boxed{\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y}\,. \tag{7}$$

Из ове једнакости се може извести и формула за логаритам факторијела броја. Ако је

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k \quad \Rightarrow \quad \log(n!) = \sum_{k=1}^{n} \log k.$$

(Занимљиво је да је $\log(1 + 2 + 3) = \log(1 \cdot 2 \cdot 3) = \log 1 + \log 2 + \log 3$.)

2.3 Логаритам количника

Слично логаритму производа, ако је

$$u = \log_b x \ \wedge \ v = \log_b y \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad x = b^u \ \wedge \ y = b^v,$$

онда је, због једнакости (4)

$$x/y = b^u/b^v = b^{u-v} \quad \Rightarrow \quad \log_b(x/y) = \log_b b^{u-v} = u - v.$$

Одавде је

$$\boxed{\log_b(x/y) = \log_b x - \log_b y}\,. \tag{8}$$

Из ове једнакости следи

$$\boxed{\log_b(1/x) = -\log_b x}\,. \tag{9}$$

2.4 Логаритам степена броја

Ако је

$$y = x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ пута}},$$

онда, из једнакости за логаритам производа (7), следи да је

$$\log_b y = \log_b(\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ пута}}) = \underbrace{\log_b x + \log_b x + \cdots + \log_b x}_{n \text{ пута}} = n \log_b x,$$

одакле је

$$\boxed{\log_b x^n = n \log_b x}\,. \tag{10}$$

Из ове једнакости, ако ставимо $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$, следи једнакост

$$\boxed{\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_b x}\,. \tag{11}$$

Из претходног се може добити и једнакост

$$\boxed{x^y = b^{y \log_b x}}\,. \tag{12}$$

2.5 Промена основе логаритма

Ако је

$$y = \log_a x \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad x = a^y,$$

онда је

$$\log_b x = \log_b a^y = y \log_b a = \log_a x \cdot \log_b a.$$

Одавде је

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}\,. \tag{13}$$

Из ове једнакости, ако ставимо да је $x = b$, се добија и једнакост

$$\boxed{\log_a b \cdot \log_b a = 1}\,. \tag{14}$$

Из једнакости (4) и (13), ако ставимо да је $a = b^n$, следи једнакост

$$\boxed{\log_{b^n} x = \frac{1}{n} \log_b x}\,. \tag{15}$$

Одавде, ако ставимо да је $n = -1$, следи

$$\boxed{\log_{1/b} x = -\log_b x}\,, \tag{16}$$

а узевши у обзир и једнакост (9) добија се

$$\boxed{\log_{1/b} x = \log_b(1/x)}\,. \tag{17}$$

Треба бити опрезан код коришћења свих ових једнакости, нарочито код степеновања, и увек треба проверити опсег у коме се рачуна. На пример, из једнакости (10), следи $\log x^2 = 2 \log x$, што је исправно за $x > 0$, међутим, $\log x^2 = 2 \log |x|$ за било које $x \neq 0$.

3 Најчешће логаритамске основе

3.1 Основа 10

У инжењерству се најчешће користи логаритам са основом 10, зове се *декадни* или *заједнички* логаритам, и пише се

$$y = \log_{10} x.$$

Понекад се може видети и само

$$y = \log x,$$

без навођења основе, али треба обратити пажњу на контекст. Ако је неки инжењерски текст у питању, нејвероватније се мисли на основу 10.

Декадни логаритам је погодан и када се користи, такозвани *научни* или *инжењерски* запис броја. На пример, *Планкова константа* (Max Planck) износи

$$h = 6{,}62607015 \times 10^{-34}\,\mathrm{J/Hz}$$

која има декадни логаритам

$$\log_{10} h = \log_{10}(6{,}62607015) - 34.$$

У физици се за мерење нивоа сигнала или звука користи јединица *бел* (B), али је чешће у практичној употреби 10 пута мања јединица *децибел* (dB), односно, $1\,\mathrm{B} = 10\,\mathrm{dB}$. Ниво сигнала L, који зависи од односа измерене снаге P и референтне снаге P_0, изражен у децибелима износи

$$L = 10 \log_{10}\left(\frac{P}{P_0}\right)\,\mathrm{dB}.$$

Како се у акустици узима да је референтна снага $P_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W}$, могло би се писати да је ниво звука у децибелима

$$L = 10 \log_{10}(P) - 120.$$

Нормалан говор је око $50\,\mathrm{dB}$, звук мотора млазног авиона при полетању је $150\,\mathrm{dB}$, а смртоносан је звук од $240\,\mathrm{dB}$ и више. Звучни топ Genasys LRAD има ниво звука око $160\,\mathrm{dB}$, што значи да је 10^{11} пута моћнији од говора.

Декадни логаритам се користи и за одређивање јачине земљотреса: $M = \log_{10} I$, или pH вредности: $\mathrm{pH} = -\log_{10}[\mathrm{H}^+]$.

3.2 Основа 2

У информатици се често користи логаритам са основом 2, који се зове *бинарни* логаритам, и пише се

$$y = \log_2 x.$$

Користи се у комбинаторици, као и за одређивање *количине информација*, односно, потребног броја битова меморије за смештање неког податка. Ако се зна да ће у меморију бити уписивани цели бројеви од 0 до n, онда је потребно резервисати

$$bits = \lfloor \log_2(n) \rfloor + 1 \tag{18}$$

битова меморије, где $\lfloor x \rfloor$ представља *највећи сео број који је мањи или једнак* x (изговара се „највеће цело од x“). На пример, ако ће у одређеној меморији највећи број бити милион, онда је за то потребно резервисати

$$bits = \lfloor \log_2(1\,000\,000) \rfloor + 1 = \lfloor 19{,}9315685693 \rfloor + 1 = 19 + 1 = 20$$

битова меморије.

Како су и реални бројеви у меморији представљени као уређени парови бинарних бројева у облику $x = (mantissa, exponent)$, са значењем

$$x = mantissa \times 2^{exponent},$$

бинарни логаритам би био израчунат као

$$\log_2(x) = \log_2(mantissa) + exponent,$$

ако је $mantissa > 0$, иначе је недефинисан.

Бинарни логаритам се користи и у атомској физици. Време *полураспада* $t_{1/2}$ је време потребно да се распадне половина језгара атома неке материје. Ако имамо почетан број језгара N_0 и број језгара N_t након времена t, њихов однос се може представити формулом

$$\frac{N_0}{N_t} = 2^{t/t_{1/2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{t}{t_{1/2}} = \log_2\left(\frac{N_0}{N_t}\right). \tag{19}$$

Ова формула се користи и за одређивање старости стена или фосила.

3.3 Основа е

Ову логаритамску основу је открио Јакоб Бернули (Jacob Bernoulli) када је проучавао *сложену камату* и доказао да *континуална* сложена камата тежи константи

$$\mathbf{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \tag{20}$$

али је Ојлер (Leonhard Euler) одредио њену вредност и дао јој име. Логаритам за ову основу се зове *природни* логаритам (*logarithmus naturalis*) и пише се

$$\log_{\mathbf{e}} x = \ln x.$$

(Изговара се „ел-ен од x“.)

Антилогаритам је *експоненцијална* функција $\mathbf{e}^x = \exp(x)$, која је позната по томе што је то једина функција чији је први извод једнак самој функцији: $\exp'(x) = \exp(x)$. Бројна вредност се може израчунати формулом[(1)]

$$\boxed{\mathbf{e}^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}\,. \tag{21}$$

Ако ставимо да је $x = 1$, бројна вредност основе природног логаритма $\mathbf{e}$ се може одредити

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots \\ &= 2{,}7182818284\,5904523536\,0287471352\,6624977572\,\ldots \end{aligned} \tag{22}$$

са жељеном тачношћу.

[(1)]Како је $\mathbf{e}^0 = 1$, а из формуле (21) се добија $\mathbf{e}^0 = 0^0/0!$ (остали чланови суме су 0), следи да је $0^0 = 0! = 1$, око чега је математички свет веома подељен; програмерски није, $\forall x\colon x^0 = \mathbf{1}$.

4 Бројна вредност логаритма

4.1 Формула

Бројна вредност природног логаритма може бити израчуната помоћу формуле

$$\boxed{\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}} \tag{23}$$

до жељене тачности. Поступак којим се рачуна $y = \ln x$ са тачношћу ε изгледа овако:

$$\boxed{\begin{array}{l} r \leftarrow (x-1)/(x+1); \quad k \leftarrow 1; \quad p \leftarrow 2r; \quad q \leftarrow r^2; \quad a \leftarrow p; \quad y \leftarrow a; \\ \text{понављати док је } |a| > \varepsilon: \\ \qquad k \leftarrow k+2; \quad p \leftarrow p \cdot q; \quad a \leftarrow p/k; \quad y \leftarrow y + a; \end{array}} \tag{24}$$

Овим поступком се може израчунати вредност

$$\begin{aligned} \ln 2 &= \frac{2}{1 \cdot 3^1} + \frac{2}{3 \cdot 3^3} + \frac{2}{5 \cdot 3^5} + \frac{2}{7 \cdot 3^7} + \frac{2}{9 \cdot 3^9} + \cdots \\ &= 0{,}6931471805\,5994530941\,7232121458\,1765680755\ldots \end{aligned} \tag{25}$$

као и вредност

$$\begin{aligned} \ln 10 &= \frac{2}{1 \cdot 9^1} + \frac{2}{3 \cdot 9^3} + \frac{2}{5 \cdot 9^5} + \frac{2}{7 \cdot 9^7} + \frac{2}{9 \cdot 9^9} + \cdots + 3\ln 2 \\ &= 2{,}3025850929\,9404568401\,7991454684\,3642076011\ldots \end{aligned} \tag{26}$$

(Видети задатак 6.4.3 на страни 26.) Помоћу њих се могу израчунати бројне вредности бинарног $\log_2 x = \ln x/\ln 2$, односно, декадног $\log_{10} x = \ln x/\ln 10$ логаритма.

4.2 Верижни разломак

Бројна вредност природног логаритма може бити израчуната и помоћу *верижног разломка*

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \cfrac{x}{1 + \cfrac{1^2 x}{2 - 1x + \cfrac{2^2 x}{3 - 2x + \cfrac{3^2 x}{4 - 3x + \ddots}}}} \\ &= \cfrac{x}{1 + \underset{n=1}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}} \cfrac{n^2 x}{n + 1 - nx}}. \end{aligned} \tag{27}$$

Попут симбола које се користе за суму 'Σ' или производ 'Π', Гаус (Johann Carl Friedrich Gauß) је смислио погодан начин за представљање верижних (*ланчаних*) разломака, где симбол 'K' потиче од немачке речи за *прекинути ланац* (*Kettenbruch*). Израз иза овог симбола показује како изгледа *општи члан* верижног разломка.

Ако помоћу ове формуле израчунамо првих 11 *конвергената* $\ln 2$ као $-\ln(1+x)$, где је $x = -1/2$, добићемо

$$\ln 2 \approx \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{131}{192}, \frac{661}{960}, \frac{1327}{1920}, \frac{1163}{1680}, \frac{148969}{215040}, \frac{447047}{645120}, \frac{44711}{64512}, \frac{983705}{1419264}, \ldots$$

где је последњи разломак тачан на 5 децимала.

4.3 Логаритамске таблице

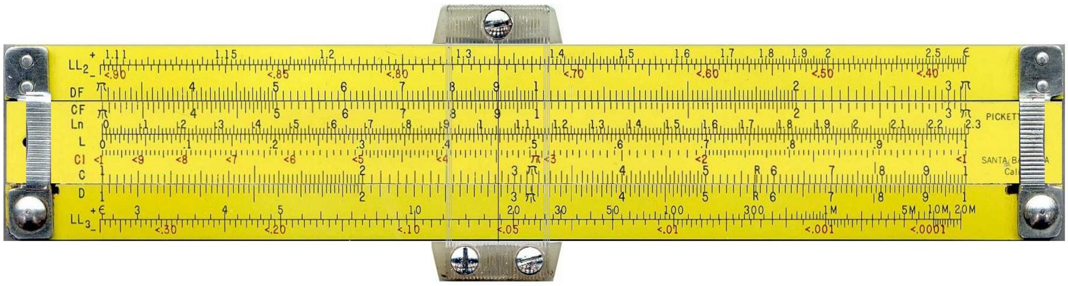
Прве таблице логаритама је 1614. године израчунао шкотски математичар Непер (John Napier of Merchiston), које су садржале логаритме за основу $(1-1/10^7)^{10^7} \approx 1/\mathbf{e}$, са скалираним аргументом и резултатом, иако сам Непер није знао за константу $\mathbf{e}$. Савременим записом би логаритам из Неперових таблица био дефинисан као

$$\mathrm{NapLog}(x) = \log_{1-1/10^7}(x/10^7) \approx 10^7 \log_{1/\mathbf{e}}(x/10^7) = -10^7 \ln(x/10^7).$$

Неколико година касније, 1617. и 1624, енглески математичар Бригс (Henry Briggs) је израчунао таблице декадних логаритама са 14 цифара тачности, које се уз допуне и исправке користе и данас под именом *Бригсове таблице*.

4.4 Логаритмар

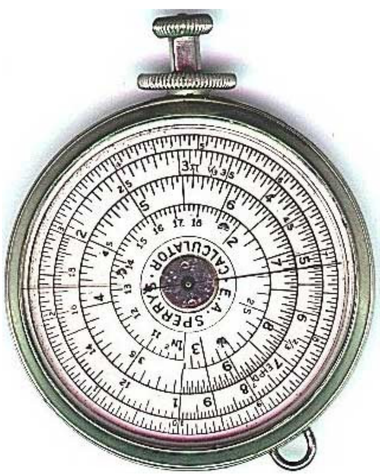
Пре појаве дигитрона, за приближно одређивање бројне вредности логаритма, користила се је аналогна механичка справа са неколико лењира звана *логаритмар*.



Слика 2: Шибер.

Лењири имају подеоке са децималном и логаритамском, а често и са синусном и неком другом скалом. Један од лењира је *клизни*, те отуда популарно име *шибер* (од немачког *Rechenschieber*). Користи се једноставно, померањем клизача и читањем вредности са одговарајуће скале. (Видети задатке 6.4.1 и 6.4.2.)

Постојале су и кружне варијанте, па и џепне, где је џепни сат са логаритмаром и компасом био „iPhone“ XIX и прве половине XX века.



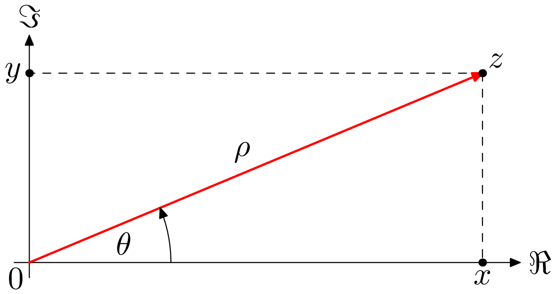
Слика 3: Џепни логаритмар.

Таблице и логаритмари се и данас користе у војсци, као резерва у случају отказивања електронике. Први компјутер ENIAC (Electronic Numerical Integrator And Computer) је направљен 1946. године са наменом да израчуна таблице за војску.

5 Још понешто о логаритму

5.1 Комплексни логаритам

Ако у комплексној равни имамо комплексан број $z \in \mathbb{C}$,



Слика 4: Број z у комплексној равни.

он може бити представљен као

$$\begin{aligned} z &= x + iy && \text{правоугле координате,} \\ &= \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta) && \text{поларне координате.} \end{aligned}$$

Из Ојлерове формуле[2]

$$\boxed{\mathbf{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}\,, \tag{28}$$

следи да је $z = \rho\,\mathbf{e}^{i\theta}$, одакле се, из једнакости (7) и (4), добија

$$\boxed{\ln z = \ln\rho + i\theta}\,. \tag{29}$$

Пошто је $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$, следи да природни логаритам комплексног броја z није дефинисан само за $z = 0$, када је $\ln z = \tilde{\infty}$. Како је $y/x = \tan\theta$, природни логаритам комплексног броја, представљеног правоуглим координатама, може се израчунати

$$\boxed{\ln(x + iy) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}\,, \tag{30}$$

као и

$$\boxed{\exp(x + iy) = \mathbf{e}^{x}\,(\cos y + i\sin y)}\,. \tag{31}$$

И за комплексне бројеве важи једнакост промене основе (13), тако да за два комплексна броја z и w, где је $z \neq 0$, $w \neq 0$ и $w \neq 1$, следи $\log_w z = \ln z/\ln w$, где се $\ln z$ и $\ln w$ рачунају помоћу формуле (29), односно, (30). Тако добијамо

$$\log_{2+i}(3 + 4i) = 2, \qquad \log_i \mathbf{e} = \frac{2}{i\pi}, \qquad \log_2(-4) = 2 + \frac{i\pi}{\ln 2}.$$

Из Ојлерове формуле следи и *најлепша формула у историји математике*, у којој је употребљено 5 најважнијих математичких константи $(0, 1, \pi, \mathbf{e}, i)$

$$\boxed{\mathbf{e}^{i\pi} + 1 = 0}\,, \tag{32}$$

из које, након *логаритмовања*, добијамо занимљиву једнакост

$$\frac{\ln(-1)}{\sqrt{-1}} = \pi.$$

[2] Ојлерова формула се лако доказује из формуле (21) и сличних формула за $\sin x$ и $\cos x$, које се добијају из *Меклореновог реда* (Cailean MacLabhruinn): $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\,(x^n/n!)$, где $f^{(n)}$ представља n-ти извод функције f.

5.2 Кватерниони

Попут скупа комплексних бројева $\mathbb{C}$ који представља објекте у равни, односно, у 2D простору, скуп *кватерниона* $\mathbb{H}$ представља објекте у 3D простору. Први их је описао 1843. године ирски математичар Хамилтон (William Rowan Hamilton), те њему у част и ознака скупа $\mathbb{H}$. У информатици су неизбежни део свега што се дешава у 3D: навигација авиона, подморница, ракета, сателита, небеска и квантна механика, роботика, игре, графика, ...

Кватернион $q \in \mathbb{H}$ може бити представљен као збир

$$q = s + v \tag{33}$$

који се састоји од *скаларног* дела $s \in \mathbb{R}$ и *векторског* дела $v \in \mathbb{R}^3$, где је

$$v = xi + yj + zk \tag{34}$$

3D вектор са координатама (x, y, z), а где су i, j и k јединични вектори по x, y и z оси, за које важи

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \quad ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j. \tag{35}$$

У скупу кватерниона $\mathbb{H}$ за операцију множења, уопштено, не важи *закон комутације*: $ji = -ij = -k$, $kj = -jk = -i$, $ik = -ki = -j$. Ово је логично кад се сетимо да и код *Рубикове коцке* најчешће није свеједно којим редоследом окрећемо странице. Важи *асоцијативност*: $(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$.

Да би $q = s + v$ био *прави* кватернион, мора бити $v \neq 0$, иначе је q обичан реалан број, када се примењују операције и функције из скупа $\mathbb{R}$. Ако одредимо апсолутну вредност кватерниона

$$\lambda = |v| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \rho = |q| = \sqrt{s^2 + \lambda^2}$$

која се зове *норма*, одредимо *јединични вектор* (*unit*) векторског дела кватерниона

$$u = \frac{v}{\lambda},$$

који се зове *версор* и где је по дефиницији[3] $|u| = 1$ и $u^2 = -1$, као и угао оријентације

$$\varphi = \arccos\left(\frac{s}{\rho}\right),$$

можемо добити запис кватерниона

$$q = s + \lambda u = \rho\,(\cos\varphi + u \sin\varphi) = \rho\,\mathbf{e}^{u\varphi}. \tag{36}$$

Из свега овога се може добити

$$\boxed{\ln(q) = \ln\rho + u\varphi} \tag{37}$$

и

$$\boxed{\exp(q) = \mathbf{e}^s\,(\cos\lambda + u \sin\lambda)}\,. \tag{38}$$

Остале операције и функције нису тема овог рада, али сабирање и одузимање је уобичајено, код множења треба обратити пажњу на формулу (35) и комутативност, а реципрочна вредност је $q^{-1} = \bar{q}/\rho^2$, где је $\bar{q} = s - v$, *коњугована* вредност. Тригонометријске и хиперболичне функције се могу изразити помоћу експоненцијалне, а њихове инверзне помоћу логаритамске функције.

[3] У скупу $\mathbb{H}$, $\sqrt{-1}$ има бесконачно решења: сваки кватернион који се налази на *јединичној сфери* $(s = 0 \wedge x^2 + y^2 + z^2 = 1)$ је решење, односно, сваки версор.

5.3 Извод

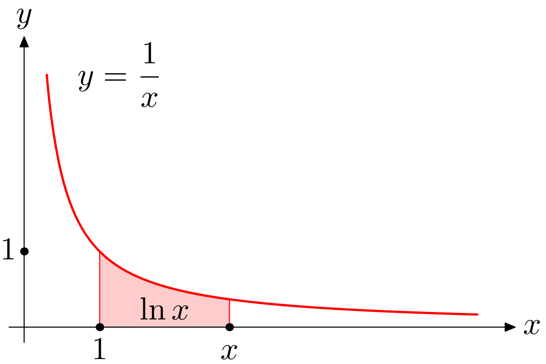
Ако је

$$y = \ln x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x},$$

одакле се, помоћу једнакости (13) и једнакости за извод сложене функције, добија

$$\boxed{y = \log_b(f(x)) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{f'(x)}{f(x)\ln b}}. \tag{39}$$

Површина фигуре испод функције $y = 1/x$ до x-осе, у опсегу од 1 до x, износи $\ln x$. Математички записано: $\int_1^x dx/x = \ln x$.



Слика 5: Геометријско значење $\ln x$.

(На слици је $x = \mathbf{e}$, тако да је површина осенчане фигуре једнака 1.)

5.4 Интеграл

Неодређени интеграл природног логаритма је

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + \text{constant}. \tag{40}$$

5.5 Лимес

Ојлер је доказао да је

$$\ln x = \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) \quad \text{и} \quad \mathbf{e}^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n. \tag{41}$$

5.6 Бенфордов закон

Вероватноћа да *почетне цифре* неке математичке или физичке константе (као и дужине реке, висине планине, броја становника, стања на рачуну, ...), буду ℓ за бројну основу b, прати такозвани *Бенфордов закон* (Frank Benford), и износи

$$P(b, \ell) = \log_b \left(1 + \frac{1}{\ell}\right). \tag{42}$$

На пример, у *Фибоначијевом низу*: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, ..., вероватноћа да прва цифра неког члана низа буде 9 износи $\log_{10}(1 + 1/9) \approx 4{,}58\%$. Ову законитост је открио 1881. године астроном Њуком (Simon Newcomb), када је приметио да су листови логаритамских таблица које је дуго користио најпрљавији на почетку: . (Видети задатак 6.3.8.)

6 Задаци и решења

6.1 Једначине

6.1.1 ФИТ

▷ **Задатак:** Наћи решење једначине 1

$$\log_2(x-2) + \log_4(x-2) + \log_{16}(x-2) = 7.$$

(Задатак са мог пријемног испита на ФИТ „Метрополитан“.)

► **Решење:** Видимо да су основе логаритама степени броја 2, па из једнакости за логаритам степена основе (15) следи

$$\begin{aligned} \log_2(x-2) + \log_{2^2}(x-2) + \log_{2^4}(x-2) &= \\ \log_2(x-2) + \frac{1}{2}\log_2(x-2) + \frac{1}{4}\log_2(x-2) &= \\ \frac{7}{4}\log_2(x-2) &= 7, \end{aligned}$$

односно, после скраћивања,

$$\log_2(x-2) = 4.$$

Одавде је

$$x - 2 = 2^4 = 16 \quad \Rightarrow \quad x = \boxed{18}.$$

6.1.2 Једначина 2

▷ **Задатак:** Реши једначину 2

$$2\log(x) - \log(6-x) = 0.$$

► **Решење:** Да би логаритам у једначини био дефинисан мора бити

$$x > 0 \ \wedge \ 6 - x > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < x < 6.$$

Због једнакости (10) можемо писати

$$\log(x^2) = \log(6-x)$$

одакле следи

$$\begin{aligned} x^2 &= 6 - x \\ x^2 + x - 6 &= 0. \end{aligned}$$

Решавањем[(4)] квадратне једначине

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}, \end{aligned}$$

добијамо решења $x_1 = 2$ и $x_2 = -3$, одакле је јединствено решење

$$x = \boxed{2}.$$

[(4)] У наставку рада, поступак решавања линеарне и квадратне једначине ће бити изостављен.

6.1.3 Збирка 6

▷ **Задатак:** Реши једначину 3

$$\ln(x) = \ln(15-x) - \ln(x+1).$$

▶ **Решење:** Једначина је дефинисана за

$$x > 0 \ \wedge\ 15 - x > 0 \ \wedge\ x + 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < x < 15.$$

Ако запишемо једначину као

$$\ln(x) + \ln(x+1) = \ln(15-x)$$

из једнакости за логаритам производа (7), можемо писати

$$\begin{aligned}\ln(x(x+1)) &= \ln(15-x)\\ \ln(x^2+x) &= \ln(15-x)\\ x^2 + x &= 15 - x\\ x^2 + 2x - 15 &= 0\end{aligned}$$

Решавањем квадратне једначине добијамо 2 решења, $x_1 = 3$ і $x_2 = -5$, али због услова, остаје јединствено

$$x = \boxed{3}.$$

6.1.4 Четири четворке

▷ **Задатак:** Доказати да сваки природан број $n \in \mathbb{N}$, може бити представљен са **4** броја **4**, помоћу логаритамске функције и квадратног корена 4

$$n = \log_{\sqrt{4}/4}\left(\log_4 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{4}}}}_{n \text{ корена}}\right).$$

▶ **Решење:** Како је

$$\frac{\sqrt{4}}{4} = \frac{1}{2} \qquad \text{и} \qquad \underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{4}}}}_{n \text{ корена}} = 4^{(1/2)^n},$$

израз може бити упрошћен

$$\log_{\sqrt{4}/4}\left(\log_4 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{4}}}}_{n \text{ корена}}\right) = \log_{1/2}\left(\log_4 4^{(1/2)^n}\right),$$

где из једнакости за логаритам степена основе (4), следи

$$\begin{aligned}&= \log_{1/2}(1/2)^n\\ &= \boxed{n}.\end{aligned}$$

★ **Додатак:** Давно је у једном часопису постављен сличан задатак: да се са што мање истих бројева, користећи било коју математичку функцију, представи сваки природан број n. Решио га је нобеловац Дирак (Paul Dirac) са 3 броја *2*, чије оригинално решење изгледа

$$-\log_2 \log_2 \sqrt{\cdots n \cdots \sqrt{2}} = -\log_2 \log_2 2^{2^{-n}} = -\log_2 2^{-n} = n. \qquad \square$$

6.1.5 Свеска 7

▷ **Задатак:** Нађи x ако је 5

$$x^{\log x} = 1000x^2.$$

▶ **Решење:** Ако логаритмујемо обе стране добијамо

$$\begin{aligned}\log x^{\log x} &= \log(1000x^2)\\ \log x \log x &= \log 1000 + \log x^2\\ \log^2 x &= 3 + 2\log x,\end{aligned}$$

где, после смене $t = \log x$, добијамо квадратну једначину

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

чија су решења $t_1 = 3$ і $t_2 = -1$, одакле су

$$x_1 = 10^3 = \boxed{1000} \quad \text{и} \quad x_2 = 10^{-1} = \boxed{\frac{1}{10}}.$$

6.1.6 Бесконачни корен

▷ **Задатак:** Одреди вредност 6

$$x = \ln\left(\mathbf{e}\sqrt[2]{\mathbf{e}\sqrt[3]{\mathbf{e}\sqrt[4]{\mathbf{e}\sqrt[5]{\cdots}}}}\right).$$

▶ **Решење:** Како је $\ln \mathbf{e} = 1$ и користећи једнакост за логаритам производа (7) и једнакост за логаритам корена (11), можемо писати

$$\begin{aligned}x &= 1 + \frac{1}{2}\ln\left(\mathbf{e}\sqrt[3]{\mathbf{e}\sqrt[4]{\mathbf{e}\sqrt[5]{\cdots}}}\right)\\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\ln\left(\mathbf{e}\sqrt[4]{\mathbf{e}\sqrt[5]{\cdots}}\right)\right)\\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{4}\ln\left(\mathbf{e}\sqrt[5]{\cdots}\right)\right)\right)\\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{5}\ln(\cdots)\right)\right)\right)\\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} + \cdots\\ &= \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots\end{aligned}$$

Ако погледамо формулу (22) на страни 7, можемо видети да је овај збир једнак

$$x = \boxed{\mathbf{e} - 1},$$

јер из суме за израчунавање $\mathbf{e}$ недостаје *нулти* члан $1/0! = 1$.

6.1.7 Нет 3

▷ **Задатак:** Одреди n^3 ако је 7

$$\log_{5n} 30\sqrt{5} = \log_{4n} 48.$$

▶ **Решење:** Пребацимо логаритме у основу 6, јер је 6 *нзд* за 30 и 48 из задатка

$$\begin{aligned}
\frac{\log_6 30\sqrt{5}}{\log_6 5n} &= \frac{\log_6 48}{\log_6 4n}\\
\frac{\log_6 6 + \log_6 5 + \frac{1}{2}\log_6 5}{\log_6 5 + \log_6 n} &= \frac{\log_6 6 + \log_6 8}{\log_6 4 + \log_6 n}\\
\frac{1 + \frac{3}{2}\log_6 5}{\log_6 5 + \log_6 n} &= \frac{1 + 3\log_6 2}{2\log_6 2 + \log_6 n}.
\end{aligned}$$

Када извршимо смену $n = 6^t$, односно, $t = \log_6 n$ и $u = \log_6 2$ и $v = \log_6 5$, добијамо

$$\begin{aligned}
\frac{1 + \frac{3}{2}v}{v + t} &= \frac{1 + 3u}{2u + t}\\
(1 + \tfrac{3}{2}v)(2u + t) &= (1 + 3u)(v + t)\\
2u + {\color{blue}3uv} + {\color{red}t} + \tfrac{3}{2}vt &= v + {\color{blue}3uv} + {\color{red}t} + 3ut \qquad / {\color{blue}-3uv};\ {\color{red}-t};\ \times 2;\\
4u + 3vt &= 2v + 6ut\\
6ut - 3vt &= 4u - 2v\\
t(6u - 3v) &= 4u - 2v\\
t &= \frac{4u - 2v}{6u - 3v}\\
t &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2u - v}{2u - v}\\
t &= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Одавде је

$$n^3 = 6^{3t} = \boxed{36}.$$

6.1.8 Изумирање

▷ **Задатак:** Нађи n ако је 8

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdots \log_n(n+1) = 10.$$

▶ **Решење:** Ако пребацимо све логаритме у основу 2, добијамо

$$\log_2 3 \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 6}{\log_2 5} \cdots \frac{\log_2(n+1)}{\log_2 n} = 10.$$

Видимо да ће, након *масовног* скраћивања, *изумрети* сви изрази осим

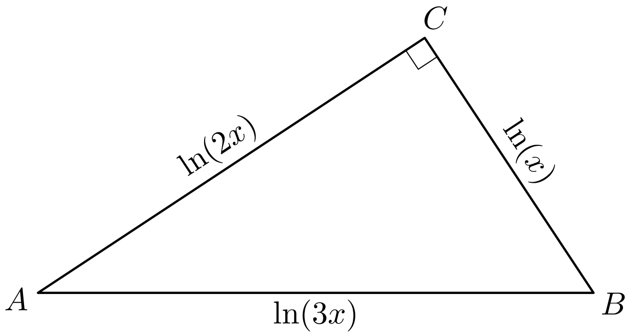
$$\log_2(n+1) = 10,$$

одакле је,

$$n + 1 = 2^{10} = 1024 \quad \Rightarrow \quad n = \boxed{1023}.$$

6.1.9 Питагора

▷ **Задатак:** Одреди x са слике. 9



Слика 6: Правоугли троугао $\triangle ABC$.

(Задатак са Tik-Toka.)

▶ **Решење:** Нађимо најпре решење општег случаја

$$a = \ln(px), \quad b = \ln(qx), \quad c = \ln(rx).$$

Због лакшег писања, извршимо смену

$$t = \ln x, \quad u = \ln p, \quad v = \ln q, \quad w = \ln r,$$

одакле је

$$a = t + u, \quad b = t + v, \quad c = t + w.$$

Из *Питагорине теореме* $a^2 + b^2 = c^2$, следи да је

$$(t+u)^2 + (t+v)^2 = (t+w)^2$$
$$t^2 + 2tu + u^2 + t^2 + 2tv + v^2 = t^2 + 2tw + w^2$$

где, након сређивања, добијамо квадратну једначину

$$t^2 + 2(u+v-w)t + (u^2+v^2-w^2) = 0,$$

чија су решења

$$t_{1,2} = w - u - v \pm \sqrt{2(w-u)(w-v)},$$

али нас занима само позитивно. Када вратимо смену добијамо

$$\ln x = \ln\left(\frac{r}{pq}\right) + \sqrt{2\ln\left(\frac{r}{p}\right)\ln\left(\frac{r}{q}\right)},$$

где је, после антилогаритмовања

$$x = \frac{r}{pq} \cdot \mathbf{e}^{\sqrt{2\ln(r/p)\ln(r/q)}}.$$

Због логаритама испод корена видимо да мора бити $p, q, r > 0$ или $p, q, r < 0$, и $|p|, |q| < |r|$, где ће x имати исти знак као p, q и r.

Када заменимо вредностима са слике: $p = 1$, $q = 2$ и $r = 3$, добијамо да је

$$x = \boxed{\frac{3}{2}\mathbf{e}^{\sqrt{2\ln(3)\ln(3/2)}}} \approx 3{,}85488,$$

а странице троугла су приближно

$$a \approx 1{,}34934, \quad b \approx 2{,}04249, \quad c \approx 2{,}44795.$$

(На слици је $1 =$ ‘————————’.)

6.2 Неједначине

6.2.1 Свеска 11

▷ **Задатак:** Реши неједначину 10

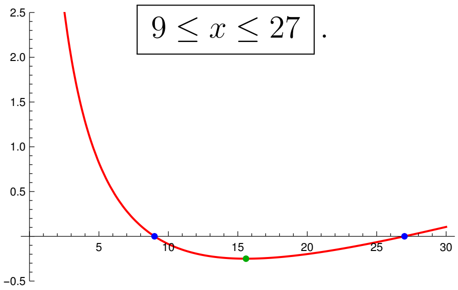
$$\log_3^2 x - 5\log_3 x + 6 \leq 0.$$

▶ **Решење:** Када извршимо смену $t = \log_3 x$, можемо писати да је

$$t^2 - 5t + 6 \leq 0$$

Како су решења квадратне једначине $t_1 = 2$ и $t_2 = 3$, неједначина је задовољена када је $t \in [2, 3]$. Пошто је $x = 3^t$, следи да је неједначина задовољена за $x \in [3^2, 3^3]$, односно,

$$\boxed{9 \leq x \leq 27}.$$



Слика 7: $y = \log_3^2 x - 5\log_3 x + 6$.

★ **Додатак:** Функција има минимум за $t = 5/2$, односно, у тачки $(9\sqrt{3}, -1/4)$.

6.2.2 Свеска 9

▷ **Задатак:** Одреди у којим границама је задовољен услов 11

$$\log_3(x^2 - 4) < \log_3 5.$$

▶ **Решење:** Ако се ослободимо логаритма

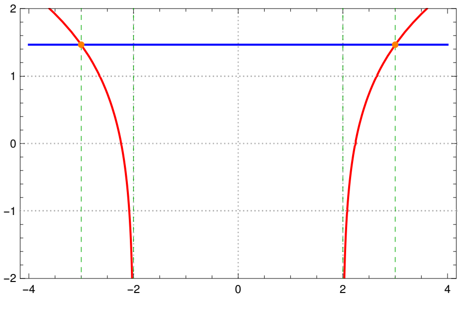
$$\begin{aligned} x^2 - 4 &< 5 \\ x^2 &< 9, \end{aligned}$$

добићемо да је $-3 < x < 3$. Међутим, да би логаритам био дефинисан мора бити

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &> 0 \\ x^2 &> 4, \end{aligned}$$

односно, $x < -2$ или $x > 2$. Одавде је

$$x \in \boxed{(-3, -2) \cup (2, 3)}.$$



Слика 8: $y = \log_3(x^2 - 4)$; $\log_3 5$.

6.2.3 Свеска 10

▷ **Задатак:** Реши неједначину 12

$$\log_5 x \geq \frac{1}{2}\log_5(3x-2).$$

▶ **Решење:** Да би логаритам био дефинисан, видимо да мора бити

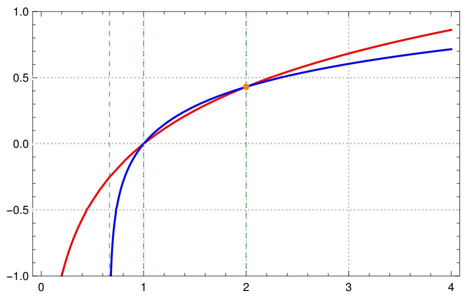
$$3x-2>0 \quad \Rightarrow \quad x>\frac{2}{3}.$$

Ако неједначину помножимо са 2, добијамо

$$\begin{aligned} 2\log_5 x &\geq \log_5(3x-2) \\ \log_5 x^2 &\geq \log_5(3x-2) \\ x^2 &\geq 3x-2 \\ x^2-3x+2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Квадратна једначина има решења $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$, па је решење неједначине

$$x \in \boxed{\left(\frac{2}{3}, 1\right] \cup [2, \infty)}.$$



Слика 9: $y = \log_5 x$; $\frac{1}{2}\log_5(3x-2)$.

6.2.4 Нет 1

▷ **Задатак:** Реши 13

$$\log_{3x+5}(9x^2+8x+8) > 2.$$

▶ **Решење:** Ако антилогаритмујемо обе стране добијамо

$$\begin{aligned} 9x^2+8x+8 &> (3x+5)^2 \\ 9x^2+8x+8 &> 9x^2+30x+25 \\ 8x+8 &> 30x+25, \end{aligned}$$

где је након сређивања

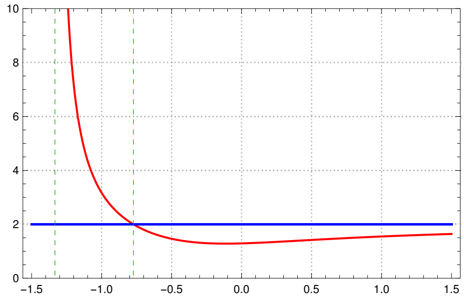
$$x < -\frac{17}{22}$$

Следећи услов је да основа буде већа од 1, то јест

$$\begin{aligned}3x+5&>1\\x&>-\frac{4}{3},\end{aligned}$$

одакле следи решење

$$x\in\boxed{\left(-\frac{4}{3},-\frac{17}{22}\right)}.$$



Слика 10: $y=\log_{3x+5}(9x^2+8x+8)$; 2.

6.2.5 Нет 2

▷ **Задатак:** Наћи вредности које задовољавају неједначину 14

$$\log_7(x+5)>\log_5(x+5).$$

► **Решење:** Пребацимо израз у заједнички логаритам

$$\begin{aligned}\frac{\log(x+5)}{\log 7}&>\frac{\log(x+5)}{\log 5}\\\log 5\log(x+5)&>\log 7\log(x+5).\end{aligned}$$

Како је $\log 5<\log 7$ и позитивни су, да би услов важио, мора бити

$$\log(x+5)<0,$$

одакле је

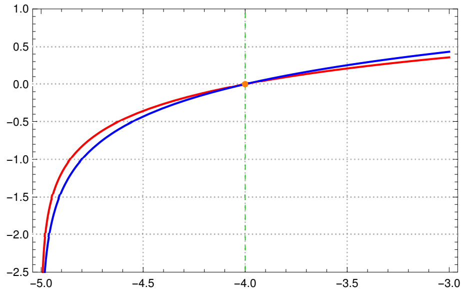
$$\begin{aligned}x+5&<1\\x&<-4,\end{aligned}$$

а да би логаритам био дефинисан мора да важи и

$$\begin{aligned}x+5&>0\\x&>-5,\end{aligned}$$

одакле је решење

$$x\in\boxed{(-5,-4)}.$$



Слика 11: $y = \log_7(x+5)$; $\log_5(x+5)$.

6.2.6 Нет 6

▷ **Задатак:** Које вредности задовољавају услов 15

$$\log_2(x+1) > \log_4 x^2?$$

▶ **Решење:** Ако леву страну запишемо као

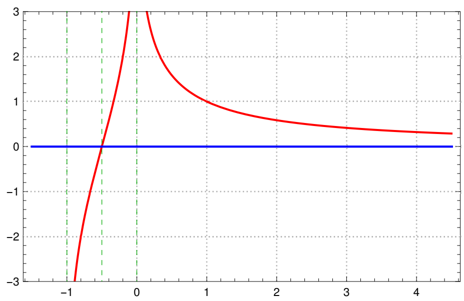
$$2 \cdot \frac{1}{2}\log_2(x+1) = \log_{2^2}(x+1)^2$$

што следи из једнакости (15) и (10), добићемо

$$\begin{aligned} \log_4(x+1)^2 &> \log_4 x^2 \\ (x+1)^2 &> x^2 \\ x^2+2x+1 &> x^2 \\ 2x+1 &> 0 \\ x &> -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Како мора да важи $x > -1$ и $x \neq 0$, добијамо коначно решење

$$x \in \boxed{\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (0, \infty)}.$$



Слика 12: $y = \log_2(x+1) - \log_4 x^2$.

⋆ **Додатак:** Као што је на страни 5 напоменуто, да смо $\log_4 x^2$ једноставно представили као $\log_{2^2} x^2 = \log_2 x$, добили бисмо нетачно решење. Исправно би било $\log_4 x^2 = \log_2 |x|$, када бисмо посебно гледали 2 случаја: за $x > 0$ и за $x < 0$.

6.2.7 Границе

▷ **Задатак:** Докажи да важи неједнакост 16

$$\boxed{1-\frac{1}{x}\leq \ln x\leq x-1}, \tag{43}$$

којом се дефинишу *доња* и *горња* граница природног логаритма.

► **Решење:** Погледајмо прво десни део неједнакости. Ако дефинишемо функцију

$$y=\ln x-(x-1),$$

потребно је да докажемо да је $y\leq 0$ за свако $x>0$. Интуитивно је јасно да тврђење важи, јер $\ln x$ много спорије расте од $x-1$, и формални доказ ће нам се заснивати на томе.

Први извод функције је

$$y'=\frac{1}{x}-1,$$

који има јединствену нулу $y'=0$ за $x=1$, где је и $y=0$. Како је други извод

$$y''=-\frac{1}{x^2}<0,$$

увек негативан, то значи да функција y нема *превојних тачака* и да тачка $(1,0)$ представља *максимум* функције y, одакле је $y\leq 0$, односно,

$$\boxed{\ln x\leq x-1}.$$

Ако у ову неједнакост уместо x ставимо $1/x$, можемо писати

$$\ln(1/x)\leq \frac{1}{x}-1$$

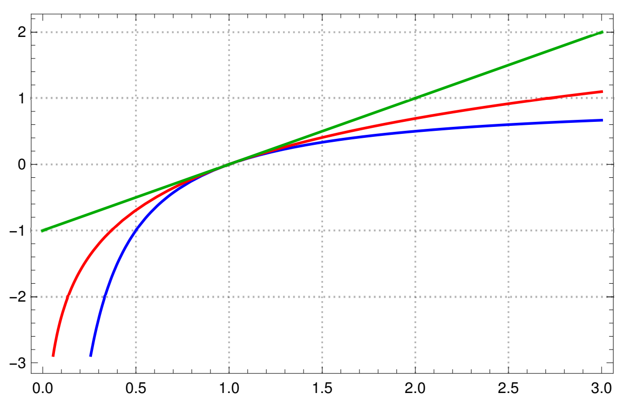
$$-\ln x\leq \frac{1}{x}-1,$$

где, када изрази замене стране и знак, добијамо

$$\boxed{1-\frac{1}{x}\leq \ln x},$$

што представља леви део неједнакости из задатка. □

★ **Додатак:** Све три функције из неједнакости се *додирују* у тачки $(1,0)$, што значи да у тој тачки све три имају исту *тангенту*, односно, исти први извод $y'(1)=1$; иначе би се секле и неједнакост не би важила.



Слика 13: $y=1-1/x$; $\ln x$; $x-1$.

6.3 Кратки примери

6.3.1 Земљотрес

▷ **Задатак:** Магнитуда земљотреса M по *Рихтеровој скали* у епицентру зависи логаритамски од интензитета земљотреса I 17

$$M = \log_{10} I.$$

У августу 2009, јапанско острво Хоншу је погодио земљотрес магнитуде $M_1 = 6{,}1$ по Рихтеру, а у марту 2011, разарајући земљотрес који је био око 800 пута јачи од првог. Колико степени по Рихтеру је имао други? (Користи логаритамске таблице или логаритмар.)

▶ **Решење:** $M_2 = M_1 + \log_{10} 800 \approx 6{,}1 + 2{,}9 = \boxed{9{,}0}$ степени Рихтера.

6.3.2 Децималне цифре

▷ **Задатак:** Колико децималних цифара d има 128-битна променљива? 18

▶ **Решење:** $d = \lfloor \log_{10} 2^{128} \rfloor + 1 = \lfloor 128 \log_{10} 2 \rfloor + 1 = \lfloor 38{,}53184 \rfloor + 1 = 38 + 1 = \boxed{39}$.

6.3.3 Полураспад јода

▷ **Задатак:** Ако имамо 63 g изотопа јода ^{131}I, а знамо да смо пре тачно 11 дана имали 163 g, које је време полураспада овог изотопа? (Користи природни логаритам.) 19

▶ **Решење:** Из формуле (19) на страни 7, следи да је време полураспада

$$t_{1/2} = \frac{t}{\log_2(m_0/m_t)} = \frac{t \ln 2}{\ln(m_0/m_t)} = \frac{11 \ln 2}{\ln(163/63)} \approx \boxed{8{,}02} \text{ дана.}$$

6.3.4 Геометријски низ

▷ **Задатак:** За $0 \le x < 1$, упростити израз 20

$$y = \log(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots).$$

▶ **Решење:** Како је збир бесконачног геометријског низа[5]

$$s = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x},$$

може се писати

$$y = \log\left(\frac{1}{1-x}\right),$$

где из једнакости за логаритам реципрочне вредности (9), следи

$$= \boxed{-\log(1-x)}.$$

[5] **Доказ:** $s = 1 + x \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots) = 1 + x \cdot s$, одакле је $s - x \cdot s = 1$, односно, $s \cdot (1-x) = 1$, следи да је $s = 1/(1-x)$. □

6.3.5 Извод

▷ **Задатак:** Одреди извод функције $f(\alpha) = \ln \operatorname{sinc} \alpha$, где је $\operatorname{sinc} \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\alpha}$. 21

▶ **Решење:** Помоћу једнакости (8) разложимо функцију на

$$f(\alpha) = \ln \sin \alpha - \ln \alpha,$$

а како је извод $\sin \alpha$ једнак $\cos \alpha$ и из једнакости (39) за извод логаритма функције, следи да је

$$f'(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} = \boxed{\cot \alpha - \frac{1}{\alpha}}.$$

6.3.6 i на i

▷ **Задатак:** Одреди вредност i^i где је $i = \sqrt{-1}$, *имагинарна јединица.* 22

▶ **Решење:** Како у комплексној равни i има поларне координате $\rho = 1$ i $\theta = \pi/2$, ако га представимо Ојлеровом формулом као $i = \mathbf{e}^{i\pi/2}$ и из једнакости (12) и (4), следи да је

$$i^i = \mathbf{e}^{i \ln i} = \mathbf{e}^{i \ln \mathbf{e}^{i\pi/2}} = \mathbf{e}^{i^2 \pi/2} = \boxed{\mathbf{e}^{-\pi/2}} \approx 0{,}20788$$

реалан број.

6.3.7 $\ln(-z)$

▷ **Задатак:** У скупу комплексних бројева $\mathbb{C}$, ако знамо $\ln z$, колико је $\ln(-z)$? 23

▶ **Решење:** Како је у комплексној равни $-z$ једнако z заротирано око координатног почетка за угао од $180° = \pi$, добијамо

$$\ln(-z) = \boxed{\ln z + i\pi}.$$

Ако проверимо, из Ојлерове једнакости (32), добијамо

$$\mathbf{e}^{\ln(-z)} = \mathbf{e}^{\ln z + i\pi} = \mathbf{e}^{\ln z} \cdot \mathbf{e}^{i\pi} = z \cdot (-1) = -z.$$

★ **Додатак:** Хммм ..., трик са ротацијом није баш потпуно тачан: добили бисмо $-z$ и за угао $-\pi$, па би било $\ln(-z) = \ln z - i\pi$, што је такође тачно; у ствари, тачно је за било који угао $\pi + 2k\pi$ где је $k \in \mathbb{Z}$ цео број. Одавде би следило да је

$$\ln(-z) = \ln z + i(\pi + 2k\pi), \ \ k \in \mathbb{Z}.$$

И сама формула (29), $\ln z = \ln \rho + i\theta$, представља само *главну грану* комплексног логаритма, који је некаква врста 4D спирале. Потпуна формула би била

$$\boxed{\ln z = \ln \rho + i(\theta + 2k\pi), \ \ k \in \mathbb{Z}}. \tag{44}$$

6.3.8 Прво, па 1

▷ **Задатак:** Колики проценат цена *од игле до локомотиве* почиње цифром 1? 24

▶ **Решење:** Из формуле (42) са стране 12, следи да је $P(10, 1) = \log_{10} 2 \approx \boxed{30\%}$.

★ **Додатак:** У филму *Рачуновођа* (*The Accountant*), главни лик (Ben Affleс) открива да су финансијски извештаји преправљани, јер увиђа да износи не прате ово правило.

6.4 Ручни рад

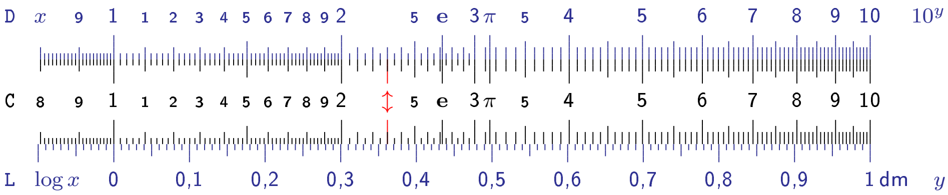
6.4.1 Аналогни степен

▷ **Задатак:** Одреди логаритмаром приближну вредност $z = 2{,}3^{1{,}7}$. 25

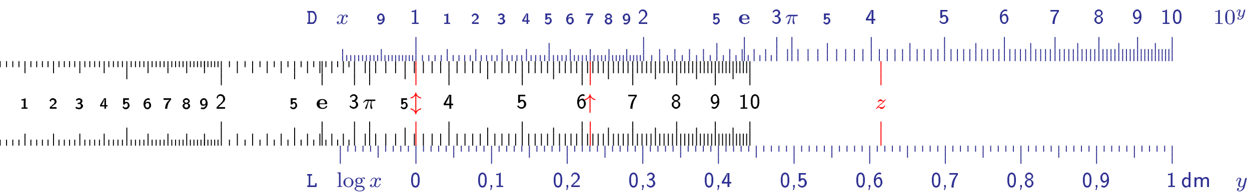
▶ **Решење:** Помоћу једнакости (12) представимо

$$z = 2{,}3^{1{,}7} = 10^{1{,}7\cdot\log(2{,}3)}.$$

Прво одређујемо вредност $\log(2{,}3)$ тако што за $x = 2{,}3$ читамо испод вредност $\log x$. Налазимо да је $\log(2{,}3) \approx 0{,}362$ (види нит обележену са '↕').



Након тога, ту вредност на клизачу поравнамо са $x = 1$. Како на клизачу не постоји 0,362, поставићемо на 3,62, с тим што ћемо резултат поделити са 10. Сада, за $x = 1{,}7$ читамо вредност на клизачу испод (↑)



и налазимо да је око 6,15, што значи да је $1{,}7 \cdot \log(2{,}3) \approx 0{,}615$. Потом, за $y = 0{,}615$ читамо вредност 10^y и налазимо да је око 4,12 што је и решење

$$z = 2{,}3^{1{,}7} \approx \boxed{4{,}12},$$

а тачна вредност је $z = 4{,}120380\ldots$

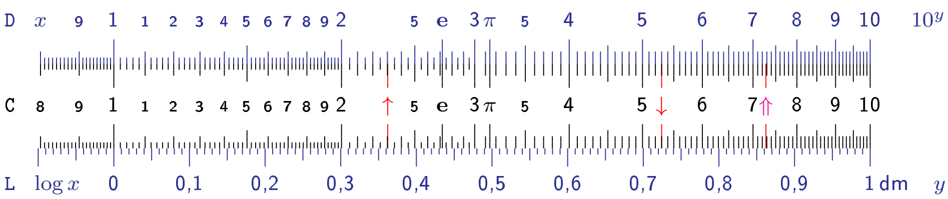
6.4.2 Аналогни квадратни корен

▷ **Задатак:** Објасни начин за одређивање вредности $\sqrt{x}$ логаритмаром. 26

▶ **Решење:** Уз мало вежбе, квадратни корен можемо директно читати са логаритмара ако *у глави* извршимо дељење са 2 и, по потреби, сабирање са 0,5 што је врло једноставно јер се ради о бројевима између 0 и 1 са највише 3 децимале. Како је

$$\sqrt{x} = 10^{\frac{1}{2}\log x},$$

потребно је прочитати вредност $\log x$, а онда, за двоструко мању вредност од ње, прочитати вредност 10^y. На пример, за израчунавање вредности $\sqrt{5{,}3}$, читамо да је $\log(5{,}3) \approx 0{,}724$ (↓), потом, за $y = 0{,}724/2 = 0{,}362$ (↑), читамо вредност 10^y и добијамо $\sqrt{5{,}3} \approx 2{,}3$ $(2{,}3^2 = 5{,}29)$. За $\sqrt{53}$ треба у y додати још 0,5 тако да ће бити $y = 0{,}362 + 0{,}5 = 0{,}862$ (⇑), одакле је $\sqrt{53} \approx 7{,}28$ $(7{,}28^2 = 52{,}9984)$.



Наравно, $\sqrt{530}$ се рачуна као $10\sqrt{5{,}3}$, или $\sqrt{0{,}53} = \frac{1}{10}\sqrt{53}$.

6.4.3 ln 3

▷ **Задатак:** У част Непера и Бригса, помоћу поступка (24) са стране 8, израчунај *пешке* приближну вредност $\ln 3$ у 5 корака. За упоређивање, тачна вредност је

$$\ln 3 = 1{,}0986122886\,6810969139\,5245236922\,5257046475\ \ldots$$

▶ **Решење:** За $x = 3$ биће $r = (x-1)/(x+1) = 1/2$. У нултом кораку постављамо почетне вредности:

Корак *0.* $\quad k = 1, \quad p = 2r = 1, \quad q = r^2 = 1/4, \quad a = p = 1, \quad y = a = 1.$

Следе кораци итерације — повећамо k за 2, помножимо p са q, члан суме a постаје p/k, кога додајемо у резултат y:

Корак *1.* $\quad k = 3, \quad p = 1/4, \quad a = 1/12, \quad y = 13/12;$
Корак *2.* $\quad k = 5, \quad p = 1/16, \quad a = 1/80, \quad y = 263/240;$
Корак *3.* $\quad k = 7, \quad p = 1/64, \quad a = 1/448, \quad y = 7379/6720;$
Корак *4.* $\quad k = 9, \quad p = 1/256, \quad a = 1/2304, \quad y = 88583/80640;$
Корак *5.* $\quad k = 11, \quad p = 1/1024, \quad a = 1/11264, \quad y = 3897967/3548160.$

Резултат је

$$\ln 3 \approx \frac{3897967}{3548160} = \boxed{1{,}098588\ldots},$$

што није лоше за само 5 корака, јер је апсолутна грешка око $2{,}4 \times 10^{-5}$. Али, ...

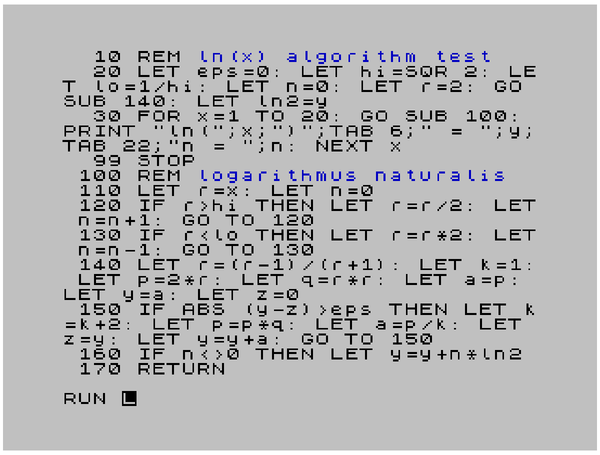
★ **Додатак:** Ако већ имамо прецизно израчунату вредност $\ln 2$, онда је боље рачунати $\ln 3$ као $\ln(3/4) + 2\ln 2$, јер ће, уместо $r = 1/2$, бити $r = (3/4-1)/(3/4+1) = -1/7$, односно, уместо $q = 1/4$, биће $q = 1/49$, што доводи до много бржег израчунавања. У истом броју корака бисмо добили

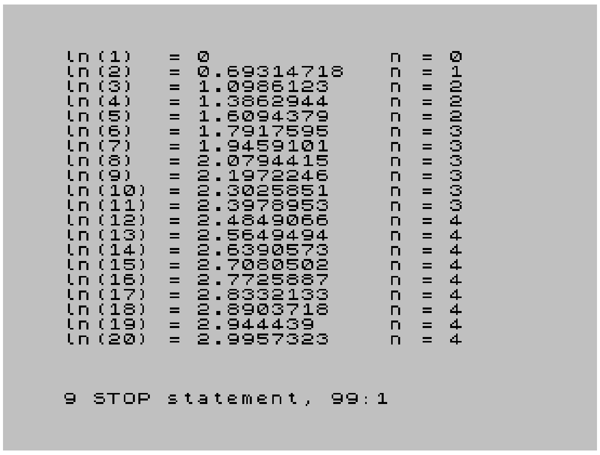
$$\ln\frac{3}{4} \approx -\frac{2}{7}, -\frac{296}{1029}, -\frac{72526}{252105}, -\frac{24876448}{86472015}, -\frac{522405418}{1815912315}, -\frac{281576520392}{978776737785},$$

где последњи разломак има грешку од око $1{,}6 \times 10^{-12}$, што је више од двоструко тачних цифара. Када му (са стране 8) додамо $2\ln 2$, добићемо

$$\ln 3 \approx 2\ln 2 - \frac{281576520392}{978776737785} = \underbrace{1{,}0986122886}_{\text{12 тачних цифара}}6972615081\ \ldots$$

Уопштено, овакво рачунање је најбрже ако рачунамо $\ln x = \ln(x/2^n) + n\ln 2$, где бирамо n такво да $x/2^n$ буде што ближе 1, односно, да q буде најмање могуће. Овај поступак се зове *нормализација мантисе* за основу 2 (види програм).





Слика 14: ZX Spectrum BASIC програм.

7 Закључак

Ко би рекао да логаритам може бити оволико забаван?

Хтео бих, на крају, да се захвалим својим професорима на пренетом знању и показаном разумевању и стрпљењу у протекле четири године, а посебно професору математике Ненаду Тотићу, без кога овај рад не би могао бити написан.

И мами и тати. ♡

— Лука С. Нешић, Ниш, недеља, 08. јун 2025.

8 Одреднице

8.1 Литература

[*1*] Larousse: „Математика“, *Општа енциклопедија* (1967)

[*2*] Небојша Икодиновић, Слађана Димитријевић, Сузана Алексић: „Уџбеник са збирком задатака за 2. разред гимназије“, *Математика 2* (2019)

[*3*] Вене Богославов: „Збирка решених задатака из математике 2“, (2008–2011)

[*4*] Марјан М. Матејић, Лидија В. Стефановић, Бранислав М. Ранђеловић, Игор Ж. Миловановић: „Комплети задатака за пријемни испит“, *Математика* (2011)

[*5*] Раде Николић: „Задаци за пријемни испит из математике на Факултет информационих технологија“, (2020)

[*6*] Milton Abramowitz, Irene Stegun: „Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables“, *Applied Mathematics* (1964)

[*7*] Градимир В. Миловановић, Ђорђе Р. Ђорђевић: „Програмирање нумеричких метода“, (1981)

[*8*] Donald E. Knuth: „Seminumerical Algorithms“, volume 2, *The Art of Computer Programming* (1968)

[*9*] Драгољуб Васић, Вене Богославов, Глиша Нешковић: „Логаритамске таблице“, (2008)

[*10*] Henry Briggs: „Arithmetica logarithmica“, (1624)

[*11*] Donald E. Knuth: „The TEXbook“, *Computers and Typesetting* (1996)

[*12*] John D. Hobby: „User's manual“, *METAPOST* (2024)

8.2 Софтвер

[*1*] Mathematica — Wolfram Research

[*2*] Visual Studio Code (Integrated Development Environment) — Microsoft

[*3*] ZX BASIC (programming language) — Sinclair Research Ltd.

[*4*] **Pascal** (programming language) — Niklaus Wirth

[*5*] GO (programming language) — Google

[*6*] **Python** (programming language) — Python Software Foundation

[*7*] METAPOST (PostScript programming language)— John D. Hobby

[*8*] TEX (typesetting system) — Donald E. Knuth

[*9*] LATEX (TEX macros) — Leslie Lamport

[*10*] AMS-TEX (TEX macros) — American Mathematical Society

8.3 Линкови

[1] GitHub — Лука С. Нешић — Матурски рад
https://github.com/Nasumica/LukaMaturski-cyr/

[2] Wikipedia — Logarithm
https://en.wikipedia.org/wiki/Logarithm

[3] Wolfram MathWorld — Logarithm
https://mathworld.wolfram.com/Logarithm.html

[4] Wolfram MathWorld — Antilogarithm
https://mathworld.wolfram.com/Antilogarithm.html

[5] Wolfram Language & System Documentation Center — Logarithm
https://reference.wolfram.com/language/ref/Log.html

[6] WolframAlpha — Computational Intelligence
https://www.wolframalpha.com/

[7] A reconstruction of the tables of Briggs' *Arithmetica logarithmica* (1624)
https://inria.hal.science/inria-00543939/PDF/briggs1624doc.pdf

[8] Wikipedia — Benford's law
https://en.wikipedia.org/wiki/Benford's_law

[9] IMDb — The Accountant (2016): 7,3/10
https://www.imdb.com/title/tt2140479/

[10] Wikipedia — Quaternion
https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion

[11] Wolfram Language & System Documentation Center — Quaternions Package
https://reference.wolfram.com/language/Quaternions/tutorial/Quaternions.html

[12] YouTube — Log Tables — Numberphile
https://www.youtube.com/watch?v=VRzH4xB0GdM

[13] YouTube — The iPhone of Slide Rules — Numberphile
https://www.youtube.com/watch?v=xRpR1rmPbJE

[14] YouTube — The Four 4s — Numberphile
https://www.youtube.com/watch?v=Noo4lN-vSvw

[15] YouTube — Fantastic Quaternions — Numberphile
https://www.youtube.com/watch?v=3BR8tK-LuB0

[16] GitHub — Србислав Д. Нешић — Numerical recipes in Pascal
https://github.com/Nasumica/Wirth/

9 Индекс

Ово је азбучни списак кључних речи и најбитнијих појмова из овог рада. Поред сваког појма, *искошеним цифрама* су исписани бројеви страна на којима се тај појам налази. Наравно, нису приказане све стране, већ само где се налази дефиниција тог појма или где је битна његова употреба.

Код верзије документа у електронском облику ради *hyperlink* до наведене стране, као и за све остале одреднице у раду. За преузимање документа потребно је скенирати QR код који се налази на задњој корици рада.