Лука Нешић, IV/6 Ненад Тотић

Гимназија „Бора Станковић“
Ниш, Србија

МАТУРСКИ РАД

Предмет: Математика

Тема: Логаритам

једначине и неједначине

Ученик:
Лука Нешић, IV/6

Професор:
Ненад Тотић

2025.

Садржај

1 Увод **3**
1.1 Дефиниција логаритма . . . 3
1.2 Ток и график функције . . . 3
1.3 Антилогаритам . . . 3

2 Логаритамске једнакости **4**
2.1 Логаритам степена основе . . . 4
2.2 Логаритам производа . . . 4
2.3 Логаритам количника . . . 4
2.4 Логаритам степена броја . . . 5
2.5 Промена основе логаритма . . . 5

3 Најчешће логаритамске основе **6**
3.1 Основа 10 . . . 6
3.2 Основа 2 . . . 6
3.3 Основа $\mathbf{e}$ . . . 7

4 Бројна вредност логаритма **8**
4.1 Формула . . . 8
4.2 Верижни разломак . . . 8
4.3 Логаритамске таблице . . . 9
4.4 Логаритмар . . . 9

5 Разно **10**
5.1 Комплексни логаритам . . . 10
5.2 Кватерниони . . . 11
5.3 Извод . . . 12
5.4 Интеграл . . . 12
5.5 Лимес . . . 12
5.6 Бенфордов закон . . . 12

6 Задаци и решења **13**
6.1 Једначине . . . 13
6.1.1 ФИТ . . . 13
6.1.2 Једначина 2 . . . 13
6.1.3 Jjjj (yafe) . . . 14
6.1.4 Četiri četvorke . . . 14
6.1.5 Sveska 7 . . . 15
6.1.6 Beskonačni koren . . . 15
6.1.7 Нет 3 . . . 16
6.1.8 Изумирање . . . 16
6.1.9 Питагора . . . 17
6.2 Неједначине . . . 18
6.2.1 Sveska 11 . . . 18
6.2.2 Sveska 9 . . . 18
6.2.3 Sveska 10 . . . 19

6.2.4 Net 1 19
6.2.5 Net 2 20
6.2.6 Net 6 21
6.2.7 Границе 22
6.3 Кратки примери 23
6.3.1 Земљотрес 23
6.3.2 Децималне цифре 23
6.3.3 Полураспад јода 23
6.3.4 Геометријски низ 23
6.3.5 Извод 24
6.3.6 i на i 24
6.3.7 $\ln(-z)$ 24
6.3.8 Прво, па 1 24
6.4 Ручни рад 25
6.4.1 Аналогни степен 25
6.4.2 Аналогни квадратни корен 25
6.4.3 ln 3 26

7 Одреднице 27
7.1 Литература 27
7.2 Софтвер 27
7.3 Линкови 28

1 Увод

Овај рад се бави *логаритамском функцијом*, једном од најважнијох функција у математици. Због своје важности, заједно са експоненцијалном, тригонометријским и њима инверзним функцијама, спада у групу *елементарних* функција. Описане су њене особине и дати пример њене употребе, као и задаци са решењама (укупно 27).

Сама реч *логаритам* потиче од грчких речи $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$ (*логос*) и $\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$ (*аритмос*), са значењем „одговарајући број“.

1.1 Дефиниција логаритма

Функција

$$\boxed{y = \log_b x} \tag{1}$$

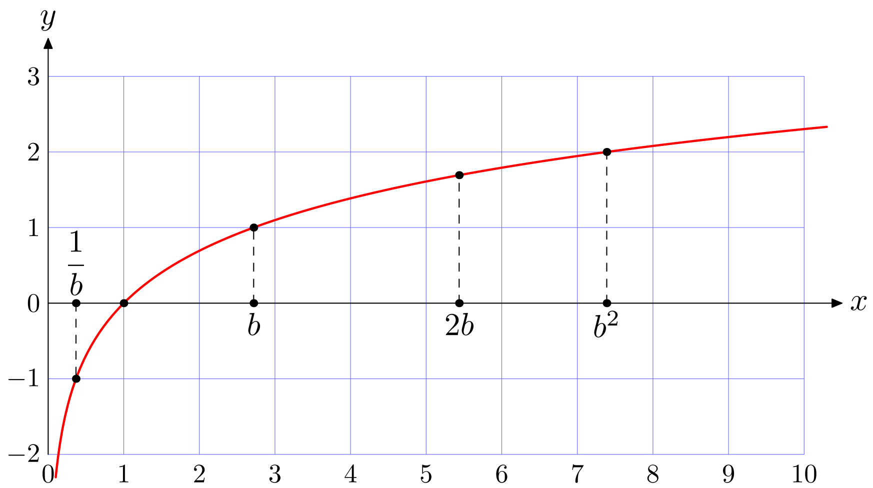
је решење по y једначине

$$x = b^y,$$

где је b *основа* (*база*) логаритма, а x *аргумент*. (Изговара се „y је једнако логаритам од x за основу b“ или краће „y је логаритам b од x“.)

1.2 Ток и график функције

Функција је у скупу реалних бројева $\mathbb{R}$ дефинисана за $x > 0$ и $b > 0 \wedge b \neq 1$. Функција је *монотона*: за $b > 1$ функција је *растућа*, док за $b < 1$ функција је *опадајуће*. Због тога важи *бијекција*: $\log_b u = \log_b v \Leftrightarrow u = v$. Функција има једну *нулу*, увек за $x = 1$. Када $x \to 0$, онда $y \to -\infty$ за $b > 1$, односно, $y \to +\infty$ за $b < 1$.



Слика 1: График логаритамске функције $y = \log_b x$.

1.3 Антилогаритам

Инверзна функција логаритму је обично степеновање основе логаритма аргументом и зове се *антилогаритам*

$$\boxed{\operatorname{antilog}_b x = \log_b^{-1} x = b^x}. \tag{2}$$

Из саме дефиниције важи

$$\boxed{\log_b(\operatorname{antilog}_b x) = \operatorname{antilog}_b(\log_b x) = x}. \tag{3}$$

2 Логаритамске једнакости

За логаритамску функцију важе разне *једнакости* које се користе за упрошћивање и прилагођавање израза приликом решавања проблема и задатака.

2.1 Логаритам степена основе

По самој дефиницији логаритма, ако је $x = b^a$, онда је

$$\boxed{\log_b b^a = a}. \tag{4}$$

Ако ставимо да је $1 = b^0$, односно, $b = b^1$, добијамо да је

$$\boxed{\log_b 1 = 0} \qquad \text{и} \qquad \boxed{\log_b b = 1}. \tag{5}$$

Такође је битна једнакост

$$\boxed{b^{\log_b x} = x} \tag{6}$$

која произилази из саме дефиниције логаритма и антилогаритма.

2.2 Логаритам производа

Ако је

$$u = \log_b x \ \wedge \ v = \log_b y \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad x = b^u \ \wedge \ y = b^v,$$

онда је, због једнакости (4)

$$x \cdot y = b^u b^v = b^{u+v} \quad \Rightarrow \quad \log_b(x \cdot y) = \log_b b^{u+v} = u + v.$$

Одавде је

$$\boxed{\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y}. \tag{7}$$

Из ове једнакости се може извести и формула за логаритам факторијела броја. Ако је

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k \quad \Rightarrow \quad \log(n!) = \sum_{k=1}^{n} \log k.$$

(Занимљиво је да је $\log(1 \cdot 2 \cdot 3) = \log 1 + \log 2 + \log 3 = \log(1 + 2 + 3)$.)

2.3 Логаритам количника

Слично логаритму производа, ако је

$$u = \log_b x \ \wedge \ v = \log_b y \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad x = b^u \ \wedge \ y = b^v,$$

онда је, због једнакости (4)

$$x/y = b^u b^{-v} = b^{u-v} \quad \Rightarrow \quad \log_b(x/y) = \log_b b^{u-v} = u - v.$$

Одавде је

$$\boxed{\log_b(x/y) = \log_b x - \log_b y}. \tag{8}$$

Из ове једнакости следи

$$\boxed{\log_b(1/x) = -\log_b x}. \tag{9}$$

2.4 Логаритам степена броја

Ако је

$$y = x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ пута}},$$

онда, из једнакости за логаритам производа (7), следи да је

$$\log_b y = \log_b(\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ пута}}) = \underbrace{\log_b x + \log_b x + \cdots + \log_b x}_{n \text{ пута}} = n \log_b x,$$

одакле је

$$\boxed{\log_b x^n = n \log_b x}. \tag{10}$$

Из ове једнакости следи једнакост

$$\boxed{\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_b x}, \tag{11}$$

као и једнакост

$$\boxed{x^y = b^{y \log_b x}}. \tag{12}$$

2.5 Промена основе логаритма

Ако је

$$y = \log_a x \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad x = a^y,$$

онда је

$$\log_b x = \log_b a^y = y \log_b a = \log_a x \cdot \log_b a.$$

Одавде је

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}. \tag{13}$$

Из ове једнакости, ако ставимо да је $x = b$, се добија и једнакост

$$\boxed{\log_a b \cdot \log_b a = 1}. \tag{14}$$

Из једнакости (4) и (13), ако ставимо да је $a = b^n$, следи једнакост

$$\boxed{\log_{b^n} x = \frac{1}{n} \log_b x}. \tag{15}$$

Одавде, ако ставимо да је $n = -1$, следи

$$\boxed{\log_{1/b} x = -\log_b x}, \tag{16}$$

а узевши у обзир и једнакост (9) добија се

$$\boxed{\log_{1/b} x = \log_b(1/x)}. \tag{17}$$

Треба бити опрезан код коришћења свих ових једнакости, нарочито код степеновања, и увек треба проверити опсег у коме се рачуна. На пример, из једнакости (10), следи $\log x^2 = 2 \log x$, што је исправно за $x > 0$, међутим, $\log x^2 = 2 \log |x|$ за било које $x \neq 0$.

3 Најчешће логаритамске основе

3.1 Основа 10

У инжењерству се најчешће користи логаритам са основом 10, зове се *декадни* или *заједнички* логаритам, и пише се

$$y = \log_{10} x.$$

Понекад се може видети и само

$$y = \log x,$$

без навођења основе, али треба обратити пажњу на контекст. Ако је неки инжењерски текст у питању, највероватније се мисли на основу 10.

Декадни логаритам је погодан и када се користи, такозвани *научни* или *инжењерски* запис броја. На пример, *Планкова константа* (Max Planck) износи

$$h = 6{,}62607015 \times 10^{-34}\,\mathrm{J/Hz}$$

која има декадни логаритам

$$\log_{10} h = \log_{10}(6{,}62607015) - 34.$$

У физици се за мерење нивоа сигнала или звука користи јединица *бел* (B), али је чешће у практичној употреби 10 пута мања јединица *децибел* (dB), односно, $1\,\mathrm{B} = 10\,\mathrm{dB}$. Ниво сигнала L, који зависи од односа измерене снаге P и референтне снаге P_0, изражен у децибалима износи

$$L = 10 \log_{10}\left(\frac{P}{P_0}\right)\,\mathrm{dB}.$$

Како се у акустици узима да је референтна снага $P_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W}$, могло би се писати да је ниво звука у децибелима

$$L = 10 \log_{10}(P) - 120.$$

Нормалан говор је око $50\,\mathrm{dB}$, звук мотора млазног авиона при полетању је $150\,\mathrm{dB}$, а смртоносан је звук од $240\,\mathrm{dB}$ и више. Звучни топ Genasys LRAD има ниво звука око $160\,\mathrm{dB}$, што значи да је 10^{11} пута моћнији од говора.

Слична формула се користи и за одређивање јачине земљотреса, или pH вредности $\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H}^+]$.

3.2 Основа 2

У информатици се често користи логаритам са основом 2, који се зове *бинарни* логаритам, и пише се

$$y = \log_2 x.$$

Користи се у комбинаторици, као за одређивање *количине информација*, односно, потребног броја битова меморије за смештање неког податка. Ако се зна да ће у меморију бити уписивани цели бројеви од 0 до n, онда је потребно резервисати

$$bits = \lfloor \log_2(n) \rfloor + 1 \tag{18}$$

битова меморије, где $\lfloor x \rfloor$ представља *највећи сео број који је мањи или једнак* x (изговара се „највеће цело од x“). На пример, ако ће у одређеној меморији највећи број бити милион, онда је за то потребно резервисати

$$bits = \lfloor \log_2(1\,000\,000) \rfloor + 1 = \lfloor 19{,}9315685693 \rfloor + 1 = 19 + 1 = 20$$

битова меморије. Највећи број који може стати у овим резервисаних 20 битова меморије је бинарни број који има 20 јединица и износи

$$(1111\,1111\,1111\,1111\,1111)_2 = 2^{20} - 1 = 1\,048\,575.$$

Како су и реални бројеви у меморији представљени као уређени парови бинарних бројева у облику $x = (mantissa, exponent)$, са значењем

$$x = mantissa \times 2^{exponent},$$

бинарни логаритам би био израчунат као

$$\log_2(x) = \log_2(mantissa) + exponent,$$

ако је $mantissa > 0$, иначе је недефинисан.

Бинарни логаритам се користи и у атомској физици. Време *полураспада* $t_{1/2}$ је време потребно да се распадне половина језгара атома неке материје. Ако имамо почетан број језгара N_0 и број језгара N_t након времена t, њихов однос се може представити формулом

$$\frac{N_0}{N_t} = 2^{t/t_{1/2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{t}{t_{1/2}} = \log_2\left(\frac{N_0}{N_t}\right). \tag{19}$$

Ова формула се користи и за одређивање старости стена или фосила.

3.3 Основа e

Ову логаритамску основу је открио Јакоб Бернули (Jacob Bernoulli) када је проучавао *сложену камату* и доказао да *континуална* сложена камата тежи константи

$$\mathbf{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

али је тек Ојлер (Leonhard Euler) одредио њену тачну вредност и дао јој име. Логаритам за ову основу се зове *природни* логаритам (*logarithmus naturalis*) и пише се

$$\ln x = \log_{\mathbf{e}} x.$$

Антилогаритам је *експоненцијална* функција $\mathbf{e}^x = \exp(x)$, која је позната по томе што је то једина функција чији је први извод једнак самој функцији: $\exp'(x) = \exp(x)$. Бројна вредност се може израчунати формулом

$$\boxed{\mathbf{e}^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}\,. \tag{20}$$

Ако ставимо да је $x = 1$, бројна вредност основе природног логаритма $\mathbf{e}$ се може одредити

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots \\ &= 2{,}7182818284\,5904523536\,0287471352\,6624977572\,\ldots \end{aligned} \tag{21}$$

са жељеном тачношћу.

4 Бројна вредност логаритма

4.1 Формула

Бројна вредност природног логаритма може бити израчуната помоћу формуле

$$\boxed{\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}} \tag{22}$$

до жељене тачности. Поступак којим се рачуна $y = \ln x$ са тачношћу ε изгледа овако:

$$\boxed{\begin{array}{l} r \leftarrow (x-1)/(x+1); \quad k \leftarrow 1; \quad p \leftarrow 2r; \quad q \leftarrow r^2; \quad a \leftarrow p; \quad y \leftarrow a; \\ \text{понављати док је } |a| > \varepsilon\text{:} \\ \qquad k \leftarrow k+2; \quad p \leftarrow p \cdot q; \quad a \leftarrow p/k; \quad y \leftarrow y + a; \end{array}} \tag{23}$$

Овим поступком се може израчунати вредност

$$\begin{aligned} \ln 2 &= \frac{2}{1 \cdot 3^1} + \frac{2}{3 \cdot 3^3} + \frac{2}{5 \cdot 3^5} + \frac{2}{7 \cdot 3^7} + \frac{2}{9 \cdot 3^9} + \cdots \\ &= 0{,}6931471805\,5994530941\,7232121458\,1765680755\,\ldots \end{aligned} \tag{24}$$

као и вредност

$$\begin{aligned} \ln 10 &= \frac{2}{1 \cdot 9^1} + \frac{2}{3 \cdot 9^3} + \frac{2}{5 \cdot 9^5} + \frac{2}{7 \cdot 9^7} + \frac{2}{9 \cdot 9^9} + \cdots + 3 \ln 2 \\ &= 2{,}3025850929\,9404568401\,7991454684\,3642076011\,\ldots \end{aligned} \tag{25}$$

(Видети задатак 6.4.3 на страни 26.) Помоћу њих се могу израчунати бројне вредности бинарног $\log_2 x = \ln x / \ln 2$, односно, декадног $\log_{10} x = \ln x / \ln 10$ логаритма.

4.2 Верижни разломак

Бројна вредност природног логаритма може се израчунати и помоћу *верижног разломка*

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \cfrac{x}{1 + \cfrac{1^2 x}{2 - 1x + \cfrac{2^2 x}{3 - 2x + \cfrac{3^2 x}{4 - 3x + \ddots}}}} \\ &= \cfrac{x}{1 + \underset{n=1}{\overset{\infty}{\mathrm{K}}} \cfrac{n^2 x}{n + 1 - nx}}. \end{aligned} \tag{26}$$

Попут симбола које се користе за суму 'Σ' или производ 'Π', Гаус (Johann Carl Friedrich Gauß) је смислио погодан начин за представљање верижних (*ланчаних*) разломака, где симбол 'K' потиче од немачке речи за *прекинути ланац* (*Kettenbruch*). Израз иза овог симбола показује како изгледа *општи члан* верижног разломка.

Ако помоћу ове формуле израчунамо првих 11 *конвергената* $\ln 2$ као $-\ln(1+x)$, где је $x = -1/2$, добићемо

$$\ln 2 \approx \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{131}{192}, \frac{661}{960}, \frac{1327}{1920}, \frac{1163}{1680}, \frac{148969}{215040}, \frac{447047}{645120}, \frac{44711}{64512}, \frac{983705}{1419264}, \ldots$$

где је последњи разломак тачан на 5 децимала.

4.3 Логаритамске таблице

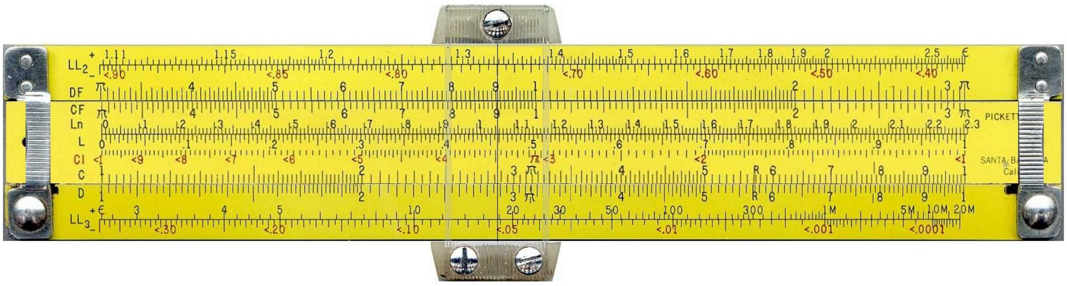
Прве таблице логаритама је 1614. године израчунао шкотски математичар Непер (John Napier of Merchiston), које су практично садржале логаритам за основу $1/\mathbf{e}$, са скалираним аргументом и резултатом, иако сам Непер није знао за константу $\mathbf{e}$. Савременим записом би логаритам из Неперових таблица био дефинисан као

$$\mathrm{NapLog}(x) = 10^7 \log_{1/\mathbf{e}}(x/10^7) = -10^7 \ln(x/10^7).$$

Неколико година касније, 1617. и 1624, енглески математичар Бригс (Henry Briggs) је израчунао таблице декадних логаритама са 14 цифара тачности, које се уз допуне и исправке користе и данас под именом *Бригсове таблице*.

4.4 Логаритмар

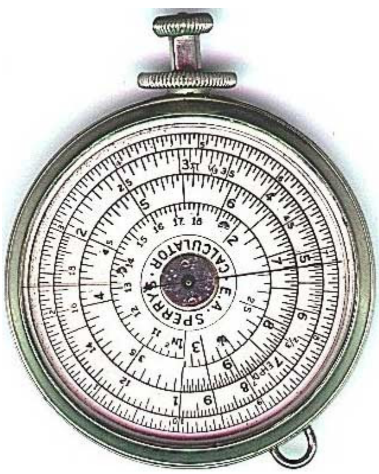
Пре појаве дигитрона, за приближно одређивање бројне вредности логаритма, користила се је аналогна механичка справа са неколико лењира звана *логаритмар*.



Слика 2: Шибер.

Лењири имају подеоке са децималном и логаритамском, а често и са синусном и неком другом скалом. Један од лењира је био клизни, те отуда популарно име *шибер* (од немачког *Rechenschieber*). Користи се једноставно, померањем клизача и читањем вредности са одговарајуће скале. (Видети задатке 6.4.1 и 6.4.2.)

Постојале су и кружне варијанте, па и џепне, где је џепни сат са логаритмаром и компасом био „iPhone" XIX и прве половине XX века.



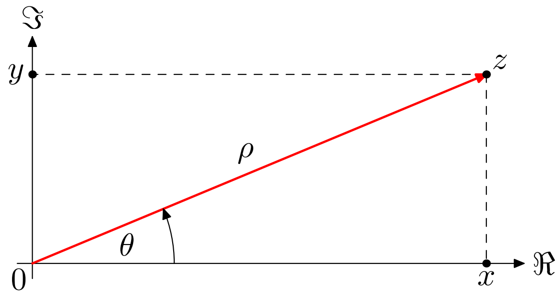
Слика 3: Џепни логаритмар.

Таблице и логаритмари се и данас користе у војсци, као резерва у случају отказивања електронике. Први компјутер ENIAC (Electronic Numerical Integrator And Computer) је направљен 1946. године са наменом да израчуна таблице за војску.

5 Разно

5.1 Комплексни логаритам

Ако у комплексној равни имамо комплексан број $z \in \mathbb{C}$,



Слика 4: Број z у комплексној равни.

он може бити представљен као

$$\begin{aligned} z &= x + iy && \text{правоугле координате,} \\ &= \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta) && \text{поларне координате.} \end{aligned}$$

Из Ојлерове формуле[1]

$$\boxed{\mathbf{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}\,, \tag{27}$$

следи да је $z = \rho\,\mathbf{e}^{i\theta}$, одакле, из једнакости (7) и (4) се добија

$$\boxed{\ln z = \ln\rho + i\theta}\,. \tag{28}$$

Пошто је $\rho = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$, следи да природни логаритам комплексног броја z није дефинисан само за $z = 0$, када је $\ln z = \tilde{\infty}$. Како је $y/x = \tan\theta$, природни логаритам комплексног броја, представљеног правоуглим координатама може се израчунати

$$\boxed{\ln(x+iy) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + i\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}\,, \tag{29}$$

као и

$$\boxed{\exp(x+iy) = \mathbf{e}^{x}\,(\cos y + i\sin y)}\,. \tag{30}$$

И за комплексне бројеве важи једнакост промене основе (13), тако да за два комплексна броја z и w, где је $z \neq 0$, $w \neq 0$ и $w \neq 1$, следи $\log_w z = \ln z / \ln w$, где се $\ln z$ и $\ln w$ рачунају помоћу формуле (28), односно, (29). На пример,

$$\log_{2+i}(3+4i) = 2, \qquad \log_i \mathbf{e} = \frac{2}{i\pi}, \qquad \log_2(-4) = 2 + \frac{i\pi}{\ln 2}.$$

Из Ојлерове формуле следи и *најлепша формула у историји математике*, у којој је употребљено 5 најважнијих математичких константи $(0, 1, \pi, \mathbf{e}, i)$

$$\boxed{\mathbf{e}^{i\pi} + 1 = 0}\,, \tag{31}$$

где, ако пребацимо 1 на десну страну и *логаритмујемо*, добијамо једнакост

$$\frac{\ln(-1)}{\sqrt{-1}} = \pi.$$

[1] Ојлерова формула се лако доказује из формуле (20) и сличних формула за $\sin x$ и $\cos x$, које се добијају из *Меклореновог реда* (Cailean MacLabhruinn): $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\,(x^n/n!)$, где $f^{(n)}$ представља n-ти извод функције f.

5.2 Кватерниони

Попут скупа комплексних бројева $\mathbb{C}$, који представљају објекте у 2D простору, скуп *кватерниона* $\mathbb{H}$, представља објекте у 3D простору. Први их је описао 1843. године ирски математичар Хамилтон (William Rowan Hamilton), те њему у част и ознака скупа $\mathbb{H}$. У информатици су неизбежни део свега што се дешава у 3D: навигација авиона, подморница, ракета, сателита, небеска и квантна механика, роботика, игре, графика, ...

Кватернион $q \in \mathbb{H}$ може бити представљен као збир

$$q = s + v \tag{32}$$

који се састоји од *скаларног* дела $s \in \mathbb{R}$ и *векторског* дела $v \in \mathbb{R}^3$, где је

$$v = xi + yj + zk \tag{33}$$

3D вектор са координатама (x, y, z), а где су i, j и k јединични вектори по x, y и z оси, за које важи

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \quad ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j. \tag{34}$$

У скупу кватерниона $\mathbb{H}$ за операцију множења, уопштено, не важи *закон комутације*: $ji = -ij = -k$, $kj = -jk = -i$, $ik = -ki = -j$. Ово је логично кад се стимо да и код *Рубикове коцке* најчешће није свеједно којим редоследом окрећемо странице. Важи *асоцијативност*: $(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$.

Да би $q = s + v$ био *прави* кватернион, мора бити $v \neq 0$, иначе је q обичан реалан број, када се примењују операције и функције из скупа $\mathbb{R}$. Ако одредимо апсолутну вредност кватерниона

$$\lambda = |v| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \rho = |q| = \sqrt{s^2 + \lambda^2}$$

која се зове *норма*, одредимо *јединични вектор* (*unit*) векторског дела кватерниона

$$u = \frac{v}{\lambda},$$

који се зове *версор* и где је по дефиницији[2] $|u| = 1$ и $u^2 = -1$, као и угао оријентације

$$\varphi = \arccos\left(\frac{s}{\rho}\right),$$

можемо добити поларни запис кватерниона

$$q = \rho\,(\cos\varphi + u\sin\varphi) = \rho\,\mathbf{e}^{u\varphi}. \tag{35}$$

Из свега овога се може добити

$$\boxed{\ln(q) = \ln\rho + u\varphi} \tag{36}$$

и

$$\boxed{\exp(q) = \mathbf{e}^s\,(\cos\lambda + u\sin\lambda)}\,. \tag{37}$$

Остале операције и функције нису тема овог рада, али сабирање и одузимање је уобичајено, код множења треба обратити пажњу на формулу (34) и комутативност, а реципрочна вредност је $q^{-1} = \bar{q}/\rho^2$, где је $\bar{q} = s - v$, *конјугована* вредност. Тригонометријске и хиперболичне функцихе се могу изразити помоћу експоненцијалне, а њихове инверзне помоћу логаритамске функције.

[2] У скупу $\mathbb{H}$, $\sqrt{-1}$ има бесконачно решења: сваки кватернион који се налази на *јединичној сфери* је решење $(s = 0 \wedge x^2 + y^2 + z^2 = 1)$, односно, сваки версор.

5.3 Извод

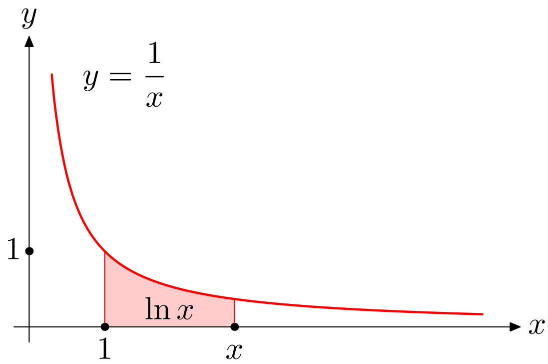
Ако је

$$y = \ln x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{x},$$

одакле се, помоћу једнакости (13) и једнакости за извод сложене функције, добија

$$\boxed{y = \log_b(f(x)) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{f'(x)}{f(x)\ln b}}. \tag{38}$$

Површина фигуре испод функције $y = 1/x$ до x-осе, у опсегу од 1 до x износи $\ln x$. Математички записано: $\int_1^x dx/x = \ln x$.



Слика 5: Геометријско значење $\ln x$.

(На слици је $x = \mathbf{e}$, тако да је површина осенчане фигуре једнака 1.)

5.4 Интеграл

Неодређени интеграл природног логаритма је

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + \text{constant}. \tag{39}$$

5.5 Лимес

Ојлер је доказао да је

$$\ln x = \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1). \tag{40}$$

5.6 Бенфордов закон

Вероватноћа да *почетне цифре* неке математичке или физичке константе (као и дужине реке, висине планине, броја становника, стања на рачуну, ...), буду ℓ за бројну основу b, прати такозвани *Бенфордов закон* (Frank Benford), и износи

$$P(b,\ell) = \log_b\left(1 + \frac{1}{\ell}\right). \tag{41}$$

На пример, у *Фибоначијевом низу*: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, ..., вероватноћа да прва цифра неког члана низа буде 9 износи $\log_{10}(1 + 1/9) \approx 4{,}58\%$. Ову законитост је открио 1881. године астроном Њуком (Simon Newcomb), када је приметио да су листови логаритамских таблица које је дуго користио најпрљавији на почетку: . (Видети задатак 6.3.8.)

6 Задаци и решења

6.1 Једначине

6.1.1 ФИТ

▷ **Задатак:** Наћи решење једначине 1

$$\log_2(x-2) + \log_4(x-2) + \log_{16}(x-2) = 7.$$

(Задатак са мог пријемног испита на ФИТ „Метрополитан“.)

▶ **Решење:** Видимо да су основе логаритама степени броја 2, па из једнакости за логаритам степена основе(15) следи

$$\begin{aligned} \log_2(x-2) + \log_{2^2}(x-2) + \log_{2^4}(x-2) &= \\ \log_2(x-2) + \frac{1}{2}\log_2(x-2) + \frac{1}{4}\log_2(x-2) &= \\ \frac{7}{4}\log_2(x-2) &= 7, \end{aligned}$$

односно, после скраћивања,

$$\log_2(x-2) = 4.$$

Одавде је

$$x - 2 = 2^4 = 16 \quad \Rightarrow \quad x = \boxed{18}.$$

6.1.2 Једначина 2

▷ **Задатак:** Reši jednačinu 2

$$2\log(x) - \log(6-x) = 0.$$

▶ **Решење:** Da bi logaritam u jednačini bio definisan mora biti

$$x > 0 \ \wedge \ 6 - x > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < x < 6.$$

Zbog jednakosti (10) možemo pisati

$$\log(x^2) = \log(6-x)$$

odakle sledi

$$\begin{aligned} x^2 &= 6 - x \\ x^2 + x - 6 &= 0. \end{aligned}$$

Rešavanjem[3] kvadratne jednačine

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}, \end{aligned}$$

dobijamu rešenja $x_1 = 2$ i $x_2 = -3$, odakle je jedinstveno rešenje

$$x = \boxed{2}.$$

[3] U nastavku rada, postupak rešavanja linearne i kvadratne jednačine će biti izostavljen.

6.1.3 Jjjj (yafe)

▷ **Задатак:** Reši jednačinu 3

$$\ln(x) = \ln(15 - x) - \ln(x + 1).$$

▶ **Решење:** Jednačina je definisana za

$$x > 0 \ \wedge \ 15 - x > 0 \ \wedge \ x + 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < x < 15.$$

Ako zapišemo jednačinu kao

$$\ln(x) + \ln(x + 1) = \ln(15 - x)$$

iz jednakosti za logaritam proizvoda (7), možemo pisati

$$\begin{aligned} \ln(x(x + 1)) &= \ln(15 - x) \\ \ln(x^2 + x) &= \ln(15 - x) \\ x^2 + x &= 15 - x \\ x^2 + 2x - 15 &= 0 \end{aligned}$$

Rešavanjem kvadratne jednačine dobijamo 2 rešenja, $x_1 = 3$ i $x_2 = -5$, ali zbog uslova, ostaje jedinstveno

$$x = \boxed{3}.$$

6.1.4 Četiri četvorke

▷ **Задатак:** Dokazati da svaki prirodan broj $n \in \mathbb{N}$, može biti predstavljen sa 4 broja 4, pomoću logaritamske funkcije i kvadratnog korena 4

$$n = \log_{\sqrt{4}/4}\left(\log_4 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{4}}}}_{n \text{ korena}}\right).$$

▶ **Решење:** Kako je

$$\frac{\sqrt{4}}{4} = \frac{1}{2} \qquad \text{i} \qquad \underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{4}}}}_{n \text{ korena}} = 4^{(1/2)^n},$$

izraz može biti uprošćen

$$\log_{\sqrt{4}/4}\left(\log_4 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{4}}}}_{n \text{ korena}}\right) = \log_{1/2}\left(\log_4 4^{(1/2)^n}\right),$$

gde iz jednakosti za logaritam stepena osnove (4), sledi

$$\begin{aligned} &= \log_{1/2}(1/2)^n \\ &= \boxed{n}. \end{aligned}$$

★ **Додатак:** *Davno je u jednom časopisu postavljen sličan zadatak: da se sa što manje istih brojeva, koristeći bilo koju matematičku funkciju, predstavi svaki prirodan broj n. Rešio ga je nobelovac Pol Dirak (Paul Dirac) sa 3 broja 2, čije originalno rešenje izgleda*

$$-\log_2 \log_2 \sqrt{\cdots n \cdots \sqrt{2}} = -\log_2 \log_2 2^{2^{-n}} = -\log_2 2^{-n} = n. \qquad \square$$

6.1.5 Sveska 7

▷ **Задатак:** Nađi x ako je 5

$$x^{\log x} = 1000x^2.$$

▶ **Решење:** Ako logaritmujemo obe strane dobijamo

$$\begin{aligned}\log x^{\log x} &= \log(1000x^2)\\ \log x \log x &= \log 1000 + \log x^2\\ \log^2 x &= 3 + 2\log x,\end{aligned}$$

gde, posle smene $t = \log x$, dobijamo kvadratnu jednačinu

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

čija su rešenja $t_1 = 3$ i $t_2 = -1$, odakle su

$$x_1 = 10^3 = \boxed{1000} \quad \text{i} \quad x_2 = 10^{-1} = \boxed{\frac{1}{10}}.$$

6.1.6 Beskonačni koren

▷ **Задатак:** Odredi vrednost 6

$$x = \ln\left(\mathbf{e}\sqrt[2]{\mathbf{e}\sqrt[3]{\mathbf{e}\sqrt[4]{\mathbf{e}\sqrt[5]{\cdots}}}}\right).$$

▶ **Решење:** Kako je $\ln \mathbf{e} = 1$ i koristeći jednakost za logaritam proizvoda (7) i jednakost za logaritam korena (11), možemo pisati

$$\begin{aligned}x &= 1 + \frac{1}{2}\ln\left(\mathbf{e}\sqrt[3]{\mathbf{e}\sqrt[4]{\mathbf{e}\sqrt[5]{\cdots}}}\right)\\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\ln\left(\mathbf{e}\sqrt[4]{\mathbf{e}\sqrt[5]{\cdots}}\right)\right)\\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{4}\ln\left(\mathbf{e}\sqrt[5]{\cdots}\right)\right)\right)\\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{5}\ln(\cdots)\right)\right)\right)\\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} + \cdots\\ &= \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots\end{aligned}$$

Ako pogledamo formulu (21) na strani 7, možemo videti da je ovaj zbir jednak

$$x = \boxed{\mathbf{e} - 1},$$

jer iz sume za izračunavanje $\mathbf{e}$ nedostaje *nulti* član $1/0! = 1$.

6.1.7 Нет 3

▷ **Задатак:** Одреди n^3 ако је 7

$$\log_{5n} 30\sqrt{5} = \log_{4n} 48.$$

▶ **Решење:** Пребацимо логаритме у основу 6, јер је 6 *нзд* за 30 и 48 из израза

$$\begin{aligned}\frac{\log_6 30\sqrt{5}}{\log_6 5n} &= \frac{\log_6 48}{\log_6 4n}\\ \frac{\log_6 6 + \log_6 5 + \frac{1}{2}\log_6 5}{\log_6 5 + \log_6 n} &= \frac{\log_6 6 + \log_6 8}{\log_6 4 + \log_6 n}\\ \frac{1 + \frac{3}{2}\log_6 5}{\log_6 5 + \log_6 n} &= \frac{1 + 3\log_6 2}{2\log_6 2 + \log_6 n}.\end{aligned}$$

Када извршимо смену $n = 6^t$, односно, $t = \log_6 n$ и $u = \log_6 2$ и $v = \log_6 5$, добијамо

$$\begin{aligned}\frac{1 + \frac{3}{2}v}{v + t} &= \frac{1 + 3u}{2u + t}\\ (1 + \tfrac{3}{2}v)(2u + t) &= (1 + 3u)(v + t)\\ 2u + 3uv + t + \tfrac{3}{2}vt &= v + 3uv + t + 3ut \qquad / -3uv;\ -t;\ \times 2;\\ 4u + 3vt &= 2v + 6ut\\ 6ut - 3vt &= 4u - 2v\\ t(6u - 3v) &= 4u - 2v\\ t &= \frac{4u - 2v}{6u - 3v}\\ t &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2u - v}{2u - v}\\ t &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Одавде је

$$n^3 = 6^{3t} = \boxed{36}.$$

6.1.8 Изумирање

▷ **Задатак:** Нађи n ако је 8

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdots \log_n(n+1) = 10.$$

▶ **Решење:** Ако пребацимо све логаритме у основу 2, добијамо

$$\log_2 3 \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 6}{\log_2 5} \cdots \frac{\log_2(n+1)}{\log_2 n} = 10.$$

Видимо да ће, након *масовног* скраћивања, *изумрети* сви изрази осим

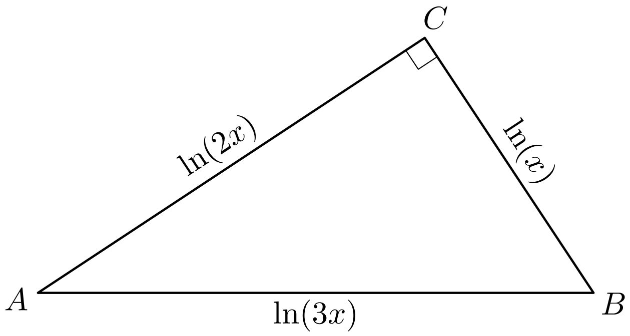
$$\log_2(n+1) = 10,$$

одакле је,

$$n + 1 = 2^{10} = 1024 \quad \Rightarrow \quad n = \boxed{1023}.$$

6.1.9 Питагора

▷ **Задатак:** Одреди x са слике. 9



Слика 6: Правоугли троугао $\triangle ABC$.

(Задатак са Tik-Toka.)

▶ **Решење:** Нађимо најпре решење општег случаја

$$a = \ln(px), \quad b = \ln(qx), \quad c = \ln(rx).$$

Због лакшег писања, извршимо смену

$$t = \ln x, \quad u = \ln p, \quad v = \ln q, \quad w = \ln r,$$

одакле је

$$a = t + u, \quad b = t + v, \quad c = t + w.$$

Из *Питагорине теореме* $a^2 + b^2 = c^2$, следи да је

$$(t+u)^2 + (t+v)^2 = (t+w)^2$$
$$t^2 + 2tu + u^2 + t^2 + 2tv + v^2 = t^2 + 2tw + w^2$$

где, након сређивања, добијамо квадратну једначину

$$t^2 + 2(u + v - w)t + (u^2 + v^2 - w^2) = 0,$$

чија су решења

$$t_{1,2} = w - u - v \pm \sqrt{2(w-u)(w-v)},$$

али нас занима само позитивно. Када вратимо смену добијамо

$$\ln x = \ln\left(\frac{r}{pq}\right) + \sqrt{2\ln\left(\frac{r}{p}\right)\ln\left(\frac{r}{q}\right)},$$

где је, после антилогаритмовања

$$x = \frac{r}{pq} \cdot \mathbf{e}^{\sqrt{2\ln(r/p)\ln(r/q)}}.$$

Због логаритама испод корена видимо да мора бити $p, q, r > 0$ или $p, q, r < 0$, и $|p|, |q| < |r|$, где ће x имати исти знак као p, q и r.

Када заменимо вредности са слике, $p = 1$, $q = 2$ и $r = 3$, добијамо да је

$$x = \boxed{\frac{3}{2}\,\mathbf{e}^{\sqrt{2\ln(3)\ln(3/2)}}} \approx 3{,}85488,$$

а странице троугла су приближно

$$a \approx 1{,}34934, \quad b \approx 2{,}04249, \quad c \approx 2{,}44795.$$

(На слици је 1 = ‘————————’.)

6.2 Неједначине

6.2.1 Sveska 11

▷ **Задатак:** Reši nejednačinu 10

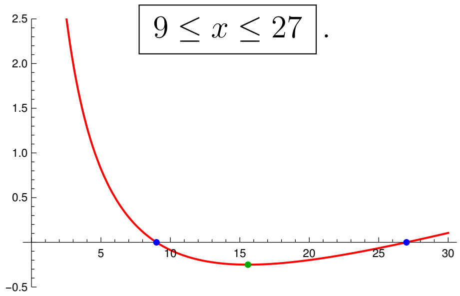
$$\log_3^2 x - 5\log_3 x + 6 \leq 0.$$

▶ **Решење:** Kada izvršimo smenu $t = \log_3 x$, možemo pisati da je

$$t^2 - 5t + 6 \leq 0$$

Kako su rešenja kvadratne jednačine $t_1 = 2$ i $t_2 = 3$, nejednačina je zadovoljena kada je $t \in [2, 3]$. Pošto je $x = 3^t$, sledi da je nejednačina zadovoljena za $x \in [3^2, 3^3]$, odnosno,

$$\boxed{9 \leq x \leq 27}.$$



Слика 7: $y = \log_3^2 x - 5\log_3 x + 6$.

★ **Додатак:** Funkcija ima minimum za $t = 5/2$, odnosno, u tački $(9\sqrt{3}, -1/4)$.

6.2.2 Sveska 9

▷ **Задатак:** Odredi u kojim granicama je zadovoljen uslov 11

$$\log_3(x^2 - 4) < \log_3 5.$$

▶ **Решење:** Ako se oslobodimo logaritma

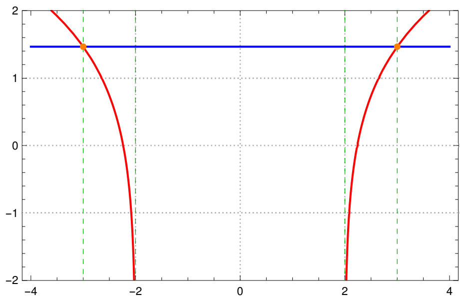
$$\begin{aligned} x^2 - 4 &< 5 \\ x^2 &< 9, \end{aligned}$$

dobićemo da je $-3 < x < 3$. Međutim, da bi logaritam bio definisan mora biti

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &> 0 \\ x^2 &> 4, \end{aligned}$$

odnosno, $x < -2$ ili $x > 2$. Odavde je

$$x \in \boxed{(-3, -2) \cup (2, 3)}.$$



Слика 8: $y = \log_3(x^2 - 4)$; $\log_3 5$.

6.2.3 Sveska 10

▷ **Задатак:** Reši nejednačinu 12

$$\log_5 x \geq \frac{1}{2}\log_5(3x-2).$$

▶ **Решење:** Da bi logaritam bio definisan, vidimo da mora biti

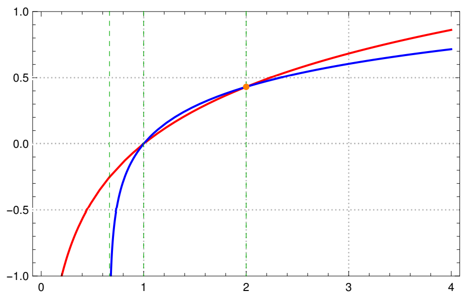
$$3x - 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{2}{3}.$$

Ako nejednačinu pomožimo sa 2 , dobijamo

$$\begin{aligned} 2\log_5 x &\geq \log_5(3x-2) \\ \log_5 x^2 &\geq \log_5(3x-2) \\ x^2 &\geq 3x-2 \\ x^2 - 3x + 2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Kvadratna jednačina ima rešenja $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$, pa je rešenje nejednačine

$$x \in \boxed{\left(\frac{2}{3}, 1\right] \cup [2, \infty)}.$$



Слика 9: $y = \log_5 x$; $\frac{1}{2}\log_5(3x-2)$.

6.2.4 Net 1

▷ **Задатак:** Reši 13

$$\log_{3x+5}(9x^2 + 8x + 8) > 2.$$

▶ **Решење:** Ako *antilogaritmujemo* obe strane dobijamo

$$\begin{aligned} 9x^2 + 8x + 8 &> (3x+5)^2 \\ 9x^2 + 8x + 8 &> 9x^2 + 30x + 25 \\ 8x + 8 &> 30x + 25, \end{aligned}$$

gde je nakon sređivanja

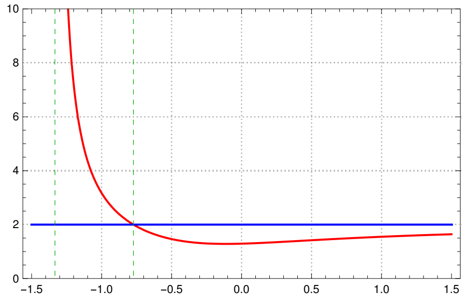
$$x < -\frac{17}{22}$$

Sledeći uslov je da osnova bude veća od 1, to jest

$$\begin{aligned} 3x + 5 &> 1 \\ x &> -\frac{4}{3}, \end{aligned}$$

odakle sledi rešenje

$$x \in \boxed{\left(-\frac{4}{3}, -\frac{17}{22}\right)}.$$



Слика 10: $y = \log_{3x+5}(9x^2 + 8x + 8)$; 2.

6.2.5 Net 2

▷ **Задатак:** Nađi vrednosti koje zadovoljavaju nejednačinu 14

$$\log_7(x + 5) > \log_5(x + 5).$$

► **Решење:** Prebacimo izraz u zajednički logaritam

$$\begin{aligned} \frac{\log(x+5)}{\log 7} &> \frac{\log(x+5)}{\log 5} \\ \log 5 \log(x+5) &> \log 7 \log(x+5). \end{aligned}$$

Kako je $\log 5 < \log 7$ i pozitivni su, da bi uslov važio, mora biti

$$\log(x + 5) < 0,$$

odakle je

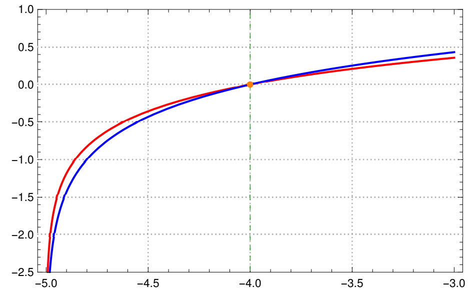
$$\begin{aligned} x + 5 &< 1 \\ x &< -4, \end{aligned}$$

a da bi logaritam bio definisan mora da važi i

$$\begin{aligned} x + 5 &> 0 \\ x &> -5, \end{aligned}$$

odakle je rešenje

$$x \in \boxed{(-5, -4)}.$$



Слика 11: $y = \log_7(x+5)$; $\log_5(x+5)$.

6.2.6 Net 6

▷ **Задатак:** Koje vrednosti zadovoljavaju uslov 15

$$\log_2(x+1) > \log_4 x^2?$$

▶ **Решење:** Ako levu stranu zapišemo kao

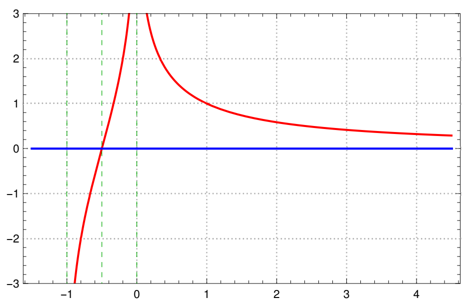
$$2 \cdot \frac{1}{2} \log_2(x+1) = \log_{2^2}(x+1)^2$$

što sledi iz jednakosti (15) i (10), dobićemo

$$\begin{aligned} \log_4(x+1)^2 &> \log_4 x^2 \\ (x+1)^2 &> x^2 \\ x^2+2x+1 &> x^2 \\ 2x+1 &> 0 \\ x &> -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Kako mora da važi $x > -1$ i $x \neq 0$, dobijamo konačno rešenje

$$x \in \boxed{\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (0, \infty)}.$$



Слика 12: $y = \log_2(x+1) - \log_4 x^2$.

★ **Додатак:** Kao što je na strani 5 napomenuto, da smo $\log_4 x^2$ jednostavno predstavili kao $\log_{2^2} x^2 = \log_2 x$, dobili bismo netačno rešenje. Ispravno bi bilo $\log_4 x^2 = \log_2 |x|$, kada bismo posebno gledali 2 slučaja: za $x > 0$ i za $x < 0$.

6.2.7 Границе

▷ **Задатак:** Докажи да важи неједнакост 16

$$\boxed{1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1}, \tag{42}$$

којом се дефинишу *доња* и *горња* граница природног логаритма.

▶ **Решење:** Погледајмо прво десни део неједнакости. Ако дефинишемо функцију

$$y = \ln x - (x - 1),$$

потребно је да докажемо да је $y \leq 0$ за свако $x > 0$. Интуитивно је јасно да тврђење важи, јер $\ln x$ много спорије расте од $x - 1$, и формални доказ ће нам се заснивати на томе.

Први извод функције је

$$y' = \frac{1}{x} - 1,$$

који има јединствену нулу $y' = 0$ за $x = 1$, где је и $y = 0$. Како је други извод

$$y'' = -\frac{1}{x^2} < 0,$$

увек негативан, то значи да функција y нема *превојних тачака* и да тачка $(1, 0)$ представља *максимум* функције y, одакле је $y \leq 0$, односно,

$$\boxed{\ln x \leq x - 1}.$$

Ако у ову неједнакост уместо x ставимо $1/x$, можемо писати

$$\ln(1/x) \leq \frac{1}{x} - 1$$

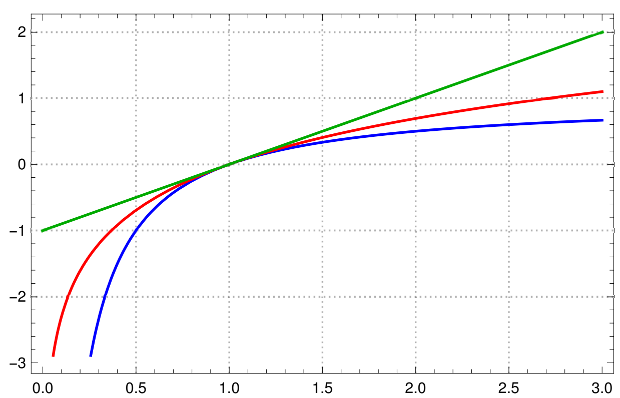
$$-\ln x \leq \frac{1}{x} - 1,$$

где, када изрази замене стране и знак, добијамо

$$\boxed{1 - \frac{1}{x} \leq \ln x},$$

што представља леви део неједнакости из задатка. □

★ **Додатак:** Све три функције из неједнакости се *додирују* у тачки $(1, 0)$, што значи да у тој тачки све три имају исту *тангенту*, односно, исти први извод $y'(1) = 1$; иначе би се секле и неједнакост не би важила.



Слика 13: $y = 1 - 1/x$; $\ln x$; $x - 1$.

6.3 Кратки примери

6.3.1 Земљотрес

▷ **Задатак:** Магнитуда земљотреса M по *Рихтеровој скали* у епицентру зависи логаритамски од интензитета земљотреса I 17

$$M = \log_{10} I.$$

У августу 2009, јапанско острво Хоншу је погодио земљотрес магнитуде $M_1 = 6{,}1$ по Рихтеру, а у марту 2011, разарајући земљотрес који је био око 800 пута јачи од првог. Колико степени по Рихтеру је имао други? (Користи логаритамске таблице или логаритмар.)

▶ **Решење:** $M_2 = M_1 + \log_{10} 800 \approx 6{,}1 + 2{,}9 = \boxed{9{,}0}$ степени Рихтера.

6.3.2 Децималне цифре

▷ **Задатак:** Колико децималних цифара d има 128-битна променљива? 18

▶ **Решење:** $d = \lfloor \log_{10} 2^{128} \rfloor + 1 = \lfloor 128 \log_{10} 2 \rfloor + 1 = \lfloor 38{,}53184 \rfloor + 1 = 38 + 1 = \boxed{39}$.

6.3.3 Полураспад јода

▷ **Задатак:** Ако имамо 63 g изотопа јода $^{131}\mathrm{I}$, а знамо да смо пре 11 дана имали 163 g, које је време полураспада овог изотопа? (Користи природни логаритам.) 19

▶ **Решење:** Из формуле (19) на страни 7, следи да је време полураспада

$$t_{1/2} = \frac{t}{\log_2(m_0/m_t)} = \frac{t \ln 2}{\ln(m_0/m_t)} = \frac{11 \ln 2}{\ln(163/63)} \approx \boxed{8{,}02} \text{ дана.}$$

6.3.4 Геометријски низ

▷ **Задатак:** За $0 \leq x < 1$, упростити израз 20

$$y = \log(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots).$$

▶ **Решење:** Како је збир бесконачног геометријског низа[4]

$$s = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x},$$

може се писати

$$y = \log\left(\frac{1}{1-x}\right),$$

где из једнакости за реципрочну вредност (9), следи

$$= \boxed{-\log(1-x)}.$$

[4]**Доказ:** $s = 1 + x \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots) = 1 + x \cdot s$, одакле је $s - x \cdot s = 1$, следи да је $s = 1/(1-x)$. □

6.3.5 Извод

▷ **Задатак:** Одреди извод функције $f(\alpha) = \ln \operatorname{sinc} \alpha$, где је $\operatorname{sinc} \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\alpha}$. 21

▶ **Решење:** Помоћу једнакости (8) разложимо функцију на

$$f(\alpha) = \ln \sin \alpha - \ln \alpha,$$

а како је извод $\sin \alpha$ једнак $\cos \alpha$ и из једнакости (38) за извод логаритма функције, следи да је

$$f'(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} = \boxed{\cot \alpha - \frac{1}{\alpha}}.$$

6.3.6 i на i

▷ **Задатак:** Одреди вредност i^i где је $i = \sqrt{-1}$, *имагинарна јединица.* 22

▶ **Решење:** Како у комплексној равни i има поларне координате $\rho = 1$ i $\theta = \pi/2$, ако га представимо Ојлеровом формулом као $i = \mathbf{e}^{i\pi/2}$ и из једнакости (12) и (4), следи да је

$$i^i = \mathbf{e}^{i \ln i} = \mathbf{e}^{i \ln \mathbf{e}^{i\pi/2}} = \mathbf{e}^{i^2\, \pi/2} = \boxed{\mathbf{e}^{-\pi/2}} \approx 0{,}20788$$

реалан број.

6.3.7 $\ln(-z)$

▷ **Задатак:** У скупу комплексних бројева $\mathbb{C}$, ако знамо $\ln z$, колико је $\ln(-z)$? 23

▶ **Решење:** Како је у комплексној равни $-z$ једнако z заротирано око координатног почетка за угао од $180° = \pi$, добијамо

$$\ln(-z) = \boxed{\ln z + i\pi}.$$

Ако проверимо, из Ојлерове једнакости (31), добијамо

$$\mathbf{e}^{\ln(-z)} = \mathbf{e}^{\ln z + i\pi} = \mathbf{e}^{\ln z} \cdot \mathbf{e}^{i\pi} = z \cdot (-1) = -z.$$

★ **Додатак:** Хммм ..., трик са ротацијом није баш потпуно тачан: добили бисмо $-z$ и за угао $-\pi$, па би било $\ln(-z) = \ln z - i\pi$, што је такође тачно; у ствари, тачно је за било који угао $\pi + 2k\pi$ где је $k \in \mathbb{Z}$ цео број. Одавде би следило да је

$$\ln(-z) = \ln z + i(\pi + 2k\pi),\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

И сама формула (28), $\ln z = \ln \rho + i\theta$, представља само *главну грану* комплексног логаритма, који је некаква врста 4D спирале. Потпуна формула би била

$$\boxed{\ln z = \ln \rho + i(\theta + 2k\pi),\ \ k \in \mathbb{Z}}. \tag{43}$$

6.3.8 Прво, па 1

▷ **Задатак:** Колики проценат цена *од игле до локомотиве* почиње цифром 1? 24

▶ **Решење:** Из формуле (41) са стране 12, следи да је $P(10,1) = \log_{10} 2 \approx \boxed{30\%}$.

★ **Додатак:** У филму *Рачуновођа* (*The Accoutant*), главни лик (Ben Afflec) открива да су финансијски извештаји преправљани, јер увиђа да износи не прате ово правило.

6.4 Ручни рад

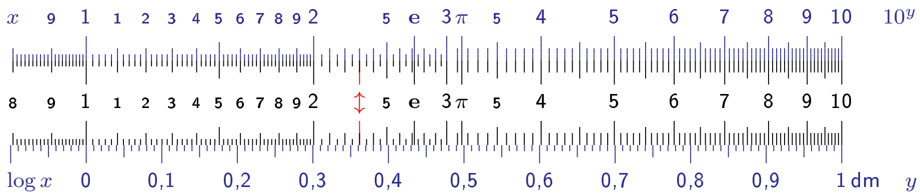
6.4.1 Аналогни степен

▷ **Задатак:** Одреди логаритмаром приближну вредност $z = 2{,}3^{1{,}7}$. 25

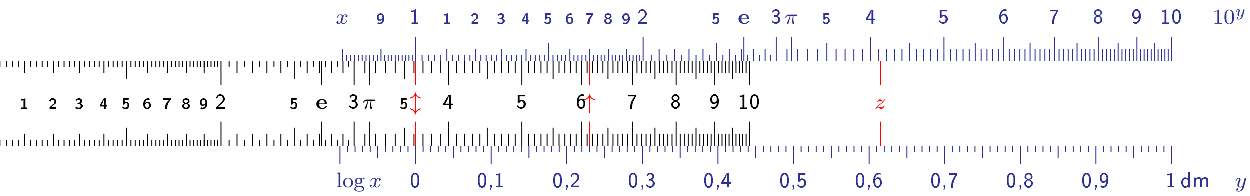
▶ **Решење:** Помоћу једнакости (12) представимо

$$z = 2{,}3^{1{,}7} = 10^{1{,}7\cdot\log(2{,}3)}.$$

Прво одређујемо вредност $\log(2{,}3)$ тако што за $x = 2{,}3$ читамо испод вредност $\log x$. Налазимо да је $\log(2{,}3) \approx 0{,}362$ (види нит обележену са '↕').



Након тога, ту вредност на клизачу поравнамо са $x = 1$. Како на клизачу не постоји 0,362, поставићемо на 3,62, с тим што ћемо резултат поделити са 10. Сада, за $x = 1{,}7$ читамо вредност на клизачу испод (↑)



и налазимо да је око 6,15, што значи да је $1{,}7 \cdot \log(2{,}3) \approx 0{,}615$. Потом, за $y = 0{,}615$ читамо вредност 10^y и налазимо да је око 4,12 што је и решење

$$z = 2{,}3^{1{,}7} \approx \boxed{4{,}12},$$

а тачна вредност је $z = 4{,}120380\ldots$

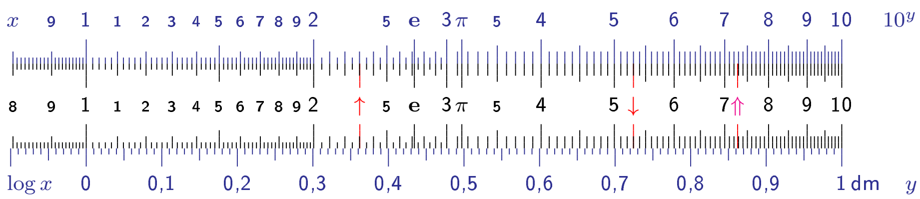
6.4.2 Аналогни квадратни корен

▷ **Задатак:** Објасни начин за одређивање вредности $\sqrt{x}$ логаритмаром. 26

▶ **Решење:** Уз мало вежбе, квадратни корен можемо директно читати са логаритмара ако *у глави* извршимо дељење са 2 и, по потреби, сабирање са 0,5 што је врло једноставно јер се ради о бројевима између 0 и 1 са највише 3 децимале. Како је

$$\sqrt{x} = 10^{\frac{1}{2}\log x},$$

потребно је прочитати вредност $\log x$, а онда, за двоструко мању вредност од ње, прочитати вредност 10^y. На пример, за израчунавање вредности $\sqrt{5{,}3}$, читамо да је $\log(5{,}3) \approx 0{,}724$ (↓), потом, за $y = 0{,}724/2 = 0{,}362$ (↑), читамо вредност 10^y и добијамо $\sqrt{5{,}3} \approx 2{,}3$ ($2{,}3^2 = 5{,}29$). За $\sqrt{53}$ треба у y додати још 0,5 тако да ће бити $y = 0{,}362 + 0{,}5 = 0{,}862$ (⇑), одакле је $\sqrt{53} \approx 7{,}28$ ($7{,}28^2 = 52{,}9984$).



Наравно, $\sqrt{530}$ се рачуна као $10\sqrt{5{,}3}$, или $\sqrt{0{,}53} = \frac{1}{10}\sqrt{53}$.

6.4.3 ln 3

▷ **Задатак:** У част Непера и Бригса, помоћу поступка (23) са стране 8, израчунај *пешке* приближну вредност $\ln 3$ у 5 корака. За упоређивање, тачна вредност је

$$\ln 3 = 1{,}0986122886\,6810969139\,5245236922\,5257046475\ \ldots$$

▶ **Решење:** За $x = 3$ биће $r = (x-1)/(x+1) = 1/2$. У нултом кораку постављамо почетне вредности:

Корак *0.* $\quad k = 1, \quad p = 2r = 1, \quad q = r^2 = 1/4, \quad a = p = 1, \quad y = a = 1.$

Следе кораци итерације — повећамо k за 2, помножимо p са q, члан суме a постаје p/k, кога додајемо у резултат y:

Корак *1.* $\quad k = 3, \quad p = 1/4, \quad a = 1/12, \quad y = 13/12;$
Корак *2.* $\quad k = 5, \quad p = 1/16, \quad a = 1/80, \quad y = 263/240;$
Корак *3.* $\quad k = 7, \quad p = 1/64, \quad a = 1/448, \quad y = 7379/6720;$
Корак *4.* $\quad k = 9, \quad p = 1/256, \quad a = 1/2304, \quad y = 88583/80640;$
Корак *5.* $\quad k = 11, \quad p = 1/1024, \quad a = 1/11264, \quad y = 3897967/3548160.$

Резултат је

$$\ln 3 \approx \frac{3897967}{3548160} = \boxed{1.098588\ldots}$$

што није лоше за само 5 корака, јер је апсолутна грешка око $2{,}4 \times 10^{-5}$. Али ..., може боље.

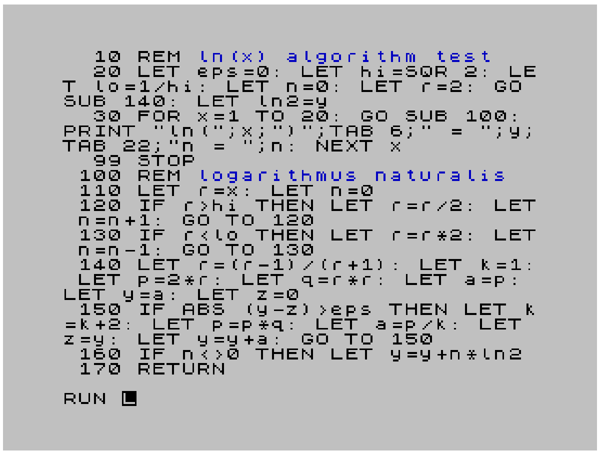
★ **Додатак:** Ако већ имамо прецизно израчунату вредност $\ln 2$, онда је боље рачунати $\ln 3$ као $\ln(3/4) + 2\ln 2$, јер ће, уместо $r = 1/2$, бити $r = (3/4-1)/(3/4+1) = -1/7$, односно, уместо $q = 1/4$, биће $q = 1/49$, што доводи до много бржег израчунавања. У истом броју корака бисмо добили

$$\ln\frac{3}{4} \approx -\frac{2}{7}, -\frac{296}{1029}, -\frac{72526}{252105}, -\frac{24876448}{86472015}, -\frac{522405418}{1815912315}, -\frac{281576520392}{978776737785},$$

где последњи разломак има грешку од око $1{,}6 \times 10^{-12}$, што је више од двоструко тачних цифара. Када му (са стране 8) додамо $2\ln 2$, добићемо

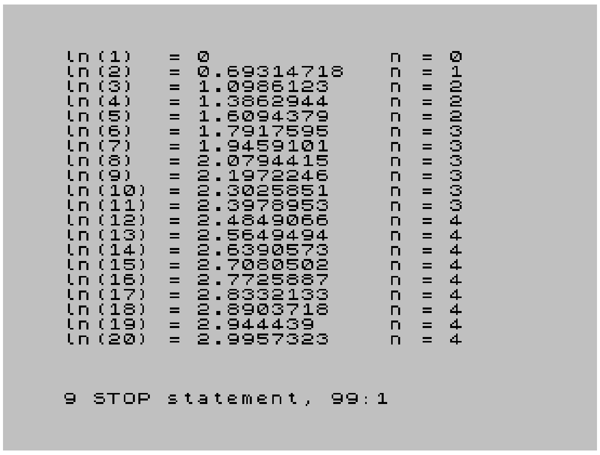
$$\ln 3 \approx 2\ln 2 - \frac{281576520392}{978776737785} = \underbrace{1{,}0986122886\,6}_{12\ \text{тачних цифара}}972615081\ \ldots$$

Уопштено, поступак је најбржи ако рачунамо $\ln x = \ln(x/2^n) + n\ln 2$, где бирамо n такво да $x/2^n$ буде што ближе 1, односно, да q буде најмање могуће (види програм).



```
  10 REM ln(x) algorithm test
  20 LET eps=0: LET hi=SQR 2: LE
T lo=1/hi: LET n=0: LET r=2: GO
SUB 140: LET ln2=y
  30 FOR x=1 TO 20: GO SUB 100:
PRINT "ln(";x;")";TAB 6;" = ";y;
TAB 22;"n = ";n: NEXT x
  99 STOP
 100 REM logarithmus naturalis
 110 LET r=x: LET n=0
 120 IF r>hi THEN LET r=r/2: LET
 n=n+1: GO TO 120
 130 IF r<lo THEN LET r=r*2: LET
 n=n-1: GO TO 130
 140 LET r=(r-1)/(r+1): LET k=1:
 LET p=2*r: LET q=r*r: LET a=p:
LET y=a: LET z=0
 150 IF ABS (y-z)>eps THEN LET k
=k+2: LET p=p*q: LET a=p/k: LET
z=y: LET y=y+a: GO TO 150
 160 IF n<>0 THEN LET y=y+n*ln2
 170 RETURN

RUN
```



```
ln(1)  = 0              n = 0
ln(2)  = 0.69314718     n = 1
ln(3)  = 1.0986123      n = 2
ln(4)  = 1.3862944      n = 2
ln(5)  = 1.6094379      n = 2
ln(6)  = 1.7917595      n = 3
ln(7)  = 1.9459101      n = 3
ln(8)  = 2.0794415      n = 3
ln(9)  = 2.1972246      n = 3
ln(10) = 2.3025851      n = 3
ln(11) = 2.3978953      n = 3
ln(12) = 2.4849066      n = 4
ln(13) = 2.5649494      n = 4
ln(14) = 2.6390573      n = 4
ln(15) = 2.7080502      n = 4
ln(16) = 2.7725887      n = 4
ln(17) = 2.8332133      n = 4
ln(18) = 2.8903718      n = 4
ln(19) = 2.944439       n = 4
ln(20) = 2.9957323      n = 4

9 STOP statement, 99:1
```

Слика 14: ZX Spectrum BASIC програм.

7 Одреднице

7.1 Литература

[*1*] Larousse: „Математика“, *Општа енциклопедија* (1967)

[*2*] Небојша Икодиновић, Слађана Димитријевић, Сузана Алексић: „Уџбеник са збирком задатака за 2. разред гимназије“, *Математика 2* (2019)

[*3*] Вене Боглославов: „Збирка решених задатака из математике 2“, (2008–2011)

[*4*] Марјан М. Матејић, Лидија В. Стефановић, Бранислав М. Ранђеловић, Игор Ж. Миловановић: „Комплети задатака за пријемни испит“, *Математика* (2011)

[*5*] Раде Николић: „Задаци за пријемни испит из математике на Факултет информационих технологија“, (2020)

[*6*] Milton Abramowitz, Irene Stegun: „Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables“, *Applied Mathematics* (1964)

[*7*] Градимир В. Миловановић, Ђорђе Р. Ђорђевић: „Програмирање нумеричких метода“, (1981)

[*8*] Donald E. Knuth: „Seminumerical Algorithms“, *The Art of Computer Programming* (1968–)

[*9*] Драгољуб Васић, Вене Богославов, Глиша Нешковић: „Логаритамске таблице“, (2008)

[*10*] Henry Briggs: „Arithmetica logarithmica“, (1624)

[*11*] Donald E. Knuth: „The TeXbook“, *Computers and Typesetting* (1996)

[*12*] John D. Hobby: „User’s manual“, *METAPOST* (2024)

7.2 Софтвер

[*1*] Mathematica — Wolfram Research

[*2*] Visual Studio Code (Integrated Development Environment) — Microsoft

[*3*] ZX BASIC (programming language) — Sinclair Research Ltd.

[*4*] **Pascal** (programming language) — Niklaus Wirth

[*5*] GO (programming language) — Google

[*6*] **Python** (programming language) — Python Software Foundation

[*7*] METAPOST (PostScript programming language)— John D. Hobby

[*8*] TeX (typesetting system) — Donald E. Knuth

[*9*] LaTeX (TeX macros) — Leslie Lamport

[*10*] AMS-TeX (TeX macros) — American Mathematical Society

7.3 Линкови

[1] GitHub — Лука С. Нешић — Матурски рад
https://github.com/Nasumica/LukaMaturski-cyr/

[2] WIKIPEDIA — Logarithm
https://en.wikipedia.org/wiki/Logarithm

[3] Wolfram MathWorld — Logarithm
https://mathworld.wolfram.com/Logarithm.html

[4] Wolfram MathWorld — Antiogarithm
https://mathworld.wolfram.com/Antilogarithm.html

[5] Wolfram Language & System Documentation Center — Logarithm
https://reference.wolfram.com/language/ref/Log.html

[6] WolframAlpha — Computational Intelligence
https://www.wolframalpha.com/

[7] A reconstruction of the tables of Briggs' *Arithmetica logarithmica* (1624)
https://inria.hal.science/inria-00543939/PDF/briggs1624doc.pdf

[8] WIKIPEDIA — Benford's law
https://en.wikipedia.org/wiki/Benford's_law

[9] IMDb — The Accountant (2016)
https://www.imdb.com/title/tt2140479/

[10] WIKIPEDIA — Quaternion
https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion

[11] Wolfram Language & System Documentation Center — Quaternions Package
https://reference.wolfram.com/language/Quaternions/tutorial/Quaternions.html

[12] YouTube — Log Tables — Numberphile
https://www.youtube.com/watch?v=VRzH4xB0GdM

[13] YouTube — The iPhone of Slide Rules — Numberphile
https://www.youtube.com/watch?v=xRpR1rmPbJE

[14] YouTube — The Four 4s — Numberphile
https://www.youtube.com/watch?v=Noo4lN-vSvw

[15] YouTube — Fantastic Quaternions — Numberphile
https://www.youtube.com/watch?v=3BR8tK-LuB0

[16] GitHub — Србислав Д. Нешић — Numerical recipes in Pascal
https://github.com/Nasumica/Wirth/

— *Лука С. Нешић*, уторак 03.06.2025. 09:04