

Гимназија „Бора Станковић“
Ниш, Србија

МАТУРСКИ РАД

Предмет: Математика

Тема: Логаритам
једначине и неједначине

Ученик:
Лука Нешић, IV/6

Професор:
Ненад Тотић

2025.

Садржај

1	Увод	3
1.1	Дефиниција логаритма	3
1.2	Ток и график функције	3
1.3	Антилогаритам	3
2	Логаритамске једнакости	4
2.1	Логаритам степена основе	4
2.2	Логаритам производа	4
2.3	Логаритам количника	4
2.4	Логаритам степена броја	5
2.5	Промена основе логаритма	5
3	Најчешће логаритамске основе	6
3.1	Основа 10	6
3.2	Основа 2	6
3.3	Основа e	7
4	Бројна вредност логаритма	8
4.1	Формула	8
4.2	Верижни разломак	8
4.3	Логаритамске таблице	9
4.4	Логаритмар	9
5	Разно	10
5.1	Комплексни логаритам	10
5.2	Кватерниони	11
5.3	Извод	12
5.4	Интеграл	12
5.5	Лимес	12
5.6	Бенфордов закон	12
6	Задаци и решења	13
6.1	Једначине	13
6.1.1	ФИТ	13
6.1.2	Једначина 2	13
6.1.3	Jjjj (yafe)	14
6.1.4	Četiri četvorke	14
6.1.5	Sveska 7	15
6.1.6	Beskonačni koren	15
6.1.7	Нет 3	16
6.1.8	Изумирање	16
6.1.9	Питагора	17
6.2	Неједначине	18
6.2.1	Sveska 11	18
6.2.2	Sveska 9	18
6.2.3	Sveska 10	19

6.2.4	Net 1	19
6.2.5	Net 2	20
6.2.6	Net 6	21
6.2.7	Granice	22
6.3	Кратки примери	23
6.3.1	Земљотрес	23
6.3.2	Децималне цифре	23
6.3.3	Полураспад јода	23
6.3.4	Геометријски низ	23
6.3.5	Извод	24
6.3.6	i на i	24
6.3.7	$\ln(-z)$	24
6.3.8	Прво, па 1	24
6.4	Ручни рад	25
6.4.1	Аналогни степен	25
6.4.2	Аналогни квадратни корен	25
6.4.3	$\ln 3$	26
7	Одреднице	27
7.1	Литература	27
7.2	Софтвер	27
7.3	Линкови	28

1 Увод

Овај рад се бави *логаритамском функцијом*, једном од најважнијих функција у математици. Због своје важности, заједно са експоненцијалном, тригонометријским и њима инверзним функцијама, спада у групу *елементарних функција*. Описане су њене особине и дати пример њене употребе, као и задаци са решењима (укупно 27).

Сама реч *логаритам* потиче од грчких речи $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$ (*логос*) и $\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$ (*аритмос*), са значењем „одговарајући број“.

1.1 Дефиниција логаритма

Функција

$$y = \log_b x \quad (1)$$

је решење по y једначине

$$x = b^y,$$

где је b *основа* (*база*) логаритма, а x *аргумент*. (Изговара се „ y је једнако логаритам од x за основу b “ или краће „ y је логаритам b од x “.)

1.2 Ток и график функције

Функција је у скупу реалних бројева \mathbb{R} дефинисана за $x > 0$ и $b > 0 \wedge b \neq 1$. Функција је *монотона*: за $b > 1$ функција је *растућа*, док за $b < 1$ функција је *опадајуће*. Због тога важи *бијекција*: $\log_b u = \log_b v \Leftrightarrow u = v$. Функција има једну нулу, увек за $x = 1$. Када $x \rightarrow 0$, онда $y \rightarrow -\infty$ за $b > 1$, односно, $y \rightarrow +\infty$ за $b < 1$.



Слика 1: График логаритамске функције $y = \log_b x$.

1.3 Антилогаритам

Инверзна функција логаритму је обично степеновање основе логаритма аргументом и зове се *антилогаритам*

$$\operatorname{antilog}_b x = \log_b^{-1} x = b^x. \quad (2)$$

Из саме дефиниције важи

$$\log_b(\operatorname{antilog}_b x) = \operatorname{antilog}_b(\log_b x) = x. \quad (3)$$

2 Логаритамске једнакости

За логаритамску функцију важе разне *једнакости* које се користе за упрошћавање и прилагођавање израза приликом решавања проблема и задатака.

2.1 Логаритам степена основе

По самој дефиницији логаритма, ако је $x = b^a$, онда је

$$\log_b b^a = a . \quad (4)$$

Ако ставимо да је $1 = b^0$, односно, $b = b^1$, добијамо да је

$$\log_b 1 = 0 \quad \text{и} \quad \log_b b = 1 . \quad (5)$$

Такође је битна једнакост

$$b^{\log_b x} = x \quad (6)$$

која произилази из саме дефиниције логаритма и антилогаритма.

2.2 Логаритам производа

Ако је

$$u = \log_b x \wedge v = \log_b y \stackrel{\text{def}}{\iff} x = b^u \wedge y = b^v ,$$

онда је, због једнакости (4)

$$x \cdot y = b^u b^v = b^{u+v} \Rightarrow \log_b(x \cdot y) = \log_b b^{u+v} = u + v .$$

Одавде је

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y . \quad (7)$$

Из ове једнакости се може извести и формула за логаритам факторијела броја. Ако је

$$n! = \prod_{k=1}^n k \Rightarrow \log(n!) = \sum_{k=1}^n \log k .$$

(Занимљиво је да је $\log(1 \cdot 2 \cdot 3) = \log 1 + \log 2 + \log 3 = \log(1 + 2 + 3)$.)

2.3 Логаритам количника

Слично логаритму производа, ако је

$$u = \log_b x \wedge v = \log_b y \stackrel{\text{def}}{\iff} x = b^u \wedge y = b^v ,$$

онда је, због једнакости (4)

$$x/y = b^u b^{-v} = b^{u-v} \Rightarrow \log_b(x/y) = \log_b b^{u-v} = u - v .$$

Одавде је

$$\log_b(x/y) = \log_b x - \log_b y . \quad (8)$$

Из ове једнакости следи

$$\log_b(1/x) = -\log_b x . \quad (9)$$

2.4 Логаритам степена броја

Ако је

$$y = x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ пута}},$$

онда, из једнакости за логаритам производа (7), следи да је

$$\log_b y = \log_b \underbrace{(x \cdot x \cdots x)}_{n \text{ пута}} = \underbrace{\log_b x + \log_b x + \cdots + \log_b x}_{n \text{ пута}} = n \log_b x,$$

одакле је

$$\log_b x^n = n \log_b x. \quad (10)$$

Из ове једнакости следи једнакост

$$\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_b x, \quad (11)$$

као и једнакост

$$x^y = b^{y \log_b x}. \quad (12)$$

2.5 Промена основе логаритма

Ако је

$$y = \log_a x \stackrel{\text{def}}{\iff} x = a^y,$$

онда је

$$\log_b x = \log_b a^y = y \log_b a = \log_a x \cdot \log_b a.$$

Одавде је

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}. \quad (13)$$

Из ове једнакости, ако ставимо да је $x = b$, се добија и једнакост

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1. \quad (14)$$

Из једнакости (4) и (13), ако ставимо да је $a = b^n$, следи једнакост

$$\log_{b^n} x = \frac{1}{n} \log_b x. \quad (15)$$

Одавде, ако ставимо да је $n = -1$, следи

$$\log_{1/b} x = -\log_b x, \quad (16)$$

а узевши у обзир и једнакост (9) добија се

$$\log_{1/b} x = \log_b(1/x). \quad (17)$$

⚠ Треба бити опрезан код коришћења свих ових једнакости, нарочито код степеновања, и увек треба проверити опсег у коме се рачуна. На пример, из једнакости (10), следи $\log x^2 = 2 \log x$, што је исправно за $x > 0$, међутим, $\log x^2 = 2 \log |x|$ за било које $x \neq 0$.

3 Најчешће логаритамске основе

3.1 Основа 10

У инжењерству се најчешће користи логаритам са основом 10, зове се *декадни* или *заједнички* логаритам, и пише се

$$y = \log_{10} x.$$

Понекад се може видети и само

$$y = \log x,$$

без навођења основе, али треба обратити пажњу на контекст. Ако је неки инжењерски текст у питању, највероватније се мисли на основу 10.

Декадни логаритам је погодан и када се користи, такозвани *научни* или *инжењерски* запис броја. На пример, *Планкова константа* (Max Planck) износи

$$h = 6,62607015 \times 10^{-34} \text{ J/Hz}$$

која има декадни логаритам

$$\log_{10} h = \log_{10}(6,62607015) - 34.$$

У физици се за мерење нивоа сигнала или звука користи јединица *бел* (B), али је чешће у практичној употреби 10 пута мања јединица *децибел* (dB), односно, $1 \text{ B} = 10 \text{ dB}$. Ниво сигнала L , који зависи од односа измерене снаге P и референтне снаге P_0 , изражен у децибалима износи

$$L = 10 \log_{10} \left(\frac{P}{P_0} \right) \text{ dB}.$$

Како се у акустици узима да је референтна снага $P_0 = 10^{-12} \text{ W}$, могло би се писати да је ниво звука у децибелима

$$L = 10 \log_{10}(P) - 120.$$

Нормалан говор је око 50 dB, звук мотора млазног авиона при полетању је 150 dB, а смртоносан је звук од 240 dB и више. Звучни топ Genasys LRAD има ниво звука око 160 dB, што значи да је 10^{11} пута моћнији од говора.

Слична формула се користи и за одређивање јачине земљотреса, или pH вредности $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$.

3.2 Основа 2

У информатици се често користи логаритам са основом 2, који се зове *бинарни* логаритам, и пише се

$$y = \log_2 x.$$

Користи се у комбинаторици, као за одређивање *количине информација*, односно, потербног броја битова меморије за смештање неког податка. Ако се зна да ће у меморију бити уписивани цели бројеви од 0 до n , онда је потребно резервисати

$$\text{bits} = \lfloor \log_2(n) \rfloor + 1 \tag{18}$$

битова меморије, где $\lfloor x \rfloor$ представља *највећи сео број који је мањи или једнак x* (изговара се „највеће цело од x “). На пример, ако ће у одређеној меморији највећи број бити милион, онда је за то потребно резервисати

$$bits = \lfloor \log_2(1\,000\,000) \rfloor + 1 = \lfloor 19,9315685693 \rfloor + 1 = 19 + 1 = 20$$

битова меморије. Највећи број који може стати у ових резервисаних 20 битова меморије је бинарни број који има 20 јединица и износи

$$(1111\,1111\,1111\,1111\,1111)_2 = 2^{20} - 1 = 1\,048\,575.$$

Како су и реални бројеви у меморији представљени као уређени парови бинарних бројева у облику $x = (mantissa, exponent)$, са значењем

$$x = mantissa \times 2^{exponent},$$

бинарни логаритам би био израчунат као

$$\log_2(x) = \log_2(mantissa) + exponent,$$

ако је $mantissa > 0$, иначе је недефинисан.

Бинарни логаритам се користи и у атомској физици. Време *полураспада* $t_{1/2}$ је време потребно да се распадне половина језгара атома неке материје. Ако имамо почетан број језгара N_0 и број језгара N_t након времена t , њихов однос се може представити формулом

$$\frac{N_0}{N_t} = 2^{t/t_{1/2}} \Rightarrow \frac{t}{t_{1/2}} = \log_2 \left(\frac{N_0}{N_t} \right). \quad (19)$$

Ова формула се користи и за одређивање старости стена или фосила.

3.3 Основа e

Ову логаритамску основу је открио Јакоб Бернули (Jacob Bernoulli) када је проучавао *сложену камату* и доказао да *континуална* сложена камата тежи константи

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n,$$

али је тек Ојлер (Leonhard Euler) одредио њену тачну вредност и дао јој име. Логаритам за ову основу се зове *природни* логаритам (*logarithmus naturalis*) и пише се

$$\ln x = \log_e x.$$

Антилогаритам је *експоненцијална* функција $e^x = \exp(x)$, која је позната по томе што је то једина функција чији је први извод једнак самој функцији: $\exp'(x) = \exp(x)$. Бројна вредност се може израчунати формулом

$$e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (20)$$

Ако ставимо да је $x = 1$, бројна вредност основе природног логаритма e се може одредити

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots \\ &= 2,7182818284\,5904523536\,0287471352\,6624977572 \dots \end{aligned} \quad (21)$$

са жељеном тачношћу.

4 Бројна вредност логаритма

4.1 Формула

Бројна вредност природног логаритма може бити израчуната помоћу формуле

$$\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2n+1} \quad (22)$$

до жељене тачности. Поступак којим се рачуна $y = \ln x$ са тачношћу ε изгледа овако:

$$\begin{array}{l} r \leftarrow (x-1)/(x+1); \quad k \leftarrow 1; \quad p \leftarrow 2r; \quad q \leftarrow r^2; \quad a \leftarrow p; \quad y \leftarrow a; \\ \text{понављати док је } |a| > \varepsilon: \\ \quad k \leftarrow k+2; \quad p \leftarrow p \cdot q; \quad a \leftarrow p/k; \quad y \leftarrow y + a; \end{array} \quad (23)$$

Овим поступком се може израчунати вредност

$$\begin{aligned} \ln 2 &= \frac{2}{1 \cdot 3^1} + \frac{2}{3 \cdot 3^3} + \frac{2}{5 \cdot 3^5} + \frac{2}{7 \cdot 3^7} + \frac{2}{9 \cdot 3^9} + \dots \\ &= 0,6931471805\,5994530941\,7232121458\,1765680755 \dots \end{aligned} \quad (24)$$

као и вредност

$$\begin{aligned} \ln 10 &= \frac{2}{1 \cdot 9^1} + \frac{2}{3 \cdot 9^3} + \frac{2}{5 \cdot 9^5} + \frac{2}{7 \cdot 9^7} + \frac{2}{9 \cdot 9^9} + \dots + 3 \ln 2 \\ &= 2,3025850929\,9404568401\,7991454684\,3642076011 \dots \end{aligned} \quad (25)$$

(Видети задатак 6.4.3 на страни 26.) Помоћу њих се могу израчунати бројне вредности бинарног $\log_2 x = \ln x / \ln 2$, односно, декадног $\log_{10} x = \ln x / \ln 10$ логаритма.

4.2 Верижни разломак

Бројна вредност природног логаритма може се израчунати и помоћу *верижног разломка*

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \frac{x}{1 + \frac{1^2 x}{2 - 1x + \frac{2^2 x}{3 - 2x + \frac{3^2 x}{4 - 3x + \ddots}}}} \\ &= \frac{x}{1 + \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{n+1-nx}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Попут симбола које се користе за суму ‘ Σ ’ или производ ‘ Π ’, Гаус (Johann Carl Friedrich Gauß) је смислио погодан начин за представљање верижних (ланчаних) разломака, где симбол ‘ K ’ потиче од немачке речи за *прекинути ланац* (Kettenbruch). Израз иза овог симбола показује како изгледа *општи члан* верижног разломка.

Ако помоћу ове формуле израчунамо првих 11 *конвергената* $\ln 2$ као $-\ln(1+x)$, где је $x = -1/2$, добићемо

$$\ln 2 \approx \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{131}{192}, \frac{661}{960}, \frac{1327}{1920}, \frac{1163}{1680}, \frac{148969}{215040}, \frac{447047}{645120}, \frac{44711}{64512}, \frac{983705}{1419264}, \dots$$

где је последњи разломак тачан на 5 децимала.

4.3 Логаритамске таблице

Прве таблице логаритама је 1614. године израчунао шкотски математичар Непер (John Napier of Merchiston), које су практично садржале логаритам за основу $1/e$, са скалираним аргументом и резултатом, иако сам Непер није знао за константу e . Савременим записом би логаритам из Неперових таблица био дефинисан као

$$\text{NapLog}(x) = 10^7 \log_{1/e}(x/10^7) = -10^7 \ln(x/10^7).$$

Неколико година касније, 1617. и 1624, енглески математичар Бригс (Henry Briggs) је израчунао таблице декадних логаритама са 14 цифара тачности, које се уз допуне и исправке користе и данас под именом *Бригсове таблице*.

4.4 Логаритмар

Пре појаве дигитрона, за приближно одређивање бројне вредности логаритма, користила се је аналогна механичка справа са неколико лењира звана *логаритмар*.



Слика 2: Шибер.

Лењери имају подеке са децималном и логаритамском, а често и са синусном и неком другом скалом. Један од лењира је био клизни, те отуда популарно име *шибер* (од немачког *Rechenschieber*). Користи се једноставно, померањем клизача и читањем вредности са одговарајуће скале. (Видети задатке 6.4.1 и 6.4.2.)

Постојале су и кружне варијанте, па и џепне, где је џепни сат са логаритмаром и компасом био „iPhone“ XIX и прве половине XX века.



Слика 3: Џепни логаритмар.

Таблице и логаритмари се и данас користе у војсци, као резерва у случају отказивања електронике. Први компјутер ENIAC (Electronic Numerical Integrator And Computer) је направљен 1946. године са наменом да израчуна таблице за војску.

5 Разно

5.1 Комплексни логаритам

Ако у комплексној равни имамо комплексан број $z \in \mathbb{C}$,



Слика 4: Број z у комплексној равни.

он може бити представљен као

$$\begin{aligned} z &= x + iy && \text{правоугле координате,} \\ &= \rho (\cos \theta + i \sin \theta) && \text{поларне координате.} \end{aligned}$$

Из Ојлерове формуле¹

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad (27)$$

слиди да је $z = \rho e^{i\theta}$, одакле, из једнакости (7) и (4) се добија

$$\ln z = \ln \rho + i\theta. \quad (28)$$

Пошто је $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$, слиди да природни логаритам комплексног броја z није дефинисан само за $z = 0$, када је $\ln z = \infty$. Како је $y/x = \tan \theta$, природни логаритам комплексног броја, представљеног правоуглим координатама може се израчунати

$$\ln(x + iy) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad (29)$$

као и

$$\exp(x + iy) = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (30)$$

И за комплексне бројеве важи једнакост промене основе (13), тако да за два комплексна броја z и w , где је $z \neq 0$, $w \neq 0$ и $w \neq 1$, слиди $\log_w z = \ln z / \ln w$, где се $\ln z$ и $\ln w$ рачунају помоћу формуле (28), односно, (29). На пример,

$$\log_{2+i}(3 + 4i) = 2, \quad \log_i e = \frac{2}{i\pi}, \quad \log_2(-4) = 2 + \frac{i\pi}{\ln 2}.$$

Из Ојлерове формуле слиди и најлепша формула у историји математике, у којој је употребљено 5 најважнијих математичких константи $(0, 1, \pi, e, i)$

$$e^{i\pi} + 1 = 0, \quad (31)$$

где, ако пребацимо 1 на десну страну и логаритмујемо, добијамо једнакост

$$\frac{\ln(-1)}{\sqrt{-1}} = \pi.$$

¹Ојлерова формула се лако доказује из формуле (20) и сличних формула за $\sin x$ и $\cos x$, које се добијају из Меклореновог реда (Cailean MacLabhrúinn): $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) (x^n/n!)$, где $f^{(n)}$ представља n -ти извод функције f .

5.2 Кватерниони

Попут скупа комплексних бројева \mathbb{C} , који представљају објекте у 2D простору, скуп кватерниона \mathbb{H} , представља објекте у 3D простору. Први их је описао 1843. године ирски математичар Хамилтон (William Rowan Hamilton), те њему у част и ознака скупа \mathbb{H} . У информатици су неизбежни део свега што се дешава у 3D: навигација авиона, подморница, ракета, сателита, небеска и квантна механика, роботика, игре, графика, ...

Кватернион $q \in \mathbb{H}$ може бити представљен као збир


$$q = s + v \quad (32)$$

који се састоји од скаларног дела $s \in \mathbb{R}$ и векторског дела $v \in \mathbb{R}^3$, где је

$$v = xi + yj + zk \quad (33)$$

3D вектор са координатама (x, y, z) , а где су i, j и k јединични вектори по x, y и z оси, за које важи

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \quad ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j. \quad (34)$$

 У скупу кватерниона \mathbb{H} за операцију множења, уопштено, не важи закон кому-
тације: $ji = -ij = -k$, $kj = -jk = -i$, $ik = -ki = -j$. Ово је логично кад се
стимо да и код Рубикове коцке најчешће није свеједно којим редоследом окрећемо
странице. Важи асоцијативност: $(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$.

Да би $q = s + v$ био прави кватернион, мора бити $v \neq 0$, иначе је q обичан реалан број, када се примењују операције и функције из скупа \mathbb{R} . Ако одредимо апсолутну вредност кватерниона

$$\lambda = |v| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \rho = |q| = \sqrt{s^2 + \lambda^2}$$

која се зове норма, одредимо јединични вектор (*unit*) векторског дела кватерниона

$$u = \frac{v}{\lambda},$$

који се зове версор и где је по дефиницији² $|u| = 1$ и $u^2 = -1$, као и угао оријентације

$$\varphi = \arccos\left(\frac{s}{\rho}\right),$$

можемо добити поларни запис кватерниона


$$q = \rho(\cos \varphi + u \sin \varphi) = \rho e^{u\varphi}. \quad (35)$$

Из свега овога се може добити

$$\ln(q) = \ln \rho + u\varphi \quad (36)$$

и

$$\exp(q) = e^s (\cos \lambda + u \sin \lambda). \quad (37)$$

 Остале операције и функције нису тема овог рада, али сабирање и одузимање
је уобичајено, код множења треба обратити пажњу на формулу (34) и кому-
тативност, а реципрочна вредност је $q^{-1} = \bar{q}/\rho^2$, где је $\bar{q} = s - v$, конјугована вредност.
Тригонометријске и хиперболичне функције се могу изразити помоћу експоненци-
јалне, а њихове инверзне помоћу логаритамске функције.

²У скупу \mathbb{H} , $\sqrt{-1}$ има бесконачно решења: сваки кватернион који се налази на јединичној сфери је решење ($s = 0 \wedge x^2 + y^2 + z^2 = 1$), односно, сваки версор.

5.3 Извод

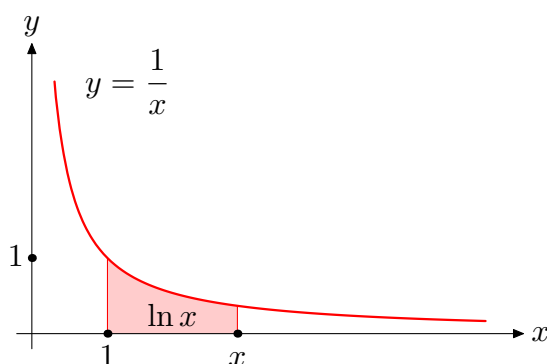
Ако је

$$y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x},$$

одакле се, помоћу једнакости (13) и једнакости за извод сложене функције, добија

$$y = \log_b(f(x)) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{f(x) \ln b}. \quad (38)$$

Површина фигуре испод функције $y = 1/x$ до x -осе, у опсегу од 1 до x износи $\ln x$. Математички записано: $\int_1^x dx/x = \ln x$.



Слика 5: Геометријско значење $\ln x$.

(На слици је $x = e$, тако да је површина сенчане фигуре једнака 1.)

5.4 Интеграл

Неодређени интеграл природног логаритма је

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + \text{constant}. \quad (39)$$

5.5 Лимес

Ојлер је доказао да је

$$\ln x = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1). \quad (40)$$

5.6 Бенфордов закон

Вероватноћа да почетне цифре неке математичке или физичке константе (као и дужине реке, висине планине, броја становника, стања на рачуну, ...), буду ℓ за бројну основу b , прати такозвани *Бенфордов закон* (Frank Benford), и износи

$$P(b, \ell) = \log_b \left(1 + \frac{1}{\ell} \right). \quad (41)$$

На пример, у *Фибоначијевом низу*: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, ..., вероватноћа да прва цифра неког члана низа буде 9 износи $\log_{10}(1 + 1/9) \approx 4,58\%$. Ову законитост је открио 1881. године астроном Њуком (Simon Newcomb), када је приметио да су листови логаритамских таблица које је дуго користио најпрљавији на почетку: . (Видети задатак 6.3.8.)

6 Задачи и решења

6.1 Једначине

6.1.1 ФИТ

▷ **Задатак:** Нађи решење једначине

$$\log_2(x-2) + \log_4(x-2) + \log_{16}(x-2) = 7.$$

(Задатак са мог пријемног испита на ФИТ „Метрополитан“.)

► **Решење:** Видимо да су основе логаритама степени броја 2, па из једнакости за логаритам степена основе(15) следи

$$\begin{aligned}\log_2(x-2) + \log_{2^2}(x-2) + \log_{2^4}(x-2) &= \\ \log_2(x-2) + \frac{1}{2}\log_2(x-2) + \frac{1}{4}\log_2(x-2) &= \\ \frac{7}{4}\log_2(x-2) &= 7,\end{aligned}$$

односно, после скраћивања,

$$\log_2(x-2) = 4.$$

Одавде је

$$x-2 = 2^4 = 16 \Rightarrow x = \boxed{18}.$$

6.1.2 Једначина 2

▷ **Задатак:** Reši jednačinu

$$2\log(x) - \log(6-x) = 0.$$

► **Решење:** Da bi logaritam u jednačini bio definisan mora biti

$$x > 0 \wedge 6-x > 0 \Rightarrow 0 < x < 6.$$

Zbog jednakosti (10) možemo pisati

$$\log(x^2) = \log(6-x)$$

odakle sledi

$$\begin{aligned}x^2 &= 6-x \\ x^2 + x - 6 &= 0.\end{aligned}$$

Rešavanjem³ kvadratne jednačine

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2},\end{aligned}$$

dobijamu rešenja $x_1 = 2$ i $x_2 = -3$, odakle je jedinstveno rešenje

$$x = \boxed{2}.$$

³U nastavku rada, postupak rešavanja linearne i kvadratne jednačine će biti izostavljen.

6.1.3 Jjjj (yafe)

▷ **Задатак:** Reši jednačinu

$$\ln(x) = \ln(15 - x) - \ln(x + 1).$$

► **Решење:** Jednačina je definisana za

$$x > 0 \wedge 15 - x > 0 \wedge x + 1 > 0 \Rightarrow 0 < x < 15.$$

Ako zapišemo jednačinu kao

$$\ln(x) + \ln(x + 1) = \ln(15 - x)$$

iz jednakosti za logaritam proizvoda (7), možemo pisati

$$\ln(x(x + 1)) = \ln(15 - x)$$

$$\ln(x^2 + x) = \ln(15 - x)$$

$$x^2 + x = 15 - x$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

Rešavanjem kvadratne jednačine dobijamo 2 rešenja, $x_1 = 3$ i $x_2 = -5$, ali zbog uslova, ostaje jedinstveno

$$x = \boxed{3}.$$

6.1.4 Četiri četvorke

▷ **Задатак:** Dokazati da svaki prirodan broj $n \in \mathbb{N}$, može biti predstavljen sa 4 broja 4, pomoću logaritamske funkcije i kvadratnog korena

$$n = \log_{\sqrt{4}/4} \left(\log_4 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{4}}}}_{n \text{ korena}} \right).$$

► **Решење:** Kako je

$$\frac{\sqrt{4}}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{4}}}}_{n \text{ korena}} = 4^{(1/2)^n},$$

izraz može biti uprošćen

$$\log_{\sqrt{4}/4} \left(\log_4 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{4}}}}_{n \text{ korena}} \right) = \log_{1/2} (\log_4 4^{(1/2)^n}),$$

gde iz jednakosti za logaritam stepena osnove (4), sledi

$$\begin{aligned} &= \log_{1/2} (1/2)^n \\ &= \boxed{n}. \end{aligned}$$

★ **Додатак:** *Davno je u jednom časopisu postavljen sličan zadatak: da se sa što manje istih brojeva, koristeći bilo koju matematičku funkciju, predstavi svaki prirodan broj n . Rešio ga je nobelovac Pol Dirak (Paul Dirac) sa 3 broja 2, čije originalno rešenje izgleda*

$$-\log_2 \log_2 \sqrt{\dots n \dots \sqrt{2}} = -\log_2 \log_2 2^{2^{-n}} = -\log_2 2^{-n} = n. \quad \square$$

6.1.5 Sveska 7

▷ **Задатак:** Нађи x ако је

5

$$x^{\log x} = 1000x^2.$$

► **Решење:** Ако logarithмујемо обе стране добијемо

$$\begin{aligned}\log x^{\log x} &= \log(1000x^2) \\ \log x \log x &= \log 1000 + \log x^2 \\ \log^2 x &= 3 + 2 \log x,\end{aligned}$$

где, после смене $t = \log x$, добијемо квадратну једначину

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

чија су решења $t_1 = 3$ и $t_2 = -1$, одакле су

$$x_1 = 10^3 = \boxed{1000} \quad \text{и} \quad x_2 = 10^{-1} = \boxed{\frac{1}{10}}.$$

6.1.6 Beskonačni koren

▷ **Задатак:** Одреди вредност

6

$$x = \ln \left(e^{\sqrt[2]{e^{\sqrt[3]{e^{\sqrt[4]{e^{\sqrt[5]{\dots}}}}}}}} \right).$$

► **Решење:** Како је $\ln e = 1$ и користећи једнакост за logaritham производа (7) и једнакост за logaritham korena (11), можемо писати

$$\begin{aligned}x &= 1 + \frac{1}{2} \ln \left(e^{\sqrt[3]{e^{\sqrt[4]{e^{\sqrt[5]{\dots}}}}}} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \ln \left(e^{\sqrt[4]{e^{\sqrt[5]{\dots}}}} \right) \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{4} \ln \left(e^{\sqrt[5]{\dots}} \right) \right) \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{5} \ln(\dots) \right) \right) \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + \dots \\ &= \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots\end{aligned}$$

Ако погледамо формулу (21) на страни 7, можемо видети да је овај збир једнак

$$x = \boxed{e - 1},$$

јер из суме за израчунавање e недостаје *nulti* члан $1/0! = 1$.

6.1.7 Нет 3

▷ **Задатак:** Одреди n^3 ако је

7

$$\log_{5n} 30\sqrt{5} = \log_{4n} 48.$$

► **Решење:** Пребацимо логаритме у основу 6, јер је 6 нзд за 30 и 48 из израза

$$\begin{aligned}\frac{\log_6 30\sqrt{5}}{\log_6 5n} &= \frac{\log_6 48}{\log_6 4n} \\ \frac{\log_6 6 + \log_6 5 + \frac{1}{2} \log_6 5}{\log_6 5 + \log_6 n} &= \frac{\log_6 6 + \log_6 8}{\log_6 4 + \log_6 n} \\ \frac{1 + \frac{3}{2} \log_6 5}{\log_6 5 + \log_6 n} &= \frac{1 + 3 \log_6 2}{2 \log_6 2 + \log_6 n}.\end{aligned}$$

Када извршимо смену $n = 6^t$, односно, $t = \log_6 n$ и $u = \log_6 2$ и $v = \log_6 5$, добијамо

$$\begin{aligned}\frac{1 + \frac{3}{2}v}{v + t} &= \frac{1 + 3u}{2u + t} \\ (1 + \frac{3}{2}v)(2u + t) &= (1 + 3u)(v + t) \\ 2u + 3uv + t + \frac{3}{2}vt &= v + 3uv + t + 3ut \quad / -3uv; -t; \times 2; \\ 4u + 3vt &= 2v + 6ut \\ 6ut - 3vt &= 4u - 2v \\ t(6u - 3v) &= 4u - 2v \\ t &= \frac{4u - 2v}{6u - 3v} \\ t &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2u - v}{2u - v} \\ t &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Одавде је

$$n^3 = 6^{3t} = \boxed{36}.$$

6.1.8 Изумирање

▷ **Задатак:** Нађи n ако је

8

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdots \log_n (n+1) = 10.$$

► **Решење:** Ако пребацимо све логаритме у основу 2, добијамо

$$\log_2 3 \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 6}{\log_2 5} \cdots \frac{\log_2 (n+1)}{\log_2 n} = 10.$$

Видимо да ће, након масовног скраћивања, изумрети сви изрази осим

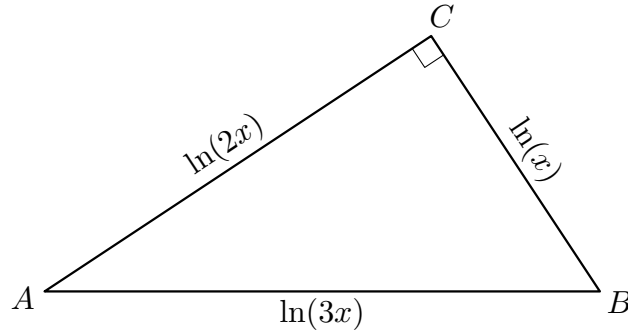
$$\log_2 (n+1) = 10,$$

одакле је,

$$n+1 = 2^{10} = 1024 \Rightarrow n = \boxed{1023}.$$

6.1.9 Питагора

▷ **Задатак:** Одреди x са слике.



Слика 6: Правоугли троугао $\triangle ABC$.

(Задатак са Tik-Тока.)

► **Решење:** Нађимо најпре решење општег случаја

$$a = \ln(px), \quad b = \ln(qx), \quad c = \ln(rx).$$

Због лакшег писања, извршимо смену

$$t = \ln x, \quad u = \ln p, \quad v = \ln q, \quad w = \ln r,$$

одакле је

$$a = t + u, \quad b = t + v, \quad c = t + w.$$

Из Питагорине теореме $a^2 + b^2 = c^2$, следи да је

$$(t + u)^2 + (t + v)^2 = (t + w)^2$$

$$t^2 + 2tu + u^2 + t^2 + 2tv + v^2 = t^2 + 2tw + w^2$$

где, након сређивања, добијамо квадратну једначину

$$t^2 + 2(u + v - w)t + (u^2 + v^2 - w^2) = 0,$$

чија су решења

$$t_{1,2} = w - u - v \pm \sqrt{2(w - u)(w - v)},$$

али нас занима само позитивно. Када вратимо смену добијамо

$$\ln x = \ln \left(\frac{r}{pq} \right) + \sqrt{2 \ln \left(\frac{r}{p} \right) \ln \left(\frac{r}{q} \right)},$$

где је, после антилогаритмовања

$$x = \frac{r}{pq} \cdot e^{\sqrt{2 \ln(r/p) \ln(r/q)}}.$$

Због логаритама испод корена видимо да мора бити $p, q, r > 0$ или $p, q, r < 0$, и $|p|, |q| < |r|$, где ће x имати исти знак као p, q и r .

Када заменимо вредности са слике, $p = 1$, $q = 2$ и $r = 3$, добијамо да је

$$x = \boxed{\frac{3}{2} e^{\sqrt{2 \ln(3) \ln(3/2)}}} \approx 3,85488,$$

а странице троугла су приближно

$$a \approx 1,34934, \quad b \approx 2,04249, \quad c \approx 2,44795.$$

(На слици је 1 = '_____'.)

6.2 Неједначине

6.2.1 Sveska 11

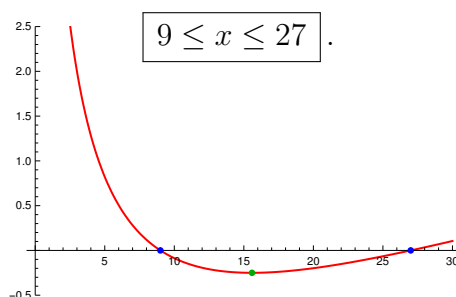
▷ **Задатак:** Реши неједначину

$$\log_3^2 x - 5 \log_3 x + 6 \leq 0.$$

► **Решење:** Када извршимо сммену $t = \log_3 x$, можемо писати да је

$$t^2 - 5t + 6 \leq 0$$

Како су решења квадратне једначине $t_1 = 2$ и $t_2 = 3$, неједначина је задовољена када је $t \in [2, 3]$. Пошто је $x = 3^t$, следи да је неједначина задовољена за $x \in [3^2, 3^3]$, односно,



Слика 7: $y = \log_3^2 x - 5 \log_3 x + 6$.

★ **Додатак:** Функција има minimum за $t = 5/2$, односно, у таčki $(9\sqrt{3}, -1/4)$.

6.2.2 Sveska 9

▷ **Задатак:** Одреди у којим границама је задовољен услов

$$\log_3(x^2 - 4) < \log_3 5.$$

► **Решење:** Ако се ослободимо логаритма

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &< 5 \\ x^2 &< 9, \end{aligned}$$

добићемо да је $-3 < x < 3$. Међутим, да би логаритам био дефинисан мора бити

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &> 0 \\ x^2 &> 4, \end{aligned}$$

односно, $x < -2$ или $x > 2$. Одавде је

$$x \in (-3, -2) \cup (2, 3).$$



Слика 8: $y = \log_3(x^2 - 4)$; $\log_3 5$.

6.2.3 Sveska 10

▷ **Задатак:** Reši nejednačinu

12

$$\log_5 x \geq \frac{1}{2} \log_5(3x - 2).$$

► **Решење:** Da bi logaritam bio definisan, vidimo da mora biti

$$3x - 2 > 0 \Rightarrow x > \frac{2}{3}.$$

Ako nejednačinu pomozimo sa 2, dobijamo

$$\begin{aligned} 2 \log_5 x &\geq \log_5(3x - 2) \\ \log_5 x^2 &\geq \log_5(3x - 2) \\ x^2 &\geq 3x - 2 \\ x^2 - 3x + 2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Kvadratna jednačina ima rešenja $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$, pa je rešenje nejednačine

$$x \in \left(\frac{2}{3}, 1 \right] \cup [2, \infty).$$



Слика 9: $y = \log_5 x$; $\frac{1}{2} \log_5(3x - 2)$.

6.2.4 Net 1

▷ **Задатак:** Reši

13

$$\log_{3x+5}(9x^2 + 8x + 8) > 2.$$

► **Решење:** Ako antilogaritmuјemo obe strane dobijamo

$$\begin{aligned} 9x^2 + 8x + 8 &> (3x + 5)^2 \\ 9x^2 + 8x + 8 &> 9x^2 + 30x + 25 \\ 8x + 8 &> 30x + 25, \end{aligned}$$

gde je nakon sređivanja

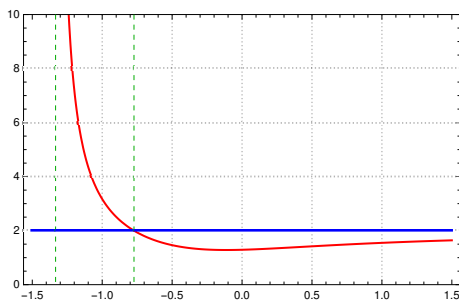
$$x < -\frac{17}{22}$$

Sledeći uslov je da osnova bude veća od 1, to jest

$$\begin{aligned} 3x + 5 &> 1 \\ x &> -\frac{4}{3}, \end{aligned}$$

odakle sledi rešenje

$$x \in \left(-\frac{4}{3}, -\frac{17}{22} \right).$$



Слика 10: $y = \log_{3x+5}(9x^2 + 8x + 8)$; 2.

6.2.5 Net 2

▷ **Задатак:** Нађи вредности које задовољавају неједначину

14

$$\log_7(x + 5) > \log_5(x + 5).$$

► **Решење:** Претварамо израз у заједнички логаритам

$$\begin{aligned} \frac{\log(x + 5)}{\log 7} &> \frac{\log(x + 5)}{\log 5} \\ \log 5 \log(x + 5) &> \log 7 \log(x + 5). \end{aligned}$$

Како је $\log 5 < \log 7$ и позитивни су, да би услов важио, мора бити

$$\log(x + 5) < 0,$$

odakle је

$$\begin{aligned} x + 5 &< 1 \\ x &< -4, \end{aligned}$$

a da bi logaritam bio definisan mora da важи i

$$\begin{aligned} x + 5 &> 0 \\ x &> -5, \end{aligned}$$

odakle је rešenje

$$x \in (-5, -4).$$



Слика 11: $y = \log_7(x+5)$; $\log_5(x+5)$.

6.2.6 Net 6

▷ **Задатак:** Које вредности задовољавају услов

15

$$\log_2(x+1) > \log_4 x^2?$$

► **Решење:** Ако леву страну запишемо као

$$2 \cdot \frac{1}{2} \log_2(x+1) = \log_{2^2}(x+1)^2$$

што следи из једнакости (15) и (10), добићемо

$$\log_4(x+1)^2 > \log_4 x^2$$

$$(x+1)^2 > x^2$$

$$x^2 + 2x + 1 > x^2$$

$$2x + 1 > 0$$

$$x > -\frac{1}{2}.$$

Како мора да важи $x > -1$ и $x \neq 0$, добијемо коначно решење

$$x \in \left(-\frac{1}{2}, 0 \right) \cup (0, \infty).$$



Слика 12: $y = \log_2(x+1) - \log_4 x^2$.

★ **Додатак:** Као што је на страни 5 напоменуто, да смо $\log_4 x^2$ једноставно представили као $\log_{2^2} x^2 = \log_2 x$, добили бисмо нетачно решење. Исправно би било $\log_4 x^2 = \log_2 |x|$, када бисмо посебно гледали 2 случаја: за $x > 0$ и за $x < 0$.

6.2.7 Granice

▷ **Задатак:** Dokaži da važi nejednakost

16

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1, \quad (42)$$

kojom se definišu *donja* i *gornja* granica prirodnog logaritma.

► **Решење:** Pogledajmo prvo desni deo nejednakosti. Ako definišemo funkciju

$$y = \ln x - (x - 1),$$

potrebno je da dokažemo da je $y \leq 0$ za svako $x > 0$. Intuitivno je jasno da tvđenje važi, jer $\ln x$ mnogo sporije raste od $x - 1$, i formalni dokaz će nam se zasnivati na tome.

Prvi izvod funkcije je

$$y' = \frac{1}{x} - 1,$$

koji ima jedinstvenu nulu $y' = 0$ za $x = 1$, gde je i $y = 0$. Kako je drugi izvod

$$y'' = -\frac{1}{x^2} < 0,$$

uvek negativan, to znači da funkcija y nema *prevojnih tačaka* i da tačka $(1, 0)$ predstavlja *maksimum* funkcije y , odakle je $y \leq 0$, odnosno,

$$\ln x \leq x - 1.$$

Ako u ovu nejednakost umesto x stavimo $1/x$, možemo pisati

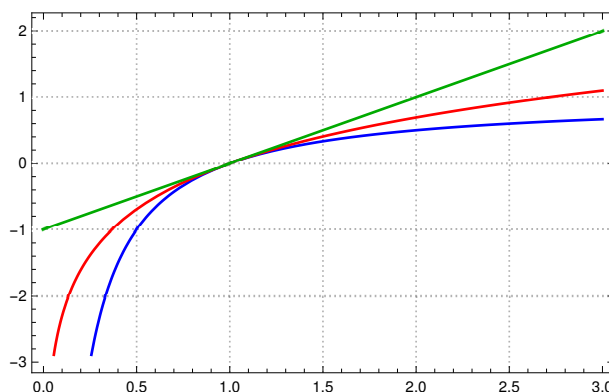
$$\begin{aligned} \ln(1/x) &\leq \frac{1}{x} - 1 \\ -\ln x &\leq \frac{1}{x} - 1, \end{aligned}$$

gde, kada izrazi zamene strane i znak, dobijamo

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln x,$$

što predstavlja levi deo nejednakosti iz zadatka. □

★ **Додатак:** Sve tri funkcije iz nejednakosti se *dodiruju* u tački $(1, 0)$, što znači da u toj tački sve tri imaju istu *tangentu*, odnosno, isti prvi izvod $y'(1) = 1$; inače bi se sekle i nejednakost ne bi važila.



Слика 13: $y = 1 - 1/x$; $\ln x$; $x - 1$.

6.3 Кратки примери

6.3.1 Земљотрес

- ▷ **Задатак:** Магнитуда земљотреса M по Рихтеровој скали у епицентру зависи логаритамски од интензитета земљотреса I 17

$$M = \log_{10} I.$$

У августу 2009, јапанско острво Хоншу је погодио земљотрес магнитуде $M_1 = 6,1$ по Рихтеру, а у марту 2011, разарајући земљотрес који је био око 800 пута јачи од првог. Колико степени по Рихтеру је имао други? (Користи логаритамске таблице или логаритмар.)

- **Решење:** $M_2 = M_1 + \log_{10} 800 \approx 6,1 + 2,9 = \boxed{9,0}$ степени Рихтера.

6.3.2 Децималне цифре

- ▷ **Задатак:** Колико децималних цифара d има 128-битна променљива? 18

- **Решење:** $d = \lfloor \log_{10} 2^{128} \rfloor + 1 = \lfloor 128 \log_{10} 2 \rfloor + 1 = \lfloor 38,53184 \rfloor + 1 = 38 + 1 = \boxed{39}$.

6.3.3 Полураспад јода

- ▷ **Задатак:** Ако имамо 63 g изотопа јода ^{131}I , а знамо да смо пре 11 дана имали 163 g, које је време полураспада овог изотопа? (Користи природни логаритам.) 19

- **Решење:** Из формуле (19) на страни 7, следи да је време полураспада

$$t_{1/2} = \frac{t}{\log_2(m_0/m_t)} = \frac{t \ln 2}{\ln(m_0/m_t)} = \frac{11 \ln 2}{\ln(163/63)} \approx \boxed{8,02} \text{ дана.}$$

6.3.4 Геометријски низ

- ▷ **Задатак:** За $0 \leq x < 1$, упростити израз 20

$$y = \log(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots).$$

- **Решење:** Како је збир бесконачног геометријског низа⁴

$$s = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x},$$

може се писати

$$y = \log\left(\frac{1}{1-x}\right),$$

где из једнакости за реципрочну вредност (9), следи

$$= \boxed{-\log(1-x)}.$$

⁴**Доказ:** $s = 1 + x \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots) = 1 + x \cdot s$, одакле је $s - x \cdot s = 1$, следи да је $s = 1/(1-x)$. □

6.3.5 Извод

▷ **Задатак:** Одреди извод функције $f(\alpha) = \ln \operatorname{sinc} \alpha$, где је $\operatorname{sinc} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$.

21

► **Решење:** Помоћу једнакости (8) разложимо функцију на

$$f(\alpha) = \ln \sin \alpha - \ln \alpha,$$

а како је извод $\sin \alpha$ једнак $\cos \alpha$ и из једнакости (38) за извод логаритма функције, следи да је

$$f'(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} = \boxed{\cot \alpha - \frac{1}{\alpha}}.$$

6.3.6 i на i

▷ **Задатак:** Одреди вредност i^i где је $i = \sqrt{-1}$, имагинарна јединица.

22

► **Решење:** Како у комплексној равни i има поларне координате $\rho = 1$ и $\theta = \pi/2$, ако га представимо Ојлеровом формулом као $i = e^{i\pi/2}$ и из једнакости (12) и (4), следи да је

$$i^i = e^{i \ln i} = e^{i \ln e^{i\pi/2}} = e^{i^2 \pi/2} = \boxed{e^{-\pi/2}} \approx 0,20788$$

реалан број.

6.3.7 $\ln(-z)$

▷ **Задатак:** У скупу комплексних бројева \mathbb{C} , ако знамо $\ln z$, колико је $\ln(-z)$?

23

► **Решење:** Како је у комплексној равни $-z$ једнако z заротирано око координатног почетка за угао од $180^\circ = \pi$, добијамо

$$\ln(-z) = \boxed{\ln z + i\pi}.$$

Ако проверимо, из Ојлорове једнакости (31), добијамо

$$e^{\ln(-z)} = e^{\ln z + i\pi} = e^{\ln z} \cdot e^{i\pi} = z \cdot (-1) = -z.$$

★ **Додатак:** Хммм ..., трик са ротацијом није баш потпуно тачан: добили бисмо $-z$ и за угао $-\pi$, па би било $\ln(-z) = \ln z - i\pi$, што је такође тачно; у ствари, тачно је за било који угао $\pi + 2k\pi$ где је $k \in \mathbb{Z}$ цео број. Одавде би следило да је

$$\ln(-z) = \ln z + i(\pi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

И сама формула (28), $\ln z = \ln \rho + i\theta$, представља само главну грану комплексног логаритма, који је некаква врста 4D спирале. Потпуна формула би била

$$\boxed{\ln z = \ln \rho + i(\theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}}. \quad (43)$$

6.3.8 Прво, па 1

▷ **Задатак:** Колики проценат цена од игле до локомотиве почиње цифром 1?

24

► **Решење:** Из формуле (41) са стране 12, следи да је $P(10, 1) = \log_{10} 2 \approx \boxed{30\%}$.

★ **Додатак:** У филму *Рачуновођа (The Accountant)*, главни лик (Ben Afflec) открива да су финансијски извештаји преправљани, јер увиђа да износи не прате ово правило.

6.4 Ручни рад

6.4.1 Аналогни степен

▷ **Задатак:** Одреди логаритмаром приближну вредност $z = 2,3^{1,7}$.

25

► **Решење:** Помоћу једнакости (12) представимо

$$z = 2,3^{1,7} = 10^{1,7 \cdot \log(2,3)}.$$

Прво одређујемо вредност $\log(2,3)$ тако што за $x = 2,3$ читамо испод вредност $\log x$. Налазимо да је $\log(2,3) \approx 0,362$ (види нит обележену са \uparrow).



Након тога, ту вредност на клизачу поравнавано са $x = 1$. Како на клизачу не постоји 0,362, поставићемо на 3,62, с тим што ћемо резултат поделити са 10. Сада, за $x = 1,7$ читамо вредност на клизачу испод (\uparrow)



и налазимо да је око 6,15, што значи да је $1,7 \cdot \log(2,3) \approx 0,615$. Потом, за $y = 0,615$ читамо вредност 10^y и налазимо да је око 4,12 што је и решење

$$z = 2,3^{1,7} \approx \boxed{4,12},$$

а тачна вредност је $z = 4,120380 \dots$

6.4.2 Аналогни квадратни корен

▷ **Задатак:** Објасни начин за одређивање вредности \sqrt{x} логаритмаром.

26

► **Решење:** Уз мало вежбе, квадратни корен можемо директно читати са логаритмара ако у глави извршимо дељење са 2 и, по потреби, сабирање са 0,5 што је врло једноставно јер се ради о бројевима између 0 и 1 са највише 3 децимале. Како је

$$\sqrt{x} = 10^{\frac{1}{2} \log x},$$

потребно је прочитати вредност $\log x$, а онда, за двоструко мању вредност од ње, прочитати вредност 10^y . На пример, за израчунавање вредности $\sqrt{5,3}$, читамо да је $\log(5,3) \approx 0,724$ (\downarrow), потом, за $y = 0,724/2 = 0,362$ (\uparrow), читамо вредност 10^y и добијамо $\sqrt{5,3} \approx 2,3$ ($2,3^2 = 5,29$). За $\sqrt{53}$ треба у y додати још 0,5 тако да ће бити $y = 0,362 + 0,5 = 0,862$ (\uparrow), одакле је $\sqrt{53} \approx 7,28$ ($7,28^2 = 52,9984$).



Наравно, $\sqrt{530}$ се рачуна као $10\sqrt{5,3}$, или $\sqrt{0,53} = \frac{1}{10}\sqrt{53}$.

6.4.3 $\ln 3$

▷ **Задатак:** У част Непера и Бригса, помоћу поступка (23) са стране 8, израчунај пешке приближну вредност $\ln 3$ у 5 корака. За упоређивање, тачна вредност је

$$\ln 3 = 1,0986122886\ 6810969139\ 5245236922\ 5257046475 \dots$$

► **Решење:** За $x = 3$ биће $r = (x - 1)/(x + 1) = 1/2$. У нултом кораку постављамо почетне вредности:

$$\text{Корак } 0. \quad k = 1, \quad p = 2r = 1, \quad q = r^2 = 1/4, \quad a = p = 1, \quad y = a = 1.$$

Следе кораци итерације — повећамо k за 2, помножимо p са q , члан суме a постаје p/k , кога додајемо у резултат y :

$$\text{Корак } 1. \quad k = 3, \quad p = 1/4, \quad a = 1/12, \quad y = 13/12;$$

$$\text{Корак } 2. \quad k = 5, \quad p = 1/16, \quad a = 1/80, \quad y = 263/240;$$

$$\text{Корак } 3. \quad k = 7, \quad p = 1/64, \quad a = 1/448, \quad y = 7379/6720;$$

$$\text{Корак } 4. \quad k = 9, \quad p = 1/256, \quad a = 1/2304, \quad y = 88583/80640;$$

$$\text{Корак } 5. \quad k = 11, \quad p = 1/1024, \quad a = 1/11264, \quad y = 3897967/3548160.$$

Резултат је

$$\ln 3 \approx \frac{3897967}{3548160} = \boxed{1.098588 \dots}$$

што није лоше за само 5 корака, јер је апсолутна грешка око $2,4 \times 10^{-5}$. Али ..., може боље.

★ **Додатак:** Ако већ имамо прецизно израчунату вредност $\ln 2$, онда је боље рачунати $\ln 3$ као $\ln(3/4) + 2 \ln 2$, јер ће, уместо $r = 1/2$, бити $r = (3/4 - 1)/(3/4 + 1) = -1/7$, односно, уместо $q = 1/4$, биће $q = 1/49$, што доводи до много бржег израчунавања. У истом броју корака бисмо добили

$$\ln \frac{3}{4} \approx -\frac{2}{7} - \frac{296}{1029} - \frac{72526}{252105} - \frac{24876448}{86472015} - \frac{522405418}{1815912315} - \frac{281576520392}{978776737785},$$

где последњи разломак има грешку од око $1,6 \times 10^{-12}$, што је више од двоструко тачних цифара. Када му (са стране 8) додамо $2 \ln 2$, добићемо

$$\ln 3 \approx 2 \ln 2 - \frac{281576520392}{978776737785} = \underbrace{1,0986122886\ 6972615081 \dots}_{12 \text{ тачних цифара}}$$

Уопштено, поступак је најбржи ако рачунамо $\ln x = \ln(x/2^n) + n \ln 2$, где бирамо n такво да $x/2^n$ буде што ближе 1, односно, да q буде најмање могуће (види програм).

```

10 REM ln(x) algorithm test
20 LET eps=0: LET hi=SQR 2: LET lo=1/hi: LET n=0: LET r=2: GO
SUB 140: LET ln2=y
30 FOR x=1 TO 20: GO SUB 100:
PRINT "ln(";x;"): TAB 6; " = ";y;
TAB 22; "n = ";n: NEXT x
99 STOP
100 REM logarithmus naturalis
110 LET r=x: LET n=0
120 IF r>hi THEN LET r=r/2: LET
n=n+1: GO TO 120
130 IF r<lo THEN LET r=r*2: LET
n=n-1: GO TO 130
140 LET r=(r-1)/(r+1): LET k=1:
LET p=2*r: LET q=r*r: LET a=p:
LET y=a: LET z=0
150 IF ABS (y-z)>eps THEN LET k
=k+2: LET p=p*q: LET a=p/k: LET
z=y: LET y=y+a: GO TO 150
160 IF n<>0 THEN LET y=y+n*ln2
170 RETURN
RUN

```

```

ln(1) = 0 n = 0
ln(2) = 0.69314718 n = 1
ln(3) = 1.0986123 n = 1
ln(4) = 1.3862944 n = 0
ln(5) = 1.6094379 n = 0
ln(6) = 1.7917595 n = 0
ln(7) = 1.9459101 n = 0
ln(8) = 2.0794415 n = 0
ln(9) = 2.1972246 n = 0
ln(10) = 2.3025851 n = 0
ln(11) = 2.3978953 n = 0
ln(12) = 2.4849066 n = 0
ln(13) = 2.5649494 n = 0
ln(14) = 2.6390573 n = 0
ln(15) = 2.7080502 n = 0
ln(16) = 2.7725887 n = 0
ln(17) = 2.8332133 n = 0
ln(18) = 2.8903718 n = 0
ln(19) = 2.944439 n = 0
ln(20) = 2.9957323 n = 0
9 STOP statement, 99:1

```

Слика 14: ZX Spectrum BASIC програм.

7 Одреднице

7.1 Литература

- [1] Larousse: „Математика“, *Општа енциклопедија* (1967)
- [2] Небојша Икодиновић, Слађана Димитријевић, Сузана Алексић: „Уџбеник са збирком задатака за 2. разред гимназије“, *Математика 2* (2019)
- [3] Вене Боглославов: „Збирка решених задатака из математике 2“, (2008–2011)
- [4] Марјан М. Матејић, Лидија В. Стефановић, Бранислав М. Ранђеловић, Игор Ж. Миловановић: „Комплети задатака за пријемни испит“, *Математика* (2011)
- [5] Раде Николић: „Задаци за пријемни испит из математике на Факултет информатичких технологија“, (2020)
- [6] Milton Abramowitz, Irene Stegun: „Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables“, *Applied Mathematics* (1964)
- [7] Градимир В. Миловановић, Ђорђе Р. Ђорђевић: „Програмирање нумеричких метода“, (1981)
- [8] Donald E. Knuth: „Seminumerical Algorithms“, *The Art of Computer Programming* (1968–)
- [9] Драгољуб Васић, Вене Богославов, Глиша Нешковић: „Логаритамске таблице“, (2008)
- [10] Henry Briggs: „Arithmetica logarithmica“, (1624)
- [11] Donald E. Knuth: „The T_EXbook“, *Computers and Typesetting* (1996)
- [12] John D. Hobby: „User’s manual“, *METAPOST* (2024)

7.2 Софтвер

- [1] Mathematica — Wolfram Research
- [2] Visual Studio Code (Integrated Development Environment) — Microsoft
- [3] **ZX BASIC** (programming language) — Sinclair Research Ltd.
- [4] **Pascal** (programming language) — Niklaus Wirth
- [5]  (programming language) — Google
- [6] **Python** (programming language) — Python Software Foundation
- [7] METAPOST (PostScript programming language)— John D. Hobby
- [8] T_EX (typesetting system) — Donald E. Knuth
- [9] L^AT_EX (T_EX macros) — Leslie Lamport
- [10] $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ -T_EX (T_EX macros) — American Mathematical Society

7.3 Линкови

- [1] GitHub — Лука С. Нешић — Матурски рад
<https://github.com/Nasumica/LukaMaturski-cyr/>
- [2] WIKIPEDIA — Logarithm
<https://en.wikipedia.org/wiki/Logarithm>
- [3] Wolfram MathWorld — Logarithm
<https://mathworld.wolfram.com/Logarithm.html>
- [4] Wolfram MathWorld — Antiogarithm
<https://mathworld.wolfram.com/Antilogarithm.html>
- [5] Wolfram Language & System Documentation Center — Logarithm
<https://reference.wolfram.com/language/ref/Log.html>
- [6] WolframAlpha — Computational Intelligence
<https://www.wolframalpha.com/>
- [7] A reconstruction of the tables of Briggs' *Arithmetica logarithmica* (1624)
<https://inria.hal.science/inria-00543939/PDF/briggs1624doc.pdf>
- [8] WIKIPEDIA — Benford's law
https://en.wikipedia.org/wiki/Benford's_law
- [9] IMDb — The Accountant (2016)
<https://www.imdb.com/title/tt2140479/>
- [10] WIKIPEDIA — Quaternion
<https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion>
- [11] Wolfram Language & System Documentation Center — Quaternions Package
<https://reference.wolfram.com/language/Quaternions/tutorial/Quaternions.html>
- [12] YouTube — Log Tables — Numberphile
<https://www.youtube.com/watch?v=VRzH4xB0GdM>
- [13] YouTube — The iPhone of Slide Rules — Numberphile
<https://www.youtube.com/watch?v=xRpR1rmPbJE>
- [14] YouTube — The Four 4s — Numberphile
<https://www.youtube.com/watch?v=Noo4lN-vSvw>
- [15] YouTube — Fantastic Quaternions — Numberphile
<https://www.youtube.com/watch?v=3BR8tK-LuB0>
- [16] GitHub — Србислав Д. Нешић — Numerical recipes in Pascal
<https://github.com/Nasumica/Wirth/>

