

Gimnazija „Bora Stanković“
Niš, Srbija

MATURSKI RAD

Predmet: Matematika

Tema: Verižni razlomci

Učenik:
Luka Nešić, IV/6

Profesor:
Nenad Totić

2025.

Sadržaj

1	Uvod	2
1.1	Definicija	2
1.2	Notacija	2
2	Teorija	3
2.1	Vrste	3
2.2	Konvergent	3
2.3	Rekurentna formula	3
2.4	Standardna evaluacija	4
2.5	Transformacije	4
2.6	Racionalizacija	4
3	Funkcije	5
3.1	\exp	5
3.2	\ln	6
3.3	\sin	6
3.4	\cos	6
3.5	\arctan	7
3.6	Kvadratni koren	7
4	Konstante	8
4.1	Zlatna sredina φ	8
4.2	π	9
4.3	e	10
4.4	Borin broj	10
5	Literatura	11

1 Uvod

1.1 Definicija

Izraz oblika

$$x = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \frac{a_4}{b_4 + \ddots}}}}$$

u matematici se zove *verižni razlomak* (reč *verige* znači *lanac*). Brojilac ovakvog razlomka je broj, a imenilac može biti broj, običan razlomak ili verižni razlomak.

1.2 Notacija

Iako je standardni zapis verižnog razlomka jasan i onima koji nisu mnogo upoznati sa njima, često se, što zbog uštede prostora, što zbog jednostavnijeg i kraćeg pisanja, koriste i drugačije notacije.

Prva formalna skraćena notacija potiče sa početka 17. veka koju je koristio italijanski matematičar Kataldi (Pietro Antonio Cataldi)

$$x = b_0 \bullet \& \frac{a_1}{b_1 \bullet} \& \frac{a_2}{b_2 \bullet} \& \frac{a_3}{b_3 \bullet} \& \frac{a_4}{b_4 \bullet} \& \dots$$

gde simbol ‘ \bullet ’ označava mesto na kome se nalazi ostatak izraza, a simbol ‘ $\&$ ’ predstavlja znak za sabiranje ‘+’. Od ovog zapisa potiče i savremena skraćena notacija verižnog razlomka

$$x = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \frac{a_3}{b_3 +} \frac{a_4}{b_4 +} \dots$$

gde spuštenu znak ‘+’ označava mesto gde će se *ugnezditi* ostatak izraza. Ponekad se znak ‘+’ piše van razlomačke crte, ali ostaje *poravnat* sa imeniocima

$$x = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \frac{a_4}{b_4} + \dots$$

Nemački matematičar Pringzhajm (Alfred Pringsheim) je koristio sledeću notaciju

$$x = b_0 + \left| \frac{a_1}{b_1} \right| + \left| \frac{a_2}{b_2} \right| + \left| \frac{a_3}{b_3} \right| + \left| \frac{a_4}{b_4} \right| + \dots$$

Poput simbola koji se koriste za sumu ‘ Σ ’ ili proizvod ‘ Π ’, Gaus (Carl Friedrich Gauss) je smislio, verovatno, najpogodniji način za predstavljanje verižnih razlomaka

$$x = b_0 + \mathop{\text{K}}\limits_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{b_i}$$

gde simbol ‘K’ potiče od nemačke reči za *prekinuti lanac* (Kettenbruch).

2 Teorija

2.1 Vrste

U zavisnosti od toga da li imaju koanačan ili beskonačan broj članova, verižni razlomci mogu biti *konačni* ili *beskonačni*. Vrednost konačnih razlomaka može biti izračunati sa apsolutnom tačnošću, dok za beskonačne vrednost može biti izračunata kao

$$x = b_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i},$$

ili približna numerička vrednost. Ako imaju racionalne članove, konačni razlomci su racionalni, a beskonačni iracionalni brojevi, sem specijalnih slučajeva kao što je

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{3}{2} = 1.$$

Verižni razlomak kome su svi brojioci $a_i = 1$ se zove *običan*

$$x = b_0 + \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{b_i}.$$

2.2 Konvergent

Verižni razlomak izračunat sa prvih n članova

$$x_n = b_0 + \prod_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i} = \frac{p_n}{q_n}$$

se zove n -ti *konvergent* i može biti predstavljen kao običan razlomak $x_n = p_n/q_n$. Važi formula

$$p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = \prod_{i=1}^n (-a_i)$$

koja se zove *formula determinante*.

2.3 Rekurentna formula

Parcijalni deljenik p_n i delilac q_n konvergenata $x_n = p_n/q_n$, može se izračunati rekurentnom formulom

$$\begin{array}{ll} p_0 = b_0 & q_0 = 1 \\ p_1 = b_1p_0 + a_1 & q_1 = b_1 \\ \vdots & \vdots \\ p_n = b_np_{n-1} + a_np_{n-2} & q_n = b_nq_{n-1} + a_nq_{n-2} \end{array}$$

gde se, poput Fibonačijevih brojeva, konvergent računa pomoću prethodna dva.

2.4 Standardna evaluacija

Konačni verižni razlomak može biti izračunat i standardnim načinom

$$\begin{aligned} x &\leftarrow 0 \\ i &= n, n-1, \dots, 1 : \\ x &\leftarrow a_i / (b_i + x) \\ x &\leftarrow b_0 + x \end{aligned}$$

od dna ka vrhu razlomka. Tim načinom se ne dobijaju konvergenti, već samo konačna vrednost.

2.5 Transformacije

Verižni razlomak može biti *pomnožen* nizom konstanti c na sledeći način

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \frac{a_4}{b_4 + \ddots}}}} = b_0 + \frac{a_1 c_1}{b_1 c_1 + \frac{a_2 c_1 c_2}{b_2 c_2 + \frac{a_3 c_2 c_3}{b_3 c_3 + \frac{a_4 c_3 c_4}{b_4 c_4 + \ddots}}}}$$

Svaki verižni razlomak može biti pretvoren u obični verižni razlomak sledećom transformacijom

$$b_0 + \prod_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{b_i} = b_0 + \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{b_i c_i}, \quad \text{gde je } c_1 = \frac{1}{a_1}, \dots, c_n = \frac{1}{a_n c_{n-1}}, \dots$$

Takođe važi i transformacija

$$b_0 + \prod_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{b_i} = b_0 + \prod_{i=1}^{\infty} \frac{a_i d_i}{1}, \quad \text{gde je } d_1 = \frac{1}{b_1}, \dots, d_n = \frac{1}{b_n b_{n-1}}, \dots$$

2.6 Racionalizacija

Ako je x neki realni broj, on može biti pretvoren u verižni razlomak za željenim brojem članova n i sa željenom tačnošću ε na sledeći način

$$\begin{aligned} b_0 &\leftarrow [x] \\ x &\leftarrow x - b_0 \\ i &= 1, 2, \dots, n \wedge |x| > \varepsilon : \\ x &\leftarrow 1/x \\ b_i &\leftarrow [x] \\ x &\leftarrow x - b_i \end{aligned}$$

gde $[x]$ znači *celobrojna vrednost*. To može biti ili obično *odsecanje* decimala ili zaokružena vrednost broja na ceo broj.

Metoda racionalizacije može biti iskorištena i za *uporščavanje* razlomka. U slučaju kada je x razlomak kome brojilac i imenilac imaju mnogo cifara, može biti pretvoren u približnu vrednost, razlomkom sa manje cifara.

3 Funkcije

Ojler (Leonhard Euler) je dokazao da red koji može biti napisan kao

$$x = c_0(1 + c_1(1 + c_2(1 + c_3(\cdots))))),$$

odnosno, kao

$$= c_0 + c_0c_1 + c_0c_1c_2 + c_0c_1c_2c_3 + \cdots,$$

onda je on jednak verižnom razlomku

$$\begin{aligned} &= \frac{c_0}{1 - \frac{c_1}{1 + c_1 - \frac{c_2}{1 + c_2 - \frac{c_3}{1 + c_3 - \ddots}}}} \\ &= \frac{c_0}{1 +} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{-c_i}{1 + c_i}. \end{aligned}$$

Pomoću ove jednakosti moguće je pretvoriti funkciju predstavljenu Tejlorovim (Brook Taylor) ili Maklorenovim (Colin Maclaurin) redom u verižni razlomak.

U nastavku ovog poglavlja biće prikazani verižni razlomci za izračunavanje *standardnih* matematičkih funkcija.

3.1 exp

Iz Maklorenovog reda za izračunavanje funkcije e^x

$$\begin{aligned} \exp x &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \\ &= 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\ &= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} + \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} + \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{x}{4} + \cdots \end{aligned}$$

koristeći Ojlerovu jednakost ($c_0 = 1, c_i = x/i$) i transformaciju jednakosti, dobija se verižni razlomak

$$\begin{aligned} \exp x &= \frac{1}{1 - \frac{x}{1 + x - \frac{1x}{2 + x - \frac{2x}{3 + x - \frac{3x}{4 + x - \ddots}}}}} \\ &= \frac{1}{1 -} \frac{x}{1 + x +} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{-ix}{i + 1 + x}. \end{aligned}$$

3.2 ln

Slično eksponencijalnoj funkciji, iz Tejlorovog reda se može dobiti verižni razlomak za izračunavanje vrednosti logaritamske funkcije, s tom razlikom da se izračunavanje vrši u okolini tačke 1, odnosno biće izračunata vrednost funkcije za $x + 1$

$$\begin{aligned}\ln^* x &= \ln(x + 1) \\ &= \frac{x}{1 - 0x + \frac{1^2 x}{2 - 1x + \frac{2^2 x}{3 - 2x + \frac{3^2 x}{4 - 3x + \ddots}}}} \\ &= \frac{x}{1 +} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{i^2 x}{i + 1 - ix}.\end{aligned}$$

Kako funkcija konvergira samo za $x < 1$, pre izračunavanja potrebno je svesti argument na odgovarajući opseg

$$\ln x = \begin{cases} \ln^*(x - 1) & \text{za } x < 1, \\ -\ln^*(1/x - 1) & \text{za } x \geq 1. \end{cases}$$

3.3 sin

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{x}{1 + \frac{x^2}{2 \cdot 3 - x^2 + \frac{2 \cdot 3x^2}{4 \cdot 5 - x^2 + \frac{4 \cdot 5x^2}{6 \cdot 7 - x^2 + \ddots}}}} \\ &= \frac{x}{1 +} \frac{x^2}{2 \cdot 3 - x^2 +} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{2i(2i + 1) \cdot x^2}{(2i + 2)(2i + 3) - x^2}\end{aligned}$$

3.4 cos

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{1}{1 + \frac{x^2}{1 \cdot 2 - x^2 + \frac{1 \cdot 2x^2}{3 \cdot 4 - x^2 + \frac{3 \cdot 4x^2}{5 \cdot 6 - x^2 + \ddots}}}} \\ &= \frac{1}{1 +} \frac{x^2}{1 \cdot 2 - x^2 +} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(2i - 1)2i \cdot x^2}{(2i + 1)(2i + 2) - x^2}\end{aligned}$$

3.5 arctan

Ojler je razvio formulu za izračunavanje vrednosti $\arctan(y/x)$ verižnim razlomkom

$$\begin{aligned}\arctan \frac{y}{x} &= \frac{y}{1x + \frac{(1y)^2}{3x + \frac{(2y)^2}{5x + \frac{(3y)^2}{7x + \ddots}}}} \\ &= \frac{y}{x + \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(iy)^2}{(2i+1)x}}\end{aligned}$$

Ako je

$$z = x + iy = \rho (\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta},$$

tačka u ravni predstavljena kompleksim brojem, formula će izračunati $\theta = \arg z$, ugao koji zaklapa vektor $(0,0)-(x,y)$ sa x -osom.

$$\arg(x + iy) = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{za } x > 0, \\ \arctan(y/x) + \pi & \text{za } x < 0 \text{ i } y \geq 0, \\ \arctan(y/x) - \pi & \text{za } x < 0 \text{ i } y < 0, \\ +\pi/2 & \text{za } x = 0 \text{ i } y > 0, \\ -\pi/2 & \text{za } x = 0 \text{ i } y < 0, \\ 0 & \text{za } x = 0 \text{ i } y = 0. \end{cases}$$

Ostale inverzne trigonometrijske funkcije mogu biti izračunate pomoću funkcije \arctan

$$\arcsin x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \arccos x = \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad \operatorname{arccot} x = \arctan \frac{1}{x}.$$

3.6 Kvadratni koren

$$\begin{aligned}\sqrt{z} &= \sqrt{x^2 + y} \\ &= x + \frac{y}{2x + \frac{y}{2x + \frac{y}{2x + \frac{y}{2x + \ddots}}}} \\ &= x + \prod_{i=1}^{\infty} \frac{y}{2x}\end{aligned}$$

4 Konstante

4.1 Zlatna sredina φ

Možda najpoznatiji verižni razlomak je

$$\begin{aligned}\varphi &= 1 + \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \ddots}}}}\end{aligned}$$

Vidimo da se ispod prve razlomačke crte opet nalazi φ , pa je

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}.$$

Rešenje

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618034$$

je poznato u matematici kao *zlatni presek* ili *zlatna sredina*. Zbog svoje prirode, ovo je naspорије mogućih konvergirajućih verižnih razlomaka, odnosno, φ predstavlja najiracionalniji broj. Izračunavajući uzastopne članove razlomka, φ će dobijati vrednosti

$$\varphi = \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \dots$$

odnosno, svaki konvergent će biti jednak količniku dva uzastopna Fibonačijeva (Leonardo Fibonacci) broja.

Verižni razlomak oblika

$$\delta = k + \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k} = k + \frac{1}{\delta} = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}$$

se zove *metalna sredina*, gde se za $k = 1$ dobija *zlatna*, za $k = 2$ *srebrna*, za $k = 3$ *bronzana*, za $k = 4$ *bakarna*, ... I ovde je n -ti konvergent količnik dva uzastopna k -Fibonačijeva broja za koje važi rekurentna formula

$$F_n = k \cdot F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Veza između nagiba logaritamske spirale μ i koeficijenta metalne sredine

$$k = 2 \sinh(90^\circ \tan \mu).$$

Spiralni kraci naše galaksije *Kumova slama*, čine logaritamsku spiralu sa nagibom od oko $\mu \approx 13^\circ$, što odgovara metalnoj sredini za $k \approx 43/58$, tako da ne čine zlatni presek.

4.2 π

Izračunavanje broja π je kroz istoriju uvek predstavljalo izazov. Od davnina se koristio razlomak $22/7 = 3.\overline{142857}$ koji ima tačnost 2 decimale i razlomak $355/113 \approx 3.141593$ koji ima zadivljujuću tačnost od 6 decimala. Trenutno je poznato 202 112 290 000 000 decimala. Broj π na 50 decimala je

$$\pi = 3.1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937511 \dots$$

Lajbnić (Gottfried Wilhelm Leibniz) je iz formule

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

izveo formulu za izračunavanje broja π verižnim razlomkom

$$\pi = \frac{4}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \ddots}}}} = \frac{4}{1 + \prod_{i=1}^{\infty} \frac{(2i-1)^2}{2}}$$

Na žalost, formula vrlo sporo konvergira broju π i potrebno je izračunati oko $3 \cdot 10^n$ članova izraza da bi se dobilo n tačnih decimala.

Iako je $\pi = 4 \arctan(1)$, postoje formule koje brže konvergiraju. Najbrža poznata formula za izračunavanje broja π verižnim razlomkom je Mačinova (John Machin) formula koja korsiti Ojlerovu formulu za \arctan

$$\begin{aligned} \pi &= 16 \arctan(1/5) - 4 \arctan(1/239) \\ &= \frac{16}{u + \frac{1^2}{2^2}} - \frac{4}{v + \frac{1^2}{2^2}} \\ &\quad \frac{3u + \frac{3^2}{5u + \frac{3^2}{7u + \ddots}}}{3v + \frac{3^2}{5v + \frac{3^2}{7v + \ddots}}} \end{aligned}$$

gde je $u = 5$ i $v = 239$. Tačnosti formule može se jednostavno dokazati kompleksnom aritmetikom

$$z = (5 + i)^{16} / (239 + i)^4 = -64$$

Tačka z ima koordinate $(-64, 0)$ i sa x -osom zaklapa ugao od $\theta = 180^\circ = \pi$ ($\arg z = \pi$). Izračunavajući verižni razlomak sa samo prva 4 člana dobija se

$$\begin{aligned} \pi &\approx \frac{53600}{16971} - \frac{1433464640}{85650012051} = \frac{507390368614240}{161507372724169} \\ &\approx \underbrace{3.141592610021}_{\text{tačne cifre}} \dots \end{aligned}$$

broj π sa 7 tačnih cifara. Dovoljno je izračunati navedenu formulu sa prvih 18 članova (poslednji član je $\frac{17^2}{35x}$) da bi tačnost dostigla 35 decimalnih cifara

$$\begin{aligned}\pi &\approx \frac{1619055456573150058632544}{512630406240026708228595} - \frac{61280517996953936280266854011343676617970098482609824}{3661532317204997134560556906873741209030782402728252845} \\ &\approx \frac{1540109464588823719896738887665292503532998573842247313242210592162332672}{490232068383847267892878395373585882797677624279678806441294528302716687} \\ &\approx \underbrace{3.1415926535897932384626433832795028807522}_{\text{tačne cifre}} \dots\end{aligned}$$

Da bi postigao ovu tačnost, nemačko-holandski matematičar Ludolf (Ludolph van Ceulen) je krajem 16. i početkom 17. veka, koristeći Arhimedovu metodu izračunavanja površina opisanih i upisanih pravilnih 2^n -tougona u kružnicu, potrošio veći deo svog života. Njemu u čast broj π se ponekad zove *Ludolfov broj*.

4.3 e

Baza prirodnog logaritma

$$e = 2.7182818284 5904523536 0287471352 6624977572 4709369996 \dots$$

može bit izračunata kao $e = \exp(1)$, pomoću verižnog razlomka za eksponencijalnu funkciju. Međutim, postoji jednostavnija formula

$$e = 1 + \frac{1}{\prod_{i=1}^{\infty} \frac{i}{i-1}}$$

Dovoljno je izračunati prvih 10 konvergenata verižnog razlomka

$$e \approx 2, 3, \frac{8}{3}, \frac{30}{11}, \frac{144}{53}, \frac{280}{103}, \frac{5760}{2119}, \frac{45360}{16687}, \frac{44800}{16481}, \frac{3991680}{1468457}$$

da bi dobili 7 tačnih decimala, $e_{10} \approx 2.7182818$. Konvergent

$$e_{40} = \frac{836313165329095177704251551336018791628800000000}{307662419905587585654556899376849633804439730767}$$

je tačan na 50 decimala.

4.4 Borin broj

Ako broj

$$\mathcal{B} = 0.4323320871 8590286890 9253793241 9999637051 1089687765 \dots$$

pretvorimo u verižni razlomak, dobićemo

$$\mathcal{B} = \frac{1}{\boxed{2} + \frac{1}{\boxed{3} + \frac{1}{\boxed{5} + \frac{1}{\boxed{7} + \frac{1}{\boxed{11} + \frac{1}{\boxed{13} + \ddots}}}}}} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i}$$

verižni razlomak čiji su imenioci *svi prosti brojevi* p . Naravno, zbog svoje prirode, ovaj broj ne može biti tačno izračunat, ali je zanimljivo da postoji.

5 Literatura