Metody numeryczne - Układy równań liniowych

Krzysztof Nasuta, s193328
09-04-2024

1. Wstęp

W niniejszym sprawozdaniu przedstawiono wyniki analizy trzech metod rozwiązywania macierzowych równań linowych. Do testowanych metod należa dwie metody iteracyjne: Jacobiego oraz Gaussa-Seidela oraz jedna metoda bezpośrednia: faktoryzacja LU. Kod źródłowy został napisany w języku Python, a do wizualizacji wyników wykorzystano bibliotekę Matplotlib. Nie wykorzystano żadnych zewnętrznych bibliotek do rozwiązywania układów równań liniowych. Do przechowywania macierzy napisano własną klasę `Matrix`, która ułatwia późniejsze operacje na macierzach.

Powyżej wymionione metody zostały przetestowane na kilku układach równań i rozmiarów macierzy. Wyniki zostały przedstawione w postaci wykresów, które pokazują zbieżność metod iteracyjnych oraz czas wykonania dla każdej z metod.

2. Opis metod

Wszystkie podane metody służą do rozwiązywania układów równań liniowych postaci $Ax = b$, gdzie A to macierz współczynników, x to wektor niewiadomych, a b to wektor wyrazów wolnych.

2.1. Metoda Jacobiego

Pierwszą z badanych metod iteracyjnych jest motoda Jacobiego. Zaimplementowana wersją wykorzystuje rekurencyjny wzór operujący na poszczególnych elementach wektora x. Wzór ten wygląda następująco:

$$x_i^{\text{ (k+1)}} = \frac{1}{a_{\text{ ii}}}\left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{\text{ ij}} * x_j^{\text{ (k)}}\right), i = 1, 2, ..., n$$

Wektor x jest inicjalizowany zerami, a następnie iteracyjnie poprawiany w każdej iteracji. Algorytm kończy się, gdy spełniony jest warunek zbieżności, czyli gdy norma błędu jest mniejsza od zadanego epsilon.

Metoda ta nie zawsze jest zbieżna, więc nie gwarantuje znalezienia rozwiązania.

2.2. Metoda Gaussa-Seidela

Druga badana metoda iteracyjna to metoda Gaussa-Seidela. Jest ona podobna do metody Jacobiego. Różnicą jest, że operuje także na wyliczonych w tej samej iteracji elementach nowego wektora x. Również tutaj zaimplementowano wzór elementowy. Wygląda on następująco:

$$x_i^{\text{ (k+1)}} = \frac{1}{a_{\text{ ii}}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1}{}_{\text{i-1}}\, a_{\text{ ij}} * x_j^{\text{ (k+1)}} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{\text{ ij}} * x_j^{\text{ (k)}}\right), i = 1, 2, ..., n$$

Także w metodzie Gaussa-Seidela zaczynamy od wektora zerowego i iteracyjnie poprawiamy jego elementy. Algorytm kończy się, gdy spełniony jest warunek zbieżności.

Metoda Gaussa-Seidela także nie gwarantuje zbieżności.

2.3. Faktoryzacja LU

Metoda LU należy do grupy metod bezpośrednich. Oznacza to, że zawsze znajduje rozwiązanie układu równań. Polega na faktoryzacji macierzy współczynników A na iloczyn dwóch macierzy trójkątnych: dolnej L i górnej U. Uzyskujemy wtedy równanie $LUx = b$. Jego rozwiązanie możemy sprowadzić, rozwiązując dwa układy równań trójkątnych: $Ly = b$ oraz $Ux = y$. Do rozwiązania tych układów wykorzystujemy algorytm odpowiednio podstawiania w przód oraz w tył.

W algorytmach podstawiania wykorzystano wzory operujące na poszczególnych elementach wektora x. W przypadku podstawiania w przód wzór wygląda następująco:

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{\text{ij}}\, y_j, i = 1, 2, ..., n$$

Natomiast w przypadku podstawiania w tył wzór wygląda następująco:

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{\text{ij}}\, x_j}{u_{\text{ii}}}, i = n, n-1, ..., 1$$

3. Pierwszy układ równań

Rozmiar macierzy A to 928x928. Na diagonali macierzy A znajduje się 8. Dwie kolumny obok diagonali mają wartość -1. Pozostałe elementy macierzy są równe 0.

Wektor b ma długość 928. N-ty element wektora b jest równy $\sin(4N)$.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 8 & -1 & -1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 8 & -1 & -1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 8 & -1 & -1 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 8 & -1 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 8 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 8 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 8 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -1 & -1 & 8 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -1 & -1 & 8 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & -1 & -1 & 8 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 8 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} -0.76 \\ 0.99 \\ -0.54 \\ -0.29 \\ 0.91 \\ -0.91 \\ 0.27 \\ ... \\ 0.89 \\ -0.23 \\ -0.59 \\ 1.0 \\ -0.71 \\ -0.06 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

3.1. Wyniki

Oczekiwana norma błędu residuum wynosi 10^{-9}. Limit błędów został ustawiony na 10^{9}.

Metoda	Iteracje	Norma błędu	Zbieżne	Czas wykonania
Jacobi	24	6.45982020781103e-10	✓	3.9153319s
Gauss-Seidel	17	4.647756224628755e-10	✓	2.6040142s
Faktoryzacja LU	-	2.1487378237870888e-15	-	33.2784297s

Możemy zauważyć, że obie metody iteracyjne zbiegają do rozwiązania. Metoda Jacobi porzebuje 24 iteracje, natomiast Gaussa-Seidela 17. Pierwsza z tych metod zwraca wynik po 3.9s, druga natomiast po 2.6s. Obie metody iteracyjne zwracają wynik z błędem residuum mniejszym niż oczekiwany.

Faktoryzacja LU zwróciła dokładniejsze rozwiązanie, jednak czas wykonania był znacznie dłuższy. Wynik został uzyskany po ponad 33 sekundach, ale był obarczony bardzo małym błędem residuum. Jest to metoda bezpośrednia, więc zawsze zwraca dokładne rozwiązanie.

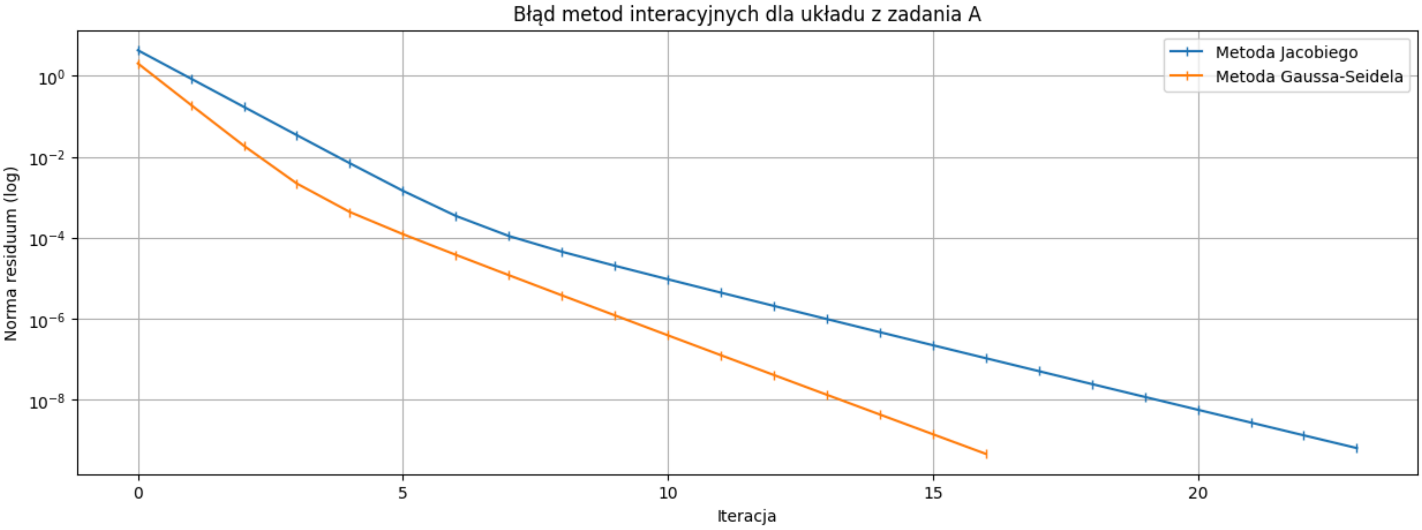


Figure 1: Zbieżność metod iteracyjnych w pierwszym układzie równań

Powyższy wykres przedstawia normę błędu residuum w skali logarytmicznej w zależności od numeru iteracji. Możemy zauważyć, że metoda Gaussa-Seidela zbiega szybciej niż metoda Jacobiego.

4. Drugi układ równań

Drugi układ równań jest bardzo podobny do pierwszego. Różnica polega na tym, że na diagonali macierzy A znajduje się 3 zamiast 8.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} -0.76 \\ 0.99 \\ -0.54 \\ -0.29 \\ 0.91 \\ \dots \\ 1.0 \\ -0.71 \\ -0.06 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

4.1. Wyniki

Oczekawana normaa oraz limit nie uległy zmianie.

Metoda	**Iteracje**	**Norma błędu**	**Zbieżne**	**Czas wykonania**
Jacobi	92	1234119999.2230158	×	15.3062337s
Gauss-Seidel	37	1183623809.2900004	×	5.6345844s
Faktoryzacja LU	-	1.211472788285935e-12	-	32.1004932s

Żadna z metod iteracyjnych nie zbiegła do rozwiązania. Aby przeroczyć górny limit błędu, wynoszący 10^9, potrzeba było odpowiednio 92 iteracji dla metody Jacobiego oraz 37 dla metody Gaussa-Seidela. Z tego powodu czas wykonania był znacznie dłuższy niż w przypadku pierwszego układu równań. Metoda Jacobiego potrzebowała ponad 15 sekund, nie zwracając przy tym rozwiązania. Metoda Gaussa-Seidela również zakończyła się poprzez przekroczenie limitu błędu po 5.6 sekundach.

Metoda Jacobiego osiągnęłą najniższą normę błedu przy iteracji ósmej, a Gaussa-Seidela przy iteracji trzeciej. Od tego momentu norma błędu residuum zaczęła rosnąć.

Metoda faktoryzacji LU zwróciła dokładne rozwiązanie, jednak czas wykonania był znacznie dłuższy. Wynik został uzyskany po ponad 32 sekundach, ale był obarczony bardzo małym błędem residuum.

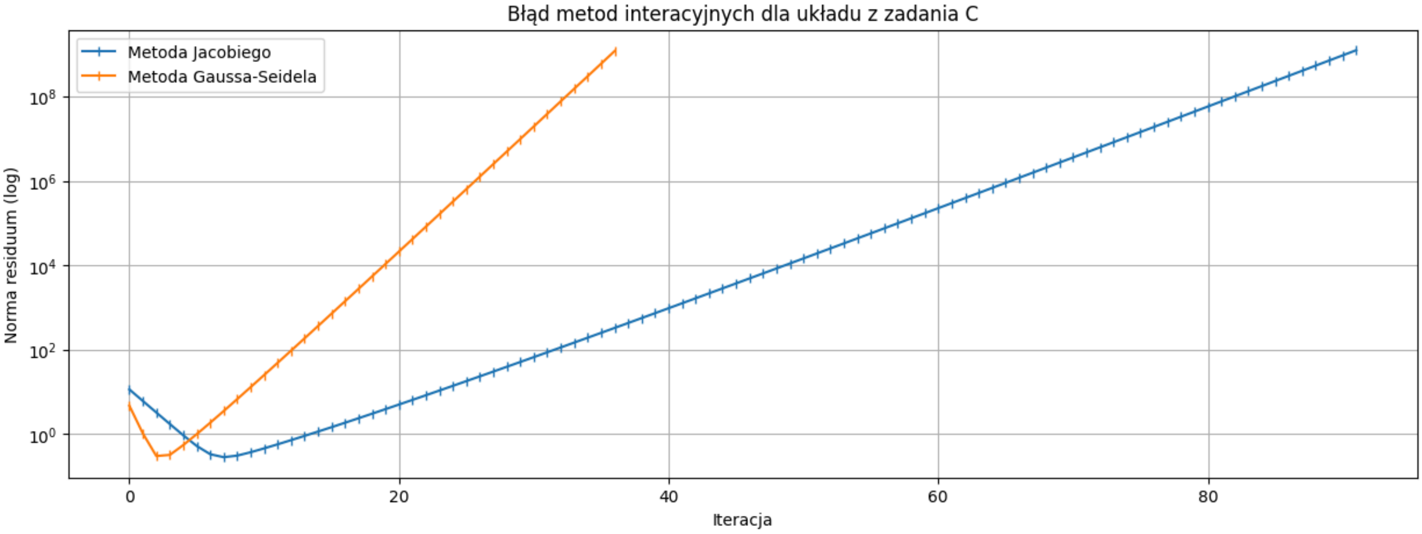


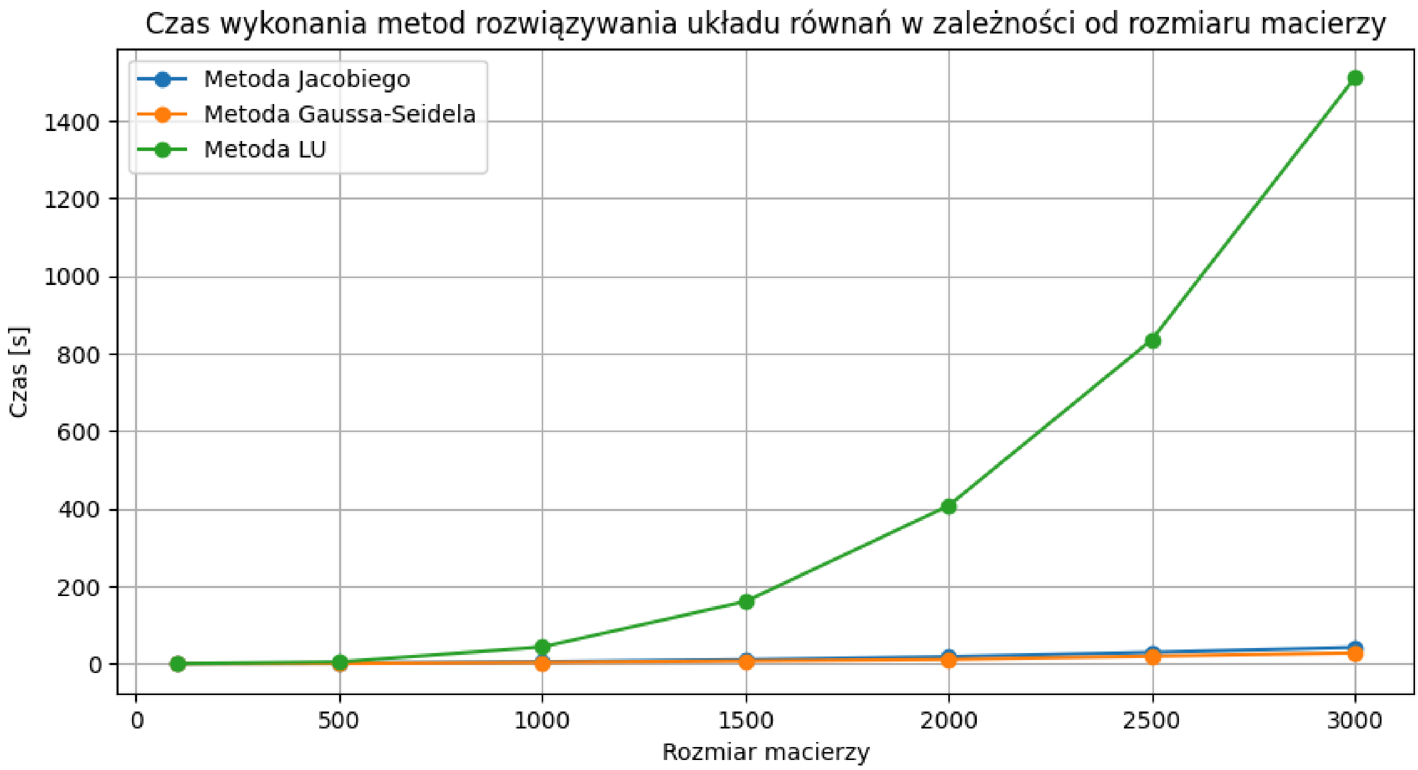
Figure 2: Zbieżność metod iteracyjnych w drugim układzie równań

Powyższy wykres przedstawia normę błędu metod iteracyjnych dla równania drugiego.

5. Porównanie czasu wykonania względem rozmiaru macierzy

W celu zbadania zależności czasu wykonania od rozmiaru macierzy, przetestowano metody dla macierzy o rozmiarach należących do zbioru {100, 500, 1000, 1500, 2000, 2500, 3000}.

Rozmiar macierzy	Jacobi	Gauss-Seidel	Faktoryzacja LU
100x100	0.0466804s	0.0299448s	0.0329174s
500x500	1.116892s	0.7027835s	4.2767321s
1000x1000	4.6454314s	3.0135801s	42.6112665s
1500x1500	10.3469868s	6.8342752s	159.927388s
2000x2000	17.7180553s	10.7253274s	406.9540574s
2500x2500	28.8284492s	19.1137278s	835.0686424s
3000x3000	41.4464903s	27.4157338s	1511.144846s



Czas wykonania każdej z metod rośnie wraz z rozmiarem macierzy. Dla metod iteracyjnych wzrost ten jest powolny, natomiast dla bezpośredniej metody faktoryzacji LU jest dużo szybszy. W przypadku macierzy o rozmiarze 1000x1000, metoda Jacobiego potrzebuje 4.6s, Gaussa-Seidela 3.0s, a faktoryzacja LU aż 42.6s. W przypadku macierzy o rozmiarze 2000x2000, czasy wynoszą odpowiednio 17.7s, 10.7s oraz 406.9s. Dla metod iteracyjnych tempo wzrostu można oszacować jako kwadratowe względem rozmiarem macierzy. Dla metody faktoryzacji LU wzrost czasu był znacznie szybszy. Szacować go można jako co najmniej sześcienny względem rozmiaru macierzy.

Należy pamiętać, że obliczenia zostały wykonane przy pomocy programu napisanego w języku Python, który jest interpretowanym językiem wysokiego poziomu. Jego wydajność jest znacznie niższa niż języków kompilowanych, co wpływa na czas wykonania programu. W testach nie wykorzystano także bibliotek, które zawierają szybsze implementacje macierzy, takich jak NumPy.

6. Podsumowanie

Z przeprowadzonych testów wynika, że bezpośrednia metoda faktoryzacji LU jest znacząco wolniejsza niż metody iteracyjne. Jej główną zaletą jest wysoka dokładność oraz gwarancja uzyskania wyniku. Metody iteracyjne są dużo szybsze, jednak nie zawsze zwracają rozwiązanie. Dla pewnych macierzy metody iteracyjne mogą się rozbiegać. W przypadku zbieżności, metoda Gaussa-Seidela w każdym z badanych przypadków zwróciła wyniki po mniejszej ilości iteracji niż metoda Jacobiego. Z tego powodu czas wykonywania tej metody był krótszy. W takim razie, aby rozwiązać układ równań, możemy zastosować metodę Gaussa-Seidela, która jest szybsza i zwraca wynik w krótszym czasie. Następnie, w przypadku braku zbieżności (czyli kiedy norma błędu rośnie zamiast maleć), możemy zastosować metodę faktoryzacji LU. Zastosowanie metody iteracyjnej oraz bezpośredniej pozwala nam w pełni wykorzystać ich zalety.