

# Metody numeryczne - Aproksymacja profilu wysokościowego

Krzysztof Nasuta, s193328

07-05-2024

## Spis treści

1. Wstęp .....	1
2. Opis metod .....	1
2.1. Metoda Lagrange'a dla równoodległych węzłów .....	1
2.2. Metoda funkcji sklejanych .....	2
3. Dane wejściowe .....	2
4. Wyniki interpolacji metodą Lagrange'a dla równoodległych węzłów .....	3
4.1. Interpolacja Lagrange'a - chelm.txt .....	3
4.2. Interpolacja Lagrange'a - in_mountain.data .....	4
4.3. Interpolacja Lagrange'a - tczew_starogard.txt .....	4
4.4. Interpolacja Lagrange'a - ulm_lugano.txt .....	5
4.5. Podsumowanie interpolacji metodą Lagrange'a dla równoodległych węzłów .....	5
5. Wyniki interpolacji metodą Lagrange'a dla węzłów Czebyszewa .....	6
5.1. Interpolacja Lagrange'a (węzły Czebyszewa) - chelm.txt .....	6
5.2. Interpolacja Lagrange'a (węzły Czebyszewa) - in_mountain.data .....	6
5.3. Interpolacja Lagrange'a (węzły Czebyszewa) - tczew_starogard.txt .....	7
5.4. Interpolacja Lagrange'a (węzły Czebyszewa) - ulm_lugano.txt .....	7
5.5. Podsumowanie interpolacji metodą Lagrange'a dla węzłów Czebyszewa .....	8
6. Wyniki interpolacji metodą funkcji sklejanych .....	8
6.1. Interpolacja funkcjami sklejonymi - chelm.txt .....	8
6.2. Interpolacja funkcjami sklejonymi - in_mountain.data .....	9
6.3. Interpolacja funkcjami sklejonymi - tczew_starogard.txt .....	10
6.4. Interpolacja funkcjami sklejonymi - ulm_lugano.txt .....	10
6.5. Podsumowanie interpolacji metodą funkcji sklejanych .....	11
7. Podsumowanie .....	11

## 1. Wstęp

Celem projektu było zaimplementowanie dwóch metod interpolacji funkcji: metody Lagrange'a oraz metody funkcji sklejanych. Następnie należało wykorzystać te metody do interpolacji profilu wysokościowego. W projekcie przeprowadzono testy dla czterech różnych zbiorów danych, a wyniki przedstawiono w postaci wykresów. W projekcie porównano również wpływ ilości węzłów na jakość interpolacji, oraz rozmieszczenia węzłów w przypadku metody Lagrange'a.

Do implementacji wykorzystano język Python wraz z biblioteką `matplotlib` do generowania wykresów.

## 2. Opis metod

### 2.1. Metoda Lagrange'a dla równoodległych węzłów

Metoda Lagrange'a pozwala na obliczenie wielomianu stopnia  $n$  na podstawie  $n+1$  węzłów. Jest to jedna z najprostszych metod interpolacji. Wynik interpolacji Lagrange'a jest taki sam jak wynik metody Vandermonde'a. Jej zaletą jest brak konieczności rozwiązywania układu równań, stabilność numeryczna oraz prostota implementacji.

Bazą dla metody Lagrange'a jest wzór:

$$\phi_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n+1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Następnie wielomian interpolacyjny Lagrange'a można zapisać jako:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i \phi_i(x)$$

Pomimo swoich zalet, metoda Lagrange'a ma również wady. Jedną z nich jest podatność na efekt Rungego, czyli oscylacje wielomianu interpolacyjnego w okolicach krańców przedziału. W celu zminimalizowania tego efektu można zastosować interpolację w węzłach Czebyszewa. W projekcie porównano jakość interpolacji z ich zastosowaniem w stosunku do równoodległych węzłów. Węzły Czebyszewa w przedziale  $[a, b]$  można obliczyć ze wzoru:

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2k-1}{2k}\pi\right), k = 1, \dots, n$$

## 2.2. Metoda funkcji sklejanych

Metoda funkcji sklejanych polega na wyznaczeniu wielomianu stałego stopnia na każdym z przedziałów między węzłami. Wielomiany te są tak dobrane, aby były ciągłe oraz miały ciągłe pochodne pierwszego i drugiego rzędu. W projekcie zaimplementowano interpolację funkcjami sklejonymi stopnia 3. Wielomiany te są zdefiniowane jako:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

Metoda funkcji sklejanych pozwala na wyznaczenie współczynników  $a_i, b_i, c_i, d_i$  dla każdego z przedziałów poprzez rozwiązywanie układu równań. W projekcie do rozwiązywania układu równań wykorzystano faktoryzację LU. Metoda funkcji sklejanych jest bardziej skomplikowana niż metoda Lagrange'a, ale pozwala na uzyskanie lepszych wyników. Jest też odporna na efekt Rungego.

Układ równań do rozwiązywania dla metody funkcji sklejanych można zapisać jako:

$$S_i(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n-1 \text{ Wartość funkcji w węzłach}$$

$$S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, i = 0, \dots, n-1 \text{ Ciągłość funkcji w węzłach}$$

$$S_0''(x_0) = 0 \text{ Zerowanie drugiej pochodnej w punkcie początkowym}$$

$$S_{n-1}''(x_n) = 0 \text{ Zerowanie drugiej pochodnej w punkcie końcowym}$$

$$S_i'(x_i) = S_{i-1}'(x_i), i = 1, \dots, n-1 \text{ Zerowanie pierwszej pochodnej w punktach}$$

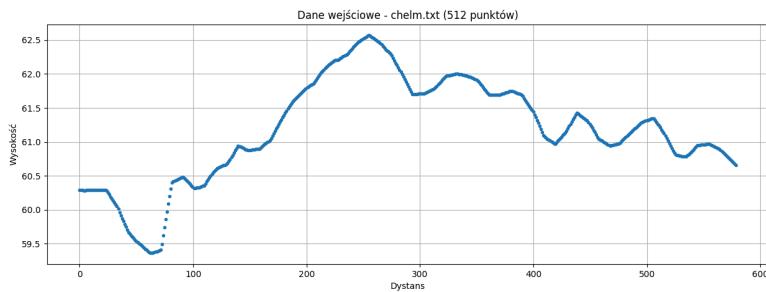
$$S_i''(x_i) = S_{i-1}''(x_i), i = 1, \dots, n-1 \text{ Zerowanie drugiej pochodnej w punktach}$$

## 3. Dane wejściowe

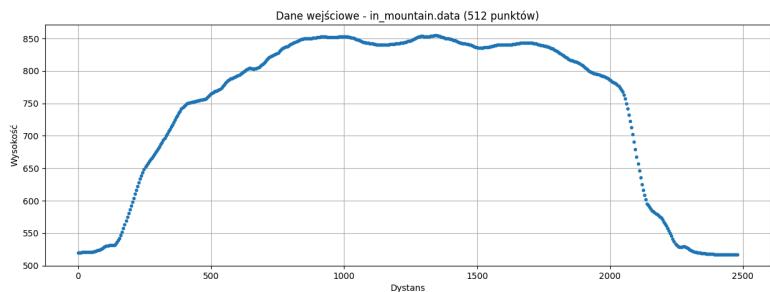
W projekcie przeprowadzono testy dla czterech różnych zbiorów danych. Wszystkie zbiory danych zawierają 512 punktów.

- **chelm.txt** - dane o małej zmienności wysokości
- **in\_mountain.data** - dane o początkowym wzroście wysokości, długim odcinku płaskim oraz końcowym spadku
- **tczew\_starogard.txt** - dane o wzroście wysokości z dużymi oscylacjami miejscowymi
- **ulm\_lugano.txt** - dane o bardzo dużej zmienności wysokości i dużych oscylacjach miejscowych

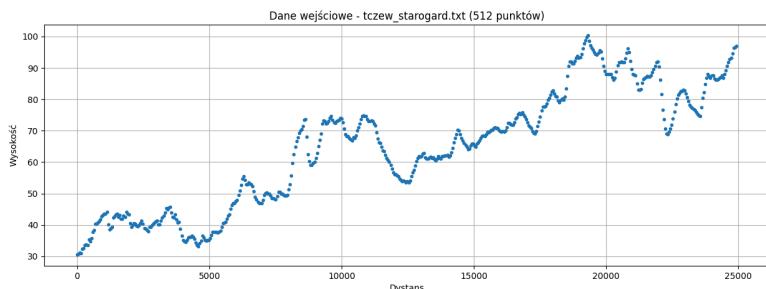
Poniżej przedstawiono wykresy dla każdego z nich.



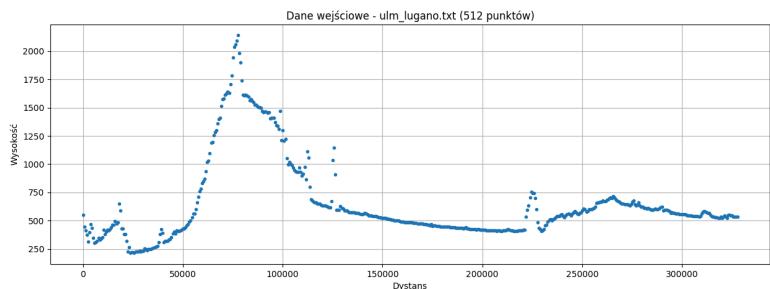
Dane wejściowe dla pliku chelm.txt



Dane wejściowe dla pliku in\_mountain.data



Dane wejściowe dla pliku tczew\_starogard.txt



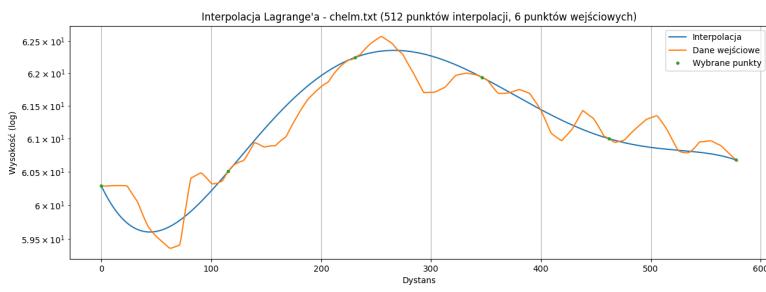
Dane wejściowe dla pliku ulm\_lugano.txt

## 4. Wyniki interpolacji metodą Lagrange'a dla równoodległych węzłów

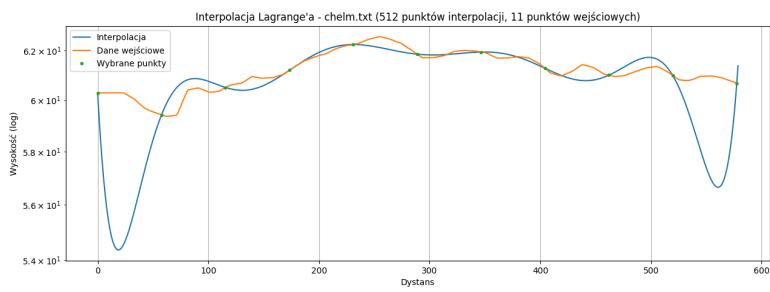
Dla każdego zbioru danych przeprowadzono interpolację metodą Lagrange'a dla 6, 11, 16, 26, 52 oraz 103 węzłów wejściowych. Wartości wybranych węzłów są rozmieszczone równomiernie. Liczba węzłów została dobrana tak, aby umożliwić wybranie z 512 punktów 512 węzłów równoodległych.

Za pomocą interpolacji Lagrange'a obliczono wartości funkcji w 512 punktach. Poniżej przedstawiono wykresy interpolacji dla każdego zbioru danych.

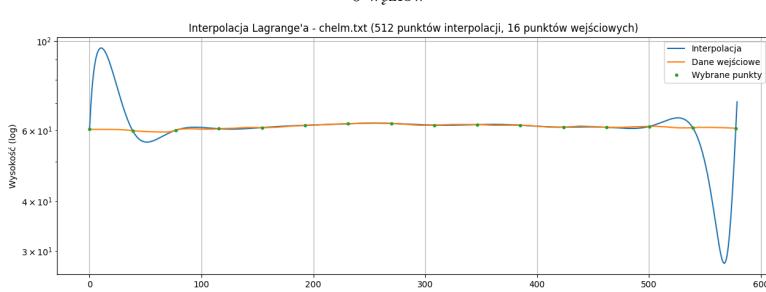
### 4.1. Interpolacja Lagrange'a - chelm.txt



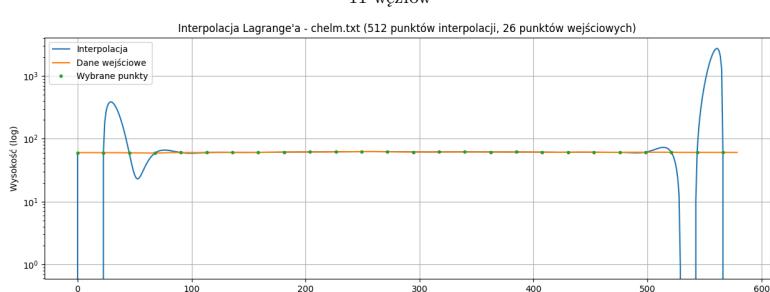
6 węzłów



11 węzłów

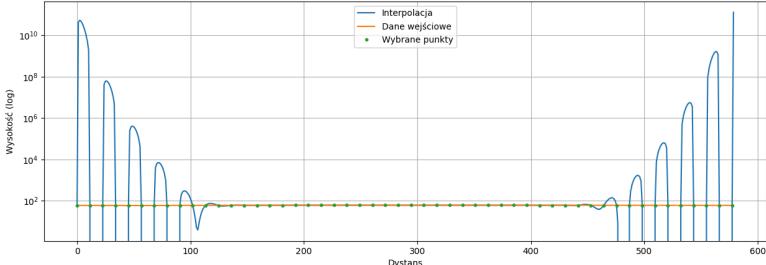


16 węzłów

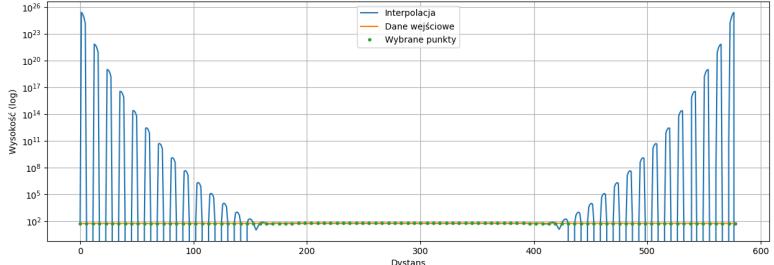


26 węzłów

Interpolacja Lagrange'a - chelm.txt (512 punktów interpolacji, 52 punktów wejściowych)

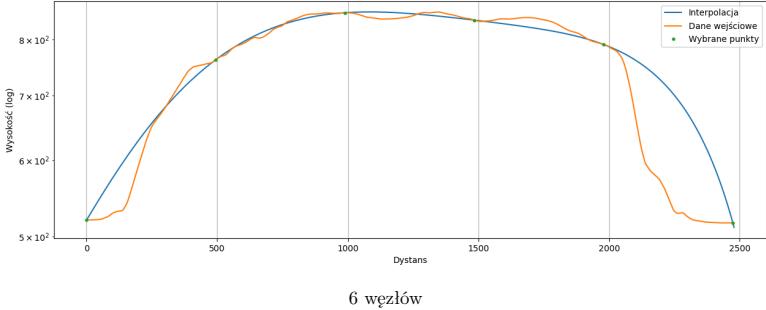


Interpolacja Lagrange'a - chelm.txt (512 punktów interpolacji, 103 punktów wejściowych)

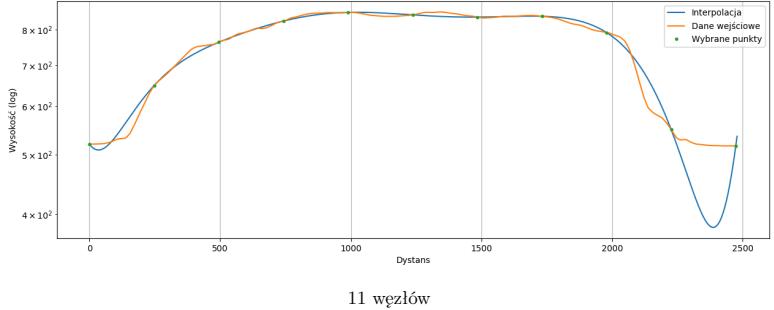


## 4.2. Interpolacja Lagrange'a - in\_mountain.data

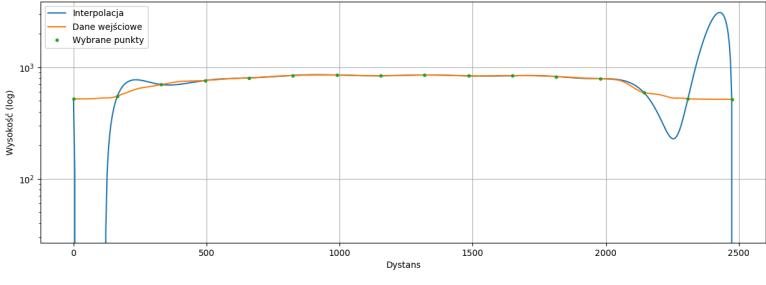
Interpolacja Lagrange'a - in\_mountain.data (512 punktów interpolacji, 6 punktów wejściowych)



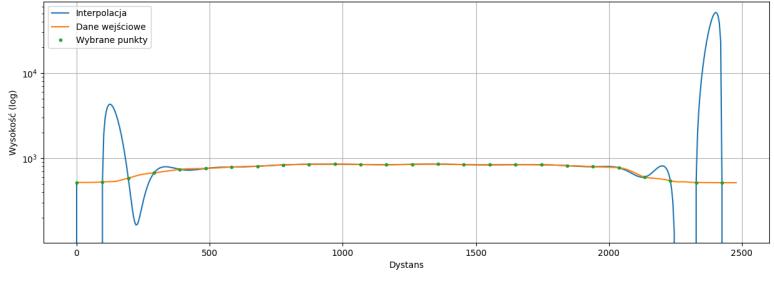
Interpolacja Lagrange'a - in\_mountain.data (512 punktów interpolacji, 11 punktów wejściowych)



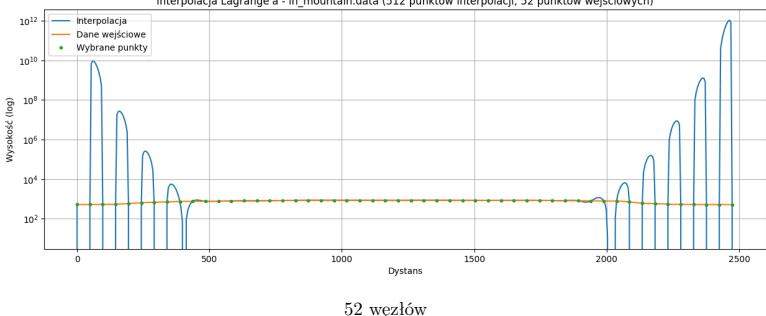
Interpolacja Lagrange'a - in\_mountain.data (512 punktów interpolacji, 16 punktów wejściowych)



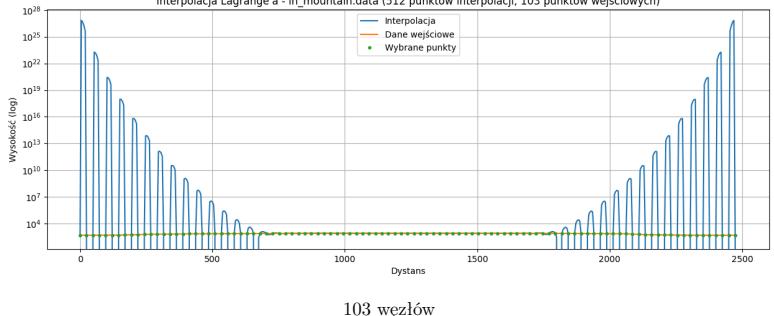
Interpolacja Lagrange'a - in\_mountain.data (512 punktów interpolacji, 26 punktów wejściowych)



Interpolacja Lagrange'a - in\_mountain.data (512 punktów interpolacji, 52 punktów wejściowych)

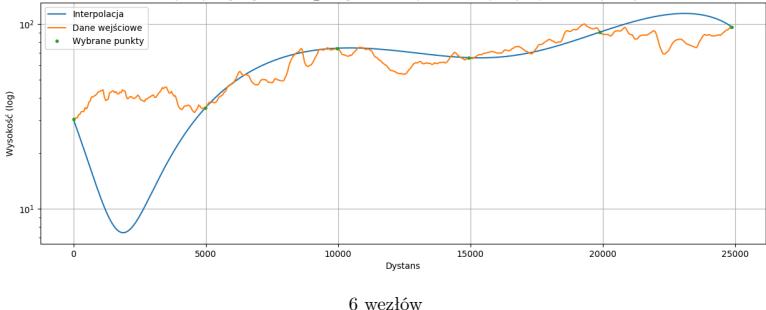


Interpolacja Lagrange'a - in\_mountain.data (512 punktów interpolacji, 103 punktów wejściowych)

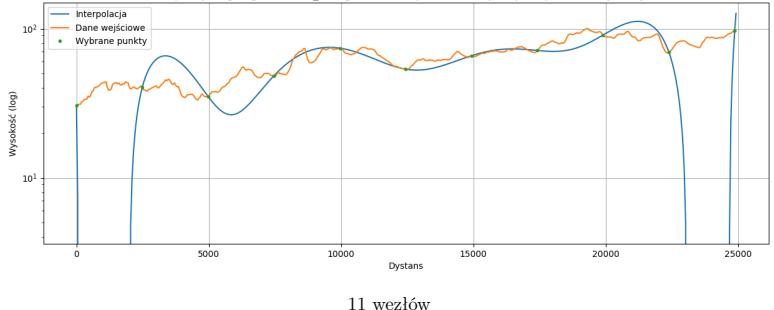


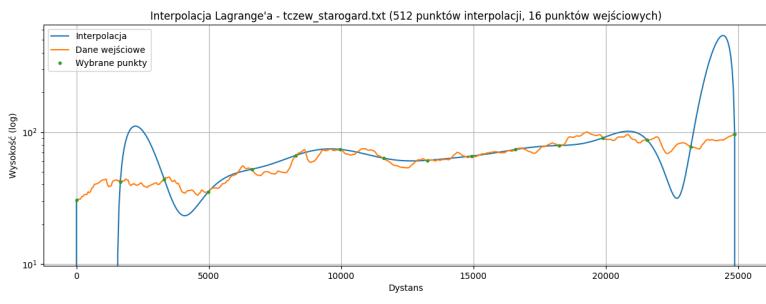
## 4.3. Interpolacja Lagrange'a - tczew\_starogard.txt

Interpolacja Lagrange'a - tczew\_starogard.txt (512 punktów interpolacji, 6 punktów wejściowych)

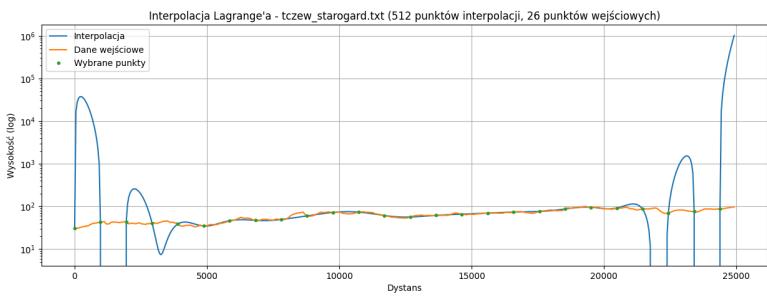


Interpolacja Lagrange'a - tczew\_starogard.txt (512 punktów interpolacji, 11 punktów wejściowych)

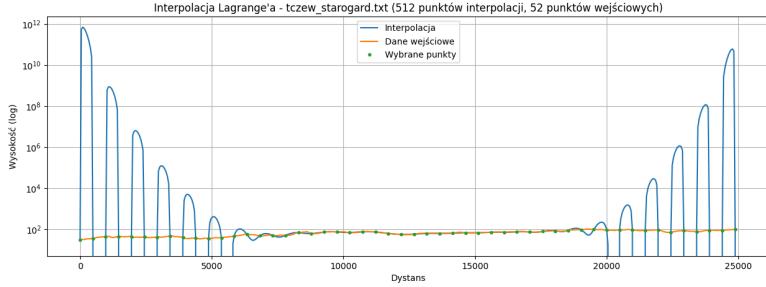




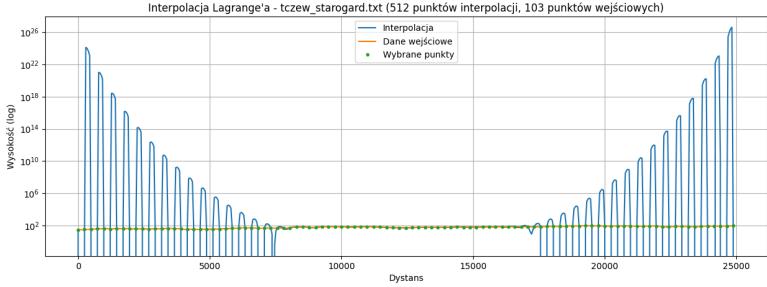
16 węzłów



26 węzłów

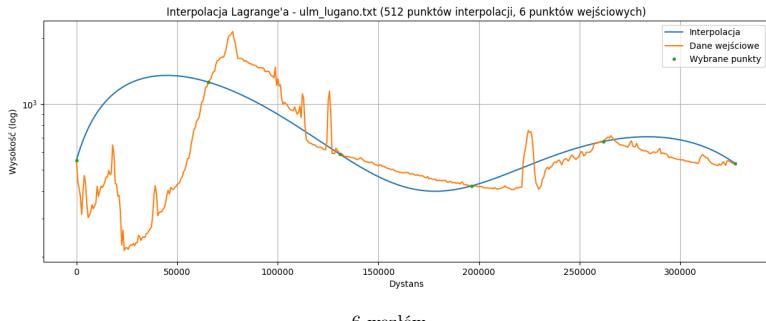


52 węzłów

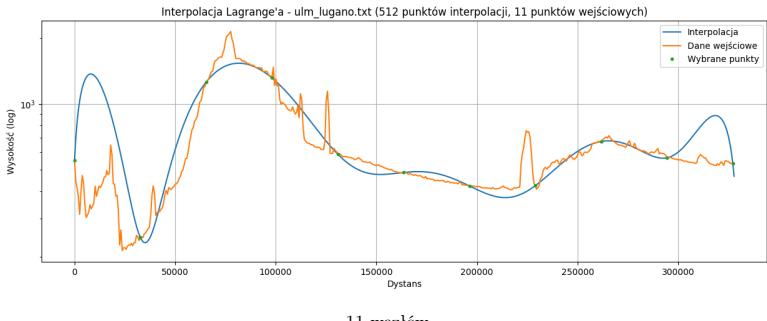


103 węzłów

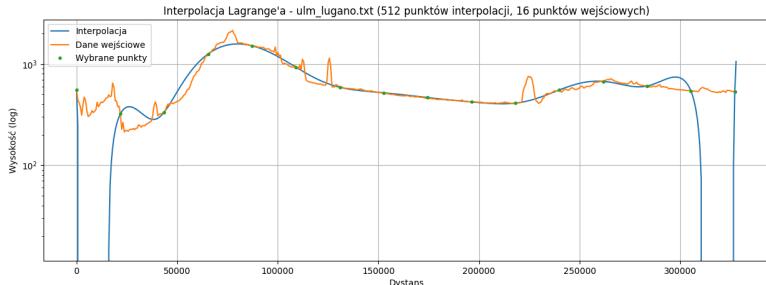
#### 4.4. Interpolacja Lagrange'a - ulm\_lugano.txt



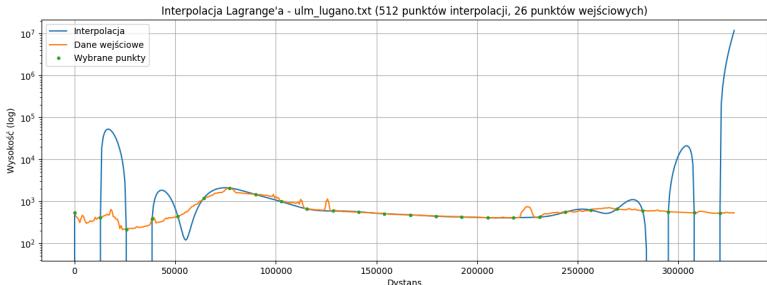
6 węzłów



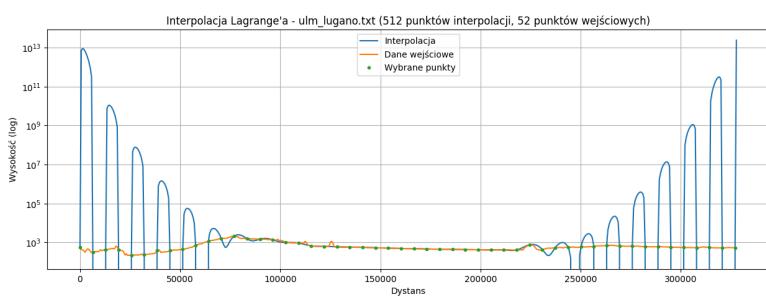
11 węzłów



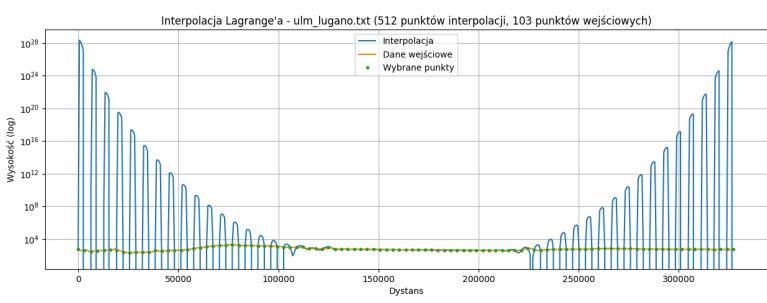
16 węzłów



26 węzłów



52 węzłów



103 węzłów

#### 4.5. Podsumowanie interpolacji metodą Lagrange'a dla równoodległych węzłów

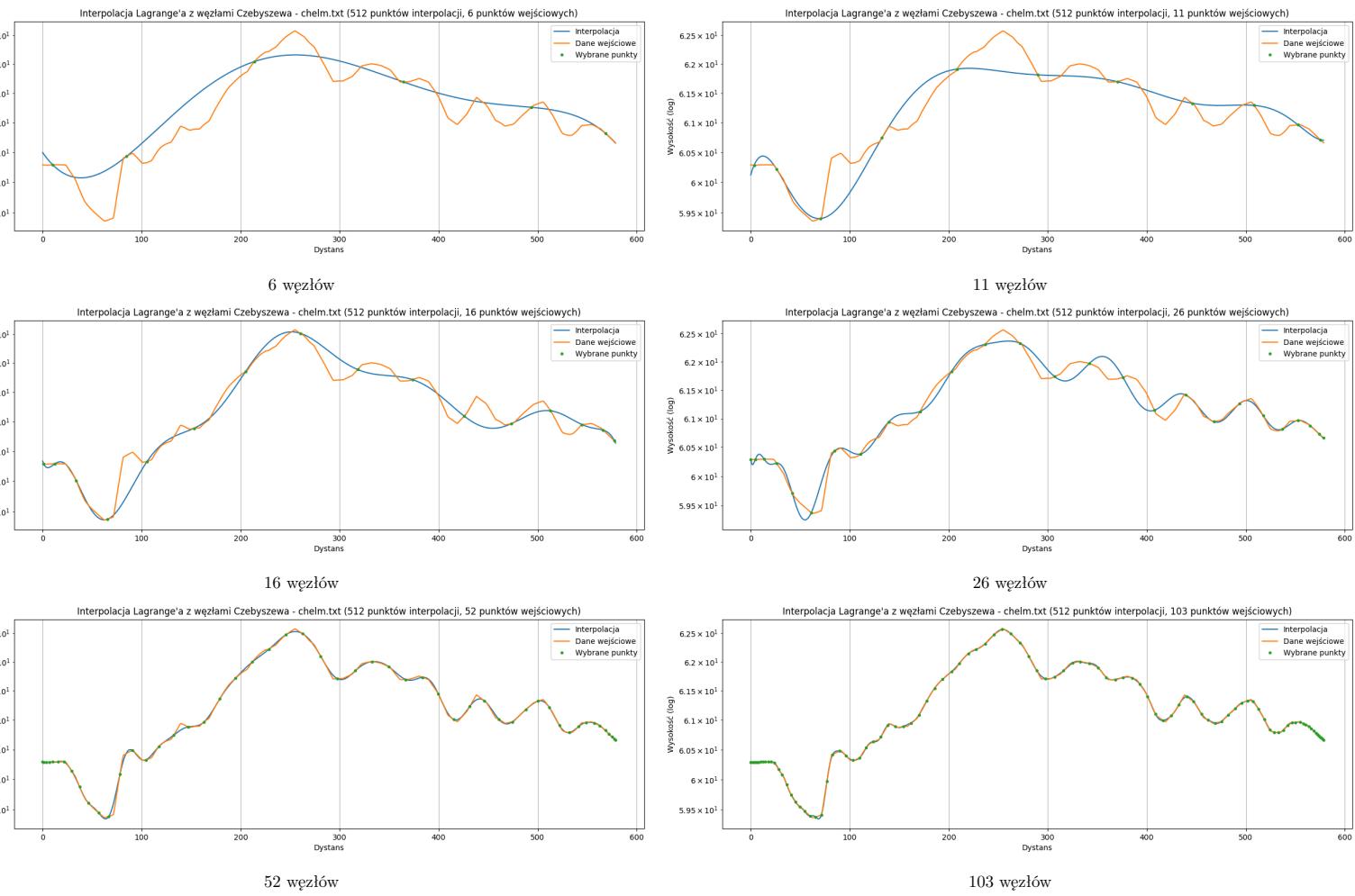
Jak można zauważyć, wyniki interpolacji metodą Lagrange'a nie spełniają oczekiwania. W przypadku małej ilości węzłów, czyli 6 oraz 11, wyniki są mało dokładne, ale efekt Rungego nie jest widoczny. Wraz ze wzrostem ilości węzłów, wyniki interpolacji pogarszają się. Widać wyraźnie efekt Rungego,

czyli oscylacje wielomianu interpolacyjnego w okolicach krańców przedziału. Już przy 26 węzłach wynik interpolacji jest bardzo zaburzony.

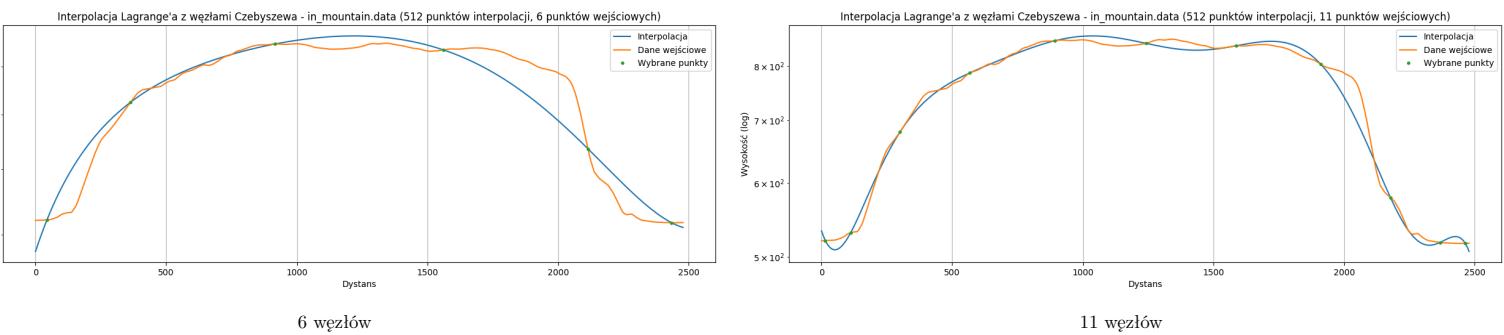
## 5. Wyniki interpolacji metodą Lagrange'a dla węzłów Czebyszewa

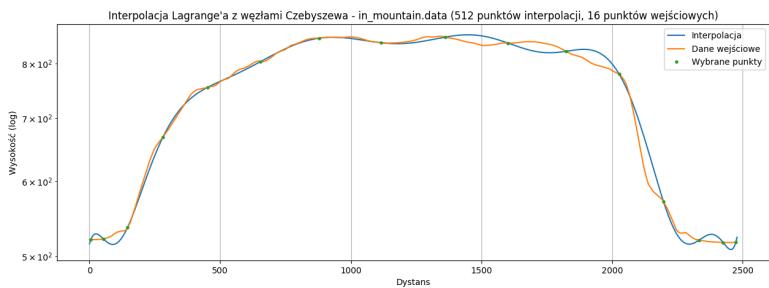
W celu zminimalizowania efektu Rungego zastosowano interpolację metodą Lagrange'a dla węzłów Czebyszewa. Z racji tego, że nie znamy danych wejściowych, nie jesteśmy w stanie idealnie dobrać węzłów Czebyszewa. W projekcie wybrano z węzłów wejściowych bez powtórzeń te, które są najbliższej węzłów Czebyszewa.

### 5.1. Interpolacja Lagrange'a (węzły Czebyszewa) - chelm.txt

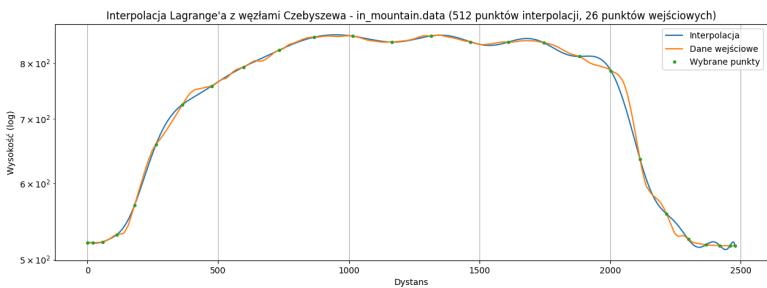


### 5.2. Interpolacja Lagrange'a (węzły Czebyszewa) - in\_mountain.data

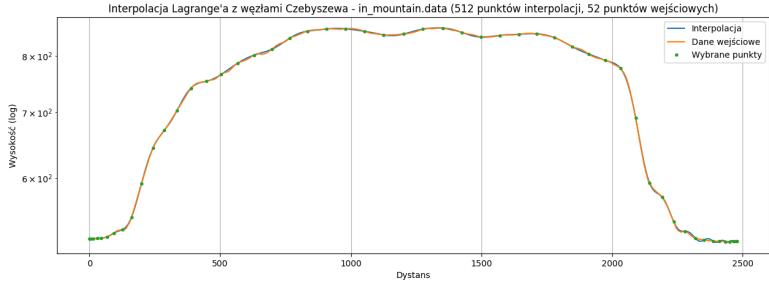




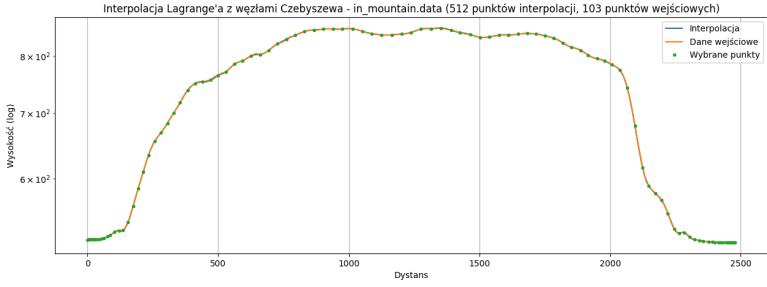
16 węzłów



26 węzłów

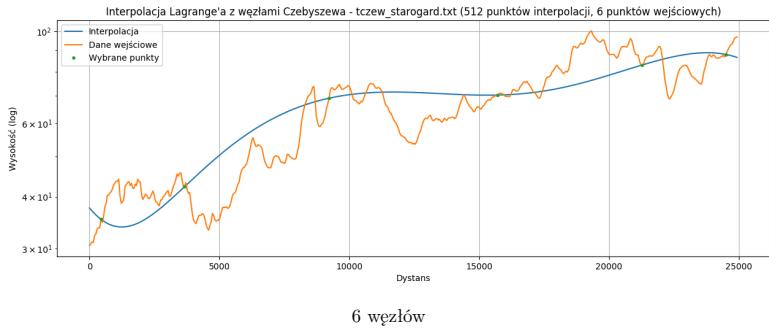


52 węzłów

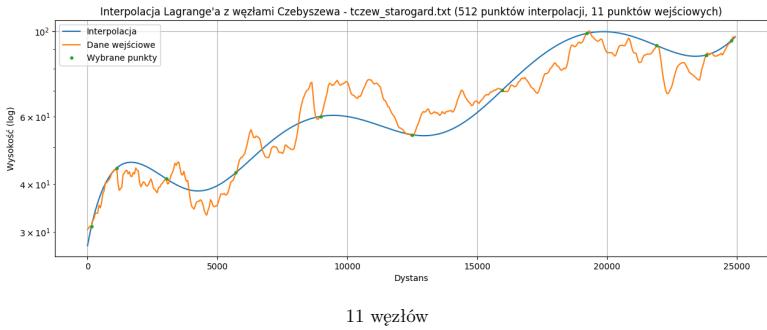


103 węzłów

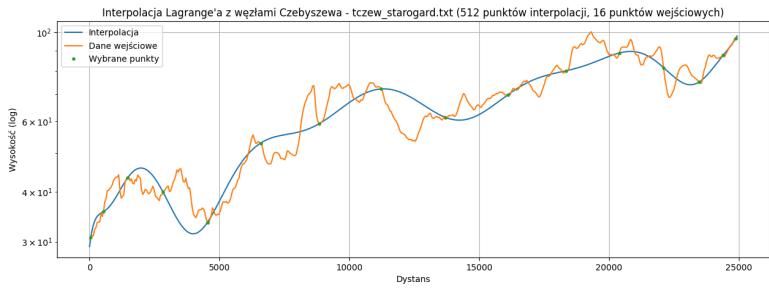
### 5.3. Interpolacja Lagrange'a (węzły Czebyszewa) - tczew\_starogard.txt



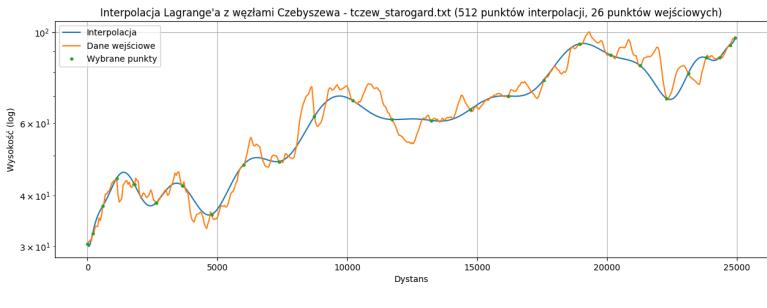
6 węzłów



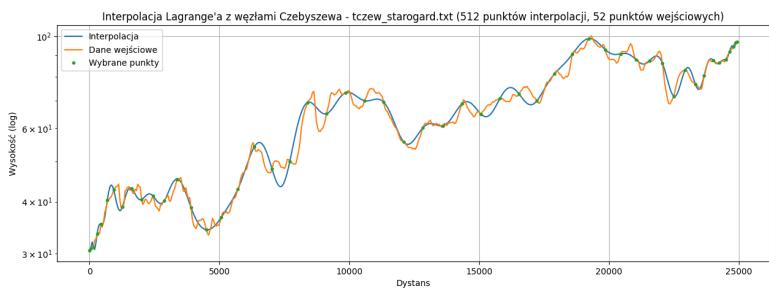
11 węzłów



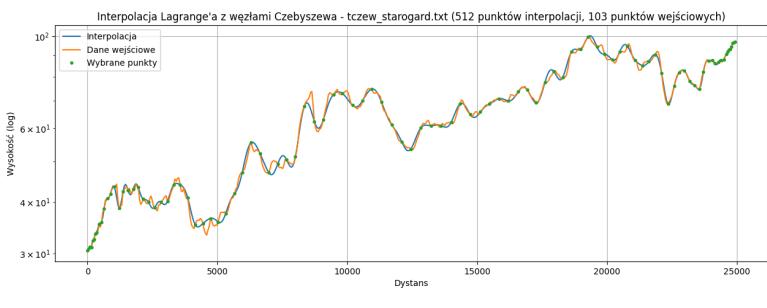
16 węzłów



26 węzłów

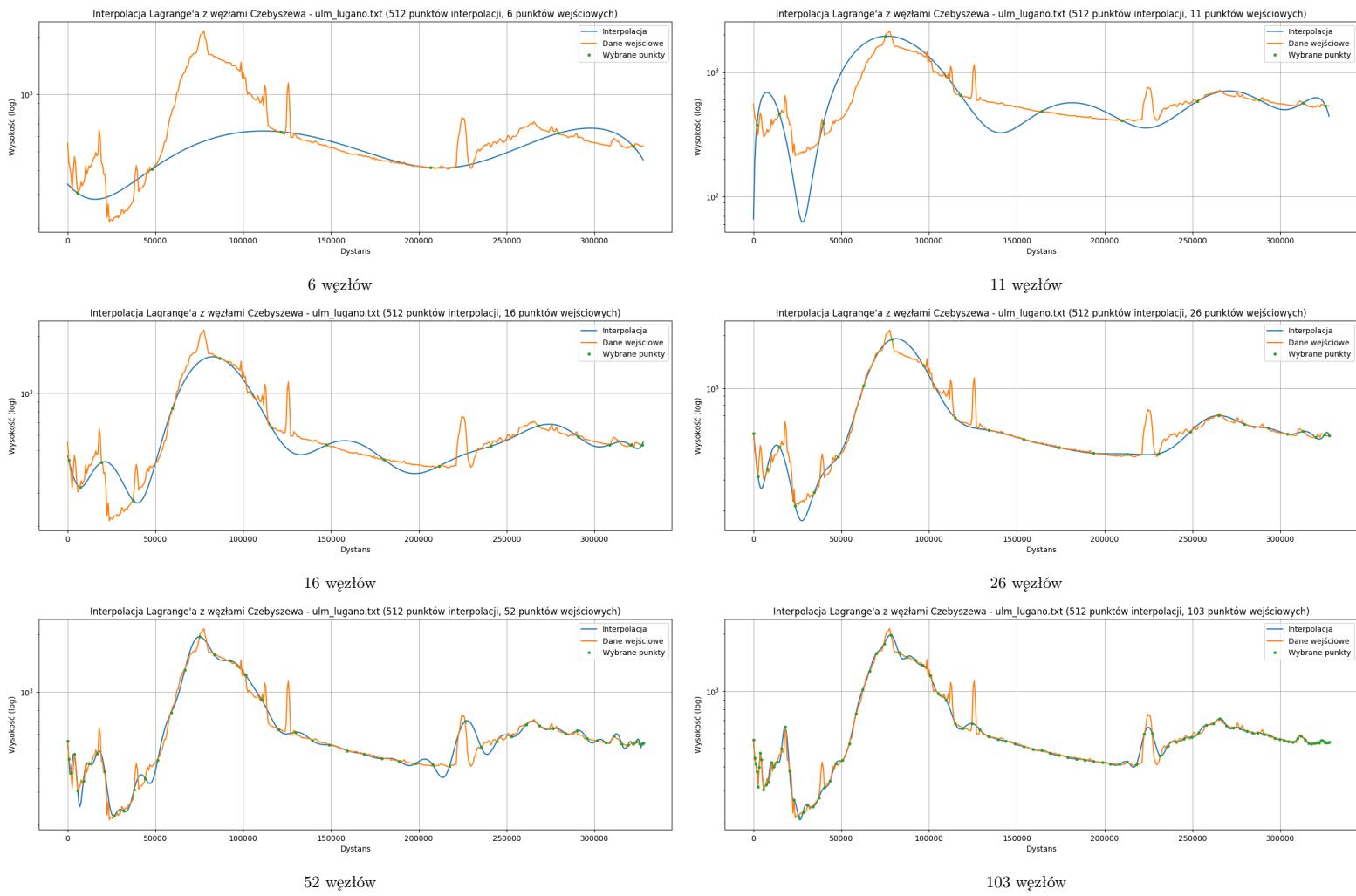


52 węzłów



103 węzłów

### 5.4. Interpolacja Lagrange'a (węzły Czebyszewa) - ulm\_lugano.txt



## 5.5. Podsumowanie interpolacji metodą Lagrange'a dla węzłów Czebyszewa

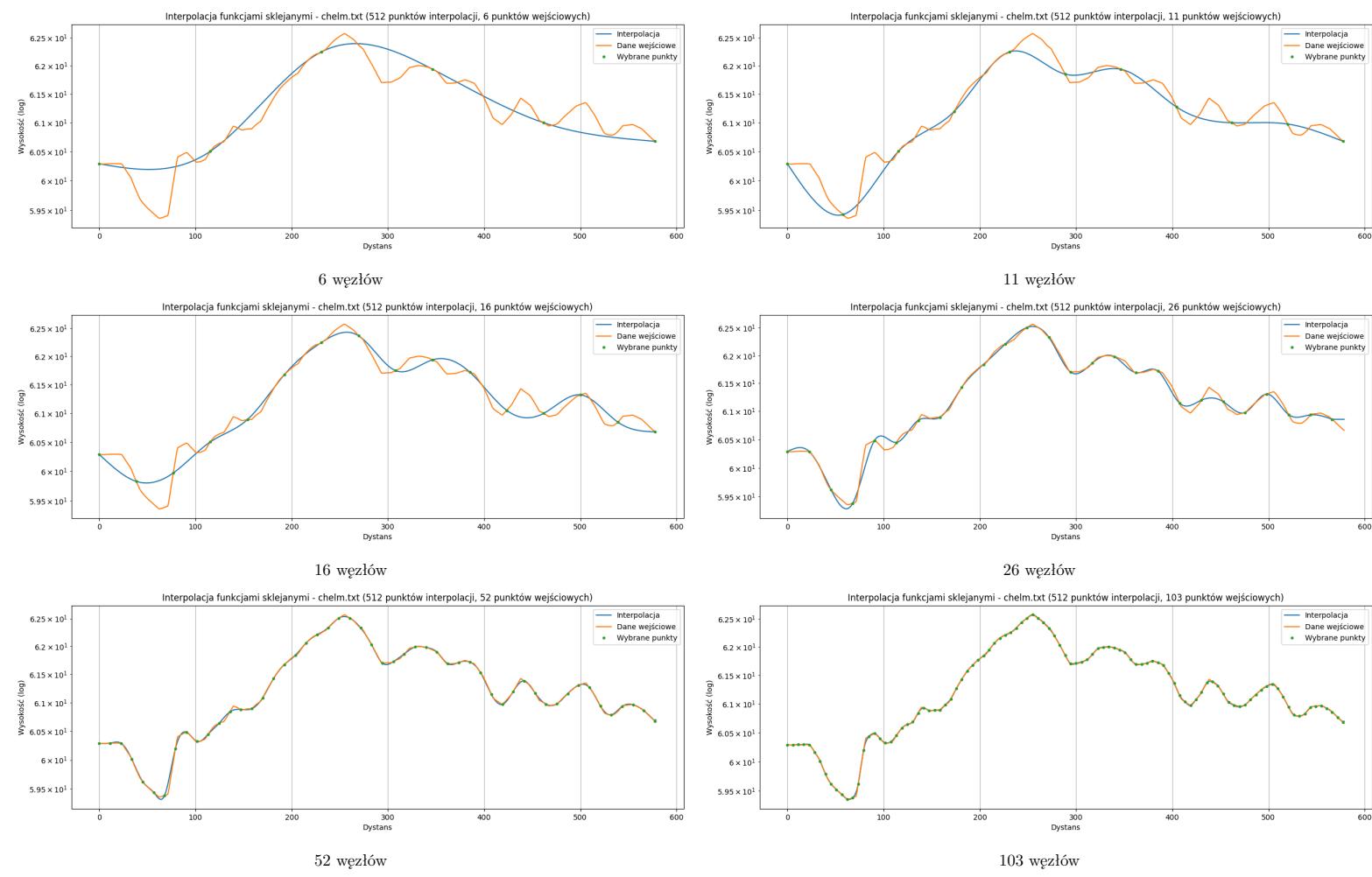
Jak można wywnioskować z powyższych wykresów, interpolacja metodą Lagrange'a dla węzłów Czebyszewa jest bardziej stabilna niż dla równoodległych węzłów. Dla wszystkich danych udało się uzyskać dobre wyniki interpolacji. Efekt Rungego jest praktycznie niewidoczny. Nawet dla 103 węzłów interpolacja jest bardzo dokładna.

Warto zauważyć, że w przypadku danych wejściowych z 512 punktów, wybór węzłów Czebyszewa był możliwy. W praktyce, dla mniejszej ilości danych, dobór węzłów Czebyszewa może być trudny. Wymaga on wybrania nierównomiernie rozmieszczonej węzłów, co jest trudne do osiągnięcia.

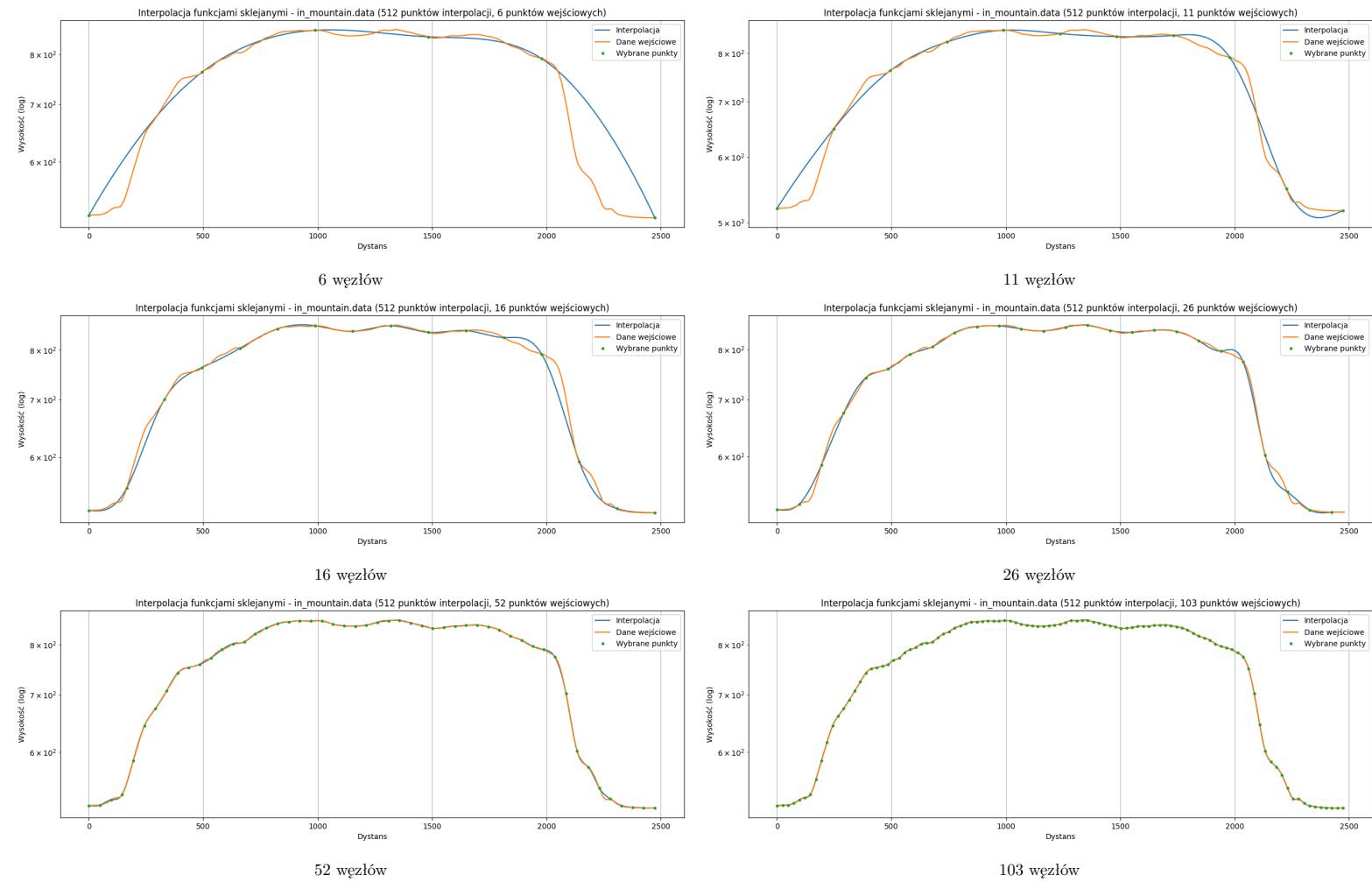
## 6. Wyniki interpolacji metodą funkcji sklejanych

Dla każdego zbioru danych przeprowadzono interpolację metodą funkcji sklejanych. W projekcie zaimplementowano interpolację funkcjami sklejonymi stopnia 3. Również dla tej metody wybrano odpowiednio 6, 11, 16, 26, 52 oraz 103 węzłów wejściowych. Wartości wybranych węzłów są rozmiieszczone równomiernie. Na ich podstawie obliczono wartości funkcji w 512 punktach. Poniżej przedstawiono wykresy interpolacji dla każdego zbioru danych.

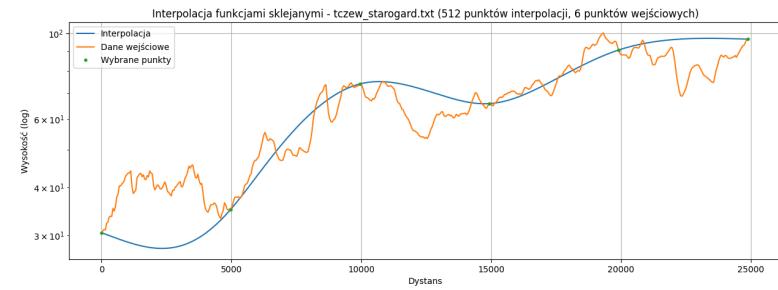
### 6.1. Interpolacja funkcjami sklejonymi - chelm.txt



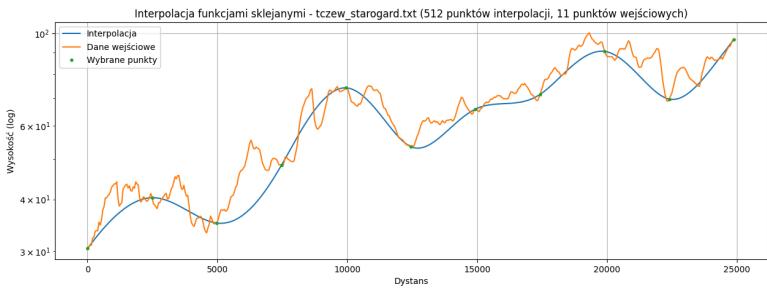
## 6.2. Interpolacja funkcjami sklejonymi - in\_mountain.data



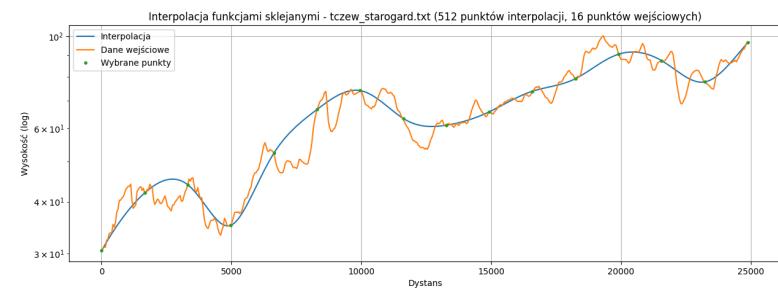
## 6.3. Interpolacja funkcjami sklejonymi - tczew\_starogard.txt



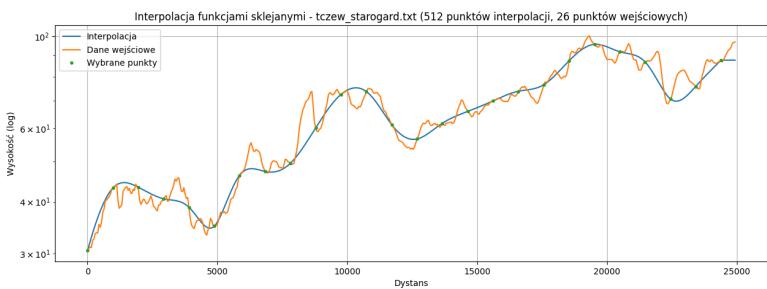
6 węzłów



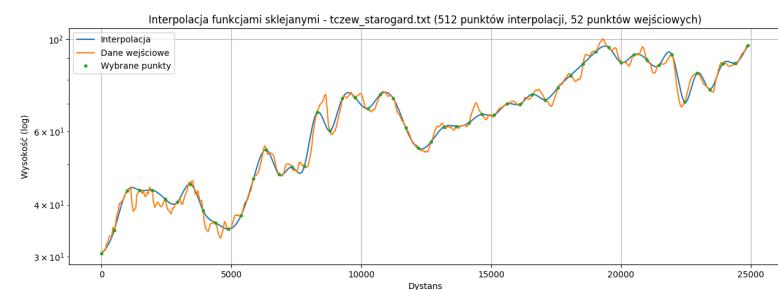
11 węzłów



16 węzłów



26 węzłów

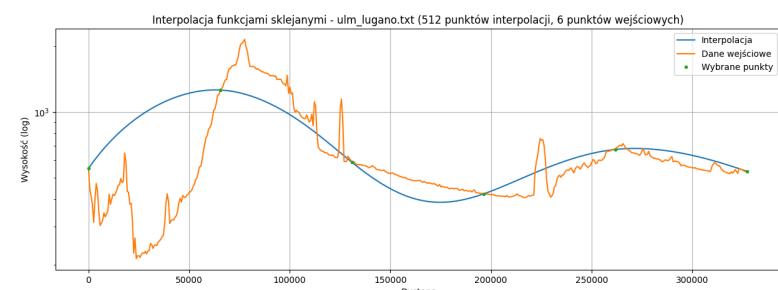


52 węzłów

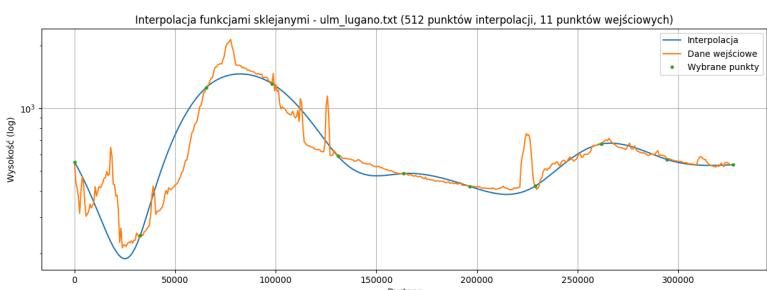


103 węzłów

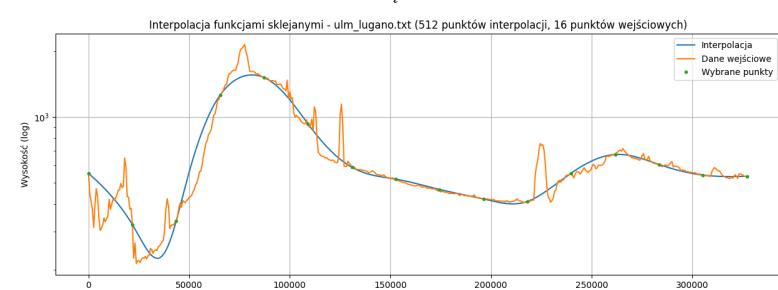
## 6.4. Interpolacja funkcjami sklejonymi - ulm\_lugano.txt



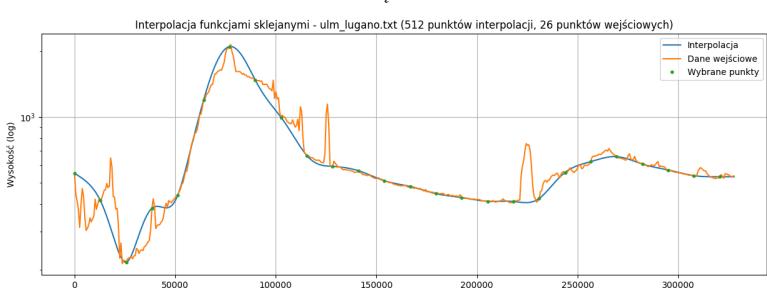
6 węzłów



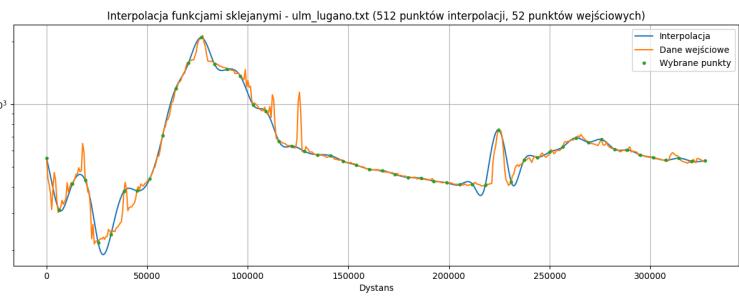
11 węzłów



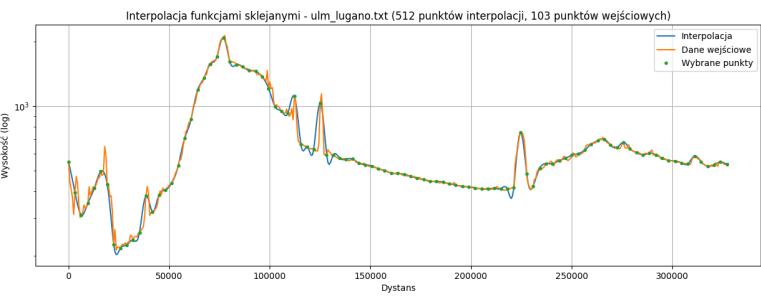
16 węzłów



26 węzłów



52 węzłów



103 węzłów

## 6.5. Podsumowanie interpolacji metodą funkcji sklejanych

Interpolacja metodą funkcji sklejanych pozwala na uzyskanie bardzo dokładnych wyników. Nawet przy 11 węzłach wejściowych wynik interpolacji przypomina oryginalną funkcję. Dla 52 czy 103 węzłów interpolacja jest bardzo dokładna. Jak również możemy zauważać, metoda funkcji sklejanych jest odporna na efekt Rungego. Pozwala to na zwiększenie ilości węzłów bez obaw o pogorszenie wyników. Warto zauważyć, że metoda funkcji sklejanych, w przeciwieństwie do metody Lagrange'a, spełnia swoje zadanie dla danych równomiernie rozmieszczenych.

## 7. Podsumowanie

W uzyskanych wyników interpolacji można zauważać, że metoda Lagrange'a dla węzłów równoodległych nie jest odpowiednia do interpolacji profilu wysokościowego. Dla małej ilości węzłów wejściowych wyniki są mało dokładne, a po ich zwiększeniu pojawi się efekt Rungego. Zastosowanie węzłów Czebyszewa pozwala na zminimalizowanie tego efektu, ale nie jest to rozwiązanie idealne. Wymaga ono wyboru nierównomiernie rozmieszczenych węzłów, co jest trudne do osiągnięcia w praktyce. W plikach z danymi wejściowymi znajdowało się aż 512 punktów, co pozwalało na dobre dobranie węzłów Czebyszewa. W przypadku mniejszej ilości danych, nie byłoby to możliwe. Z tego powodu metoda Lagrange'a nie jest odpowiednia do interpolacji profilu wysokościowego.

Metoda funkcji sklejanych pozwala na uzyskanie bardzo dokładnych wyników interpolacji. Jest ona odporna na efekt Rungego, co pozwala na zwiększenie ilości węzłów bez obaw o pogorszenie wyników. Metoda funkcji sklejanych spełnia swoje zadanie dla danych równomiernie rozmieszczenych, co jest idealne w przypadku profilu wysokościowego.

Podsumowując, pomimo większej trudności implementacyjnej, metoda funkcji sklejanych jest bardziej odpowiednia do interpolacji profilu wysokościowego niż metoda Lagrange'a. Pozwala ona na uzyskanie dokładnych wyników nawet dla małej ilości węzłów wejściowych. Możemy poprawić jakość interpolacji poprzez zwiększenie ilości węzłów, co nie wpłynie negatywnie na wyniki. Metoda funkcji sklejanych jest również bardziej odporna na efekt Rungego, co pozwala na uzyskanie dokładnych wyników bez obaw o zaburzenia.