

Metody numeryczne - Aproksymacja profilu wysokościowego

Krzysztof Nasuta, s193328

09-05-2024

Spis treści

1. Wstęp	1
2. Opis metod	1
3. Dane wejściowe	2
4. Wyniki interpolacji metodą Lagrange'a dla równoodległych węzłów	3
5. Wyniki interpolacji metodą Lagrange'a dla węzłów Czebyszewa	6
6. Wyniki interpolacji metodą funkcji sklejanych	9
7. Podsumowanie	12

1. Wstęp

Celem projektu było zaimplementowanie dwóch metod interpolacji funkcji: metody Lagrange'a oraz metody funkcji sklejanych. Następnie należało wykorzystać te metody do interpolacji profilu wysokościowego. W projekcie przeprowadzono testy dla czterech różnych zbiorów danych, a wyniki przedstawiono w postaci wykresów. W projekcie porównano również wpływ ilości węzłów na jakość interpolacji, oraz rozmieszczenia węzłów w przypadku metody Lagrange'a.

Do implementacji wykorzystano język Python wraz z biblioteką `matplotlib` do generowania wykresów.

2. Opis metod

2.1. Metoda Lagrange'a dla równoodległych węzłów

Metoda Lagrange'a pozwala na obliczenie wielomianu stopnia n na podstawie $n+1$ węzłów. Jest to jedna z najprostszych metod interpolacji. Wynik interpolacji Lagrange'a jest taki sam jak wynik metody Vandermonde'a. Jej zaletą jest brak konieczności rozwiązywania układu równań, stabilność numeryczna oraz prostota implementacji.

Bazą dla metody Lagrange'a jest wzór:

$$\phi_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n+1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Następnie wielomian interpolacyjny Lagrange'a można zapisać jako:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i \phi_i(x)$$

Pomimo swoich zalet, metoda Lagrange'a ma również wady. Jedną z nich jest podatność na efekt Runego, czyli oscylacje wielomianu interpolacyjnego w okolicach krańców przedziału. W celu zminimalizowania tego efektu można zastosować interpolację w węzłach Czebyszewa. W projekcie porównano jakość interpolacji z ich zastosowaniem w stosunku do równoodległych węzłów. Węzły Czebyszewa w przedziale $[a, b]$ można obliczyć ze wzoru:

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2k-1}{2k}\pi\right), k = 1, \dots, n$$

2.2. Metoda funkcji sklejanych

Metoda funkcji sklejanych polega na wyznaczeniu wielomianu stałego stopnia na każdym z przedziałów między węzłami. Wielomiany te są tak dobrane, aby były ciągłe oraz miały ciągłe pochodne pierwszego i drugiego rzędu. W projekcie zaimplementowano interpolację funkcjami sklejonymi stopnia 3. Wielomiany te są zdefiniowane jako:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

Metoda funkcji sklejanych pozwala na wyznaczenie współczynników a_i, b_i, c_i, d_i dla każdego z przedziałów poprzez rozwiązywanie układu równań. W projekcie do rozwiązywania układu równań wykorzystano faktoryzację LU. Metoda funkcji sklejanych jest bardziej skomplikowana niż metoda Lagrange'a, ale pozwala na uzyskanie lepszych wyników. Jest też odporna na efekt Rungego.

Układ równań do rozwiązywania dla metody funkcji sklejanych można zapisać jako:

$$S_i(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n - 1 \text{ Wartość funkcji w węzłach}$$

$$S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}, i = 0, \dots, n - 1 \text{ Ciągłość funkcji w węzłach}$$

$$S_0''(x_0) = 0 \text{ Zerowanie drugiej pochodnej w punkcie początkowym}$$

$$S_{n-1}''(x_n) = 0 \text{ Zerowanie drugiej pochodnej w punkcie końcowym}$$

$$S_i'(x_i) = S_{i-1}'(x_i), i = 1, \dots, n - 1 \text{ Zerowanie pierwszej pochodnej w punktach}$$

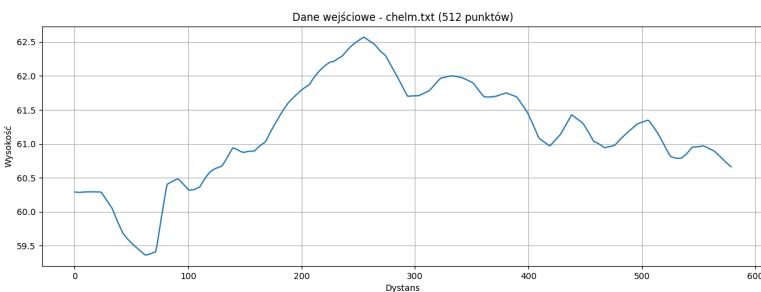
$$S_i''(x_i) = S_{i-1}''(x_i), i = 1, \dots, n - 1 \text{ Zerowanie drugiej pochodnej w punktach}$$

3. Dane wejściowe

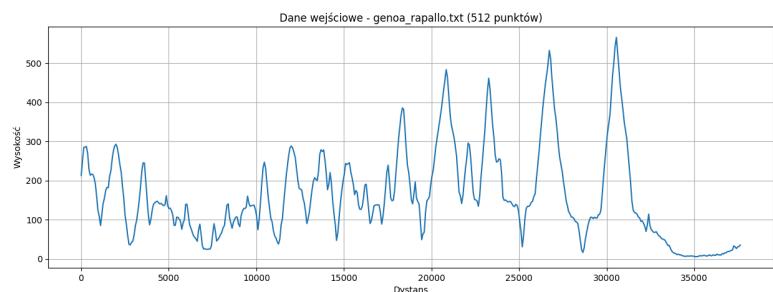
W projekcie przeprowadzono testy dla czterech różnych zbiorów danych. Wszystkie zbiory danych zawierają 512 punktów.

- **chelm.txt** - dane o małej zmienności wysokości
- **genoa_rapallo.txt** - dane o bardzo dużej zmienności wysokości, z dużym spadkiem pod koniec
- **tczew_starogard.txt** - dane o wzroście wysokości z dużymi oscylacjami miejscowymi
- **ulm_lugano.txt** - dane o bardzo dużej zmienności wysokości i dużych oscylacjach miejscowych

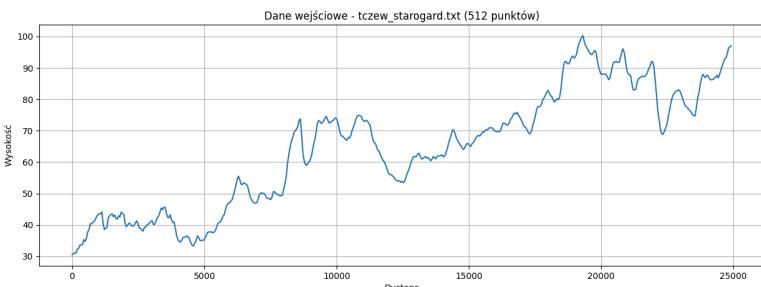
Poniżej przedstawiono wykresy dla każdego z nich.



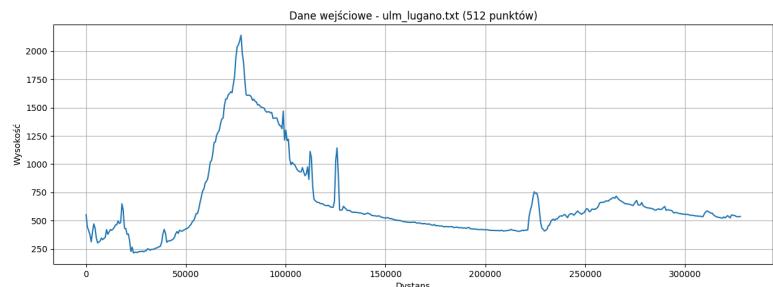
Dane wejściowe dla pliku chelm.txt



Dane wejściowe dla pliku genoa_rapallo.txt



Dane wejściowe dla pliku tczew_starogard.txt



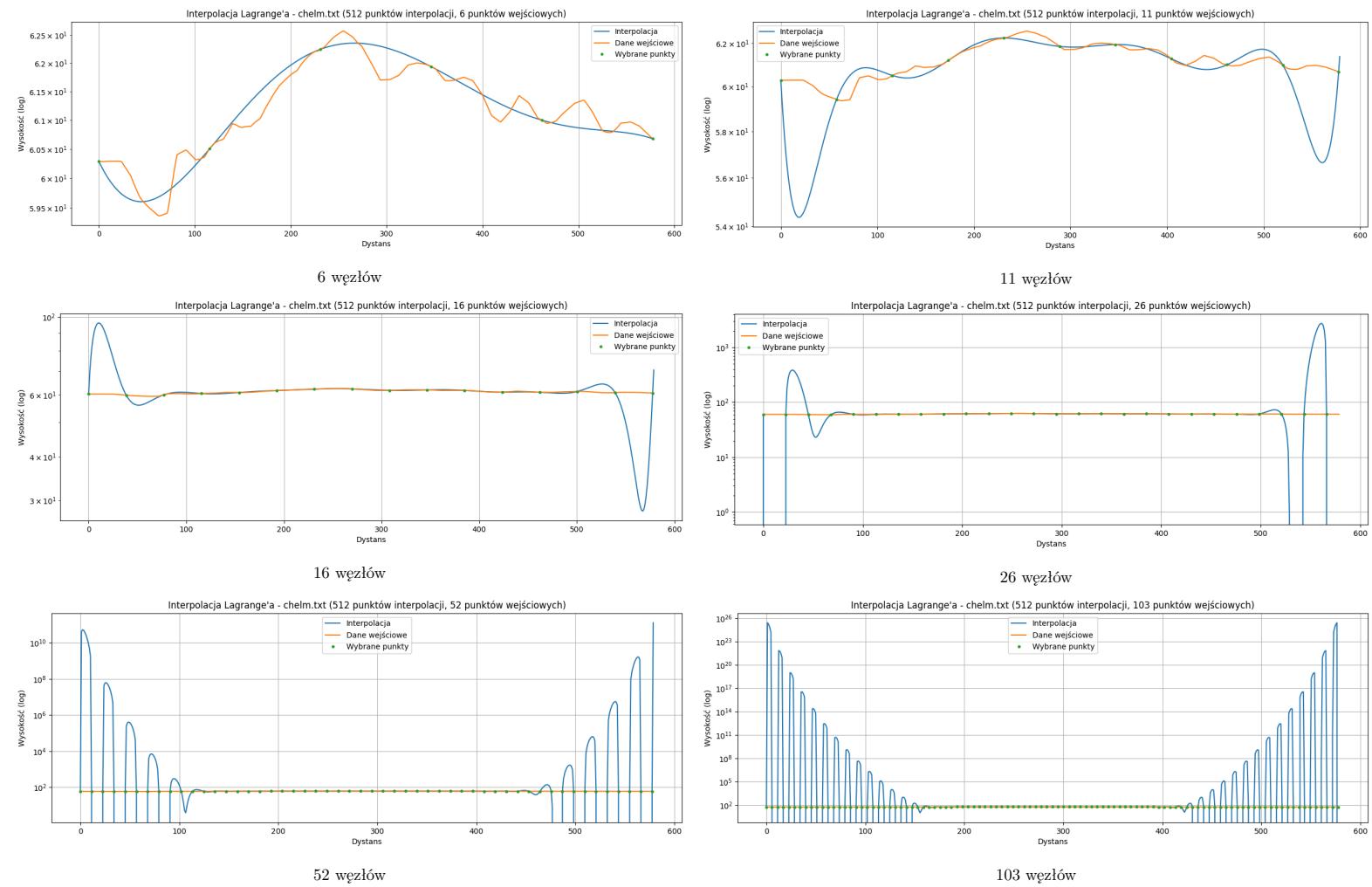
Dane wejściowe dla pliku ulm_lugano.txt

4. Wyniki interpolacji metodą Lagrange'a dla równoodległych węzłów

Dla każdego zbioru danych przeprowadzono interpolację metodą Lagrange'a dla 6, 11, 16, 26, 52 oraz 103 węzłów wejściowych. Wartości wybranych węzłów są rozmiieszczone równomiernie. Liczba węzłów została dobrana tak, aby umożliwić wybranie z 512 punktów węzłów równoodległych.

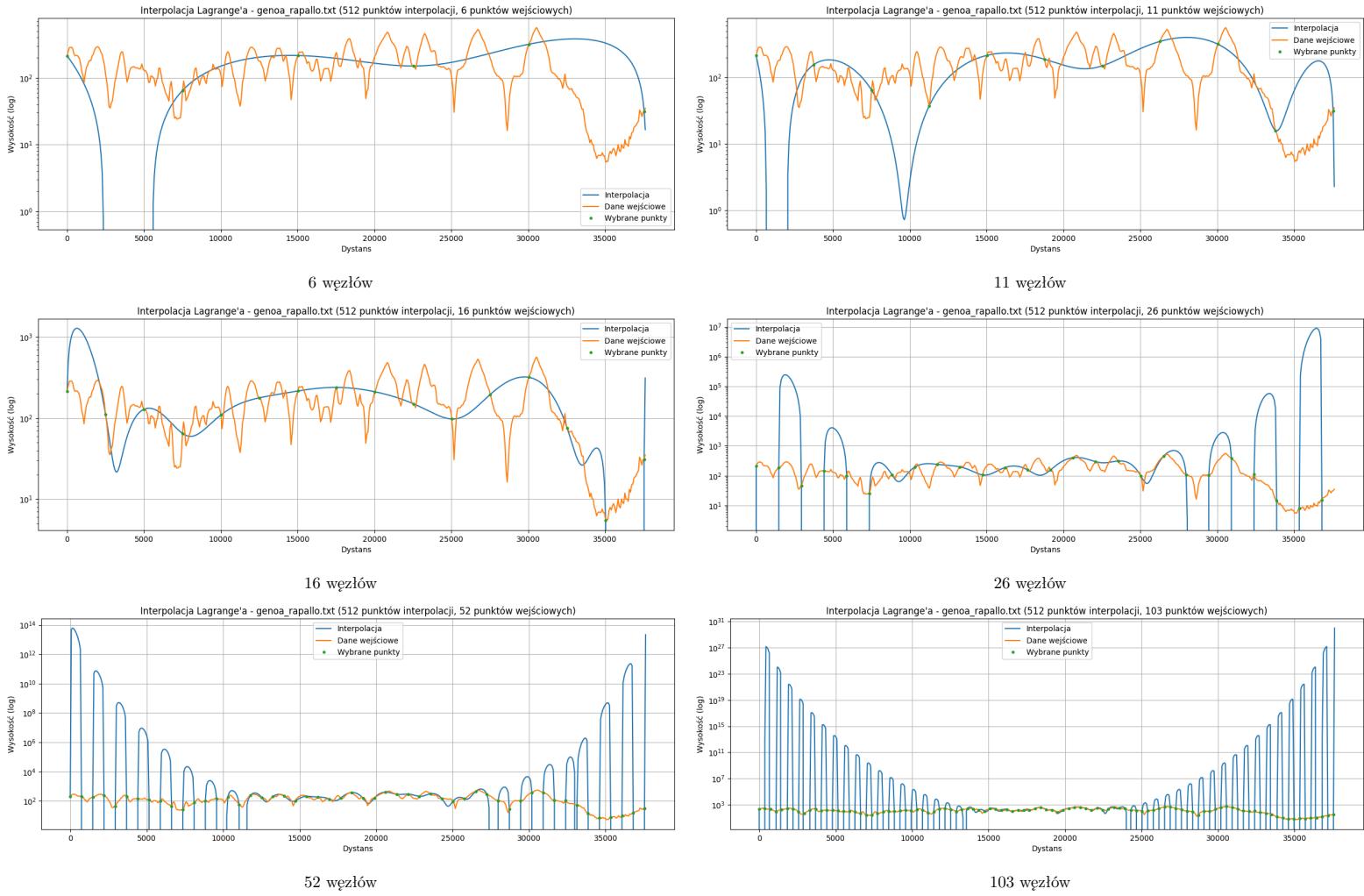
Za pomocą interpolacji Lagrange'a obliczono wartości funkcji w 512 punktach. Poniżej przedstawiono wykresy interpolacji dla każdego zbioru danych.

4.1. Interpolacja Lagrange'a - chelm.txt



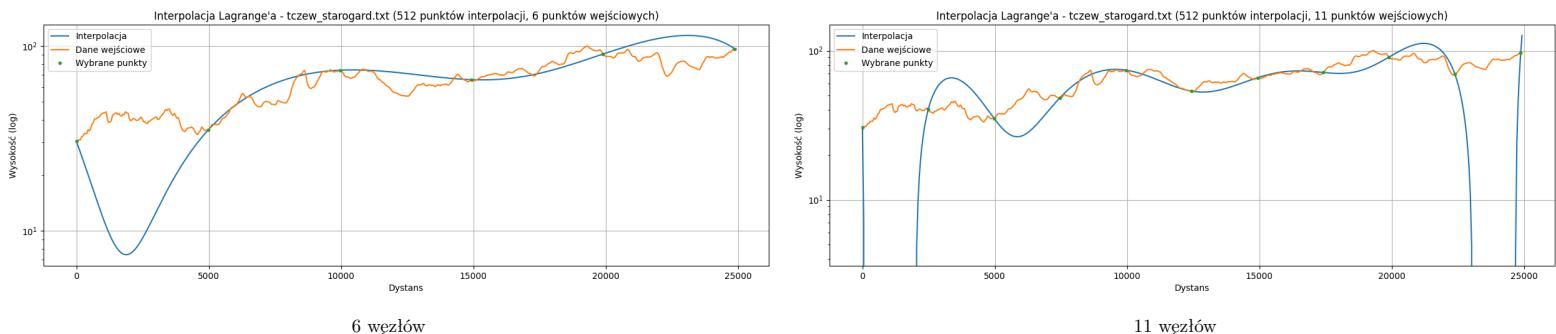
Jak możemy zauważyć na powyższych wykresach, uzyskane wyniki interpolacji nie przybliżają dobrze oryginalnych danych. Już dla 11 punktów dokładność interpolacji zaburzona jest przez efekt Rungego. W okolicach krańców przedziału pojawiają się oscylacje wielomianu interpolacyjnego. Dla 16 punktów ich amplituda jest dużo większa, co sprawia, że uzyskany wykres nie przypomina danych wejściowych. Zastosowanie większej ilości węzłów tylko pogarsza jakość interpolacji. Dla 52 i 103 punktów widoczne są olbrzymie oscylacje, ułożone w sposób charakterystyczny dla efektu Rungego.

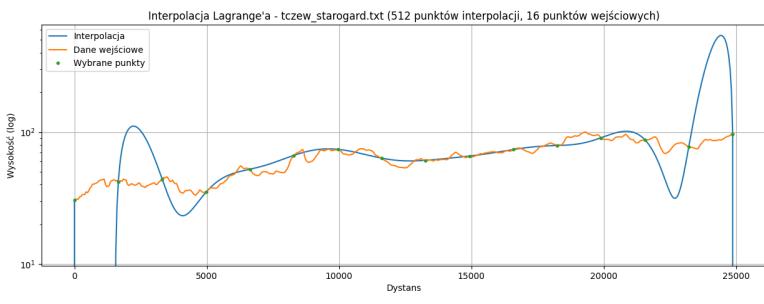
4.2. Interpolacja Lagrange'a - genoa_rapallo.txt



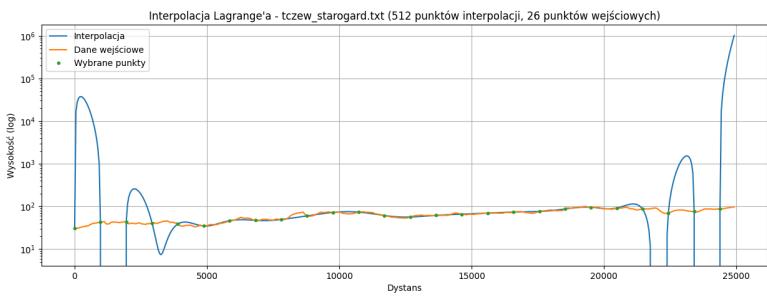
Również w tym przypadku wyniki interpolacji nie spełniają oczekiwania. Każdy z uzyskanych wykresów jest silnie zaburzony. Dla 6 punktów widzimy bardzo duży spadek wartości funkcji na początku przedziału. Przy wykorzystaniu 11 węzłów, między 3 a 4 punktem pojawia się kolejne zaburzenie. Dla 16 punktów widoczne jest dodatnie odchylenie między pierwszymi dwoma punktami oraz ogromne, ujemne odchylenie między dwoma ostatnimi punktami. Jeśli wykorzystamy 26 punktów, to w zaburzeniach pojawia się harmoniczność. Występują one na obu krańcach przedziału. Dla 52 i 103 punktów zaburzenia są jeszcze większe. Wyraźnie widać efekt Rungego.

4.3. Interpolacja Lagrange'a - tczew_starogard.txt

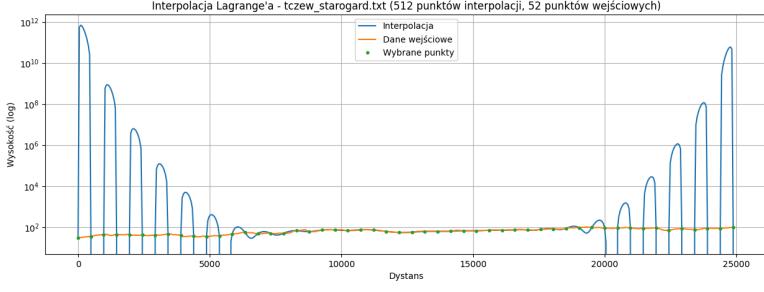




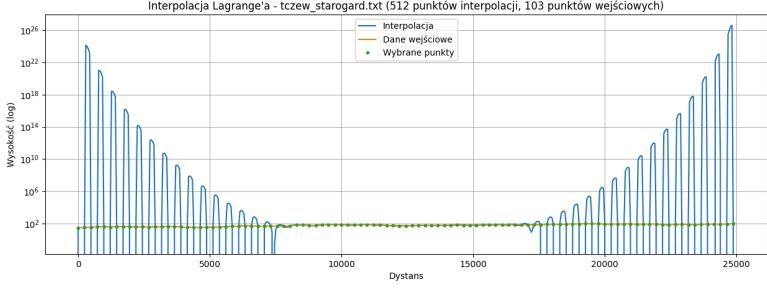
16 węzłów



26 węzłów



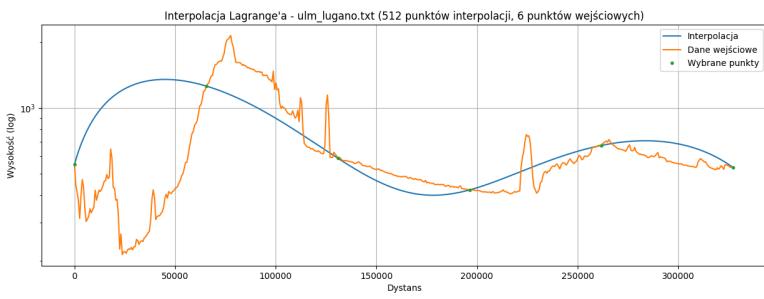
52 węzłów



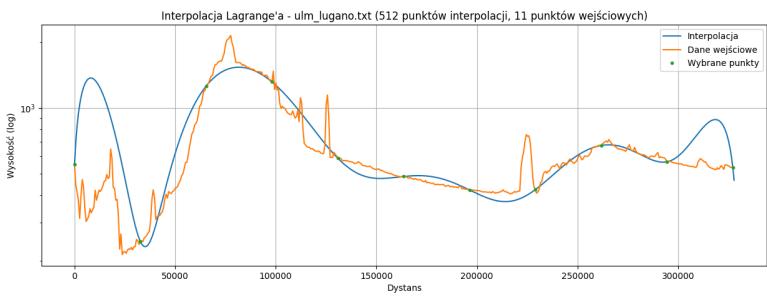
103 węzłów

Wyniki interpolacji dla tego zestawu również są silnie zaburzone przez efekt Rungego. Nawet dla 6 węzłów widzimy duże odchylenie między dwoma pierwszymi punktami. Użycie większej ilości węzłów tylko pogarsza wyniki.

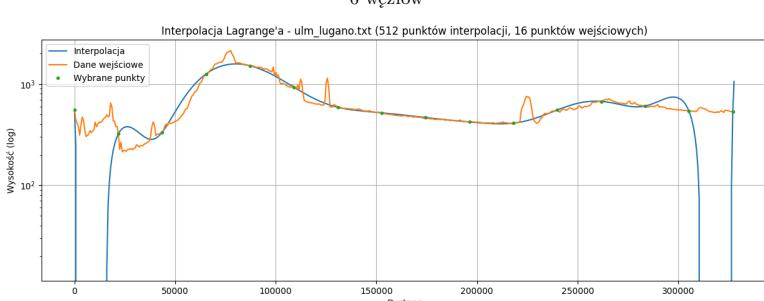
4.4. Interpolacja Lagrange'a - ulm_lugano.txt



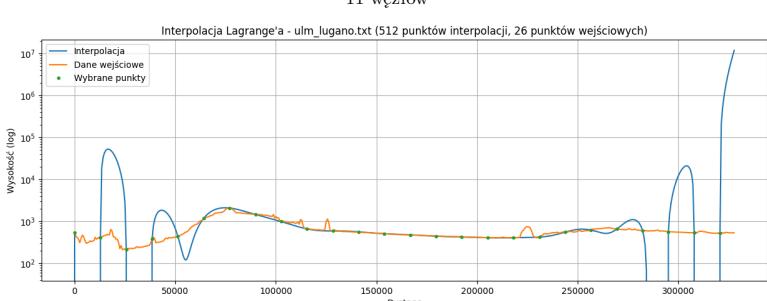
6 węzłów



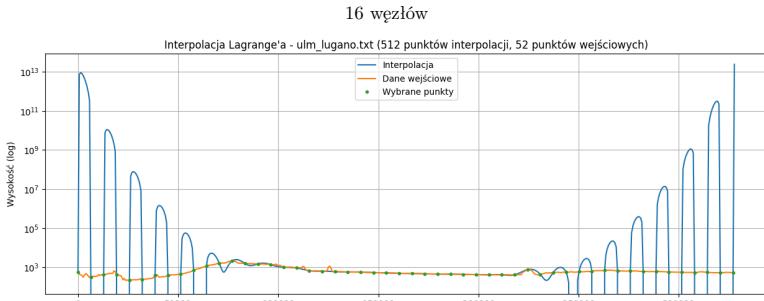
11 węzłów



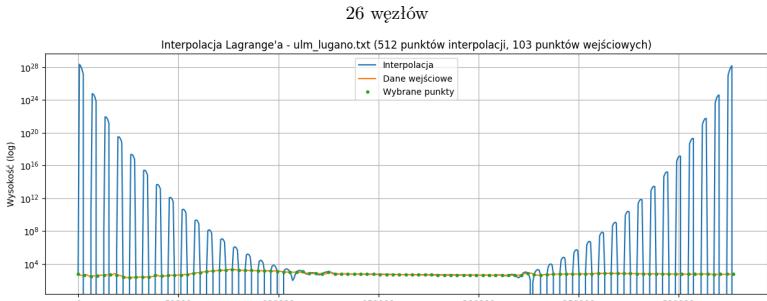
16 węzłów



26 węzłów



52 węzłów



103 węzłów

W tym przypadku również wyniki interpolacji nie spełniają oczekiwania. Dla 6 punktów widzimy duże odchylenie między dwoma pierwszymi punktami. Użycie większej ilości węzłów sprawia, że pojawia się efekt Rungego.

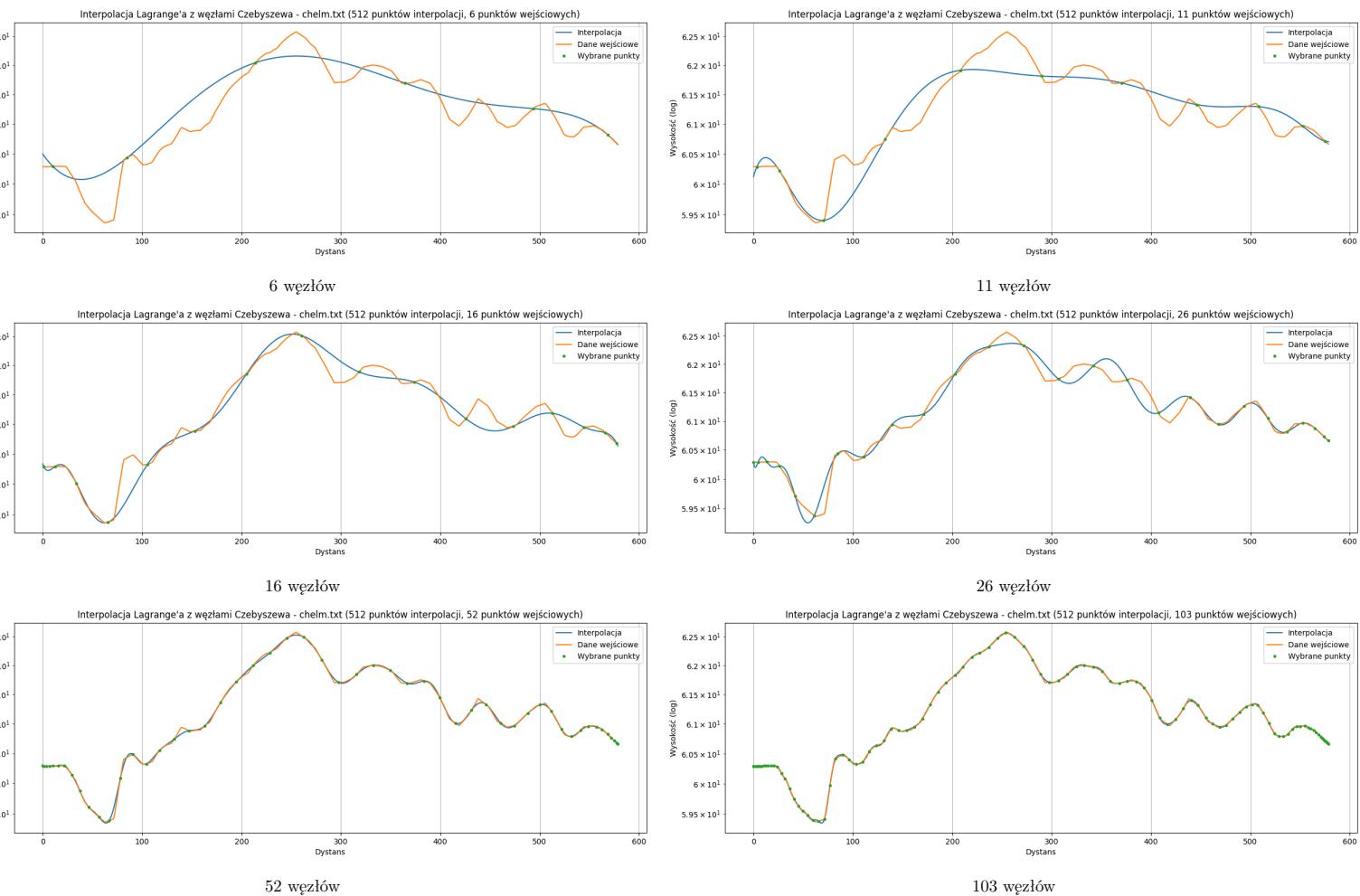
4.5. Podsumowanie interpolacji metodą Lagrange'a dla równoodległych węzłów

Jak można zauważyć, wyniki interpolacji metodą Lagrange'a nie spełniają oczekiwania. W przypadku małej ilości węzłów, czyli 6 oraz 11, wyniki są mało dokładne, ale efekt Rungego jest słaby. Wraz ze wzrostem ilości węzłów, wyniki interpolacji pogarszają się. Widać wyraźnie, że nasila się efekt Rungego, czyli oscylacje wielomianu interpolacyjnego w okolicach krańców przedziału. Już przy 26 węzłach wynik interpolacji jest bardzo zaburzony.

5. Wyniki interpolacji metodą Lagrange'a dla węzłów Czebyszewa

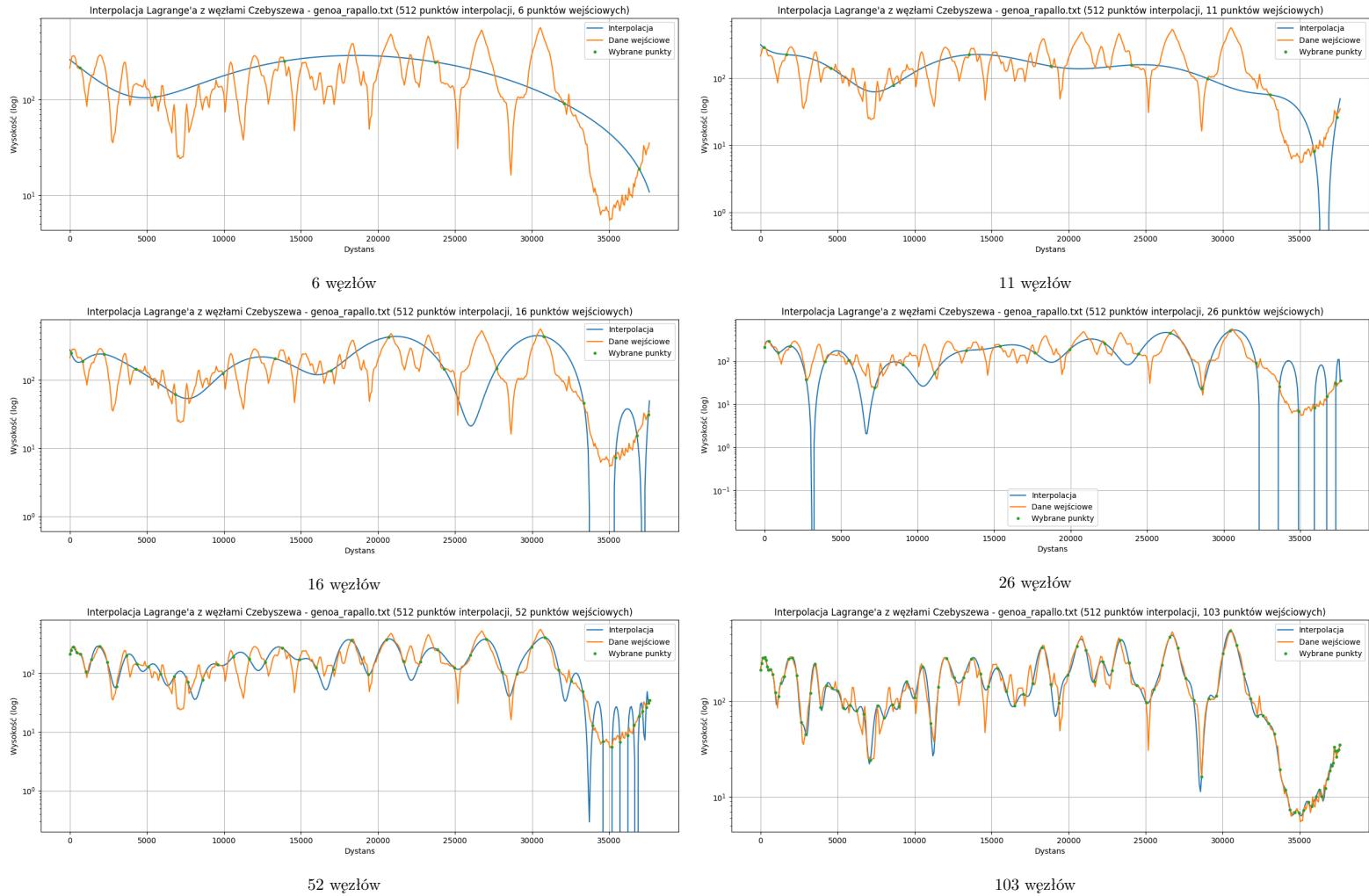
W celu zminimalizowania efektu Rungego zastosowano interpolację metodą Lagrange'a dla węzłów Czebyszewa. Z racji tego, że nie znamy danych wejściowych, nie jesteśmy w stanie idealnie dobrać węzłów Czebyszewa. W projekcie wybrano z węzłów wejściowych bez powtórzeń te, które są najbliższej węzłów Czebyszewa.

5.1. Interpolacja Lagrange'a (węzły Czebyszewa) - chelm.txt



Jak widać na powyższych wykresach, interpolacja metodą Lagrange'a dla węzłów Czebyszewa jest bardziej stabilna niż dla równoodległych węzłów. Zwiększenie ilości węzłów nie wpływa w tym przypadku negatywnie na wyniki. Wynik interpolacji jest dobry i pozwala na uzyskanie dokładnych wyników. Nawet użycie 103 węzłów nie powoduje wystąpienia efektu Rungego. Potencjalne zaburzenia związane z wyborem węzłów Czebyszewa nie są widoczne na wykresach.

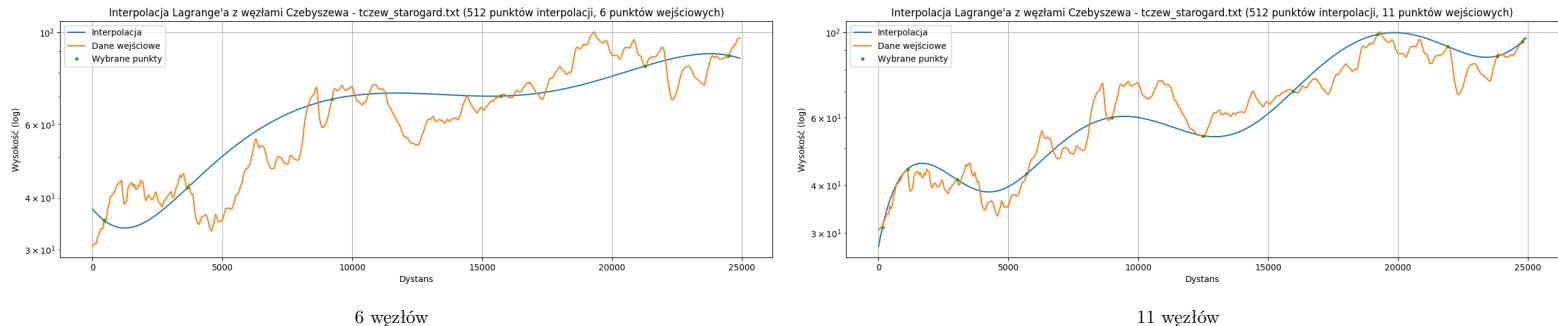
5.2. Interpolacja Lagrange'a (węzły Czebyszewa) - genoa_rapallo.txt

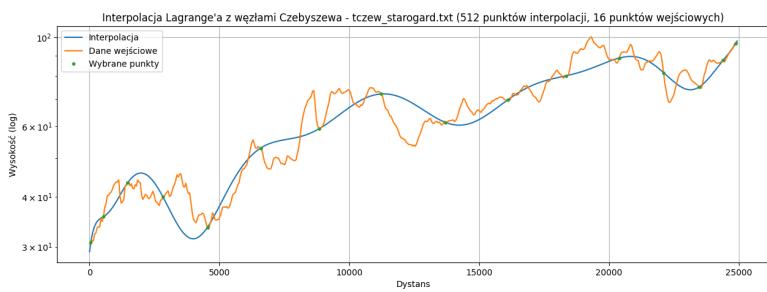


Jak możemy zauważyć na powyższych wykresach, interpolacja metodą Lagrange'a dla węzłów Czebyszewa pozwala na uzyskanie lepszych wyników, ale nie wyklucza w pełni efektu Rungego. Jak wynika z wykresów, wyniki interpolacji są zaburzone głównie na końcu przedziału, gdzie występuje duży spadek wartości funkcji. Użycie węzłów Czebyszewa sprawia, że w tamtym obszarze punkty interpolacji są bardzo zbliżone do siebie. Duże oscylacje pojawiają się już przy użyciu 11 punktów.

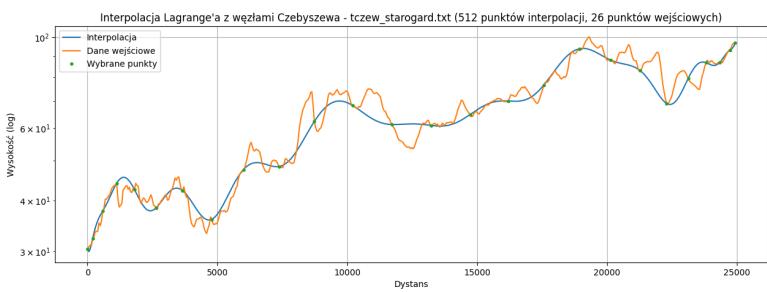
Co ciekawe, dla 103 węzłów efekt Rungego jest praktycznie niewidoczny. Prawdopodobnie wynika to z lepszego ułożenia węzłów Czebyszewa.

5.3. Interpolacja Lagrange'a (węzły Czebyszewa) - tczew_starogard.txt

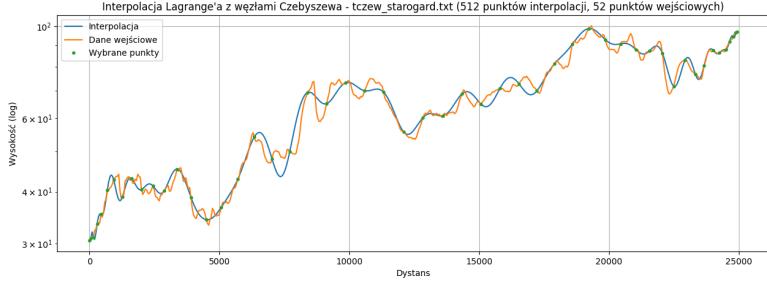




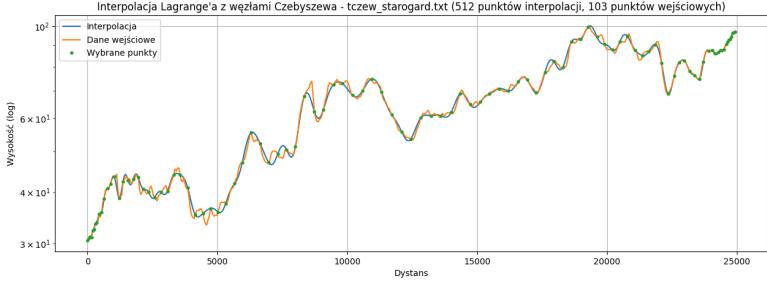
16 węzłów



26 węzłów



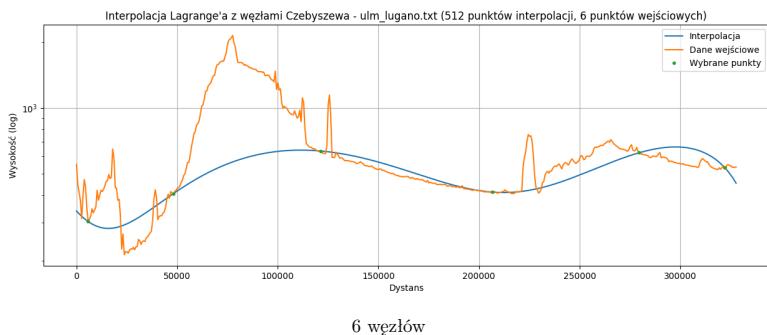
52 węzłów



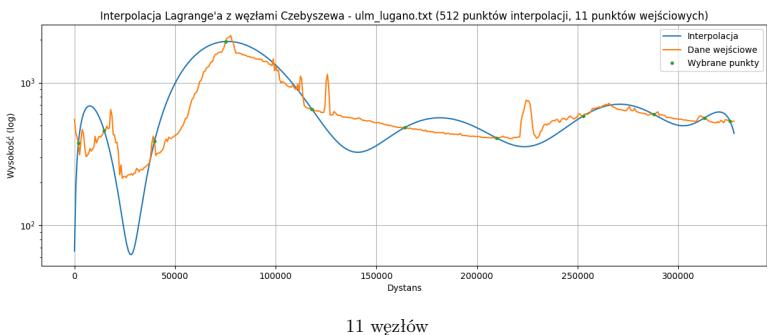
103 węzłów

Wyniki interpolacji dla tego zestawu danych są dobre. Użycie każdej z badanych ilości węzłów pozwala na uzyskanie dokładnych wyników.

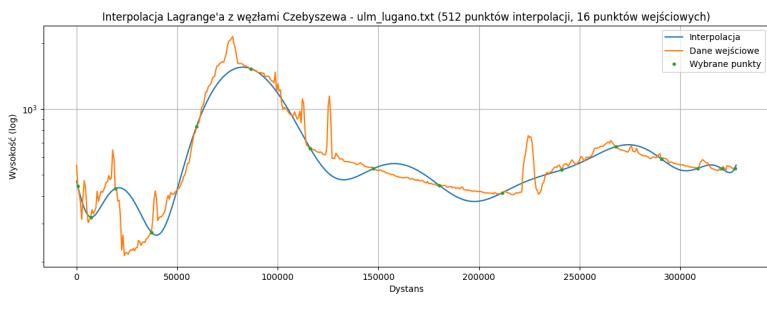
5.4. Interpolacja Lagrange'a (węzły Czebyszewa) - ulm_lugano.txt



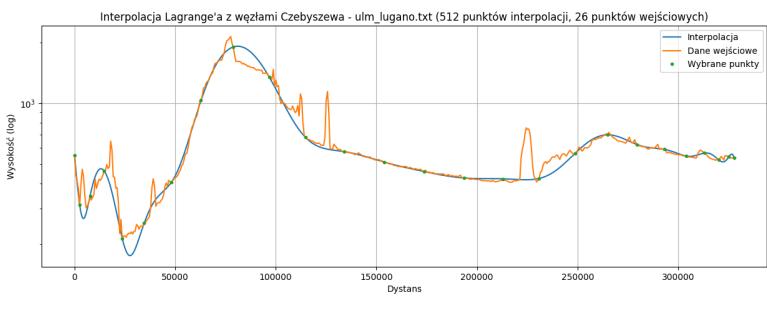
6 węzłów



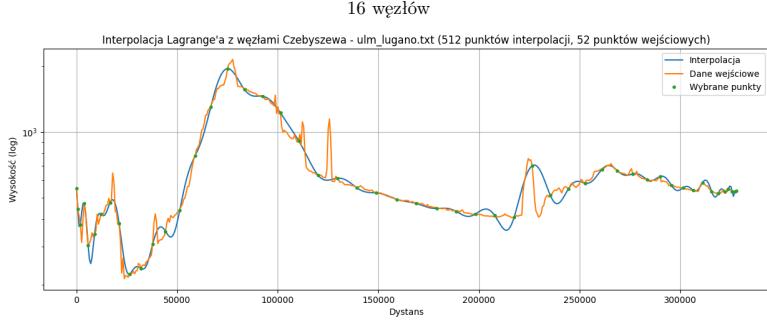
11 węzłów



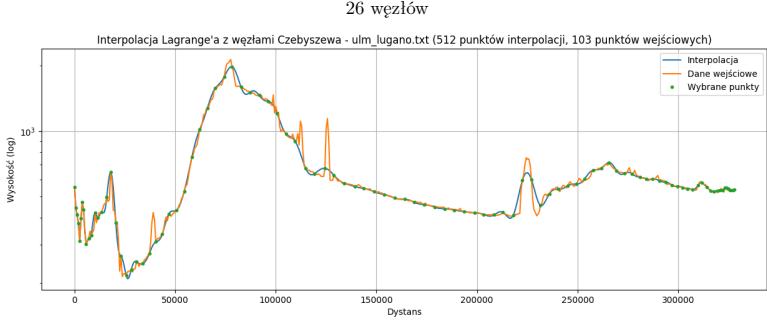
16 węzłów



26 węzłów



52 węzłów



103 węzłów

Jak widać na powyższych wykresach, interpolacja metodą Lagrange'a dla węzłów Czebyszewa pozwala na uzyskanie dokładnych wyników dla tych danych. Użycie 52 lub 103 węzłów daje nam bardzo dobre rezultaty. Widać, że efekt Rungego jest praktycznie niewidoczny.

Co ciekawe, dla 11 węzłów widoczne są silne zaburzenia na początku przedziału. Wynikają one z faktu, że pierwszy punkt interpolacji oddalony jest od pierwszego punktu danych.

5.5. Podsumowanie interpolacji metodą Lagrange'a dla węzłów Czebyszewa

Jak można wywnioskować z powyższych wykresów, interpolacja metodą Lagrange'a dla węzłów Czebyszewa jest bardziej stabilna niż dla równoodległych węzłów. Dla trzech z czterech zestawów danych uzyskano dobre wyniki. Efekt Runego jest praktycznie niewidoczny. Nawet dla 103 węzłów interpolacja jest bardzo dokładna. Należy pamiętać, że użycie węzłów Czebyszewa może mieć negatywny wpływ na jakość interpolacji w środku przedziału.

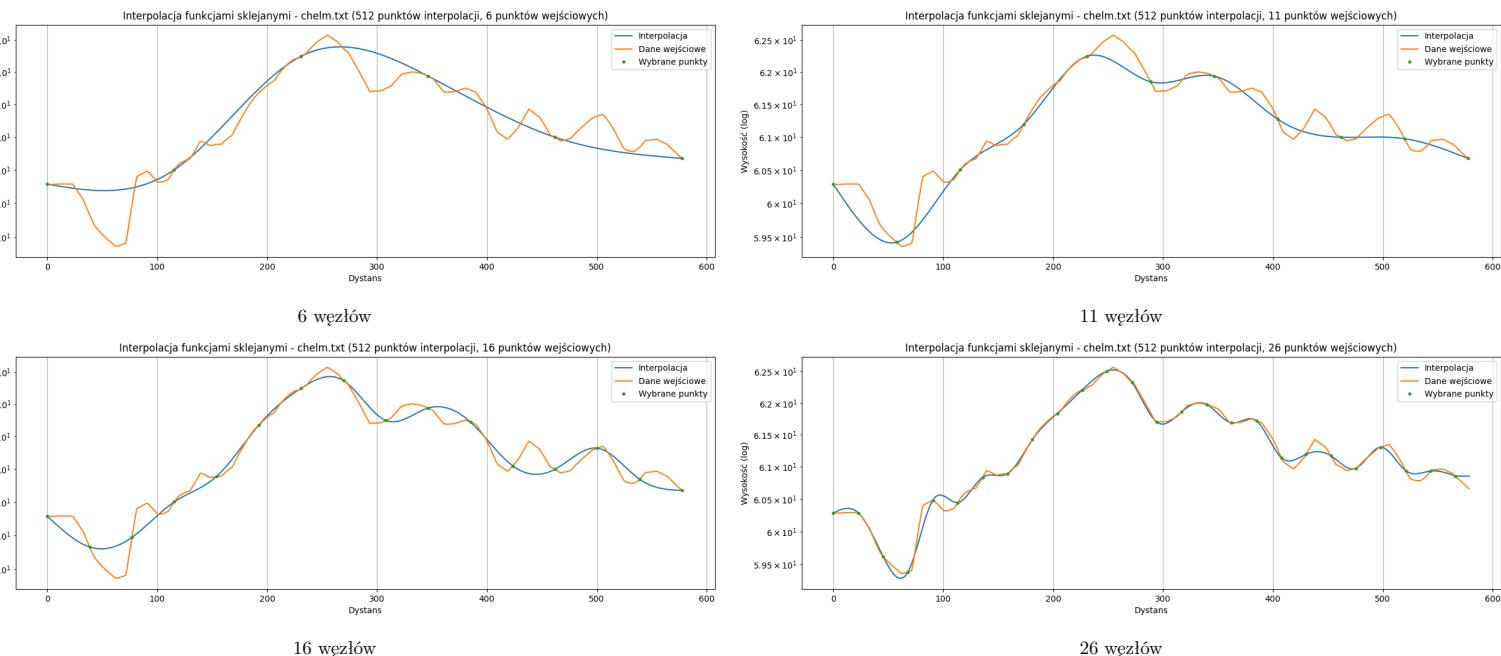
W przypadku jednego zestawu danych, wyniki interpolacji dla węzłów Czebyszewa nie spełniają oczekiwania. Pokazuje to, że pomimo zastosowania węzłów Czebyszewa, nie zawsze jesteśmy w stanie uzyskać dokładną interpolację. Wyniki uzyskane tą metodą są lepsze niż dla równoodległych węzłów, ale nie są idealne. Dlatego metoda Lagrange'a nie jest odpowiednia do interpolacji profilu wysokościowego.

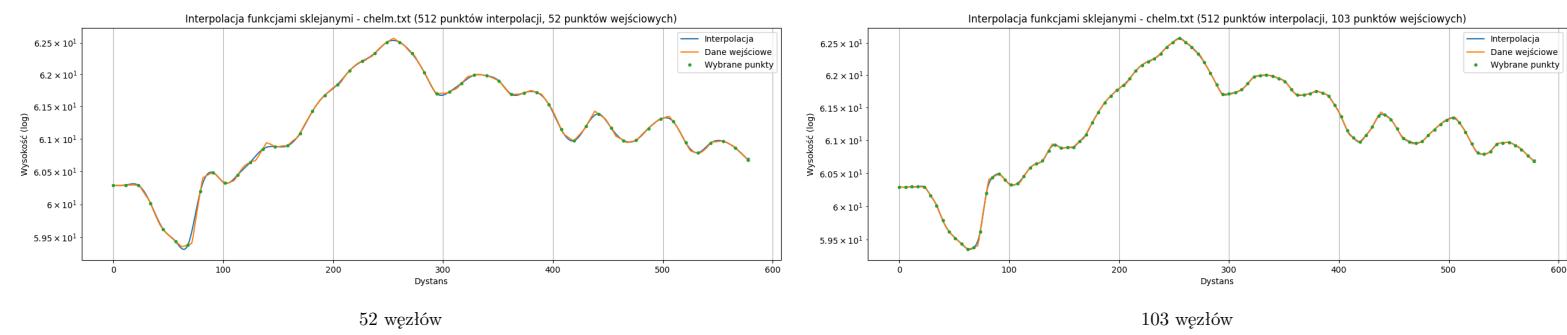
Warto zauważyć, że w przypadku danych wejściowych z 512 punktów, wybór węzłów Czebyszewa był możliwy. W praktyce, dla mniejszej ilości danych, dobór węzłów Czebyszewa może być trudny. Wymaga on wybrania nierównomiernie rozmieszczonego węzłów, co jest trudne do osiągnięcia.

6. Wyniki interpolacji metodą funkcji sklejanych

Dla każdego zbioru danych przeprowadzono interpolację metodą funkcji sklejanych. W projekcie zaimplementowano interpolację funkcjami sklejonymi stopnia 3. Również dla tej metody wybrano odpowiednio 6, 11, 16, 26, 52 oraz 103 węzłów wejściowych. Wartości wybranych węzłów są rozmiennie równomiernie. Na ich podstawie obliczono wartości funkcji w 512 punktach. Poniżej przedstawiono wykresy interpolacji dla każdego zbioru danych.

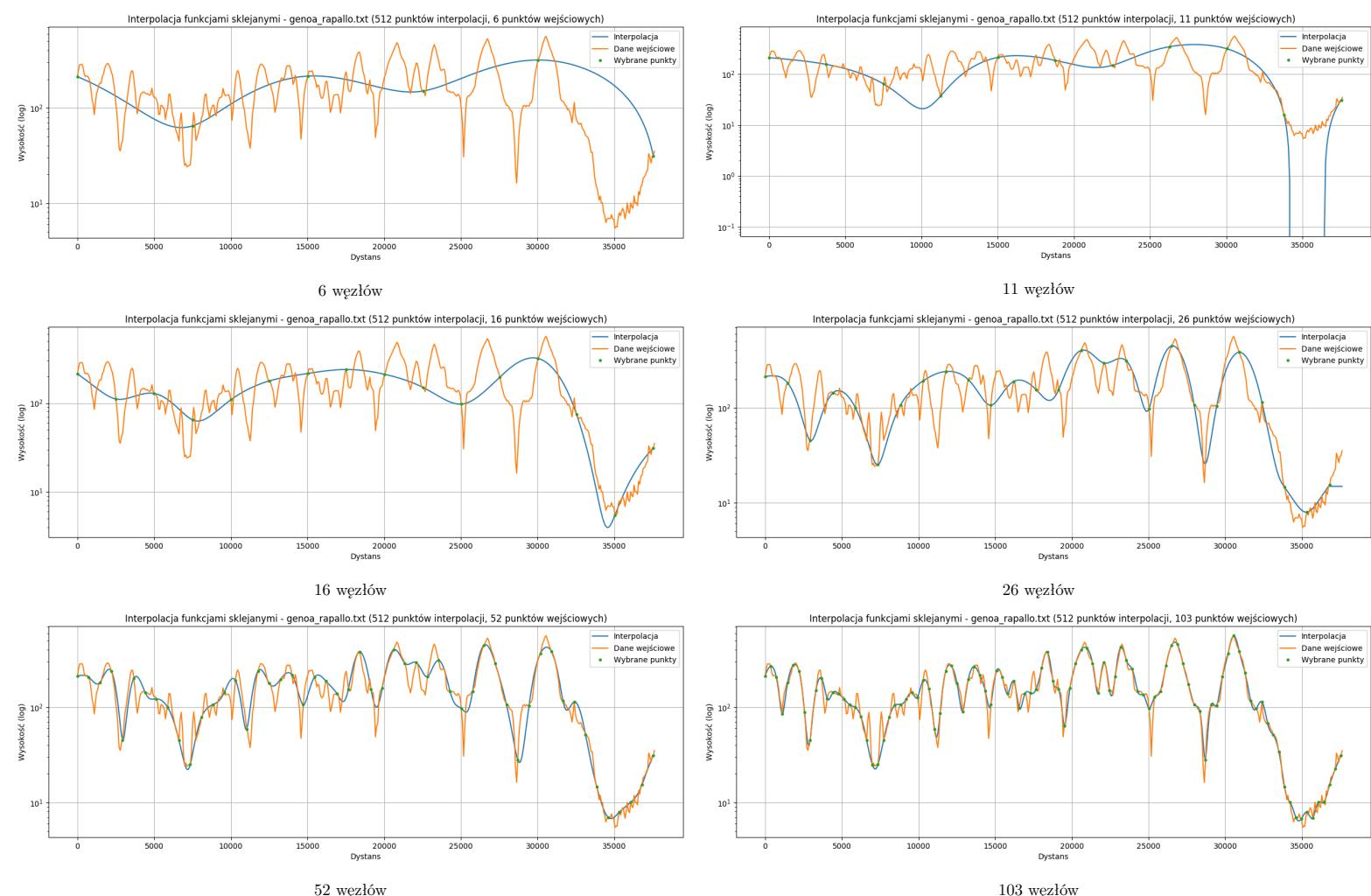
6.1. Interpolacja funkcjami sklejonymi - chelm.txt





Metoda funkcji sklejanych pozwala na uzyskanie bardzo dokładnych wyników interpolacji. Już dla 11 węzłów wynik interpolacji przypomina oryginalną funkcję. Dla 52 czy 103 węzłów interpolacja jest bardzo dokładna. Jak również możemy zauważyć, metoda funkcji sklejanych jest odporna na efekt Rungego. Pozwala to na zwiększenie ilości węzłów bez obaw o pogorszenie wyników. Warto zauważyć, że metoda funkcji sklejanych spełnia swoje zadanie dla danych równomiernie rozmiieszczonych.

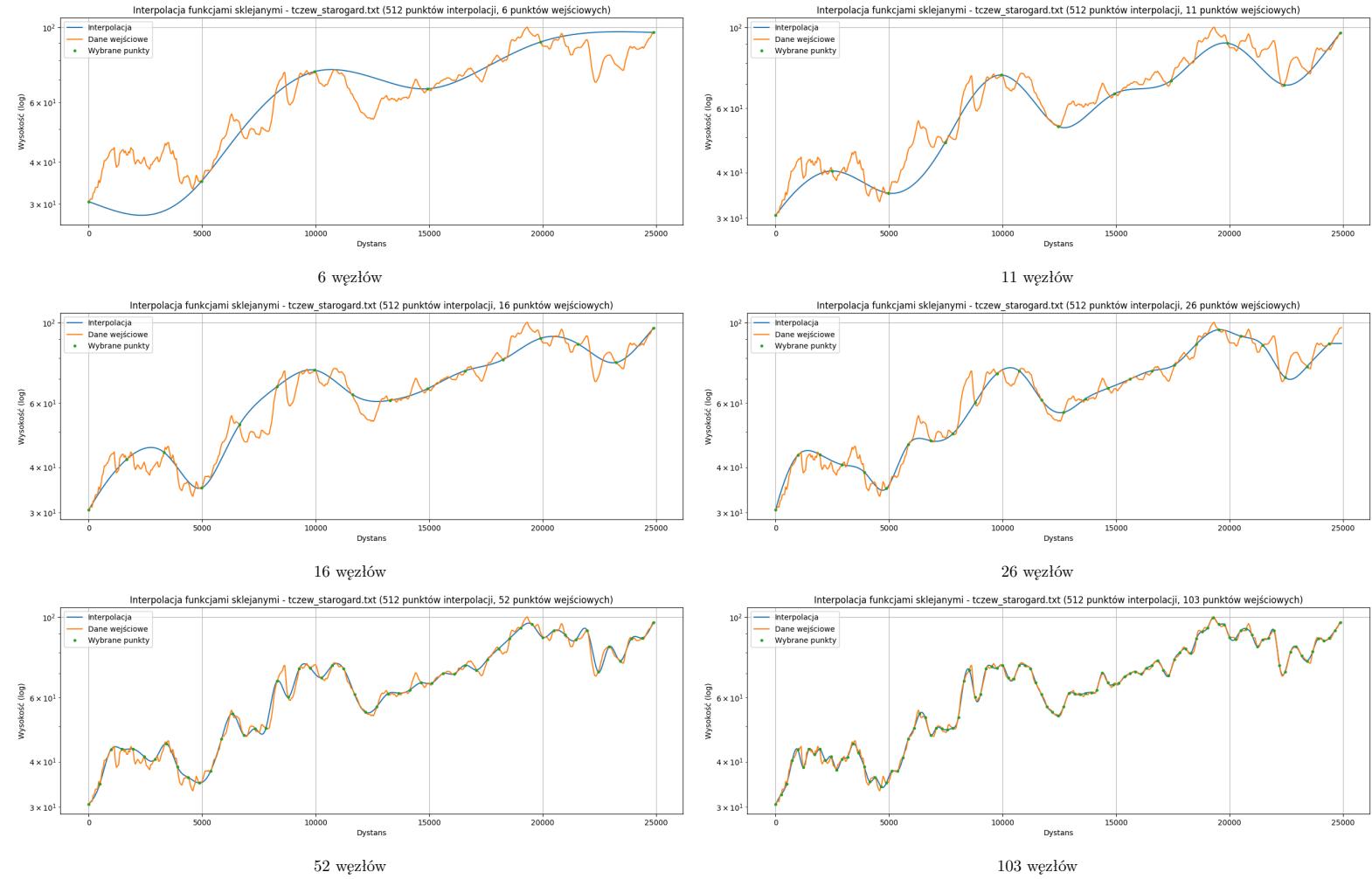
6.2. Interpolacja funkcjami sklejonymi - genoa_rapallo.txt



Jak możemy zauważyć na powyższych wykresach, metoda funkcji sklejanych pozwala na uzyskanie bardzo dokładnych wyników interpolacji. Dla 16 czy 26 węzłów funkcja wynikowa wygląda podobnie od wykresu oryginalnego. Dla 52 i 103 węzłów interpolacja jest bardzo dokładna.

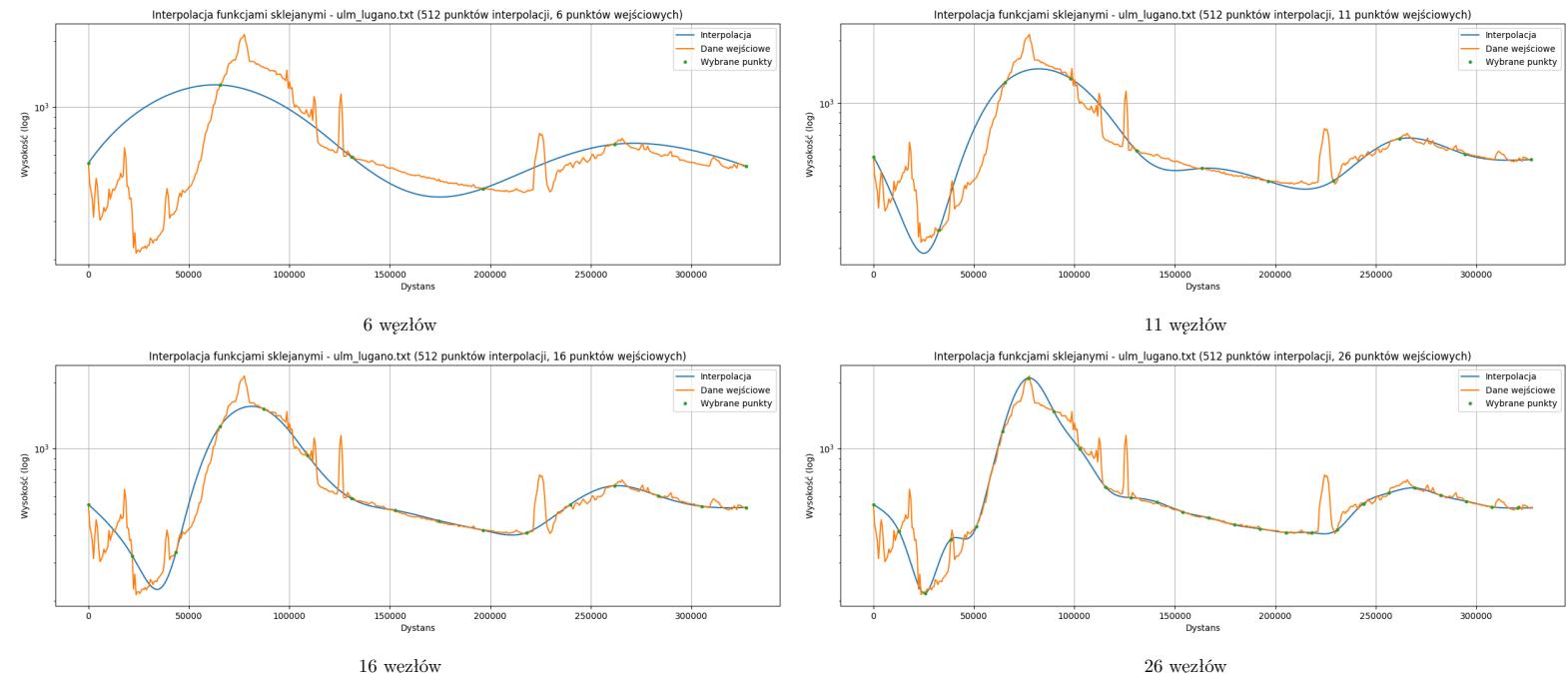
Co ciekawe, dla 11 węzłów widoczne są duże zaburzenia na końcu przedziału. Prawdopodobnie wynikają one ze specyficznego ułożenia trzech ostatnich punktów.

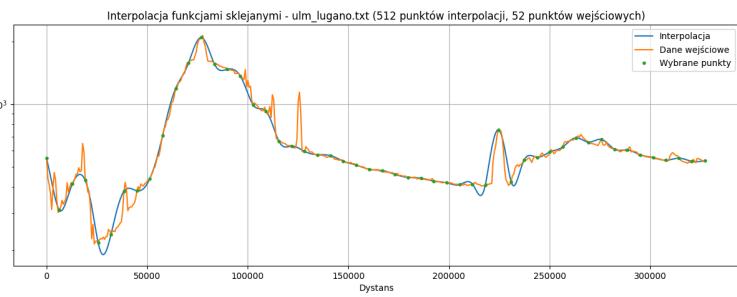
6.3. Interpolacja funkcjami sklejonymi - tczew_starogard.txt



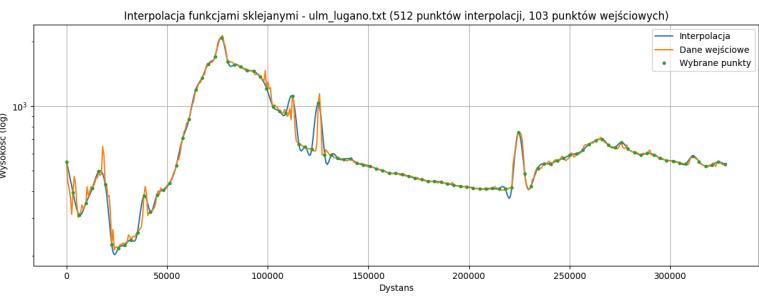
Wyniki interpolacji dla tego zestawu danych są bardzo dobre. Zwiększenie ilości węzłów nie wpływa negatywnie na wyniki i pozwala na uzyskanie dokładnych wyników.

6.4. Interpolacja funkcjami sklejonymi - ulm_lugano.txt





52 węzłów



103 węzłów

Dla tego zestawu danych również uzyskano bardzo dokładne wyniki interpolacji. Wraz ze wzrostem ilości węzłów, wyniki interpolacji są coraz dokładniejsze. Dla 52 i 103 węzłów interpolacja jest bardzo dokładna.

6.5. Podsumowanie interpolacji metodą funkcji sklejanych

Interpolacja metodą funkcji sklejanych pozwala na uzyskanie bardzo dokładnych wyników. Nawet przy 11 węzłach wejściowych wynik interpolacji przypomina oryginalną funkcję. Dla 52 czy 103 węzłów interpolacja jest bardzo dokładna. Jak również możemy zauważać, metoda funkcji sklejanych jest odporna na efekt Rungego. Pozwala to na zwiększenie ilości węzłów bez obaw o pogorszenie wyników. Warto zauważać, że metoda funkcji sklejanych, w przeciwieństwie do metody Lagrange'a, spełnia swoje zadanie dla danych równomiernie rozmieszczonej.

Warto także zauważać, że metoda ta nie gwarantuje idealnej interpolacji dla każdych danych. W pewnych przypadkach, jak dla danych z pliku `genoa_rapallo.txt`, mogą wystąpić zaburzenia. Wynikają one z położenia węzłów interpolacji.

7. Podsumowanie

W uzyskanych wyników interpolacji można zauważać, że metoda Lagrange'a dla węzłów równoodległych nie jest odpowiednia do interpolacji profilu wysokościowego. Dla małej ilości węzłów wejściowych wyniki są mało dokładne, a po ich zwiększeniu pojawia się efekt Rungego. Zastosowanie węzłów Czebyszewa pozwala na zminimalizowanie tego efektu, ale nie jest to rozwiązań idealne. Wymaga ono wyboru nierównomiernie rozmieszczonej węzłów, co jest trudne do osiągnięcia w praktyce. W plikach z danymi wejściowymi znajdowało się aż 512 punktów, co pozwalało na dobry dobranie węzłów Czebyszewa. W przypadku mniejszej ilości danych, nie byłoby to możliwe. Z tego powodu metoda Lagrange'a nie jest odpowiednia do interpolacji profilu wysokościowego.

Metoda funkcji sklejanych pozwala na uzyskanie bardzo dokładnych wyników interpolacji. Jest ona odporna na efekt Rungego, co pozwala na zwiększenie ilości węzłów bez obaw o pogorszenie wyników. Metoda funkcji sklejanych spełnia swoje zadanie dla danych równomiernie rozmieszczonej, co jest idealne w przypadku profilu wysokościowego.

Podsumowując, pomimo większej trudności implementacyjnej, metoda funkcji sklejanych jest bardziej odpowiednia do interpolacji profilu wysokościowego niż metoda Lagrange'a. Pozwala ona na uzyskanie dokładnych wyników nawet dla małej ilości węzłów wejściowych. Możemy poprawić jakość interpolacji poprzez zwiększenie ilości węzłów, co nie wpłynie negatywnie na wyniki. Metoda funkcji sklejanych jest również bardziej odporna na efekt Rungego, co pozwala na uzyskanie dokładnych wyników bez obaw o zaburzenia.