Metody probabilistyczne

Skrypt Fryderyka Fazmisia

Metody probabilistyczne

1.

Zad. 1. Rzucono kostką 6-cio ścienną oraz zanotowano wynik rzutu. Zdefiniuj eksperyment, zbiór zdarzeń elementarnych, prawdopodobieństwo każdego zdarzenia elementarnego. Zaproponuj zdarzenie losowe niebędące zdarzeniem elementarnym oraz oblicz jego prawdopodobieństwo.

Eksperyment - rzut kostką

Zbiór zdarzeń elementranych: w1, w2, ..., w6 (wyrzucenie danej liczby)

$P(W1) = P(W2) ... = P(W6) = 1/6$

A - wynik parzysty

$P(A) = 1/2$

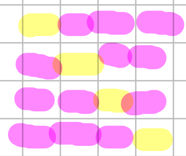
Zad. 2. Eksperyment polega na 4-krotnym rzucie monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wypadną 3 reszki?

$|\Omega| = 2^4 = 16$

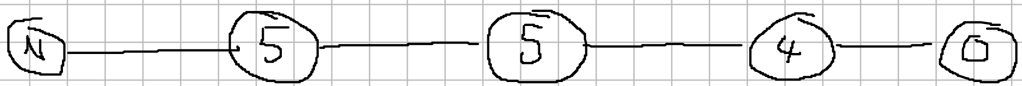
A - 3 reszki

$|A| = 4$

$P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$



Zad. 3. Wiadomość może być przekazywana pomiędzy serwerami różnymi drogami. Wysłana wiadomość może w pierwszym kroku dotrzeć do pięciu serwerów, w drugim kroku każdy z tych serwerów może ją przekazać do jednego z kolejnych pięciu serwerów oraz w trzecim kroku wiadomość może być przekazana do czterech serwerów, z tych serwerów wiadomość trafia do odbiorcy. Jak wiele możliwych ścieżek przejścia wiadomości istnieje? Jeżeli każda ścieżka jest jednakowo prawdopodobna, to jakie jest prawdopodobieństwo, że wiadomość w trzecim kroku przejdzie przez pierwszy z czterech serwerów?



$|\Omega| = 5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$

$|A| = 5 \cdot 5 \cdot 1 = 25$

$P(A) = \frac{1}{4}$

Zad. 4. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w grupie *N* studentów (a) przynajmniej dwóch studentów ma urodziny tego samego dnia oraz (b) przynajmniej dwóch studentów ma urodziny 1 kwietnia?

a) A - przynajmniej dwóch ma urodziny tego samego dnia

A' - każdy ma innego dnia

$|\Omega| = 365^N$

$|A'| = 365 \cdot 364 \cdot ... \cdot (365 - N + 1) = \frac{365!}{(365-N)!}$

$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{|A'|}{365^N} =$

$= 1 - \frac{365!}{(365-N)!\,365^N}$

b) A - przynajmniej dwóch ma urodziny 1 kwietnia

A' - 0 lub 1 osoba ma 1 kwietnia

$$|A'| = \underbrace{364^N}_{0} + \underbrace{\binom{N}{1} \cdot 364^{N-1}}_{1}$$

$$P(A) = 1 - \frac{364^N + N \cdot 364^{N-1}}{365^N}$$

Zad. 5. W zbiorze 1000 rekordów wprowadzonych do bazy 12 rekordów zawiera błędy. Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród losowo wybranych 100 rekordów: (a) wszystkie rekordy są poprawne, (b) tylko jeden rekord zawiera błędy oraz (c) co najwyżej 2 rekordy zawierają błędy.

a) A - wszystkie rekordy są poprawne

$$P(A) = \binom{988}{100} \Big/ \binom{1000}{100}$$

b) A - tylko 1 rekord błędny

$$P(A) = \binom{12}{1} \cdot \frac{\binom{1000-12}{99}}{\binom{1000}{100}}$$

c) A - co najwyżej 2 błędne

$$P(A) = \frac{\binom{988}{100} + \binom{12}{1} \cdot \binom{1000-12}{99} + \binom{12}{2} \cdot \binom{1000-12}{98}}{\binom{1000}{100}}$$

Zad. 6. Mamy dwa łącza z prawdopodobieństwem poprawnego przesłania ramki i otrzymania potwierdzenia jej prawidłowego odbioru równym 0.25 dla łącza A oraz 0.5 dla łącza B. Próby przesłania ramki są podejmowane na przemian łączem A i łączem B, aż do otrzymania potwierdzenia odbioru ramki. Obliczyć prawdopodobieństwo, że ramka dotrze do celu łączem A, gdy rozpoczynamy transmisję: (a) od łącza A oraz (b) od łącza B.

a) C - dojedzie łączem A

$A \quad \frac{1}{4}$

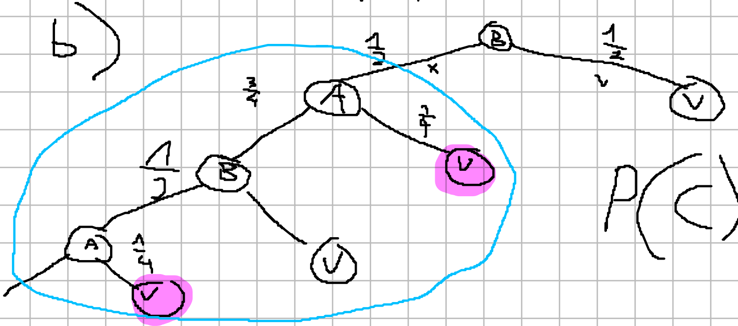
$A'B'A \quad \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$

$A'B'A'B'A \quad \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$

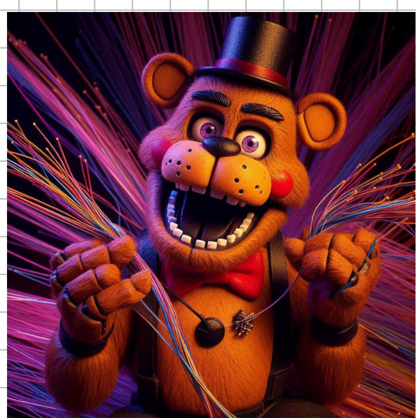
$$a_1 = \frac{1}{4} \qquad q = \frac{3}{8}$$

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{5} = \frac{2}{5} \qquad P(C) = \frac{2}{5}$$

b)



$$P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$



Zad. 7. Mamy dwa łącza z zad. 6. Użytkownik nr 1 korzysta z łącza typu A, a użytkownik nr 2 korzysta z łącza typu B. Obaj użytkownicy transmitują ramki jednocześnie. Oblicz prawdopodobieństwo, że użytkownik nr 1 pierwszy otrzyma potwierdzenie odbioru ramki.

AB' $\quad \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}$

$A'B'AB'$ $\quad \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}$

$A'B'A'B'AB'$ $\quad \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}$

$a_1 = \frac{1}{8} \qquad q = \frac{3}{8}$

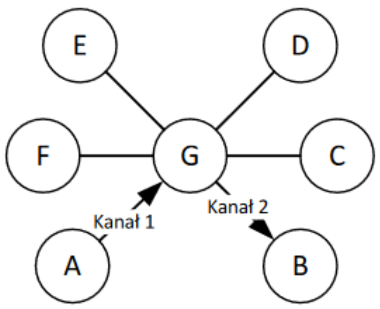
C - użytkownik 1 odbierze pierwszy

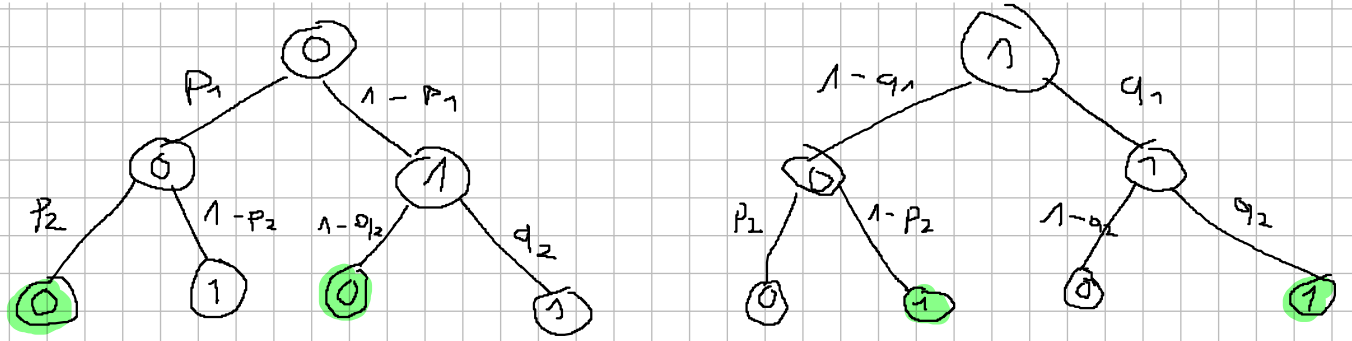
$$P(C) = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{8}\cdot\frac{8}{5} = \frac{1}{5}$$

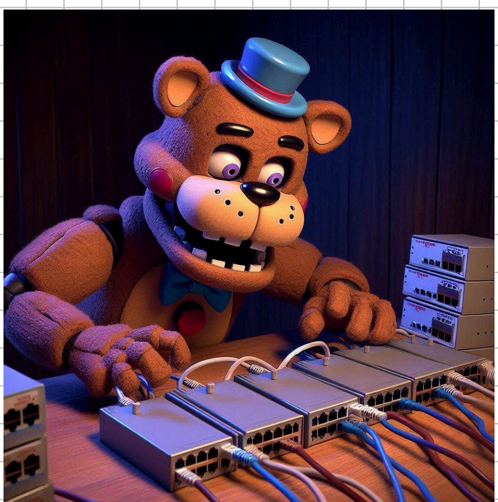
Zad. 8. Losowo wybierano punkt należący do kwadratu o boku równym 10cm, w którym narysowano koło o promieniu 2cm. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrano punkt wewnątrz koła?

$$P(A) = \frac{\pi r^2}{a^2} = \frac{\pi}{25}$$

Zad. 9. W sieci o topologii typu gwiazda przesyłane są sygnały binarne. Komunikacja pomiędzy węzłami A i B przebiega przez dwa kanały, które przenoszą informację zgodnie z przedstawionymi schematami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ciąg 010 będzie odebrany bezbłędnie?







A0 - poprawne dodarcie 0

A1 - poprawne dodarcie 1

A - poprawne przesłanie 010

$$P(A_0) = p_1 p_2 + (1-p_1)(1-q_2)$$

$$P(A_1) = q_1 q_2 + (1-q_1)(1-p_2)$$

$$P(A) = P(A_0)\cdot P(A_1)\cdot P(A_0)$$

Zad. 10. Student codziennie przychodzi na przystanek autobusowy w losowej chwili czasu pomiędzy 8:00 a 8:30. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że student:
a) przyszedł dokładnie o 8:05,
b) przyszedł pomiędzy 8:10 a 8:20.

a) $P(A) = 0$ b) $P(B) = \frac{1}{3}$

2.

Zad. 1. W pudełku zawierającym 10 rezystorów, cztery są wybrakowane. Załóżmy, że rezystory wyjmujemy z pudełka w sposób przypadkowy. Obliczyć prawdopodobieństwa następujących zdarzeń:
a) wyciągnięcie kolejno dwóch rezystorów wybrakowanych,
b) wyciągnięcie dwóch rezystorów, z których jeden jest dobry i jeden wybrakowany.

a) A - wyciągnięcie kolejno 2 wybrakowanych

$|A| = \binom{4}{2}$

$|\Omega| = \binom{10}{2}$ $P(A) = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$

b) A - wyciągnięcie 1 dobrego, 1 złego

$|A| = \binom{4}{1} \cdot \binom{6}{1}$ $P(A) = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$

Zad. 2. System komunikacyjny przesyła trzy wartości $\{-1, 0 +1\}$. Kanał nie jest doskonały i wprowadza błędy. Błąd wystąpi z prawdopodobieństwem 12.5% jeżeli nadano –1, 75% jeżeli nadano 0, 12.5% jeżeli nadano +1. Prawdopodobieństwo, że nadajnik nada +1, –1, 0 wynoszą odpowiednio 1/4, 1/4, 1/2. Znajdź prawdopodobieństwo wystąpienia błędu w transmisji. Jakie jest to prawdopodobieństwo, jeżeli $P(-1) = P(0) = P(+1)$? Skomentuj wyniki.

A_n – nadano n B - wystąpił błąd

$P(A_{-1}) = P(A_1) = \frac{1}{4}$ $P(A_0) = \frac{1}{2}$

$P(B|A_{-1}) = P(B|A_1) = \frac{1}{8}$ $P(B|A_0) = \frac{3}{4}$

$P(B) = ?$

$P(B|A_{-1}) = \frac{P(B \cap A_{-1})}{P(A_{-1})}$ $P(B \cap A_{-1}) = P(B|A_{-1}) \cdot P(A_{-1})$

$$P(B) = P(B \cap A_{-1}) + P(B \cap A_0) + P(B \cap A_1) =$$
$$= P(B|A_{-1}) \cdot P(A_{-1}) + P(B|A_0) \cdot P(A_0) + P(B|A_1) \cdot P(A_1) =$$
$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} + \frac{3}{8} = \frac{7}{16}$$

b) $P(B) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12} + \frac{3}{12} = \frac{1}{3}$

Zad. 3. Wykonujemy pomiary trzema przyrządami, z których jeden jest nieco rozregulowany. Przy wykonywaniu pomiaru sprawnym przyrządem prawdopodobieństwo otrzymania błędu pomiaru przewyższającego tolerancję wynosi 0.03; prawdopodobieństwo to dla przyrządu niesprawnego wynosi 0.3. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że wynik pomiaru losowo wziętym przyrządem:
a) przewyższa tolerancję,
b) który przewyższał tolerancję, jest wykonany nie w pełni sprawnym przyrządem.

a) S - wykonane sprawnym

N - wykonane niesprawnym

B - błędny pomiar

$P(B|S)=0.03 \qquad P(B|N)=0.3 \qquad P(S)=\frac{2}{3} \quad P(N)=\frac{1}{3}$

$$P(B)=P(B\cap S)+P(B\cap N)=$$
$$=P(B|S)\cdot P(S)+P(B|N)\cdot P(N)=$$
$$=\frac{3}{100}\cdot\frac{2}{3}+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{3}=$$
$$=\frac{2}{100}+\frac{10}{100}=\frac{12}{100}=0.12$$

b) $$P(N|B)=\frac{P(N\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B|N)\cdot P(N)}{P(B)}=$$
$$=\frac{\cancel{3}^{1}}{10}\cdot\frac{1}{\cancel{3}_{1}}\cdot\frac{100}{12}=\frac{100}{120}=\frac{5}{6}$$

Zad. 4. W urnie umieszczono 4 czerwone i 2 białe kule. Po kolei wybieramy z urny dwie kule (bez zwracania). Jeżeli wiadomo, że jako pierwszą wyjęto kulę białą, jakie są szanse, że jako drugą wyciągniemy kulę czerwoną?

A - pierwsza wyciągnięta biała

B - druga wyciagnieta czerwona

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}= \qquad P(B\cap A)=\frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{4}{1}}{6\cdot 5}$$
$$=\frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{30}_{5}}\cdot\frac{\cancel{6}^{1}}{\cancel{2}_{1}}=\frac{4}{5} \qquad P(A)=\frac{2}{6}$$

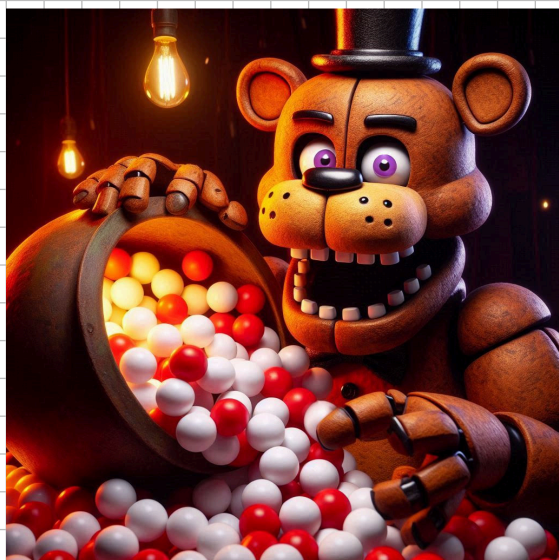
Zad. 5. Podaj przykład zdarzeń rozłącznych i (a) niezależnych (b) zależnych.

a) rozłączne $P(A\cap B)=0$

niezależne $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

$P(A)\cdot P(B)=0$

$P(A)=0$ LUB $P(B)=0$



b) $P(A) \cdot P(B) \neq 0$

$P(A) > 0$ ORAZ $P(B) > 0$

Zad. 6. Winda wyposażona jest w dwa układy hamowania włączające się automatycznie (obydwa) w razie zerwania się liny. Przy tym prawdopodobieństwo wyhamowania przez każdy układ z osobna jest jednakowe i wynosi 0.99. Jakie jest prawdopodobieństwo:
a) wyhamowania windy w razie zerwania się liny,
b) spadnięcia kabiny,
jeśli prawdopodobieństwo zerwania się liny wynosi 10^{-5}?

a) A - wychamowanie windy
A' - katastrofa

$P(A') = (1-0.99)^2 = (0.01)^2 = 0.0001$

$P(A) = 0,9999$

b) A - zerwanie się liny
B - katastrofa

$P(B|A) = 0.0001 = 10^{-4}$ $P(A) = 10^{-5}$

$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A') = P(B|A) \cdot P(A) + 0 = 10^{-9}$

Zad. 7. Nadajnik generuje okresowo jedną z dwóch wiadomości (zdarzenie A oraz B). Po zabezpieczeniu wygenerowanej wiadomości kodem pozwalającym na detekcję błędów, przesyła ją kanałem do odbiorcy. Przez kanał wiadomość może być przekazana bez błędu (zdarzenie E_0), z błędem, który można wykryć po stronie odbiorczej (zdarzenie E_1) oraz z błędem powodującym po stronie odbiorczej błędną interpretację wiadomości (zdarzenie E_2). W odbiorniku w oparciu o odebrane wiadomości podejmowana jest decyzja o odebranej wiadomości: zdarzenie A^* oraz B^*, gdy nie stwierdzono błędu (w kanale wystąpiło zdarzenie E_0 albo E_2) oraz zdarzenie X, gdy wykryto błąd w odebranej wiadomości (w kanale wystąpiło zdarzenie E_0). Poniżej w tabeli podano prawdopodobieństwa iloczynów zdarzeń opisujących ten system komunikacyjny.

a)

	A	B
A^*	0.42	0.04
X	0.12	?
B^*	0.06	0.28

b)

	A	B
A^*	0.42	0.28
X	?	0.08
B^*	0.06	0.04

Uzupełnij tabele, a następnie w oparciu o nie oblicz prawdopodobieństwa zdarzeń A, B, A^*, B^*, X oraz E_i. Określ czy pary zdarzeń $\{A, B\}$, $\{A, E_i\}$, $\{A, A^*\}$, $\{A, B^*\}$, $\{A, X\}$ oraz $\{A^*, E_i\}$ są rozłączne lub niezależne. Oblicz prawdopodobieństwa warunkowe $P(E_i|A)$, $P(E_i|B)$ oraz $P(E_i|A^*)$, $P(E_i|B^*)$.

	A	B
A^*	0.42	0.04
X	0.12	0.08
B^*	0.06	0.28

	A	B
A^*	0.42	0.28
X	0.12	0.08
B^*	0.06	0.04

a) $P(A) = 0.6$ $P(B) = 0.4$ $P(A^*) = 0.46$ $P(B^*) = 0.34$

$P(X) = 0.2$ $P(E0) = 0.7$ $P(E1) = 0.2$ $P(E2) = 0.1$

rozłączne: $\{A, B\}$ niezależne: $\{A, Ei\}, \{A, X\}$

$P(E0|A) = 0.42/0.6 = 0.7$ $P(E1|A) = 0.12/0.6 = 0.2$

$P(E2|A) = 0.06/0.6 = 0.1$ $P(E0|B) = 0.28/0.4 = 0.7$

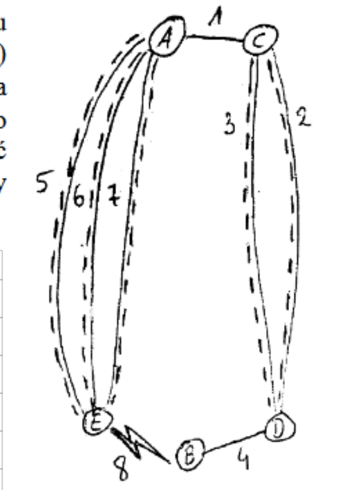
$P(E1|B) = 0.08/0.4 = 0.2$ $P(E2|B) = 0.04/0.4 = 0.1$

$P(E0|A^*) = 0.42/0.46$ $P(E1|A^*) = 0$

$P(E2|A^*) = 0.04/0.46$ $P(E0|B^*) = 0.28/0.34$

$P(E1|B^*) = 0$ $P(E2|B^*) = 0.06/0.34$

Zad. 8. Dana jest sieć opisana grafem przedstawionym na rysunku obok. Prawdopodobieństwo awarii łącza miedzianego (łącza 1 i 4) wynosi c, łącza światłowodowego (2, 3, 5, 6 i 7) wynosi f, a łącza radiowego (8) wynosi r. Prawdopodobieństwo awarii węzłów jest o wiele mniejsze do prawdopodobieństwa awarii łączy i może zostać pominięte. Oblicz prawdopodobieństwo braku połączenia pomiędzy węzłami A i B.



A - brak połączenia

A1 - brak połączenia po lewej

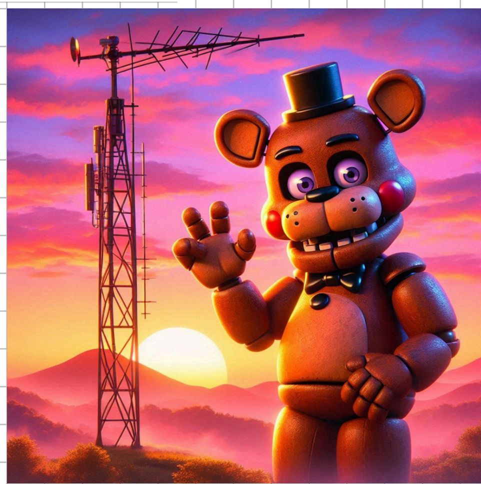
A2 - brak połączenia po prawej

$$P(A_1') = (1-r)(1-f^3)$$

$$P(A_1) = 1-(1-r)(1-f^3)$$

$$P(A_2') = (1-c)^2(1-f^2)$$

$$P(A_2) = 1-(1-c)^2(1-f^2)$$



$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) =$$

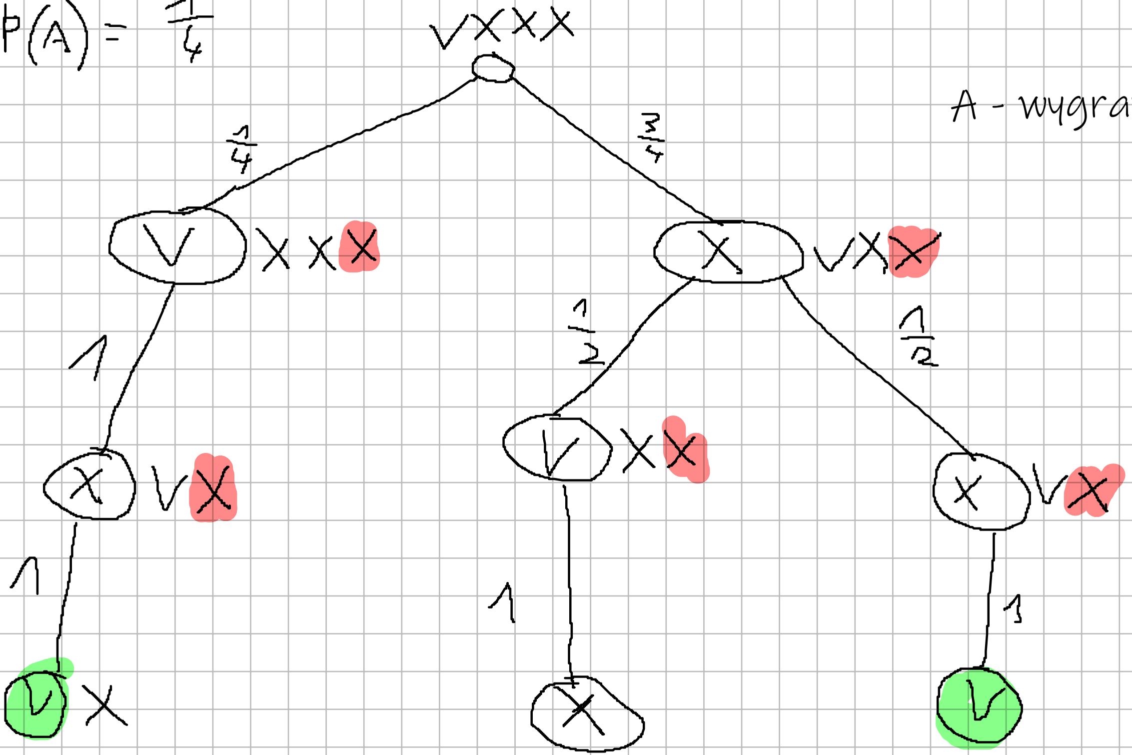
$$= \left[1-(1-r)(1-f^3)\right]\left[1-(1-c)^2(1-f^2)\right]$$

Zad. 9. Dwóch studentów ma cztery kupony totolotka, z których trzy są bezwartościowe, a na jeden przypada nagroda 1000zł. Jeden ze studentów (S1) zna wyniki losowania i zaproponował drugiemu (S2), że zamiast dzielić się nagrodą odda kupon koledze, jeżeli ten odgadnie, który kupon jest zwycięski. W przeciwnym przypadku student S1 zatrzyma całą nagrodę dla siebie. Żeby wyrównać szanse S1 zgodził się, że gdy kolega wytypuje kupon, to on podrze jeden z pozostałych kuponów, który na pewno nie jest zwycięskim kuponem. Następnie kolega S2 będzie mógł pozostać przy swoim wyborze lub zmienić decyzję, po czym on (S1) ponownie spośród pozostałych kuponów podrze kupon, który na pewno nie jest zwycięskim kuponem. Określ prawdopodobieństwo, że zostanie wybrany zwycięski kupon jeżeli początkowy wybór studenta S2 (a) nie będzie zmieniany, oraz gdy (b) za każdym razem wybór będzie zmieniany.

a) $P(A) = \frac{1}{4}$

b)

A - wygrana



$$P(A) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

Metoda aparatu probabilistycznego:

Ai - sukces w i-tej próbie
Bi - porażka w i-tej próbie

$P(A_1) = \frac{1}{4}$ $\quad P(B_1) = \frac{3}{4}$

$$P(A_2) = \overbrace{P(A_2|A_1)\cdot P(A_1)}^{P(A_2\cap A_1)} + \overbrace{P(A_2|B_1)\cdot P(B_1)}^{P(A_2\cap B_1)} =$$

$$= 0\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

$$P(A_3) = P(A_3|A_2)\cdot P(A_2) + P(A_3|B_2)\cdot P(B_2) =$$

$$= 0\cdot\frac{3}{8} + 1\cdot\frac{5}{8} = \frac{5}{8}$$

$$P(A_3) = \frac{5}{8}$$

Zad. 10. Nadajnik przesyła 4-bitowe dane w kanale binarnym charakteryzującym się BER = 0.1 (a) bez kodowania albo zabezpieczone (b) kodem Hamminga H(7,4) poprawiającym pojedynczy błąd w bloku złożonym z 7 bitów albo (c) kodem simpleks (15,4) poprawiającym trzy błędy w bloku złożonym z 15 bitów. Określ prawdopodobieństwo poprawnego przesłania 4-bitowego bloku danych dla obydwu kodów nadmiarowych.

a) A - przesłanie poprawnego bloku 4 bitowego

$$P(A) = (0.9)^4$$

b) $$P(A) = (0.9)^7 + 0.1 \cdot (0.9)^6 \cdot \binom{7}{1}$$

c) $$P(A) = 0.9^{15} + \binom{15}{1} 0.1^1 (0.9)^{14} +$$

$$+ \binom{15}{2} (0.1)^2 (0.9)^{13} + \binom{15}{3} \cdot (0.1)^3 (0.9)^{12}$$

Zad. 11. Liczba x jest wybierana losowo z przedziału (0, 1). Wiadomo, że wybrano $x \geq 1/2$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrano $x \geq 7/8$?

A - wybrano >= 1/2 B - wybrano więcej niż 7/8

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{1}{8}$$

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{1}{4}$$

Zad. 12. Trzy razy rzucono monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania wyniku reszka-orzeł-reszka, jeżeli wiadomo, że wypadły dwie reszki?

A - wypadło ROR

B - wypadły 2 reszki

$$P(A) = \frac{1}{8} \qquad P(B) = \frac{\binom{3}{2}}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{3}$$

3.

Zad. 1. Prawdopodobieństwo awarii serwera w ciągu roku wynosi 1% jeżeli pracuje on w suchym pomieszczeniu. Jeżeli kiedykolwiek pracował on w wilgotnym pomieszczeniu, to prawdopodobieństwo awarii wzrasta do 5%. Jeżeli 90% obsługiwanych przez firmę serwisową serwerów pracuje w pomieszczeniach suchych, a 10% w pomieszczeniach, w których występują okresy zwiększonej wilgotności, to jaka część serwerów będzie wymagała serwisowania w przeciągu roku?

A - pracuje w suchym

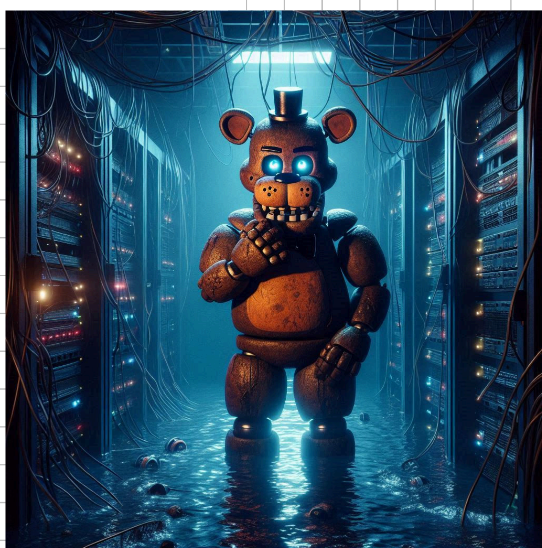
B - awaria

$$P(B|A) = 1\% \qquad P(A) = 90\%$$

$$P(B|A') = 5\% \qquad P(A') = 10\%$$

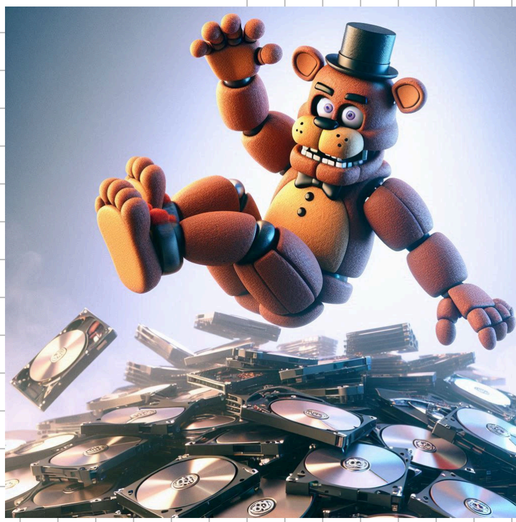
$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A') =$$

$$= P(B|A)P(A) + P(B|A')P(A') =$$



$= 0.9 \cdot 0.01 + 0.1 \cdot 0.05 = 0.009 + 0.005 = 0.014$

Zad. 2. Dyski twarde są pakowane przez dystrybutora w małe i lekkie albo w duże i ciężkie opakowania. 3% dysków w małych opakowaniach oraz 1% dysków w dużych opakowaniach ulega uszkodzeniu w trakcie transportu. Jaka część wysyłanych dysków ulega uszkodzeniu w transporcie, jeżeli 60% dysków jest przesyłane w małych opakowaniach, a 40% w dużych?



A - zapakowane w małe opakowanie

B - uległ zniszczeniu

$P(A) = 0.6 \qquad P(A') = 0.4$

$P(B|A) = 0.03 \qquad P(B|A') = 0.01$

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A') =$$
$$= P(B|A)P(A) + P(B|A')P(A') =$$
$$= 0.03 \cdot 0.6 + 0.01 \cdot 0.4 = 0.018 + 0.004 = 0.022$$

Zad. 3. Ułożenie głowicy dysku twardego względem ścieżki zapisu wpływa na jakość odczytu danych. 10% operacji odczytu danych ma pogorszoną jakość z powodu ukośnego ustawienia głowicy, 5% z powodu złego wyśrodkowania głowicy, a 1% z obydwu przyczyn na raz. W pozostałych przypadkach głowica jest ustawiona prawidłowo. Prawdopodobieństwo błędnego odczytu danych wynosi 0.01 w przypadku ukośnego ustawienia głowicy, 0.02 w przypadku złego wyśrodkowania głowicy, 0.06 w przypadku wystąpienia obydwu problemów jednocześnie oraz 0.001 w przypadku prawidłowego ustawienia głowicy. Jakie jest prawdopodobieństwo błędnego odczytu danych z dysku?

A - ukośne B - wyśrodkowanie C - oba naraz D - poprawne X - zły odczyt

$P(A) = 0.1 \qquad P(B) = 0.05 \qquad P(C) = 0.01 \qquad P(D) = 0.84$

$P(X|A) = 0.01 \quad P(X|B) = 0.02 \quad P(X|C) = 0.06 \quad P(X|D) = 0.001$

$$P(X) = P(X \cap A) + P(X \cap B) + P(X \cap C) + P(X \cap D) = 0.001 + 0.001 +$$
$$+ 0.0006 + 0.00084 = 0.00344$$

Zad. 4. W węźle pracują 3 aparaty obsługi, ale 2 z nich uległy uszkodzeniu (to już się stało). Jakie jest prawdopodobieństwo, że zepsuł się aparat nr 1 i 2? Prawdopodobieństwo uszkodzenia poszczególnych aparatów to $P(A_1) = 0.1, P(A_2) = 0.2, P(A_3) = 0.3$.

An - zepsuł się n-ty aparat B - zepsuły się 2 aparaty C - zepsuty 1 i 2

$$P(B) = P(A_1') \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) + P(A_1) \cdot P(A_2') \cdot P(A_3) +$$
$$+ P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3') = 0.9 \cdot 0.2 \cdot 0.3 +$$
$$+ 0.1 \cdot 0.8 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.2 \cdot 0.7 = 0.092$$

$$P(C|B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|C) \cdot P(C)}{P(B)} = 0.152$$

Z aparatu bayesa:

$H1$ - zepsuty 1 i 2

$H2$ - zepsuty 1 i 3

$H3$ - zepsuty 2 i 3

B - zepsute 2

$P(H_1) = 0.1 \cdot 0.2 \cdot 0.7 = 0.014$

$P(H_2) = 0.1 \cdot 0.8 \cdot 0.3 = 0.024$

$P(H_3) = 0.9 \cdot 0.2 \cdot 0.3 = 0.054$

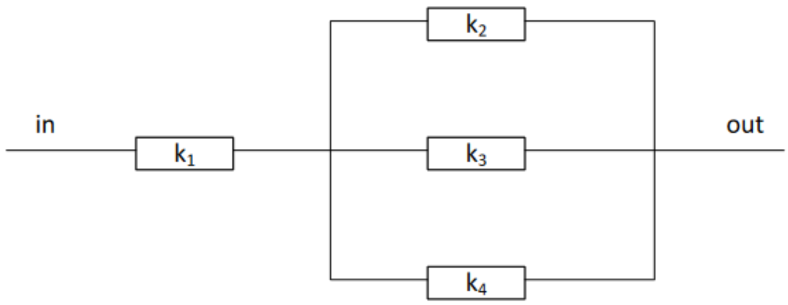
$$P(H_1 | B) = \frac{P(B|H_1) \cdot P(H_1)}{P(B|H_1) \cdot P(H_1) + P(B|H_1) \cdot P(H_1) \quad P(B|H_1) \cdot P(H_1)} =$$

$$= \frac{P(H_1)}{P(H_1) + P(H_2) + P(H_3)} = 0.152$$

Zad. 5. Rozpatrzmy układ kanałów transmisyjnych jak na rysunku. Kanały działają niezależnie, prawdopodobieństwo poprawnego działania kanału wynosi p. Nadany sygnał nie został przekazany (fakt).

a) Znajdź prawdopodobieństwo, że uszkodzony został jeden kanał.

b) Znajdź prawdopodobieństwo, że uszkodzone zostały dwa kanały.



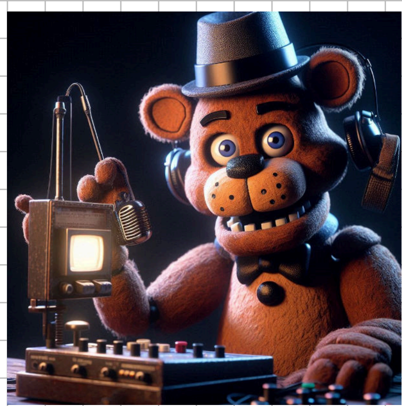
a) H_n - uszkodzone n kanałów   B - nie został przekazany

$$P(H_1 | B) = \frac{P(B|H_1) \cdot P(H_1)}{P(B|H_0) \cdot P(H_0) + P(B|H_1) \cdot P(H_1) + \dots} =$$

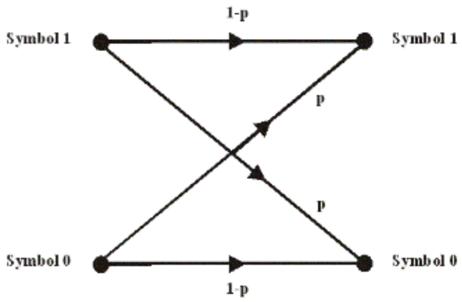
$$= \frac{\frac{1}{4} \cdot p^3 (1-p) \cdot \binom{4}{1}}{P(B)} = \frac{p^3(1-p)}{1 - p(1-(1-p)^3)}$$

$P(B') = p \cdot (1-(1-p)^3)$ $\quad P(B) = 1 - p(1-(1-p)^3)$

b) $$P(H_2 | B) = \frac{\frac{3}{6} \cdot p^2 (1-p^2) \cdot \binom{4}{2}}{P(B)} = \frac{3p^2(1-p^2)}{1-p(1-(1-p)^3)}$$



Zad. 6. W kanale cyfrowym przesyłane są symbole binarne, przy czym symbol 1 jest przesyłany dwa razy częściej niż symbol 0. Zarejestrowano sygnał 1. Jakie jest prawdopodobieństwo, że faktycznie nadano 1? Działanie kanału zilustrowano na rysunku. Przyjąć $p = 0.1$.



A_n - nadano n $\quad$ B_n - odebrano n

$$P(A_0) = \frac{1}{3} \qquad P(A_1) = \frac{2}{3}$$

$$P(A_1|B_1) = \frac{P(B_1|A_1)\cdot P(A_1)}{P(B_1|A_0)\cdot P(A_0) + P(B_1|A_1)\cdot P(A_1)} =$$

$$= \frac{(1-p)\cdot\frac{2}{3}}{p\cdot\frac{1}{3} + (1-p)\cdot\frac{2}{3}} = \frac{0.9\cdot\frac{2}{3}}{0.1\cdot\frac{1}{3} + 0.9\cdot\frac{2}{3}} = \frac{18}{19}$$

Zad. 7. Wiadomo, że 0.001 % całej populacji ludzi choruje na nowotwory. Pacjent odwiedzający lekarza skarży się na objawy mogące wskazać obecność nowotworu. Lekarz wykonuje test krwi, który potwierdza chorobę z prawdopodobieństwem 0.99, jeśli pacjent jest naprawdę chory. Test może także błędnie wskazać obecność nowotworu u osoby zdrowej (prawdopodobieństwo 0.2). Jeżeli test wypadnie pozytywnie, to jakie jest prawdopodobieństwo, że badana osoba ma nowotwór?

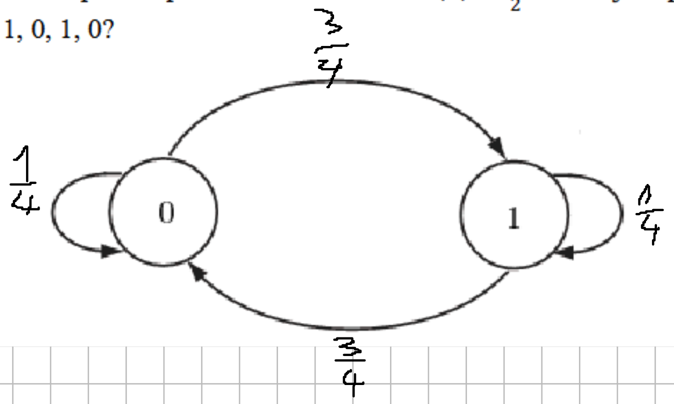
A - chory $\quad$ B - pozytywny wynik

$$P(A) = 10^{-5} \qquad P(B|A) = 0.99 \qquad P(B|A') = 0.2$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B|A)\cdot P(A) + P(B|A')\cdot P(A')} = \frac{0.99\cdot 10^{-5}}{0.99\cdot 10^{-5} + 0.2\cdot(1-10^{-5})}$$

$$= 4.95\cdot 10^{-5}$$

Zad. 8. Dwustanowy łańcuch Markowa ma prawdopodobieństwa przejścia stanów $P(0|0) = \frac{1}{4}$, $P(0|1) = \frac{3}{4}$ i początkowe prawdopodobieństwo stanu $P(0) = \frac{1}{2}$. Jakie jest prawdopodobieństwo sekwencji stanów 0, 1, 0, 1, 0?



A - wystąpienie 0, 1, 0, 1, 0

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{512}$$

Zad. 9. Pracownik serwisu komputerowego twierdzi, że jeżeli komputer jest zarażony wirusami A i B, to potrafi powiedzieć, który z wirusów zaatakował system pierwszy. Żeby zweryfikować to przygotowano 10 zestawów komputerowych, które w losowej kolejności zarażono wirusami A i B. Pracownik poprawnie określił kolejność zarażania wirusami w 8 przypadkach. Jaka była szansa na uzyskanie takiego wyniku, jeżeli pracownik zgadywał?

A - poprawnie wybrał 8 z 10 i zgadywał

$$P(A) = \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.0439$$

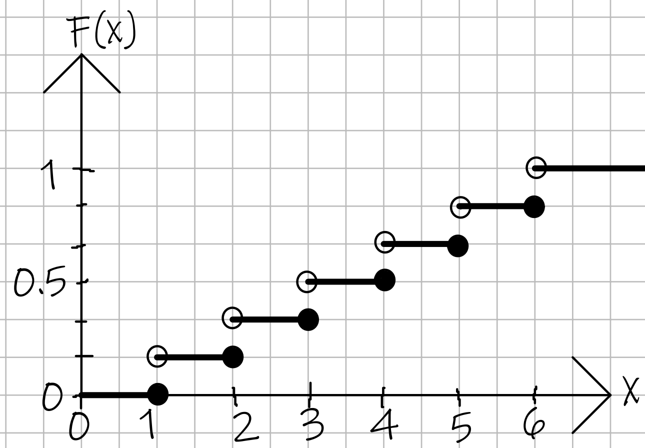
4.

Zad. 1. Rozpatrzmy eksperyment polegający na rzucie kostką sześcioscienną. Zmienna losowa $\underline{X}$ przyjmuje wartości odpowiadające wynikowi rzutu. Zapisz możliwe realizacje zmiennej losowej $\underline{X}$. Zapisz prawdopodobieństwo wystąpienia każdej realizacji. Zapisz dystrybuantę zmiennej losowej $\underline{X}$ oraz narysuj jej wykres.

$\omega_1 - 1, \quad \ldots \quad \omega_6 - 6$

$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \ldots = \frac{1}{6}$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \frac{1}{6}, & x \in (1, 2\rangle, \\ \frac{1}{3}, & x \in (2, 3\rangle, \\ \frac{1}{2}, & x \in (3, 4\rangle \\ \ldots \end{cases}$$



Zad. 2. Dana jest zmienna losowa ciągła $\underline{X}$ o rozkładzie prawdopodobieństwa $p(x) = \begin{cases} Cx^2 \text{ dla } x \in (0,1) \\ 0 \text{ dla pozostałych } x \end{cases}$. Wyznacz stałą C. Wyznacz $F(x)$. Oblicz $P(\frac{1}{3} \le \underline{X} < 4)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, dx = 1$$ warunek normalizacyjny gęstości prawdopodobieństwa

$$\int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{1} Cx^2\, dx + \int_{1}^{\infty} 0\, dx = \int_{0}^{1} Cx^2\, dx = C\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{C}{3} = 1$$

$$C = 3$$

$$\int_{-\infty}^{x} p(z)\,dz = \int_{0}^{x} 3z^2\,dz = 3\frac{z^3}{3}\Big|_0^x = x^3$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^3, & x \in (0,1) \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

$$P(\tfrac{1}{3} \le \underline{X} < 4) = F(4) - F(\tfrac{1}{3}) = 1 - \frac{1}{27} = \frac{26}{27}$$

Zad. 3. Optyczny system inspekcji ma na celu rozróżnienie trzech typów elementów. Prawdopodobieństwo poprawnej klasyfikacji dowolnego elementu wynosi 0.98. Załóżmy, że inspekcji są poddawane trzy elementy i ich klasyfikacja jest niezależna. Niech zmienna losowa $\underline{X}$ oznacza liczbę poprawnie sklasyfikowanych elementów. Określ rozkład prawdopodobieństwa oraz dystrybuantę zmiennej losowej $\underline{X}$.

$\omega_0, \quad \omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3 \quad \omega_n$ — n poprawnie sklasyfikowanych

$$P(\omega_0) = \binom{3}{0}(0.02)^3 \qquad P(\omega_1) = \binom{3}{1} \cdot 0.98\,(0.02)^2$$

$$P(\omega_2) = \binom{3}{2} \cdot (0.98)^2 (0.02) \qquad P(\omega_3) = \binom{3}{3} \cdot (0.98)^3$$

$$p(x) = \begin{cases} P(\omega_0), & x = 0 \\ P(\omega_1), & x = 1 \\ \dots \\ 0, & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ P(\omega_0), & x \in (0,1\rangle \\ P(\omega_0) + P(\omega_1), & x \in (1,2\rangle \\ P(\omega_0) + P(\omega_1) + P(\omega_2), & x \in (2,3\rangle \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Zad. 4. Pracownik spóźnia się do pracy o i minut (zdarzenie S_i), gdzie i = 0, 1, 2, ... Przyjmując $P(S_i) = 0.5^{i+1}$ oraz, że za każdą minutę spóźnienia płaci on 50 groszy, znaleźć rozkład prawdopodobieństwa oraz dystrybuantę karnych opłat. Następnie obliczyć prawdopodobieństwo tego, że zapłaci on 2 złote lub więcej.

$$P(x) = \begin{cases} P(S_0), & 0 \\ P(S_1), & 0.5 \\ P(S_2), & 1 \\ \dots \\ P(S_{2x}), & x \end{cases}$$

$$P(x) = P(S_{2x}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}$$

Dla czasu spóźnienia:

$$p(x) = \begin{cases} P(S_0), & x = 0 \\ P(S_1), & x = 1 \\ \dots \\ 0, & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(\underline{S} = x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$F(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \qquad a = \frac{1}{2} \quad q = \frac{1}{2}$$

$$F(x) = a\frac{1-q^x}{1-q} = \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\cancel{1-\frac{1}{2}}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$P(4 \leq \underline{S}) = 1 - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(\underline{S} = x_i), \quad i = 0,\ 0.5,\ 1,\ 1.5 \dots$$

$$F(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{1,5} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} \qquad a = \frac{1}{2} \quad q = \frac{1}{2}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$$

$$P(2 \leq \underline{X}) = 1 - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

Zad. 5. Badając eksperymentalny kanał transmisyjny określono, że liczba błędów obserwowana w przesyłanych 8-mio bitowych słowach kodowych jest zmienną losową o następującej dystrybuancie

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 0.7 & 0 < x \leq 3 \\ 0.9 & 3 < x \leq 6 \\ 1 & 6 < x \end{cases}$$

Określić następujące prawdopodobieństwa

a) $P(\underline{X} < 7)$; b) $P(\underline{X} \leq 3)$; c) $P(\underline{X} > 7)$; d) $P(\underline{X} \leq 5)$ e) $P(\underline{X} > 4)$; f) $P(\underline{X} \leq 2)$.

Ile błędów obserwowano w odbieranych słowach kodowych? Określ prawdopodobieństwa tych zdarzeń.

a) $P(\underline{X} < 7) = F(7) = 1$

b) $P(\underline{X} \leq 3) = P(\underline{X} < 3) + P(\underline{X} = 3) = \cancel{F(3)} + F(3^+) - \cancel{F(3)} =$

$= F(3^+) = 0.9$

c) $P(\underline{X} > 7) = P(\underline{X} \geq 7) - P(\underline{X} = 7) = 1 - \cancel{F(7)} - F(7^+) + \cancel{F(7)} =$

$= 1 - F(7^+) = 0$

d) $P(\underline{X} \leq 5) = F(5^+) = 0.9$

e) $P(\underline{X} > 4) = 1 - F(4^+) = 0.1$

f) $P(\underline{X} \leq 2) = F(2^+) = 0.7$

$P(\underline{X} = 0) = 0.7$

$P(\underline{X} = 3) = F(3^+) - F(3) = 0.2$

$P(\underline{X} = 6) = 0.1$

Zad. 6. Przyjmując $p(x) = x/8$ dla $3 < x < 5$ wyznacz dystrybuantę $F(x)$ oraz określić następujące prawdopodobieństwa

a) $P(\underline{X} < 4)$; b) $P(\underline{X} > 3.5)$; c) $P(4 < \underline{X} < 5)$;
d) $P(\underline{X} < 4.5)$; e) $P(\underline{X} < 3.5 \text{ lub } \underline{X} > 4.5)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(z)\,dz$$

$$\int_{3}^{x} \frac{z}{8}\,dz = \frac{z^2}{16}\Big|_3^x = \frac{x^2-9}{16}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 3\rangle \\ \frac{x^2-9}{16}, & x \in (3,5) \\ 1, & x \in \langle 5, +\infty) \end{cases}$$

a) $P(\underline{X} < 4) = F(4) = \frac{7}{16}$

b) $P(\underline{X} > 3.5) = 1 - F(3.5^+) = 0.796875$

c) $P(4 < \underline{X} < 5) = P(4 \leq \underline{X} < 5) - P(\underline{X} = 4) = P(5) - \cancel{P(4)} - P(4^+) + \cancel{P(4)} =$

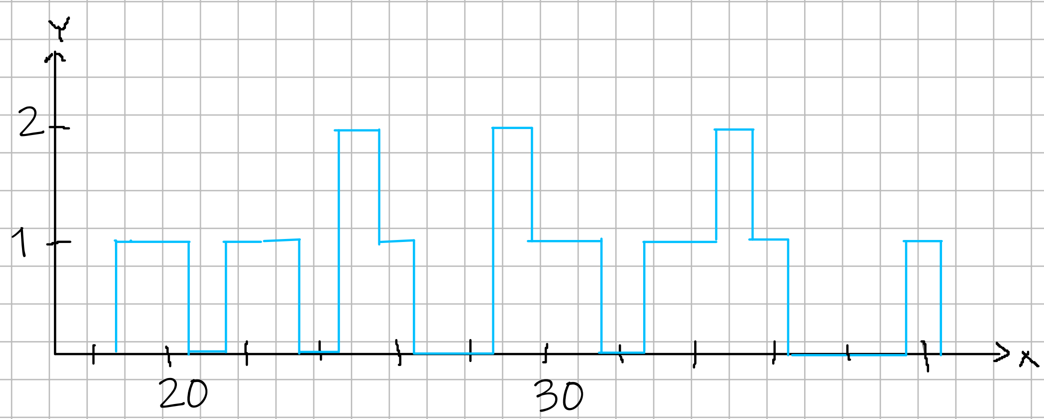
$= 0.5625$

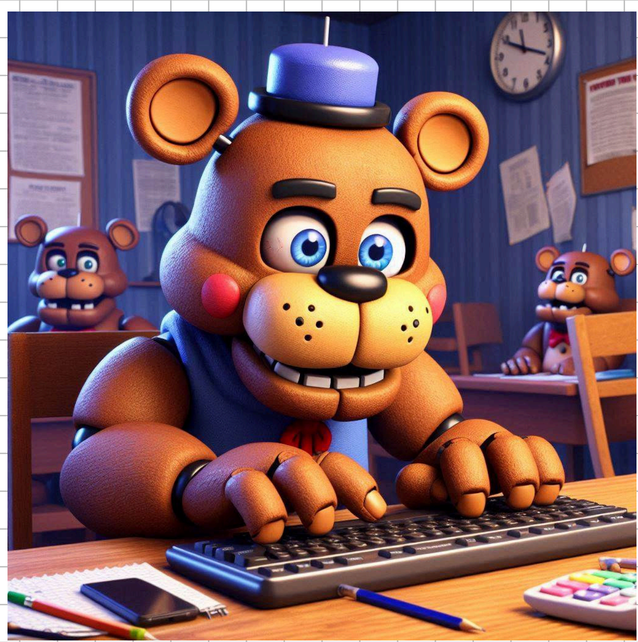
d) $P(\underline{X} < 4.5) = F(4.5) = 0.703125$

e) $P(\underline{X} < 3.5 \text{ lub } \underline{X} > 4.5) = F(3.5) + 1 - F(4.5^+) = 0.5$

Zad. 7. W klasie sprawdzono ile słów są w stanie napisać uczniowie w ciągu jednej minuty i uzyskano następujące wyniki: 25, 19, 23, 29, 34, 26, 30, 40, 33, 20, 35, 35, 25, 29, 36, 22, 31.
Sporządź tabelę częstości i narysuj histogram.

19	1
20	1
22	1
23	1
25, 25	2
26	1
29, 29	2
30	1
31	1
33	1
34	1
35, 35	2
36	1
40	1





Zad. 8. Dana jest zmienna losowa $\underline{X}$ ciągła o dystrybuancie

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\arcsin x & -1 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

a) narysuj wykres $F(x)$,

b) oblicz $P\left(-\frac{1}{2} \leq \underline{X} < \frac{1}{2}\right)$,

c) wyznacz $p(x)$.

$$P\left(-\frac{1}{2} \leq X < \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right) = \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi} - \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)}{\pi} =$$

$$= \frac{\frac{\pi}{6}}{\pi} - \frac{-\frac{\pi}{6}}{\pi} = \frac{1}{3}$$

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx} \qquad \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin(x)\right)' = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$$

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & x \in (-1, 1) \\ 0, & \text{pozostałe } x \end{cases}$$

Zad. 9. Dana jest funkcja gęstości prawdopodobieństwa $p(x) = C\frac{1}{1+x^2}$. Wyznacz stałą C oraz dystrybuantę zmiennej losowej $\underline{X}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} C\frac{1}{1+x^2}\,dx = C\arctan(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} =$$

$$= C\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = C\pi = 1 \qquad C = \frac{1}{\pi}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(z)\,dz = \frac{1}{\pi}\arctan(z)\Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}\arctan(x) - \frac{1}{2}$$

Zad. 1. Rozpatrzmy eksperyment polegający na rzucie kostką sześciościenną. Wielkość losowa X przyjmuje wartości odpowiadające wynikowi rzutu. Oblicz: wartość średnią, momenty zwyczajne rzędu 2 i 3, wariancję, odchylenie standardowe, kwantyle rzędu 1/3 oraz 0.34.

5.

ω_n – wyrzucono n oczek $\quad P(\omega_1) = \ldots = P(\omega_6) = \frac{1}{6}$

$$E\underline{X} = \sum_{x_k} x_k \cdot P(\underline{X} = x_k) = 1 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{\cancel{6}} \cdot \frac{(1+6)\cdot \cancel{6}}{2} = 3.5$$

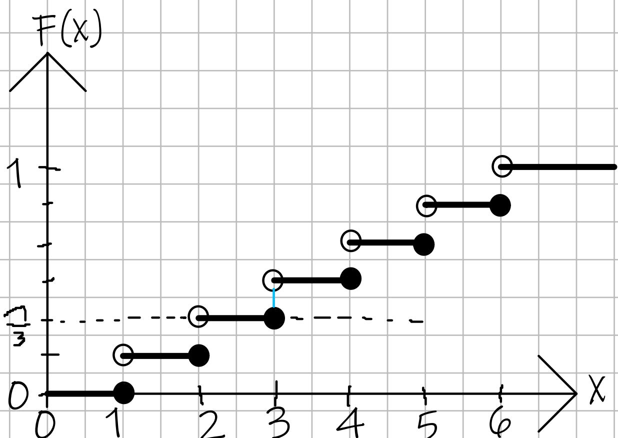
$$E\underline{X}^2 = \sum_{x_k} x_k^2 \cdot P(\underline{X} = x_k) = \frac{1}{6} \cdot (1+4+9+16+25+36) = \frac{91}{6}$$

$$E\underline{X}^3 = \sum_{x_k} x_k^3 \cdot P(\underline{X} = x_k) = \frac{1}{6} \cdot (1+8+27+64+125+216) = \frac{441}{6}$$

$$V\underline{X} = E(\underline{X} - E\underline{X})^2 = \sum_{x_k} (x_k - \overset{3.5}{\overset{\downarrow}{E\underline{X}}})^2 \cdot P(\underline{X} = x_k)$$

$$V\underline{X} = E\underline{X}^2 - (E\underline{X})^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

$$\sigma_{\underline{X}} = \sqrt{V\underline{X}} = \sqrt{\frac{35}{12}}$$



Kwantyl 1/3

$$F(x_p) \le p \le F(x_p^+)$$

$$F(2) \le \frac{1}{3} \le F(2^+)$$

$\frac{1}{6} \le \frac{1}{3} \le \frac{1}{3}$ 2 jest kwantylem 1/3

$$F(3) \le \frac{1}{3} \le F(3^+)$$

$\frac{1}{3} \le \frac{1}{3} \le \frac{1}{2}$ 3 też jest kwantylem 1/3

$$x_{\frac{1}{3}} \in \langle 2, 3 \rangle$$

Kwantyl 0.34

$$F(3) \le 0.34 \le F(3^+)$$

$\frac{1}{3} \le 0.34 \le \frac{1}{2}$ 3 jest kwantylem 0.34

$$x_{0.34} = 3$$

Zad. 2. Dana jest wielkość losowa ciągła $\underline{X}$ o rozkładzie równomiernym $p(x) = \begin{cases} 1 \text{ dla } x \in (1,2) \\ 0 \text{ dla pozostałych } x \end{cases}$. Oblicz: wartość średnią, momenty zwyczajne rzędu 2 i 3, wariancję, odchylenie standardowe, kwantyle rzędu 1/3 oraz 0.34.

$$E\underline{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{2} x\,dx + \int_{2}^{\infty} 0\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$E\underline{X}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{2} x^2\,dx + \int_{2}^{\infty} 0\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

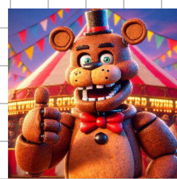
$$E\underline{X}^3 = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \cdot p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{2} x^3\,dx + \int_{2}^{\infty} 0\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

$$V\underline{X} = E(\underline{X} - E\underline{X})^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \overset{\frac{3}{2}}{E\underline{X}})^2 p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 p(x)\,dx =$$

$$= \int_{1}^{2} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 dx = \int_{1}^{2} x^2 - 3x + \frac{9}{4}\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{9}{4}x\Big|_1^2 = \frac{7}{6} - \frac{13}{12} = \frac{1}{12}$$

$$V\underline{X} = E\underline{X}^2 - (E\underline{X})^2 = \frac{1}{12}$$

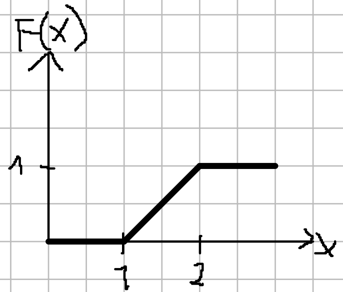
Freddy Fazbear zaleca tą metodę obliczeń

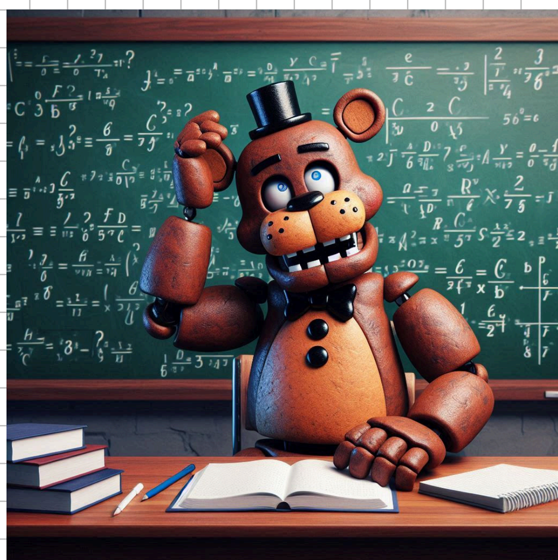


$$\sigma_{\underline{X}} = \sqrt{V\underline{X}} = \sqrt{\frac{1}{12}}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)\,dx \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ x - 1, & x \in (1,2) \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

$$\int_{1}^{x} 1\,dx = x\Big|_1^x = x - 1$$





$$F(x_{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3} \qquad F(x_{0.34}) = 0.34$$

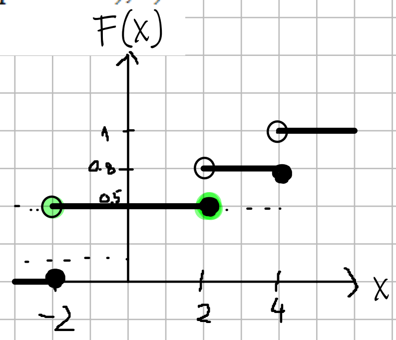
$$x_{\frac{1}{3}} - 1 = \frac{1}{3} \qquad x_{0.34} - 1 = 0.34$$

$$x_{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3} \qquad x_{0.34} = 1.34$$

Zad. 3. Dla wielkości losowej $\underline{X}$ o rozkładzie prawdopodobieństwa danym tabelką

x_k	-2	2	4
$P(\underline{X} = x_k)$	0,5	0,3	0,2

wyznaczyć: a) wartość średnią, b) kwantyl $x_{0.3}$, c) medianę, d) wariancję (dwoma sposobami), e) odchylenie standardowe.



a) $E\underline{X} = \sum_{x_k} x_k \cdot P(\underline{X} = x_k) = -2 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.2 = 0.4$

b) $F(-2) \leq 0.3 \leq F(-2^+)$

$0 \leq 0.3 \leq \frac{1}{2}$ ✓

$x_{0.3} = -2$

c) Mediana to kwantyl rzędu 0.5

$F(-2) \leq \frac{1}{2} \leq F(-2^+)$ $\qquad$ $F(2) \leq \frac{1}{2} \leq F(2^+)$

$0 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ ✓ $\qquad$ $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \leq 0.8$ ✓

$x_{\frac{1}{2}} \in \langle -2, 2 \rangle$

d) $V\underline{X} = E(\underline{X} - E\underline{X})^2 = \sum_{x_k} (x_k - E\underline{X})^2 \cdot P(\underline{X} = x_k) = 6.24$

$V\underline{X} = E\underline{X}^2 - (E\underline{X})^2 = 6.24$

$E\underline{X}^2 = 4 \cdot 0.5 + 4 \cdot 0.3 + 16 \cdot 0.2 = 6.4$

e) $\sigma_{\underline{X}} = \sqrt{6.24}$

Zad. 4. Wielkość losowa $\underline{X}$ ma rozkład prawdopodobieństwa o gęstości $p(x) = \begin{cases} 6x(1-x) \text{ dla } x \in (0,1) \\ 0 \text{ dla pozostałych } x \end{cases}$. Obliczyć wartość przeciętną i wariancję: a) wielkości losowej $\underline{X}$, b) wielkości losowej $\underline{Y} = 2\underline{X} - 1$.

a) $E\underline{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x)\,dx = \int_0^1 6x^2 - 6x^3\,dx = 2x^3 - \frac{3}{2}x^4 \Big|_0^1 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

$E\underline{X}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,dx = \int_0^1 6x^3 - 6x^4\,dx = \frac{3}{2}x^4 - \frac{6}{5}x^5 \Big|_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{6}{5} = \frac{15-12}{10} = \frac{3}{10}$

$V\underline{X} = E\underline{X}^2 - (E\underline{X})^2 = \frac{1}{20}$

$V\underline{X} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\underline{X})^2 \cdot p(x)\,dx = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot 6x(1-x)\,dx = \ldots$

b) $EY = E(2X-1) = 2EX - 1 = 0$

$VY = V(2X-1) = 4VX = \frac{4}{5}$

6.

Zad. 1. Łączny rozkład prawdopodobieństwa wektora losowego dwuwymiarowego dany jest tabelą

Y \ X	2	4	6
1	0.05	0.1	0.2
3	0.2	0.1	0.1
5	0.05	0.05	0.15

a) Sprawdź warunek normalizacyjny dla rozkładu łącznego.
b) Oblicz $P(2 \leq \underline{X} \leq 4, 1 \leq \underline{Y} \leq 3)$.
c) Oblicz $F(4,4)$.
d) Oblicz rozkłady brzegowe.
e) Oblicz rozkłady warunkowe.
f) Sprawdź czy $\underline{X}$ i $\underline{Y}$ są niezależne statystycznie.

a) $0.05+0.2+0.05+0.1+0.1+0.05+0.2+0.1+0.15 = 1$

b) $P(2 \leq \underline{X} \leq 4, 1 \leq \underline{Y} \leq 3) = 0.05+0.1+0.2+0.1 = 0.45$

c) $F(4,4) = P(\underline{X} < 4, \underline{Y} < 4) = 0.05+0.2 = 0.25$

d) $P(\underline{X} = 2) = 0.05 + 0.2 + 0.05 = 0.3$

$P(\underline{X} = 4) = 0.1 + 0.1 + 0.05 = 0.25$

$P(\underline{X} = 6) = 0.2 + 0.1 + 0.15 = 0.45$

$P(\underline{Y} = 1) = 0.05 + 0.1 + 0.2 = 0.35$

$P(\underline{Y} = 3) = 0.2 + 0.1 + 0.1 = 0.4$

$P(\underline{Y} = 5) = 0.05 + 0.05 + 0.15 = 0.25$

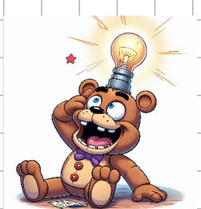
e)

P(X|Y)

Y \ X	2	4	6
1	$\frac{0.05}{0.35}$	$\frac{0.1}{0.35}$	$\frac{0.2}{0.35}$
3	$\frac{0.2}{0.4}$	$\frac{0.1}{0.4}$	$\frac{0.1}{0.4}$
5	$\frac{0.05}{0.25}$	$\frac{0.05}{0.25}$	$\frac{0.05}{0.25}$

P(Y|X)

Y \ X	2	4	6
1	$\frac{0.05}{0.3}$	$\frac{0.1}{0.25}$	$\frac{0.2}{0.45}$
3	$\frac{0.2}{0.3}$	$\frac{0.1}{0.25}$	$\frac{0.1}{0.45}$
5	$\frac{0.05}{0.3}$	$\frac{0.05}{0.25}$	$\frac{0.15}{0.45}$



Wskazówka Fryderyka

Liczniki ułamków w rozkładach warunkowych można przepisać z tabelki.

Mianowniki są takie same w rzędach (X|Y) lub kolumnach (Y|X).

Wzór: $P(\underline{A} = a | \underline{B} = b) = \frac{P(\underline{A} = a, \underline{B} = b)}{P_B(\underline{B} = b)}$

f) Dla niezależnych zachodzi

$$\forall i,j \; P(X = xi, Y = yj) \equiv P(X = xi) \bullet P(Y = yj)$$

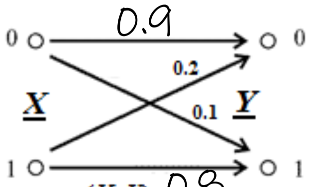
$$P(X = 2, Y = 1) = 0.05$$

$$P(X = 2) \cdot P(Y = 1) = 0.3 \cdot 0.35 = 0.105$$

$$0.05 \neq 0.105$$

Z tego wynika, że nie są niezależne

Zad. 2. W kanale komunikacyjnym jak na rysunku wielkość losowa X reprezentuje nadawane bity, natomiast wielkość losowa Y reprezentuje odbierane bity. Nadanie bitu 1 jest tak samo prawdopodobne jak nadanie bitu 0.



a) Oblicz rozkład łączny wektora losowego (X, Y).
b) Oblicz rozkłady brzegowe.
c) Sprawdź czy X i Y są niezależne statystycznie.
d) Oblicz prawdopodobieństwo, że nadano bit 0 pod warunkiem, że odbiornik zarejestrował 0.

a)

Y \ X	0	1
0	0.45	0.1
1	0.05	0.4

$$P_x(X = 0) = P_x(X = 1) = \frac{1}{2}$$

Sumaryczne prawdopodieństo nadania 0 oraz 1 powinny dawać 0.5. Jeśli prawdopodobieństwo poprawnego otrzymania 0 wynosi 0.9, to w rozkładzie łącznym

$$0.9 \times 0.5 = 0.45$$

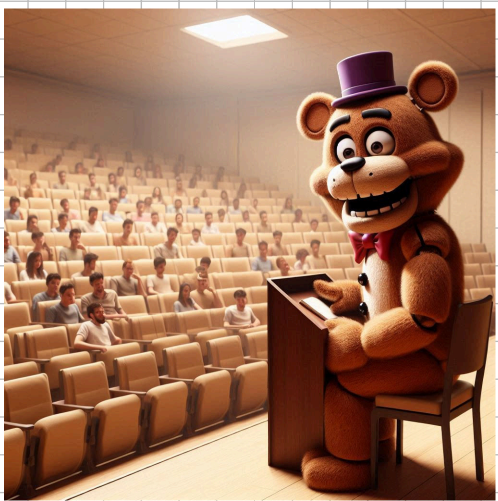
b)

$$P(X = 0) = 0.5$$

$$P(X = 1) = 0.5$$

$$P(Y = 0) = 0.45 + 0.1 = 0.55$$

$$P(Y = 1) = 0.05 + 0.4 = 0.45$$



c)

$$P(X = 0, Y = 0) = 0.45$$

$$P(X = 0) \cdot P(Y = 0) = 0.275$$

X i Y są zależne statystycznie

d)

$$P(X = 0 \mid Y = 0) = \frac{P(X = 0, Y = 0)}{P_Y(Y = 0)} = \frac{0.45}{0.55} = \frac{9}{11}$$

Zad. 3. Dla wektora losowego dwuwymiarowego z zadania 1 obliczyć:
a) średnie warunkowe,
b) współczynnik kowariancji i korelacji.
Skomentować wyniki.

Y \ X	2	4	6
1	0.05	0.1	0.2
3	0.2	0.1	0.1
5	0.05	0.05	0.15

a) $E(X|Y=3) = \sum_{x_i} x_i \cdot P(X = x_i | Y = 3) =$

$= 2 \cdot \frac{0.2}{0.4} + 4 \cdot \frac{0.1}{0.4} + 6 \cdot \frac{0.1}{0.4}$

$E(Y|X=6) = \sum_{y_i} y_i \cdot P(Y = y_i | X = 6) =$

$= 1 \cdot \frac{0.2}{0.45} + 3 \cdot \frac{0.1}{0.45} + 5 \cdot \frac{0.15}{0.45}$

b) $corr(X,Y) = \sum_{x_i} \sum_{y_j} x_i \cdot y_j \cdot P(X = x_i, Y = y_j) =$

$= 1 * 2 * 0.05 + 1 * 4 * 0.1 + 1 * 6 * 0.2 + 3 * 2 * 0.2 \dots = 11.9$

$cov(X,Y) = corr(X,Y) - EX \cdot EY$

$P(X = 2) = 0.3$
$P(X = 4) = 0.25$
$P(X = 6) = 0.45$
$P(Y = 1) = 0.35$
$P(Y = 3) = 0.4$
$P(Y = 5) = 0.25$

$EX = 2 * 0.3 + 4 * 0.25 + 6 * 0.45 = 4.3$

$EY = 2.8$

$EX^2 = 4 * 0.3 + 16 * 0.25 + 36 * 0.45 = 21,4$

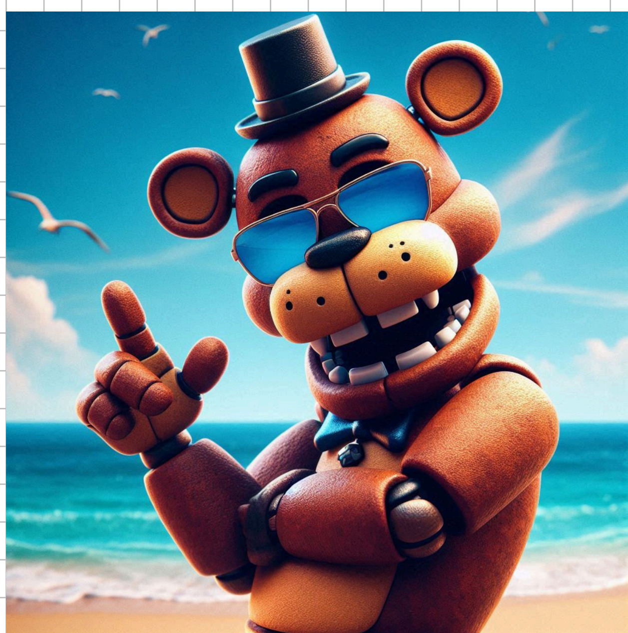
$EY^2 = 10.2$

$cov(X,Y) = 11.9 - 4.3 * 2.8 = -0.14$

$VX = EX^2 - (EX)^2 = 2,91$

$VY = 2,36$

$\rho = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{VX \cdot VY}} = -0.05$



Zad. 4. Dany jest wektor losowy dwuwymiarowy o łącznej gęstości prawdopodobieństwa

$$p(x,y) = \begin{cases} Cxy & \text{dla } 0 < x < a,\ \ 0 < y < b \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, y \end{cases}.$$

a) Oblicz stałą C.
b) Oblicz rozkłady brzegowe.
c) Sprawdź czy $\underline{X}$ i $\underline{Y}$ są niezależne statystycznie.
d) Oblicz rozkłady warunkowe.
e) Oblicz dystrybuantę łączną.
f) Oblicz współczynnik kowariancji i korelacji.
Skomentuj wyniki.

Fazbear ostrzega: Zadanie trudne

a) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dy\,dx = 1$

$$\int_0^a\int_0^b Cxy\,dy\,dx = C\int_0^a x\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^b\,dx = C\int_0^a x\cdot\frac{b^2}{2}\,dx = C\frac{a^2b^2}{4} = 1$$

$$C = \frac{4}{a^2b^2}$$

b) $p_{\underline{X}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dy = \int_0^b \frac{4}{a^2b^2}\cdot xy\,dy = \frac{\cancel{4}^{2}x}{a^2\cancel{b^2}}\cdot\frac{\cancel{b^2}}{\cancel{2}_1} = \frac{2x}{a^2}$

$p_{\underline{Y}}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,d = \int_0^a \frac{4}{a^2b^2}\cdot xy\,dx = \frac{\cancel{4}^{2}y}{\cancel{a^2}b^2}\cdot\frac{\cancel{a^2}}{\cancel{2}_1} =$

c) $p(x,y) = p_{\underline{X}}(x)\cdot p_{\underline{Y}}(y) \iff$ niezależne

$x\in(0,a),\ y\in(0,b)$

$p(x,y) = \frac{4xy}{a^2b^2}$

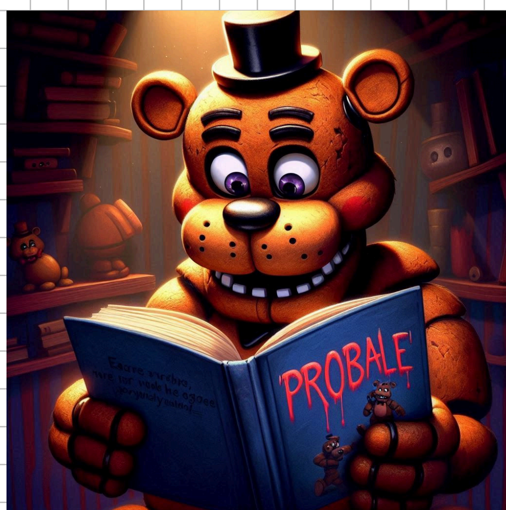
$p_{\underline{X}}(x)\cdot p_{\underline{Y}}(y) = \frac{2x}{a^2}\cdot\frac{2y}{b^2} = p(x,y)$

$\frac{4xy}{{}^{2}\ {}^{2}}$

Wniosek: są niezależne

d) $p_{\underline{X}}(x|y^*) = \frac{p(x,y^*)}{p(x)} = \frac{\frac{4xy^*}{a^2b^2}}{\frac{2x}{a^2}} = \frac{2x}{a^2}$

$p_{\underline{Y}}(y|x^*) = \frac{2y}{b^2}$



e) $F(x,y)$

1) $x \to -\infty$ lub $y \to -\infty$ $\quad F(x,y)=0$

2) $x \to \infty$ oraz $y \to \infty$ $\quad F(x,y)=1$

3) $x \in (0,a)$ oraz $y \in (0,b)$

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(x,y)\,dy\,dx = \int_{0}^{x}\int_{0}^{y} \frac{4xy}{a^2b^2}\,dy\,dx =$$

$$= \frac{4}{a^2b^2}\int_0^x x \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^y dx = \frac{4}{a^2b^2}\,\frac{y^2}{2}\cdot\frac{x^2}{2} = \frac{x^2y^2}{a^2b^2}$$

4) $x \in (0,a)$ oraz $y \geqslant b$

$$F(x,\infty) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)\,dx = \int_0^x \frac{2x}{a^2}\,dx = \frac{1}{a^2}\cdot \left. x^2 \right|_0^x = \frac{x^2}{a^2}$$

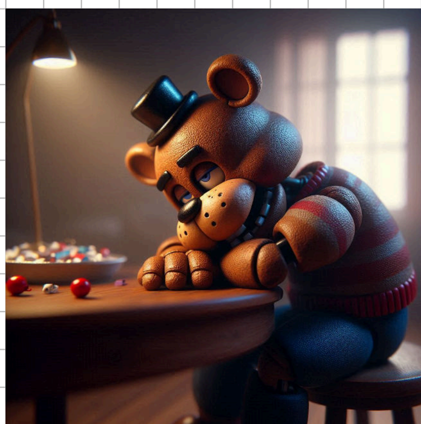
LUB

$$F(x) = F(x,y)\big|_{y\to\infty} = F(x,y)\big|_{y=b} = \frac{x^2}{a^2}$$

5) $x \geqslant a$ oraz $y \in (0,b)$

$$F(\infty,y) = F(y) = \int_{-\infty}^{y} p(y)\,d = \int_0^y \frac{2y}{b^2}\,dy = \frac{1}{b^2}\,\left. y^2 \right|_0^y = \frac{y^2}{b^2}$$

y \ x	$\leqslant 0$	$(0,a)$	$\geqslant a$
$\leqslant 0$	0	0	0
$(0,b)$	0	$\frac{x^2y^2}{a^2b^2}$	$\frac{y^2}{b^2}$
$\geqslant b$	0	$\frac{x^2}{a^2}$	1



f) $$\mathrm{cov}(X,Y) = E(X\cdot Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\,p(x,y)\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^b\int_0^a xy\,\frac{4xy}{a^2b^2}\,dy\,dx = \frac{4}{a^2b^2}\,\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^a \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^b = \frac{4ab}{9} \neq 0$$

$$\mathrm{cov}(\underline{X}, \underline{Y}) = \mathrm{cor}(\underline{X}, \underline{Y}) - E\underline{X} \cdot E\underline{Y}$$

$$E\underline{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)\, dx = \int_0^a x \cdot \frac{2x}{a^2}\, dx = \frac{2}{3} a$$

$$E\underline{Y} = \int_{-\infty}^{\infty} p(y)\, dy = \int_0^b y \cdot \frac{2y}{b^2}\, dy = \frac{2}{3} b$$

$$\mathrm{cov}(\underline{X}, \underline{Y}) = \frac{4ab}{9} - \frac{4ab}{9} = \underline{0}$$

Jesli kowariancja wynosi 0, to także unormowany współczynnik kowariancji (współczynnik korelacji) wynosi zero.

Zad. 5. Z talii 52 kart wylosowano jedną kartę. Niech wielkość losowa $\underline{X}$ przyjmuje wartości równe liczbie wylosowanych asów, a $\underline{Y}$ – liczbie wylosowanych pików. Wyznacz rozkład prawdopodobieństwa i dystrybuantę wektora losowego $(\underline{X}, \underline{Y})$.

$p(x, y)$

y \ x	0	1
0	$\frac{36}{52}$	$\frac{3}{52}$
1	$\frac{12}{52}$	$\frac{1}{52}$

$F(\underline{X}, \underline{Y})$

y \ x	≤ 0	$(0,1\rangle$	>1
≤ 0	0	0	0
$(0,1\rangle$	0	$\frac{36}{52}$	$\frac{39}{52}$
>1	0	$\frac{48}{52}$	1

$F(1,1) = P(\underline{X} < 1, \underline{Y} < 1) = \frac{36}{52}$

$F(1,\infty) = P(\underline{X} < 1, \underline{Y} < \infty) = \frac{48}{52}$ lub $F(1,2)$ ...

$F(\infty,1) = P(\underline{X} < \infty, \underline{Y} < 1) = \frac{39}{52}$ lub $F(2,1)$ ...

7.

Zad. 1. $p_{\underline{X}}(x) = 3x^2$ dla $x \in (0,1)$, $\underline{Y} = \arcsin(\underline{X})$, $p_{\underline{Y}}(y) = ?$

$$\underline{Y} = \arcsin(\underline{X}) \quad x \in (0,1)$$

$$\underline{X} = \sin(\underline{Y}) \quad y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x = \sin(y)$$

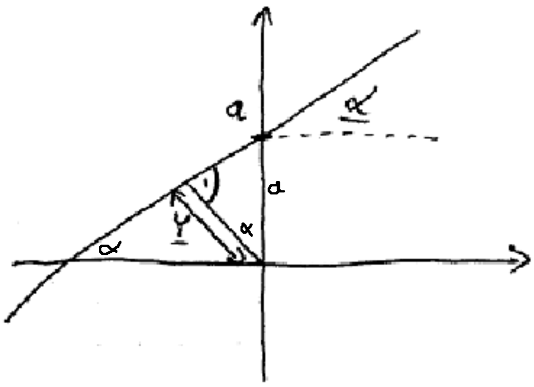
$$\frac{dx}{dy} = \cos(y)$$

$$p_{\underline{Y}}(y) = p_{\underline{X}}(\sin(y)) \cdot |\cos(y)| = 3\sin^2(y) \cdot \cos(y) \quad y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Zad. 2. Przez punkt o współrzędnych (0,a) poprowadzono w sposób dowolny (każdy równoprawdopodobny) prostą. a > 0.

a) Znajdź rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej $\underline{Y}$ reprezentującej odległość tej prostej od początku układu współrzędnych.

b) Oblicz $E(\underline{Y})$.



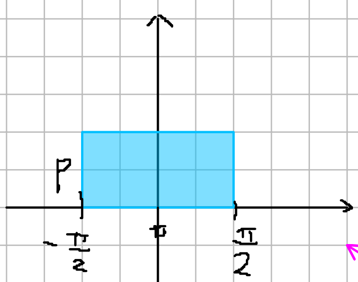
a)

$$\cos(\alpha) = \frac{y}{a} \quad \alpha \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \quad \alpha \text{ jest naszym "x"}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{y}{a}\right) \quad \text{dla } y \in \langle 0, a \rangle$$

$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{-1}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{a}$$

$$p_{\underline{Y}}(y) = p_{\alpha}\left(\arccos\left(\frac{y}{a}\right)\right) \cdot \left| \frac{-1}{a\sqrt{1+\left(\frac{y}{a}\right)^2}} \right| = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{a\sqrt{1+\left(\frac{y}{a}\right)^2}} \quad y \in \langle 0, a \rangle$$



$$p \cdot \pi = 1$$

$$p = \frac{1}{\pi}$$

b) $E\underline{Y} = \int_{-\infty}^{\infty} y \, p_{\underline{Y}}(y) \, dy = \dots$

$$E\underline{Y} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} p(\alpha) \cdot g(\alpha) \, d\alpha = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi} \cdot a \cdot \underbrace{\cos(\alpha)}_{\cos(\alpha) = \frac{y}{a}} \, d\alpha =$$

$$= \frac{a}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha) \, d\alpha = \frac{a}{\pi} \cdot -\sin\alpha \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a}{\pi} \left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{a}{\pi}$$

Zad. 3. $p_{\underline{X}}(x) = 1$ dla $x \in [0,1)$, $\underline{Y} = g(\underline{X})$, $p_{\underline{Y}}(y) = ?$ $F_{\underline{Y}}(y) = ?$

$$\underline{Y} = g(\underline{X}), \quad x \in [0,1)$$

$$y = g(x)$$

$$x = g^{-1}(y)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dg^{-1}(y)}{dy}$$

$$p_{\underline{Y}}(y) = p_{\underline{X}}(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right| = 1 \cdot \frac{dg^{-1}(y)}{dy}$$

$$F_{\underline{Y}}(y) = \int_{-\infty}^{y} p_{\underline{Y}}(y) \, dy = \int_{-\infty}^{y} \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \, dy = g^{-1}(y)$$

Dodatek z Pizzaplexu - wzory

Definicja prawdopodobieństwa warunkowego

Jeżeli $P(B) > 0$, to prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia A przy warunku, że zaszło zdarzenie B, definiuje się następująco

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Reguła łańcuchowa

$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$

$P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C) \cdot P(B|C) \cdot P(C)$

Zdarzenia niezależne

Zdarzenia A i B są niezależne, jeżeli $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Zdarzenia niezależne a zdarzenia rozłączne

Dla niezależnych zdarzeń A i B zachodzi $P(A|B) = P(A), P(B|A) = P(B)$

Dla rozłącznych zdarzeń A i B ($A \cap B = \emptyset$) zachodzi $P(A|B) = 0, P(B|A) = 0$

Schemat Bernouliego – kombinacja zdarzeń niezależnych

n – liczba prób binarnych (sukces porażka)

A_i – sukces w i-tej próbie, $P(A_i) = p$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ – zdarzenia niezależne *en bloc*

$$P(zajdzie\ k\ spośród\ A_1, \ldots, A_n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Tw. o prawdopodobieństwie całkowitym

Jeżeli zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_N$ tworzą układ zupełny zdarzeń, to dla każdego zdarzenia A

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + \cdots + P(A \cap A_N) \\ &= P(A|A_1)P(A_1) + P(A|A_2)P(A_2) + \cdots + P(A|A_N)P(A_N) \end{aligned}$$

Tw. Bayesa

Niech $H_1, H_2, \ldots, H_N$ tworzą układ zupełny zdarzeń (hipotezy), których prawdopodobieństwa *a priori* $P(H_n)$ znamy. Dla dowolnego zdarzenia B o prawdopodobieństwie $P(B)$ różnym od zera, znając prawdopodobieństwa: $P(B|H_1)$, $P(B|H_2)$, ..., $P(B|H_N)$, możemy obliczyć prawdopodobieństwa *a posteriori*

$$P(H_n|B) = \frac{P(B|H_n)P(H_n)}{P(B|H_1)P(H_1) + P(B|H_2)P(H_2) + \cdots + P(B|H_N)P(H_N)}$$

Zmienna losowa (wielkość losowa)

Ze zmienną losową $\underline{X}$ mamy do czynienia, gdy istnieje funkcja $x(\omega)$ przyporządkowująca wartości liczbowe losowym zdarzeniom elementarnym ω.

Dziedzina:	wszystkie zdarzenia elementarne $\omega \in \Omega$
Przeciwdziedzina:	podzbiór $\boldsymbol{R}$
Realizacja:	$x_i = x(\omega_i)$

Zmienne losowe ciągłe i dyskretne

Zmienna losowa jest typu ciągłego, jeżeli jej dystrybuanta $F(x)$ jest funkcją ciągłą i przeliczalna jest liczba argumentów, dla których nie jest ona różniczkowalna.

Zmienna losowa jest typu dyskretnego, jeżeli jej dystrybuanta $F(x)$ jest typu schodkowego.

Zmienna losowa jest typu mieszanego, jeżeli jej dystrybuanta $F(x)$ jest nieciągła, ale jednocześnie nie jest typu schodkowego.

Dystrybuanta zmiennej losowej

Dystrybuanta zmiennej losowej $\underline{X}$ jest funkcją argumentu x określającą prawdopodobieństwo przyjęcia przez tę zmienną losową wartości mniejszej od x.

$$F(x) = P(\underline{X} < x)$$

Własności:

1) $F(x)$ jest określona w dziedzinie liczb rzeczywistych w przedziale od $-\infty$ do ∞.
2) $F(x)$ jest funkcja niemalejącą
3) $F(-\infty) = 0$
4) $F(\infty) = 1$
5) $F(x)$ jest lewostronnie ciągła: $F(x^-) = F(x)$
6) $P\left(x_1 \le \underline{X} < x_2\right) = F(x_2) - F(x_1)$
7) $P\left(\underline{X} = x_1\right) = F(x_1^+) - F(x_1)$

Komplementarna dystrybuanta: $C(x) = 1 - F(x) = P(\underline{X} \ge x)$

Gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej

Gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej jej pochodną jej dystrybuanty

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Własności:

1) $p(x) \ge 0$
2) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(z)dz$ (z.l. ciągła); $F(x) = \sum_{x_n<x} P\left(\underline{X} = x_n\right),\ n = 1,2,3,\ldots$ (z.l. dyskretna)
3) warunek normalizacyjny: $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$ (z.l. ciągła); $\sum_n P\left(\underline{X} = x_n\right) = 1$ (z.l. dyskretna)
4) $P\left(x_1 \le \underline{X} \le x_2\right) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx$ (z.l. ciągła); $P\left(x_1 \le \underline{X} \le x_2\right) = \sum_{x_1 \le x_n \le x_2} P\left(\underline{X} = x_n\right)$ (z.l. dyskretna)

Wartość średnia (statystyczna) / oczekiwana / przeciętna / nadzieja matematyczna

$$E\underline{X} = \begin{cases} \sum_{x_k} x_k \cdot P(\underline{X} = x_k) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x)dx \end{cases}$$

Wartość średnia nie musi być:

- jedną z realizacji,
- najbardziej prawdopodobną realizacją,
- skończona,
- możliwa do obliczenia.

Dla kombinacji liniowej wielkości losowych: $E(a\underline{X} + b\underline{Y} + c) = aE\underline{X} + bE\underline{Y} + c$

Momenty rozkładu wielkości losowych

$$E(\underline{X} - a)^r = \begin{cases} \sum_{x_k} (x_k - a)^r \cdot P(\underline{X} = x_k) \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^r \cdot p(x)dx \end{cases}$$

- $\alpha = 0 \Rightarrow$ momenty zwyczajne / momenty, $E\underline{X}^r$
- $\alpha = E\underline{X} \Rightarrow$ momenty centralne, $E(\underline{X} - E\underline{X})^r$
- momenty rozkładu dostarczają informacji na temat geometrii rozkładu (rozproszenie, asymetria, spłaszczenie, …)
- momenty rozkładu nie zawsze istnieją

Wariancja i odchylenie standardowe

Wariancja (moment centralny drugiego rzędu): $V\underline{X} = E(\underline{X} - E\underline{X})^2 = E\underline{X}^2 - (E\underline{X})^2 \geq 0$

Odchylenie standardowe: $\sigma_{\underline{X}} = \sqrt{V\underline{X}}$

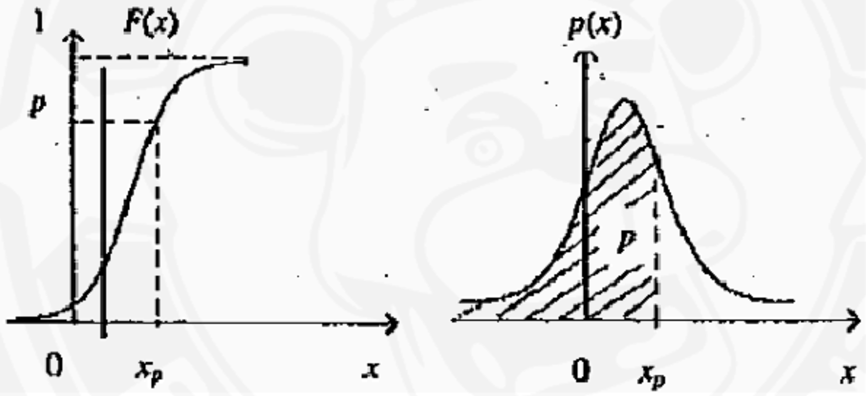
Własności:

- $V(a\underline{X} + b) = a^2 V\underline{X}$
- standaryzacja: $\mathring{\underline{X}} = \dfrac{\underline{X} - E\underline{X}}{\sigma_{\underline{X}}}$ $\quad E\mathring{\underline{X}} = 0,\ V\mathring{\underline{X}} = 1$
- gdy $\underline{X}$, $\underline{Y}$ są niezależne: $V(a\underline{X} + b\underline{Y} + c) = a^2 V\underline{X} + b^2 V\underline{Y}$

Kwantyle rozkładu wielkości losowych

Kwantylem rzędu p wielkości losowej typu ciągłego o dystrybuancie ciągłej $F(x)$, przy czym p jest ustaloną liczbą zawartą w przedziale $0 < p < 1$, nazywamy liczbę x_p spełniającą równanie

$$F(x_p) = p$$



Inaczej: $P(\underline{X} < x_p) = p$

Uwagi:

- kwantyli rzędu p może być więcej niż jeden,
- niektóre kwantyle mają swoje nazwy, na przykład kwantyl rzędu 1/2 to mediana.

Dla zmiennych losowych dyskretnych:

$$F(x_p) \leq p \leq F({x_p}^+)$$
$$P(\underline{X} < x_p) \leq p \leq P(\underline{X} \leq x_p)$$

Wektor losowy

Wielowymiarową wielkością losową (wektorem losowym) nazywamy zespół N jednowymiarowych wielkości losowych ($\underline{X}_1, \underline{X}_2, \ldots, \underline{X}_N$), czyli zespół N funkcji $(X_n(\omega); n = 1, 2, \ldots, N)$), który każdemu zdarzeniu elementarnemu ω przyporządkowuje odpowiedni zbiór liczb rzeczywistych $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$.

Zapis wektorowy: $\quad \vec{\underline{X}}_N = \begin{bmatrix} \underline{X}_1 \\ \underline{X}_2 \\ \vdots \\ \underline{X}_N \end{bmatrix}$

Rozkład łączny

Dystrybuanta łączna: $F(x, y) = P(\underline{X} < x, \underline{Y} < y)$

- niemalejąca względem x i y,
- $F(x, y) = 0$ dla $x = -\infty$ lub $y = -\infty$,
- $F(x, y) = 1$ dla $x = y = \infty$.

Łączny rozkład prawdopodobieństwa (wektor losowy dyskretny): $P(\underline{X} = x_i, \underline{Y} = y_j)$

Łączny rozkład gęstości prawdopodobieństwa (wektor losowy ciągły): $p(x, y) = \dfrac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$

Warunek normalizacyjny: $$\left.\begin{array}{l} \sum\sum_{x_i, y_j} P(\underline{X} = x_i, \underline{Y} = y_j) \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x, y)dxdy \end{array}\right\} = 1$$

Związek pomiędzy dystrybuantą a rozkładem / gęstością prawdopodobieństwa:

$$F(x, y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} P(\underline{X} = x_i, \underline{Y} = y_j) \qquad F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} p(x, y)dxdy$$

Rozkłady brzegowe

Rozkłady wybranej składowej wektora losowego $(\underline{X}, \underline{Y})$:

$$P(\underline{X} = x_j) = \sum_{y_k} P(\underline{X} = x_j, \underline{Y} = y_k) \qquad p_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x, y)dy$$

Dystrybuanta brzegowa: $F_X(x) = P(\underline{X} < x) = P(\underline{X} < x, \underline{Y} < \infty) = F(x, \infty)$

Dla niezależnych $\underline{X}$ i $\underline{Y}$:

$F(x,y) \equiv F_X(x) \cdot F_Y(y)$, $p(x,y) \equiv p_X(x) \cdot p_Y(y)$, $\forall_{i,j}\ P(\underline{X} = x_i, \underline{Y} = y_j) \equiv P(\underline{X} = x_i) \cdot P(\underline{Y} = y_j)$

Rozkłady warunkowe

Dystrybuanta warunkowa: $F_Y(y|x^*) = \frac{F(x^*, y)}{F_X(x^*)}$

Rozkłady warunkowe: $P(\underline{Y} = y_j | \underline{X} = x_i) = \frac{P(\underline{X} = x_i, \underline{Y} = y_j)}{P(\underline{X} = x_i)}$ $\qquad p_Y(y | x^*) = \dfrac{p(x^*, y)}{p_X(x^*)}$

Średnia warunkowa:

$$E(\underline{Y}|\underline{X} = x_i) = \sum_{y_j} y_j \cdot P(\underline{Y} = y_j | \underline{X} = x_i) \qquad E(\underline{Y}|\underline{X} = x^*) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot p_Y(y|x^*)dy$$

Korelacja, kowariancja

Korelacja:
$$\mathrm{corr}(\underline{X}, \underline{Y}) = E(\underline{X} \cdot \underline{Y}) = \begin{cases} \sum_{x_i} \sum_{y_j} x_i \cdot y_j \cdot P(\underline{X} = x_i, \underline{Y} = y_j) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot p(x, y) dx dy \end{cases}$$

jeżeli $\mathrm{corr}(\underline{X}, \underline{Y}) = 0$, to $\underline{X}$ i $\underline{Y}$ są ortogonalne

Kowariancja / współczynnik kowariancji: $\mathrm{cov}(\underline{X}, \underline{Y}) = \lambda = E[(\underline{X} - E\underline{X})(\underline{Y} - E\underline{Y})] =$
$= \mathrm{corr}(\underline{X}, \underline{Y}) - E\underline{X} \cdot E\underline{Y} = E(\underline{X} \cdot \underline{Y}) - E\underline{X} \cdot E\underline{Y}$

Unormowany współczynnik kowariancji (inaczej współczynnik korelacji – uwaga, to nie to samo co korelacja): $\rho = \frac{\mathrm{cov}(\underline{X},\underline{Y})}{\sigma_{\underline{X}} \cdot \sigma_{\underline{Y}}}$, $|\rho| \le 1$

Współczynniki kowariancji/korelacji mówią jak silna zależność istnieje pomiędzy zmiennymi losowymi $\underline{X}$ i $\underline{Y}$ (im większa wartość $|\rho|$ tym silniejsza jest ta zależność):
- $\rho = \lambda = 0 \rightarrow \underline{X}$ i $\underline{Y}$ są nieskorelowane,
- $\rho > 0$ $(\lambda > 0) \rightarrow \underline{X}$ i $\underline{Y}$ są dodatnio skorelowane,
- $\rho < 0$ $(\lambda < 0) \rightarrow \underline{X}$ i $\underline{Y}$ są ujemnie skorelowane,
- $|\rho| = 1$ $\rightarrow \underline{X}$ i $\underline{Y}$ są liniowo zależne.

Dla niezależnych zmiennych losowych $\rho = \lambda = 0$. Twierdzenie odwrotne nie jest zawsze prawdziwe.

Dane: $p_{\underline{X}}(x)$, $\underline{Y} = g(\underline{X})$ **Szukane:** $p_{\underline{Y}}(y) = ?$

Rozwiązanie:

1) $\underline{Y} = g(\underline{X})$

2) $\underline{X} = g^{-1}(\underline{Y})$ Uwaga! Zmiana zakresu zmiennych!

3) $x = g^{-1}(y)$

4) $\frac{dx}{dy} = \frac{d(g^{-1}(y))}{dy}$

5) $p_{\underline{Y}}(y) = p_{\underline{X}}(g^{-1}(y)) \left|\frac{d(g^{-1}(y))}{dy}\right|$

Przykład: $p_{\underline{X}}(x) = \frac{3}{64}x^2$ dla $x \in (0,4)$, $\underline{Y} = \sqrt{\underline{X}}$, $p_{\underline{Y}}(y) = ?$

1) $\underline{Y} = \sqrt{\underline{X}}$ dla $x \in (0,4)$

2) $\underline{X} = \underline{Y}^2$ dla $y \in (0,2)$ Uwaga! Zmiana zakresu zmiennych!

3) $x = y^2$

4) $\frac{dx}{dy} = 2y$

5) $p_{\underline{Y}}(y) = p_{\underline{X}}(g^{-1}(y)) \left|\frac{d(g^{-1}(y))}{dy}\right| = \frac{3}{64}(y^2)^2 \cdot |2y| = \frac{3}{32}y^5$ dla $y \in (0,2)$

Wartość średnia zmiennej losowej $\underline{Y}$

$$E\underline{Y} = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot p(y) dy$$

$$E\underline{Y} = E(g(\underline{X})) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot p(x) dx$$