Unidad 1:

CAPíTULO 4

LÓGICA

Uno de los procesos por los cuales adquirimos conocimiento es el proceso de razonamiento. A su vez, hay una variedad de modos o formas mediante las cuales razonamos o argumentamos a favor de una conclusión. Ciertas formas de razonamiento parecen mostrar que si se suponen ciertas premisas, entonces la conclusión se sigue necesariamente. A tales razonamientos se los ha denominado deductivos y forman el objetivo central de lo que clásicamente se ha denominado lógica.

En un sentido amplio, el término *lógica* hace referencia al estudio de todos los razonamientos, y en un sentido estricto ha estado circunscripto al estudio del razonamiento deductivo.

Cierto tipo de razonamiento deductivo se basa en la lógica proposicional. Lo que caracteriza a la lógica proposicional es que toma como unidades básicas a las proposiciones y que tiene en cuenta cómo se combinan entre ellas por medio de conectivos lógicos para formar argumentos válidos.

1. Proposiciones

Una *proposición* es una sentencia declarativa que puede ser verdadera o falsa, pero no ambas a la vez. También podríamos decir que una proposición es una sentencia que expresa una propiedad para un individuo o ente, o que expresa la validez de una relación entre individuos o entes. Por ejemplo:

- Hoy es sábado.
- Los triángulos tienen cuatro vértices.
- $25 + 24 = 49$.
- Juan va al trabajo en tren .

Las sentencias exclamativas, las interrogativas y las imperativas tales como:

¡Viva la patria!,

¿Está lloviendo?

Oprima la tecla $\langle$ *ENTER* $\rangle$

no son proposiciones puesto que no pueden ser declaradas como verdaderas o falsas.

La veracidad V o falsedad (F) de una proposición se llama *valor de verdad* y viene dada por algún criterio independiente de la proposición.

Algunas proposiciones parecieran tener distintos valores de verdad según el caso. Por ejemplo, si decimos: *Hoy es sábado*, es falsa de domingo a viernes y es verdadera los sábados. O por ejemplo, *Nalbandián ganó* depende de qué partido nos estemos refiriendo. Esto se debe a que en nuestro lenguaje coloquial hay una gran parte de la información que está implícita. La palabra *hoy* está indicando una fecha particular, aunque no se esté diciendo explícitamente cuál. Un titular en un periódico que diga *Nalbandián ganó*, se está refiriendo a un determinado partido.

2. Conectivos lógicos

En el cálculo proposicional se suelen utilizar letras minúsculas como p, q, r,... para simbolizar las proposiciones. Estos símbolos pueden modificarse o combinarse mediante conectivos lógicos dando lugar a *proposiciones compuestas*. Los conectivos lógicos que estudiaremos son la negación: $\neg$, la conjunción: $\wedge$, la disyunción: $\vee$, la disyunción exclusiva: $\underline{\vee}$, la implicación: $\Rightarrow$ y la doble implicación: $\Leftrightarrow$. La negación modifica *una* proposición y por lo tanto se dice que es *1-aria* o *unitaria*. Los otros se aplican a dos proposiciones y se los llama *2-arios* o *binarios*.

EJEMPLO 4.1. Consideremos las proposiciones p: “4 es positivo” y q: “$\sqrt{2}$ es racional”. Algunas posibles combinaciones de p y q son:

$\neg p$: 4 **no** es positivo.

$p \wedge q$: 4 es positivo **y** $\sqrt{2}$ es racional.

$\neg p \wedge q$: 4 **no** es positivo **y** $\sqrt{2}$ es racional.

$p \vee q$: 4 es positivo **o** $\sqrt{2}$ es racional.

$p \Rightarrow q$: Si 4 es positivo **entonces** $\sqrt{2}$ es racional.

$p \Leftrightarrow q$: 4 es positivo **si y sólo si** $\sqrt{2}$ es racional.

3. Negación

Si p es una proposición, simbolizamos con $\neg p$ a su negación.
La *negación* es una operación unitaria que se aplica a una proposición y tiene el efecto de revertir el valor de verdad. Esto es, si p es verdadera entonces $\neg p$ es falsa, y si p es falsa entonces $\neg p$ es verdadera.

EJEMPLO 4.2. Si p simboliza la proposición *estamos en la clase de Álgebra*, entonces $\neg p$ es *no estamos en la clase de Álgebra*.

En la siguiente tabla mostramos la relación entre los valores de verdad de p y $\neg p$:

p	$\neg\, p$
V	F
F	V

Una tabla de este tipo, en la que se listan simultáneamente los valores de verdad de la proposición p y la que resulta de aplicar un conectivo se llama *tabla de verdad*.

EJEMPLO 4.3. Consideremos la proposición

p: “10 es múltiplo de 5”.

Entonces el valor de p es V. Su negación debe ser una proposición que es falsa siempre que p sea verdadera, por lo tanto $\neg\, p$ debe expresar exactamente lo contrario a lo que expresa p:

$\neg p$: “10 no es múltiplo de 5”.

EJEMPLO 4.4. Consideremos la proposición

q : “Todos los perros son blancos”.

No debe confundirse la negación con decir algo diferente, por ejemplo

r : “Algunos perros son blancos”.

La proposición r no es la negación de q, puesto que si q es verdadera también r lo es.

Si decimos

s : “Ningún perro es blanco”

tampoco s es la negación de q, puesto que si existiera un único perro de color blanco y los demás fueran marrones, entonces tanto q como s serían proposiciones falsas.

La negación de q puede ser enunciada de la siguiente manera:

$\neg\, q$: “Algunos perros no son blancos”.

Así, si q es verdadera, $\neg q$ es falsa, mientras que si $\neg q$ es verdadera entonces q es falsa.

4. Conjunción

La *conjunción* es un conectivo que permite formar proposiciones compuestas a partir de dos o más proposiciones. Una conjunción de proposiciones es verdadera si y sólo si cada una de ellas es verdadera. Basta que un solo término de la conjunción sea falso para que toda la conjunción sea falsa. En castellano, normalmente la conjunción se expresa por medio de la ’y’, de comas o de una combinación de éstas, o palabras como ’pero’. Así, por ejemplo, la proposición compuesta *Córdoba tiene sierras y tiene ríos* es verdadera porque cada parte de la conjunción es verdadera. No ocurre lo mismo con la proposición *Córdoba tiene sierras y tiene mar*. Esta proposición es falsa porque Córdoba no tiene mar.

La siguiente tabla corresponde a la tabla de verdad de la conjunción:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

EJEMPLO 4.5. Si p es “algunas aves vuelan” y q es “el gato es un ave”, entonces $p \wedge q$ expresa “algunas aves vuelan y el gato es un ave”, que es obviamente falsa pues los gatos no son aves. Por otro lado la proposición $p \wedge \neg q$ que dice “algunas aves vuelan y el gato no es un ave” es verdadera pues es la conjunción de dos proposiciones verdaderas.

5. Disyunción

Existen dos operadores de disyunción: La *disyunción exclusiva o excluyente* y *la disyunción inclusiva o incluyente*.

La disyunción exclusiva de dos proposiciones es verdadera si sólo una de las proposiciones es verdadera, y la indicamos con el símbolo $\veebar$.

La disyunción inclusiva entre dos proposiciones es falsa sólo si ambas proposiciones son falsas y se indica con el símbolo $\vee$. En el lenguaje coloquial y en matemática es más frecuente el uso de la disyunción inclusiva, también llamada el “o inclusivo”. A veces el contexto de una frase indica si la disyunción es excluyente o incluyente. Un ejemplo de disyunción de tipo inclusivo es:

“Los alumnos regularizan la materia si aprueban tres parciales o si aprueban dos parciales y tienen un 80 % de asistencia.”

En este caso, los alumnos pueden cumplir cualquiera de los dos requisitos, o también cumplir los dos. Pero por ejemplo, si en un restaurante con menú fijo se nos dice que tenemos como postre ’helado o flan’ normalmente no significa que podamos pe dir ambos, siendo en este caso la disyunción exclusiva.

Frecuentemente y cuando no es claro en el contexto de la oración se indica que una disyunción es incluyente (excluyente respectivamente) terminando la frase con *o ambas* (respectivamente *pero no ambas*).

Las siguientes tablas resumen los valores de verdad de $p \veebar q$ y $p \vee q$:

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

6. Los conectivos y las operaciones entre conjuntos

Recordemos que la unión entre conjuntos se define como

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

Dado que el nexo *o* no es excluyente, podemos utilizar la notación lógica y escribir

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

De manera análoga, la intersección entre dos conjuntos A y B se define como

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

A su vez, fijado un conjunto universal $\mathcal{U}$, el complemento de un conjunto A se define como

$$A^c = \{x \mid \neg(x \in A)\}.$$

7. Propiedades de la conjunción y la disyunción

Los conectivos lógicos binarios combinan, como su nombre lo indica, dos proposiciones. Para la disyunción y para la conjunción se cumple la *propiedad conmutativa*:

$$p \wedge q = q \wedge p, \qquad p \vee q = q \vee p \qquad \text{y} \qquad p \veebar q = q \veebar p.$$

Si combinamos tres o más proposiciones utilizando uno de estos conectivos, entonces no importa cuál es el orden en que se realicen las operaciones. Por ejemplo, la conjunción entre tres proposicones p, q y r:

$$p \wedge q \wedge r$$

puede efectuarse operando $(p \wedge q) \wedge r$ o $p \wedge (q \wedge r)$. Es decir, la conjunción y la disyunción son operaciones *asociativas*.

En cambio, si utilizamos dos o más conectivos distintos, no se cumple la asociatividad en todos los casos. Por ejemplo, la expresión

$$(p \wedge q) \vee r$$

indica que se efectúa primero $p \wedge q$ y luego la disyunción con r; mientras que en la expresión

$$p \wedge (q \vee r)$$

se efectúa la conjunción de p con $q \vee r$. Notemos por ejemplo que si $p = F$, $q = V$ y $r = V$, entonces $(p \wedge q) \vee r = V$ y $p \wedge (q \vee r) = F$, por lo tanto $(p \wedge q) \vee r \neq p \wedge (q \vee r)$.

Las siguientes propiedades pueden comprobarse construyendo las tablas de verdad correspondientes, y se dejan como ejercicio para el lector.

Propiedad asociativa

$$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$$

$$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$$

Propiedad distributiva

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

Leyes de Morgan

$$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$$

8. Ejercicios

1. Evalúa cada proposición según los valores de verdad $p = F$, $q = V$, $r = F$.

   a) $p \vee q$
   b) $\neg\, p \vee \neg\, q$
   c) $\neg\, p \vee q$
   d) $p \vee \neg\,(q \wedge r)$
   e) $\neg\,(p \vee q) \wedge (\neg\, p \vee r)$
   f) $\neg p \wedge (q \vee r)$

2. En la columna de la izquierda hay una lista de proposiciones. Para cada una de ellas, indica si la correspondiente proposición a la derecha es o no su negación. Si no lo es, escribe correctamente la negación.

a) El pizarrón es verde.	*j*) $b \in A \cap B$
b) 4 es múltiplo de 8.	*k*) $c \in A^c$
c) El conjunto A tiene un solo elemento.	*l*) $d \notin G^c$
d) A es un conjunto vacío.	*a*) El pizarrón es negro.
e) $a \leq b$	*b*) 4 no es múltiplo de 8.
f) $a \geq b$	*c*) El conjunto A es vacío.
g) $a < b \leq c$	*d*) A tiene al menos un elemento.
h) $a < b \leq c$	*e*) $a > b$
i) $a \in A \cup B$	*f*) $a \leq b$

g) $a > b \geq c$

h) $a \geq b$ o $b > c$

i) $a \in A^c \cup B^c$

j) $b \in (A \cap B)^c$

k) $c \in A$

l) $d \in G$

3. Suponga que a, b y c son números reales. Represente en forma simbólica los enunciados dados tomando: $p : a < b, \qquad q : b < c, \qquad r : a < c.$

   a) $a < b < c$.

   b) $(a \geq b$ y $b < c)$ o $a \geq c$.

   c) No es cierto que $(a < b$ y $a < c)$.

   d) (No es verdad que $(a < b$ y $(a < c$ o $b < c)))$ o $(a \geq b$ y $a < c)$.

4. Suponiendo p y q verdaderos, y r y s falsos, indica los valores de verdad de las siguientes expresiones:

   a) $p \vee (q \wedge r)$

   b) $(p \wedge (q \wedge r)) \vee \neg((p \vee q) \wedge (r \vee s))$

   c) $(\neg(p \wedge q) \vee \neg r) \vee (((\neg p \wedge q) \vee \neg r) \wedge s)$

5. Compruebe a través de las tablas de verdad, las propiedades distributivas de la disyunción y de la conjunción, y las leyes de Morgan.