**Fundación universitaria Konrad Lorenz**

Matemáticas

# PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS.

## CON MASA VARIABLE

Autores:

Nataly Phawllyn Neira Parra

Cod: 614212782

Docente :

Camilo Posada, PhD

*Computación Científica I*

Abril 2024

**Resumen**

El problema de los dos cuerpos es uno de los primeros problemas abordados en la mecánica celeste, que intenta describir la dinámica de dos cuerpos que están sometidos al campo gravitacional uno del otro. En este trabajo se aborda inicialmente la versión más simple de este problema, donde la masa de uno de los cuerpos es considerablemente mayor que la del segundo; es decir, se describe la trayectoria de una masa bajo un campo gravitacional radial. Para ello, se calculó dicha trayectoria numéricamente mediante la implementación en Python de los métodos de Euler backward y forward, Punto Medio Explícito y Trapecio Implícito. Se evalúa el orden de convergencia de los métodos numéricos implementados: Euler backward y forward, con $\alpha = 1$ y Punto Medio con $\alpha = 2$ respecto al método de Trapecio Implícito. Se presentan ejemplos del sistema Tierra-Sol y Urano-Sol.

# Introducción

El planteamiento y solución del problema de los dos cuerpos representaron avances significativos en el desarrollo de las ciencias modernas. Estos avances surgieron de una serie de descubrimientos que fueron objeto de intenso debate en su época. Newton, apoyado en los trabajos de Galileo, Huygens y Kepler, pudo derivar deductiva mente su famosa ley de la gravitación universal a partir de la solución del modelo de los dos cuerpos, representados por un planeta cualquiera y el Sol. Esta ley adquirió importancia en escalas que van desde la astronómica hasta la subatómica Méndez-Pérez et al., 2014 y continúa siendo fundamental en la mecánica clásica.

El problema de los dos cuerpos consiste en describir matemáticamente la posición y velocidad de dos cuerpos de masas $m_1$ y $m_2$ en función del tiempo, bajo la única influencia de la atracción gravitatoria mutua. Para abordar este problema, se recurre a la dinámica clásica, que permite deducir, a partir de los diagramas de cuerpo libre sobre cada masa, las sumatorias de fuerzas y, por ende, el sistema de ecuaciones que describe el movimiento. No obstante, este planteamiento depende de la relación entre las masas, lo que da lugar a dos casos principales:

- $m_1 \gg m_2$: **Problema de un cuerpo.** En este caso, una de las masas es considerablemente mayor que la otra, lo que reduce el problema a la trayectoria de una partícula bajo la influencia gravitatoria ejercida por una masa estática de gran magnitud.
- $m_1 \propto m_2$: **Problema de los dos cuerpos.** Aquí, las masas de las partículas son proporcionales en orden de magnitud, y el movimiento se centra alrededor del centro de masa del sistema.

Estos casos pueden presentar variaciones, como la dependencia temporal de la masa de uno o ambos cuerpos. Por ejemplo, en astronomía, se puede observar el decaimiento de la masa de las estrellas.

A continuación, se realiza la deducción del sistema de ecuaciones para el problema de un cuerpo de forma analítica, para luego solucionar dicho sistema de forma numérica.

## Planteamiento del sistema para el problema de un cuerpo.

Sea dos partículas de masas $m$ y $M$ con $M \gg m$, $M$ estática y $m$ con posición $r(t)$ en función del tiempo de la forma

$$r(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} \tag{1}$$

Se ubica el sistema de referencia inercial sobre $M$ y se realiza el diagrama de cuerpo libre de $m$ (Fig.1), considerando el sistema aislado y con $m$ sometido únicamente a la fuerza de gravitación

$$\begin{aligned} F &= \frac{-GMm}{r^2}\hat{r} \\ F &= -GMm\left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\hat{i} + \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\hat{j}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

Donde $G$ es la constante gravitacional.

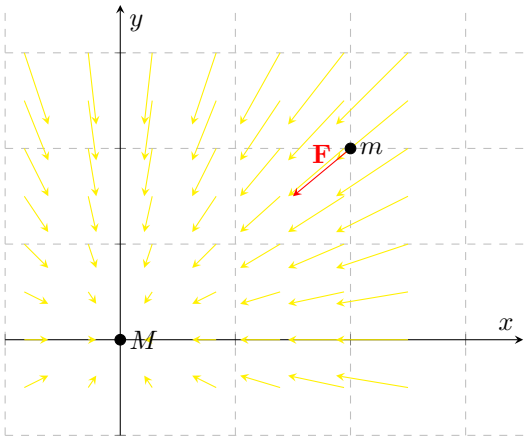



Figura 1: Diagrama de cuerpo libre de una partícula $m$ en un campo de fuerza gravitacional

Para este caso la sumatoria de fuerzas sobre $m$ es:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= -GMm\left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right) \\ \sum F_y &= -GMm\left(\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right) \end{aligned}$$

Por la segunda ley de Newton (Portilla B., 1996), se sabe que dicha sumatoria es igual a la derivada del momento lineal ($m\dot{r}$) con respecto al tiempo.

$$F = \frac{dP}{dt} \tag{3}$$

$$F = \frac{d(m\dot{r})}{dt}$$

$$F = m\ddot{r} \tag{4}$$

Por lo tanto, para cada componente de la fuerza, tenemos

$$\begin{aligned} F_x &= \sum F_x \\ m\ddot{x} &= -GMm\left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right) \\ \ddot{x} &= -GM\left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} F_y &= \sum F_y \\ m\ddot{y} &= -GMm\left(\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right) \\ \ddot{y} &= -GM\left(\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right) \end{aligned} \tag{6}$$

Aunque las ecuaciones Ecu.5 y Ecu.6, constituyen el sistema de ecuaciones diferenciales que describen el movimiento, para fines de este trabajo es necesario que el sistema sea de EDO's de primer orden, por lo tanto, considerando $V_x = \dot{x}$ y $V_y = \dot{y}$ las componentes de la velocidad en función del tiempo, tenemos

$$\begin{cases} \dot{x} = V_x \\ \dot{y} = V_y \\ \dot{V}_x = -GM\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ \dot{V}_y = -GM\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{cases} \tag{7}$$

con $G$ la constate gravitacional.

## Solución Numérica

Para solucionar el sistema de EDO's Sis., se realiza la implementación en python de los métodos numéricos (Neira Parra, 2024):

- **Euler forward**

```
            def euler_sistemas(m,t0,y0,f,h,N):
        """
        ENTRADAS
            m : cantidad de variables
            t0: tiempo inicial
            y0: valor inicial de las m variables
            f : funci n de tasa de cambio
            h : longitud de paso
            N : cantidad de pasos
         SALIDAS
            th: lista de tiempos para la soluci n discreta
            yh: soluci n discreta en todos los pasos de tiempo - para
                ↪ las m variables

        """

        th = np.zeros(N+1)
        yh = np.zeros((m,N+1))



        th[0] = t0
        yh[:,0] = y0[:]

        for n in range(N):
          th[n+1] = t0 + (n+1)*h
          yh[:,n+1] = yh[:,n] + h * f(th[n], yh[:,n])
          # calculamos las  velocidades dependiendo de las
              ↪ aceleraciones

        return th,yh
```

- **Euler Backward**

```
def backward_euler_sistemas(m,t0,y0,f,df,h,N):
  """
   M todo de Backward Euler para integrar PVI - sistemas
   ENTRADAS
      m : cantidad de variables
      t0: tiempo inicial
      y0: valor inicial de las m variables
      f : funci n de tasa de cambio -array  tama o m
      df: jacobiano de f matriz m x m,[df]_ij = df_i / dy_j
      h : longitud de paso
      N : cantidad de pasos
   SALIDAS
      th: lista de tiempos para la soluci n discreta
      yh: soluci n discreta en todos los pasos de tiempo - array
          ↪  tama o m
  """
   th = np.zeros(N+1)
   yh = np.zeros((m,N+1))

   th[0] = t0
   yh[:,0] = y0[:]
   # par metros para convergencia de m todo Newton-Raphson
   imax=10;precision=1e-12
   for n in range(N):
     th[n+1] = t0 + (n+1)*h
     # declaramos los objetos tipo funci n que se requieren
         ↪ dentro de Newton-Raphson
     expresion = lambda y : y - ( yh[:,n] + h * f(th[n+1], y ) )
     jacobiano = lambda y : np.identity(m) - h * df(th[n+1], y )
     y_nuevo,EXITO = newton_raphson_sistemas(m,expresion,jacobiano
         ↪ ,imax,precision,yh[:,n])
     if EXITO==True:
       yh[:,n+1] = y_nuevo
     else:
       print('Error al calcular soluci n para el paso ',n+1)
       break
   return th,yh
```

- **Punto Medio implícito**

```
def punto_medio_explicito(m, t0, y0, f, h, N):
"""
  ENTRADAS
    m : cantidad de variables
    t0: tiempo inicial
    y0: valor inicial de las m variables
    f : funci n de tasa de cambio - entrega vector de
        ↪ longitud m
    h : longitud de paso
    N : cantidad de pasos

  SALIDAS
    t: lista de tiempos para la soluci n discreta
    yh: soluci n discreta en todos los pasos de tiempo -
        ↪ para las m variables
  """
th = np.zeros(N+1)
yh = np.zeros((m,N+1))



th[0] = t0
yh[:,0] = y0[:]



k1=np.zeros((m,))
k2=np.zeros((m,))

for n in range(N):
    th[n+1] = t0 + (n+1)*h
    k1[:] = f(th[n],yh[:,n])
    k2[:] = f((th[n] + th[n+1])/ 2, yh[:,n] + (0.5 * h * k1
        ↪ [:]))
    yh[:,n+1] = yh[:,n] +  h* k2[:]

return th, yh
```

- **Trapecio Explicito**

```
def trapecio_impl_sistema(m,t0,y0,f,df,h,N):
"""
ENTRADAS
  t0: tiempo inicial
  y0: valor inicial
  f : funci n de tasa de cambio
  df: derivada parcial de f conrespecto a y
  h : longitud de paso
  N : cantidad de pasos
SALIDAS
  th: lista de tiempos para la soluci n discreta
  yh: soluci n discreta en todos los pasos de tiempo
"""
th = np.zeros(N+1)
yh = np.zeros((m,N+1))

th[0] = t0
yh[:,0] = y0[:]
# par metros para convergencia de m todo Newton-Raphson
imax=10; precision=1e-12
for n in range(N):
  th[n+1] = t0 + (n+1)*h
  # declaramos los objetos tipo funci n que se requieren
      ↪ dentro de Newton-Raphson
  expresion = lambda y : y - (yh[:,n] + 0.5 * h * (f(th[n],
      ↪  yh[:,n]) + f(th[n+1], y )))
  jacobiano = lambda y : np.identity(m) - 0.5 * h * df(th[n
      ↪ +1], y )
  y_nuevo,EXITO = newton_raphson_sistemas(m,expresion,
      ↪ jacobiano,imax,precision,yh[:,n])
  if EXITO==True:
    yh[:,n+1] = y_nuevo
  else:
    print('Error al calcular soluci n para el paso ',n+1)
    break
return th,yh
```

Para verificar la efectividad de los métodos se propone solucionar el sistema **Tierra-Sol**, usando los valores dados por la Nasa («Earth Fact Sheet», s.f.,«Sun Fact Sheet», s.f.) :

- Masa del sol $M = 1.99 \times 10^{30}\ kg$
- Constante gravitacional $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2}$
- Distancia Tierra-sol semieje mayor $r = 149.598 \times 10^{9}\ m$

la velocidad (tangencial) inicial será calculada con la formula

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r}} \tag{8}$$

Para asegurar una trayectoria cerrada.

Así, las condiciones iniciales dadas, para el sistema Sis. son:

- $x(0) = 149.598 \times 10^{6}\ m$
- $y(0) = 0$
- $v_x(0) = 0$
- $v_y(0) = 29796.59\ m/s$

Para el cálculo del intervalo de tiempo empleado en los métodos, se tiene a consideración el cálculo del periodo orbital (Walker y Resnick, 2004)

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3 \tag{9}$$

Este sera el valor tomado como tiempo final

- $t_0 = 0\ s$
- $t_{final} = 3.167 \times 10^{7}\ s$

Ejecutando los métodos propuestos se obtuvo las trayectorias marcadas en la Fig.2. Se puede observar que tanto el método de Trapecio Explicito como el de punto medio implícito , muestran trayectorias cerradas, de forma elíptica centradas en el origen, con excentricidad cercanas a cero, lo cual corresponde muy bien a lo esperado de la orbita de la tierra al rededor del sol.
En contra parte, podemos ver que los dos métodos de Euler muestran trayectorias no cerradas, pero si cónicas. Para Euler Forward vemos una trayectoria donde la masa cae en espiral, y para Euler Backward la trayectoria de la masa es de escape de la orbita, alejándose.

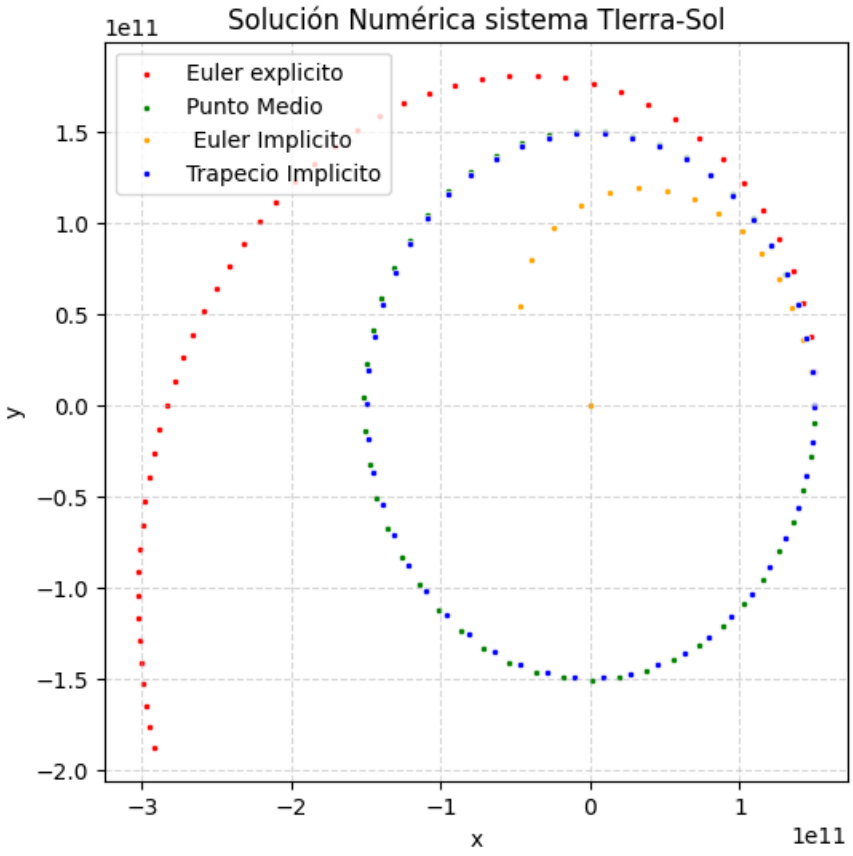



Figura 2: Trayectorias calculadas, sistema Tierra-Sol

## Análisis de error

Para el análisis del error de los métodos y a falta de datos verdaderos de la trayectoria para el sistema Tierra-Sol, se usan los datos encontrados por el método de Trapecio Explicito como los valores de la trayectoria "real".

Se calcula el error medio como la norma de la diferencia de los vectores $(x, y, V_x, V_y)$ encontrados con los métodos restantes contra el valor real, en cada tiempo $t$, y se promedian dichos valores.

Este proceso se realiza para 5 distintos anchos de paso $h$ y se obtiene la gráfica de la Fig.3, donde se puede ver que efectivamente el método de punto medio implícito converge a la solución más rápido que los métodos de Euler forward y backward, con una razón de convergencia de $\alpha \approx 6/5$ para el punto medio implícito y $\alpha \approx 1/5$ para Euler forward y backward.

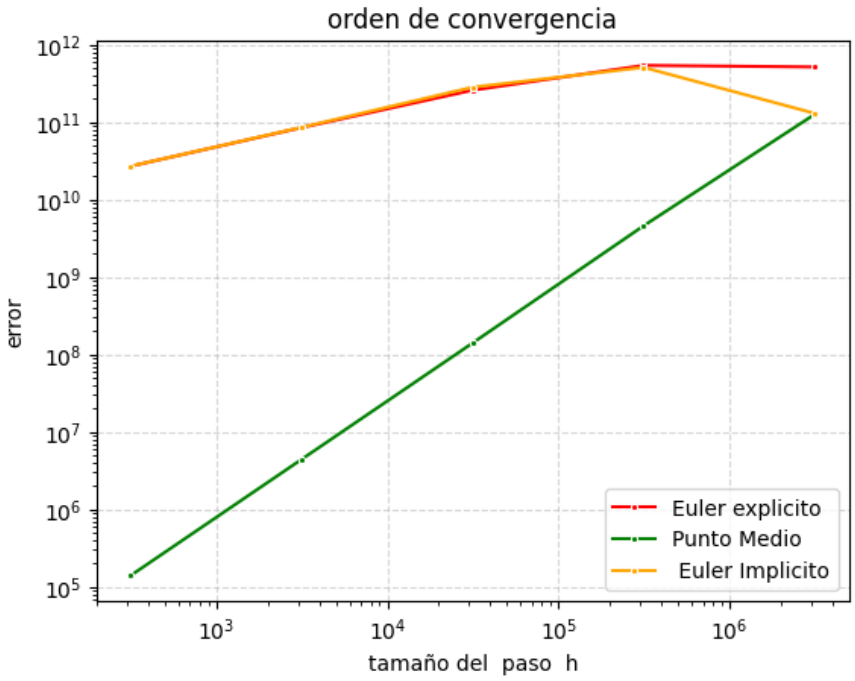


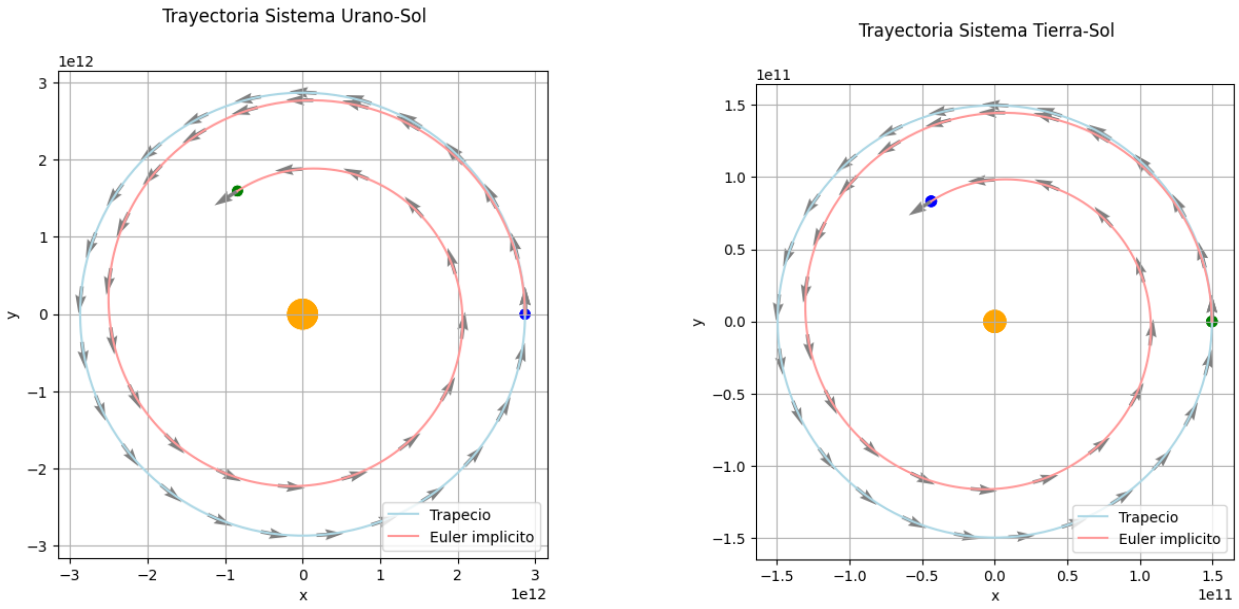

Figura 3: Error vs h, sistema Tierra -Sol

## Confirmación de resultados

Para confirmar las conclusiones obtenidas anteriormente sobre los métodos, se usan de nuevo para solucionar el mismo sistema de ecuaciones diferenciales Sis. con un conjunto diferente de condiciones iniciales. En este caso se considera el sistema **Urano-Sol** con

- $x(0) = 2867.04 \times 10^9\ m$
- $y(0) = 0$
- $v_x(0) = 0$
- $v_y(0) = 6806.32\ m/s$

Se gráfica la trayectoria calculada con Trapecio Explicito y Euler Forward, con sus vectores de velocidad en cada instante, se puede apreciar, que en los primeros pasos con la soluciones son muy cercanas, pero entre mas pasos se calculan, las soluciones empiezan a separarse. Fig.4a




(a) Trayectoria sistema Urano-Sol

(b) Trayectoria sistema Tierra-Sol

Figura 4: Comparación de trayectorias entre el mejor y peor método

En la Fig.4 Se puede ver las comparaciones entre los dos sistemas, con condiciones iniciales diferentes. Es notorio que el comportamiento de las soluciones encontradas en ambos casos son similares, por lo tanto, se confirma que las conclusiones obtenidas no dependen de las condiciones iniciales dadas al problema. En la Fig,5 podemos ver que aunque el comportamiento de las soluciones es similar la trayectorias son diferentes.

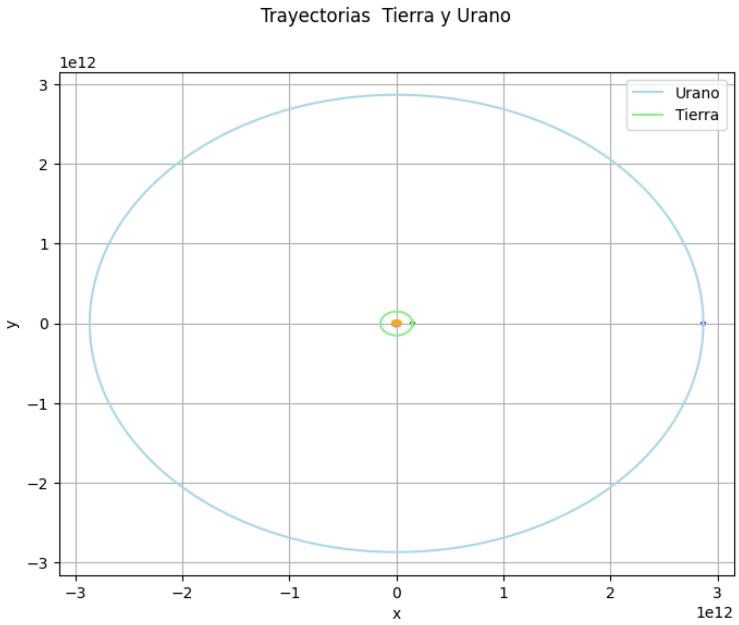



Figura 5: comparación de trayectorias Trapecio Tierra ,Urano ,Sol

# Conclusiones

- La resolución numérica del problema de los dos cuerpos utilizando los métodos de Euler backward, Euler forward, Punto medio implícito y Trapecio explícito demostró la viabilidad de estas técnicas en la mecánica celeste.
- Se determinó que el método del Trapecio explícito es el más eficaz entre los métodos evaluados, demostrando ser la opción preferida para la solución numérica de este problema específico.
- Los métodos de Euler backward y Euler forward mostraron un desempeño deficiente, con un orden de convergencia de aproximadamente 1/5, lo que los hace menos adecuados para la resolución de trayectorias cerradas.
- El método del Punto medio implícito se posicionó como el segundo mejor método, con un orden de convergencia de aproximadamente 6/5, lo que lo convierte en una opción competitiva para la resolución de trayectorias cerradas.
- La implementación de los métodos en Python para este problema requirió modificaciones para admitir sistemas de ecuaciones, lo que demuestra la flexibilidad y adaptabilidad de los métodos numéricos usados en la resolución de PVI's.
- Se observó que la elección del ancho de paso en los métodos numéricos afecta significativamente el tiempo de cálculo, con tiempos de ejecución prolongados para pasos muy pequeños.
- Los ejemplos de los sistemas Tierra-Sol y Urano-Sol fueron resueltos satisfactoriamente, lo que valida la efectividad de los métodos numéricos implementados en la reproducción de fenómenos astronómicos reales.

# Referencias

Earth Fact Sheet [Recuperado el 28 de marzo de 2024, de https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html]. (s.f.).

Méndez-Pérez, L. M., Matos, L. A., & Roca-Oria, E. J. (2014). MODELO DE LOS DOS CUERPOS: SU ROL EN EL DESARROLLO HISTÓRICO DE LA FÍSICA Y SU USO EN LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA GENERAL. *Revista Cubana de Física*, *31*(1 E), E69. http://www.revistacubanadefisica.org/RCFextradata/OldFiles/2014/Vol31-N1E/RCF-31-1E-E069.pdf

Neira Parra, N. P. (2024). Implementación del Problema de los dos cuerpos [Recuperado el 3 de abril de 2024, de https://colab.research.google.com/drive/1Xo2z-36s3bBk7Nv5hE-vmV1M2r_FEoad?usp=sharing].

Portilla B., J. G. (1996). El problema de los dos cuerpos y el problema principal de satélite artificial en ecuaciones diferenciales de primer orden. *Revista Académica de la Academia Colombiana de Ciencias*, *20*(76). https://www.accefyn.com/revista/Vol_20/76/25-32.pdf

Sun Fact Sheet [Recuperado el 4 de abril de 2024, de https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/sunfact.html]. (s.f.).

Walker, J., & Resnick, R. (2004). *Fundamentals of Physics: Chapters 1-21* (7.ª ed., Vol. 1). John Wiley & Sons.