

Técnica de Suavización de Partículas (SPH) en la simulación de una Supernova.

Nataly Phawlllyn Neira Parra , Cod: 614212782

Fundación Universitaria Konrad Lorenz

20 de enero de 2025

proyecto final, Computación científica II

Resumen

1. Introducción

La simulación de sistemas hidrodinámicos es un área fundamental en la física computacional, ya que permite estudiar el comportamiento de fluidos en diversos entornos y condiciones. Entre las técnicas más utilizadas se encuentra la *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH), un método sin malla originalmente desarrollado para fenómenos astrofísicos, pero ampliamente empleado en simulaciones de fluidos en distintas áreas de la ciencia e ingeniería. Este método resulta especialmente adecuado para problemas con grandes deformaciones o rupturas de interfaces, como en explosiones de supernovas.

Las supernovas son eventos cruciales en la evolución estelar, marcando el destino final de muchas estrellas masivas. En particular, las supernovas de tipo II ocurren en estrellas con masas de 5 a 10 masas solares, dando lugar a objetos compactos como estrellas de neutrones o agujeros negros, dependiendo de la masa remanente del núcleo ([5]). Modelar estos fenómenos involucra resolver sistemas de ecuaciones diferenciales parciales, como las ecuaciones de Navier-Stokes, que describen el movimiento de fluidos ([3]). Dado que estas ecuaciones no suelen tener soluciones analíticas para geometrías complejas, es necesario recurrir a métodos numéricos.

El método SPH es particularmente ventajoso en este contexto, ya que sigue la dinámica de partículas individuales en lugar de depender de una malla fija ([4]). Esto permite abordar problemas astrofísicos con altas complejidades geométricas y numéricas, como explosiones de supernovas, de una manera más eficiente.

En este trabajo se implementa el método SPH para simular la explosión de una estrella en una supernova, modelando la posición y velocidad de las partículas del fluido. Para ello, se resuelven las ecuaciones de Navier-Stokes en un modelo simplificado que considera interacciones gravitatorias, la ley de los gases ideales y la viscosidad. La implementación se realiza en Python, utilizando técnicas de optimización y paralelización para maximizar la eficiencia computacional.

2. Modelo matemático

La simulación de eventos dentro de la mecánica de fluidos difiere ligeramente de los eventos astronómicos, aunque ambos se describan desde la hidrodinámica. Estas diferencias afectan la implementación de las técnicas de solución. Una simulación astronómica "fiel" a la realidad debe considerar las interacciones gravitacionales (relativistas y de autogravedad), las ecuaciones de estado (entropía), el contexto de la mecánica de estado sólido, la interacción de la viscosidad, la conducción térmica, las interacciones magnéticas, la combustión nuclear, las interacciones químicas, los efectos de presión y la radiación ([3]). Sin embargo, para estudiar comportamientos específicos, podemos emplear una versión

simplificada sin perder generalidad.

En este trabajo se utiliza un modelo simplificado de una estrella donde solo se considera la interacción de autogravedad, la viscosidad y la presión. Dado que la estrella está compuesta por un fluido, se adopta la ecuación de Navier-Stokes como ecuación de gobierno (Ecu. 1):

$$m_i \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f} \quad (1)$$

Donde m_i es la masa, \mathbf{v} es la velocidad del fluido, ρ es la densidad, p es la presión, ν es la viscosidad cinemática, y \mathbf{f} representa las fuerzas externas aplicadas. Para este modelo simplificado las fuerzas externas son las de auto gravedad clásica (Ecu.2)

$$F^g = G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \vec{r}_{ij} \quad (2)$$

Donde G es la constante de gravitación universal, m_i la masa de cada partícula y r_{ij} la distancia relativa entre partículas.

Estas ecuaciones describen el movimiento de cada partícula en el fluido. Por lo tanto, se deben resolver tantas ecuaciones como partículas incluidas en la simulación. Dada la complejidad de las interacciones, se implementará un algoritmo SPH básico que incluye el cálculo de las interacciones entre partículas vecinas mediante funciones de suavizado.

2.1. Técnica de Suavización de Partículas (SPH)

Muchos artículos describen la técnica SPH como un "método de partículas lagrangiano para resolver las ecuaciones de la hidrodinámica". Sin embargo, la base teórica es más sencilla y recae en la pregunta: ¿Cómo se calcula la densidad a partir de una distribución arbitraria de partículas puntuales con masa? ([2]). Dado que buscamos la implementación para una solución numérica, esta pregunta debe responderse de forma discreta.

Consideremos un conjunto de partículas o puntos con una distribución no conocida. Para cada partícula, determinaremos un radio de acción o vecindad; las partículas dentro de dicho radio son las que se considerarán en las interacciones y, por supuesto, en el cálculo de la densidad (Fig. 1).



Figura 1: SPH radio de suavizado, imagen tomada de [?]

La densidad puede calcularse mediante la sumatoria con pesos de las partículas en la vecindad (Ecu. 3), haciendo uso de una función de distribución W i, inicialmente desconocida, con unidades de volumen inverso y dependiente de las distancias relativas con la partícula central ($|r' - r_i|$) y h el radio de la vecindad

$$\rho(r) = \sum_i m_i W(|r' - r_i|, h) \quad (3)$$

W es también llamado el kernel de SPH y se escoge de forma libre según convenga para cada problema, con la única condición de que su integral sobre todo el volumen sea igual a uno ([?]). Este

mismo kernel es usado para discretizar las derivadas necesarias. Por ejemplo, en la Ecu. 1 podemos discretizar la fuerza de presión, dada por el término:

$$\frac{-1}{\rho} \nabla P \rightarrow F^p = \sum_j m_j \left(\frac{P_i}{2\rho_i} + \frac{P_j}{2\rho_j} \right) \nabla W_{ij} \quad (4)$$

Donde ∇W_{ij} es el gradiente del kernel, P_j la presión de la partícula j y ρ_j su densidad. Recordemos que la presión de cada partícula está relacionada con su densidad por medio de la ley ideal de los gases (Ecu. 5):

$$P_i = \rho_i R T \quad (5)$$

Donde R es la constante de los gases y T la temperatura del gas.

Por otra parte, para discretizar el término relacionado con la viscosidad, tenemos:

$$\nu \nabla^2 v \rightarrow F^v = \sum_j \nu \frac{v_i - v_j}{d_{ij}^2} \quad (6)$$

Donde v_i es la velocidad de la partícula i . Así, la Ecu. 1 queda discretizada dentro de la técnica de SPH para cada partícula como:

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{F_i^p + F_i^v + F_i^g}{m_i} \quad (7)$$

El sistema de N ecuaciones diferenciales (Ecu.7), siendo N el número de partículas, es entonces el sistema que describe todo el fluido.

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Donde: $\mathbf{y} = [\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i]$ es el vector de estado que incluye las posiciones (\mathbf{r}_i) y velocidades (\mathbf{v}_i) y $\frac{\mathbf{F}_i}{m_i}$ es la aceleración, calculada como la fuerza neta dividida por la masa de la partícula.

3. Resultados

Para la simulación de la supernova tipo II se implementa en python, con la función de kernel gaussiano utilizada en el contexto SPH definida como:

$$W(r, h) = \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}h} e^{-\frac{r^2}{2h^2}} \quad (9)$$

Para visualizar mejor tras la explosión, se aplica una aceleración adicional de forma radial, descrita por:

$$\mathbf{a}_i^{\text{explosión}} = S_i \frac{\mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_i\|}$$

Donde: $\mathbf{a}_i^{\text{explosion}}$: Aceleración adicional aplicada a la partícula i , S_i : Escala de la aceleración basada en la densidad, definida como:

$$S_i = 50 \frac{\rho_i}{\rho_{\max}}$$

ρ_{\max} : Densidad máxima entre todas las partículas.

Debemos considerar el problema de valor inicial con el sistema de ecuaciones anteriormente descrito (Ecu. 8), además de los valores de las constantes físicas adecuadas. Dado que se trata de un problema a nivel astronómico, utilizaremos las unidades correspondientes.

Inicialización de Partículas en una Distribución Esférica

- Radio inicial de la estrella:

$$r_{\text{inicial}} = 1,0 \text{ UA}$$

Las posiciones iniciales de las partículas se distribuyen esféricamente siguiendo:

$$\mathbf{r}_{\text{posiciones}} \sim \mathcal{N}(0, \frac{r_{\text{inicial}}}{3})$$

Y se escala con un factor de aleatoriedad uniforme:

$$\mathbf{r}_{\text{posiciones}} \rightarrow \mathbf{r}_{\text{posiciones}} \cdot \frac{\mathcal{U}(0, r_{\text{inicial}})}{\|\mathbf{r}_{\text{posiciones}}\|}$$

Inicialización de Propiedades

- Velocidad inicial hacia el interior (en unidades UA/yr):

$$\mathbf{v}_{\text{inicial}} = -0,01 \cdot \frac{\mathbf{r}_{\text{posiciones}}}{\|\mathbf{r}_{\text{posiciones}}\|}$$

- Densidades iniciales:

$$\rho = \frac{m_{\text{partícula}}}{\frac{4}{3}\pi r_{\text{inicial}}^3}$$

- Presión inicial (por la ley ideal de los gases):

$$P = R \cdot \rho \cdot T$$

Parámetros Iniciales y Constantes

- Constante gravitacional: $G = 39,478 \frac{\text{UA}^3}{\text{M}_{\odot} \text{yr}^2}$
- Número de partículas: $N = 1000$
- Masa por partícula: $m_{\text{partícula}} = 0,01 \text{ M}_{\odot}$
- Paso de tiempo: $\Delta t = 10^{-4} \text{ yr}$
- Número de pasos: $\text{Pasos} = 10^3$
- Factor de suavizado: $\epsilon = 0,01$
- Radio del kernel: $h = 0,2$
- Constante de los gases: $R = 8,314 \times 10^{-7} \text{ mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$
- Temperatura estándar del núcleo: $T = 10^9 \text{ K}$
- Constante de viscosidad: $\nu = 0,5$

Con los parámetros de masa por partícula y numero de partículas aseguramos que la estrella tenga una masa total de $M = 10 \text{ M}_{\odot}$, el cual está dentro del rango de masa de una estrella que explota en supernova tipo II

Se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales usando el método *solve_ivp* de la librería *scipy.integrate* y se gráfica (Fig.2) su distribución tridimensional durante un intervalo de tiempo. Todas las funciones usadas en el código ([6]) estas vectorizadas y el calculo de las fuerzas por partícula se hace con programación en paralelo.

Enfocándonos en los procesos de expansión y estabilización tras la explosión, podemos ver que la explosión comienza de manera rápida, impulsando a las partículas desde el núcleo hacia las capas externas en un movimiento predominantemente radial. Durante esta fase inicial, las partículas aceleran

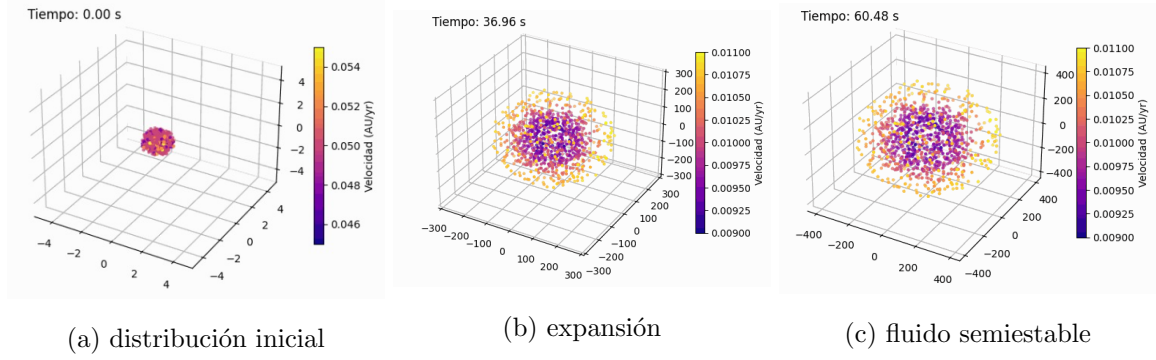


Figura 2: Soluciones numéricas en diferentes estados de la explosión de la supernova tipo II.

significativamente, lo que indica que las fuerzas internas generadas por la explosión son más intensas en el núcleo, trasladándose hacia las capas más externas.

con respecto a el radio de la explosión, se evidencia un crecimiento rápido y sustancial muestra que las partículas son impulsadas a distancias considerablemente mayores, dejando el centro de la nube estelar casi vacío. el radio inicial de la estrella era de 1 UA, mientras que, al estabilizarse, el sistema alcanza un radio final de aproximadamente 400 UA. Esto es coherente con el colapso gravitacional inicial y la posterior redistribución de la materia.

Acerca de los tiempos de la explosión, la nube se estabiliza en un tiempo aproximado de 50 segundos desde el inicio de la explosión, lo que refleja una fase transitoria breve antes de alcanzar el equilibrio dinámico.

Por otra parte, no se evidenciaron ondas de choque significativas ni deformaciones en la distribución de las partículas. Esto sugiere que las fuerzas de presión y viscosidad durante la explosión fueron simétricas.

4. Conclusiones

- La expansión radial es un indicador de una explosión simétrica, donde las fuerzas generadas actúan de manera uniforme en todas las direcciones. Esto se debe a las condiciones iniciales de la simulación, como la distribución esférica de las partículas y las propiedades homogéneas del núcleo.
- El tiempo de estabilización, de aproximadamente 50 segundos, muestra que el sistema transita rápidamente desde la explosión inicial hasta una configuración estable. Esto es consistente con supernovas masivas donde las fuerzas gravitacionales y de presión rápidamente equilibran el sistema.
- La expansión hacia las capas externas y el vacío central sugieren que la materia se redistribuye eficazmente durante la explosión. Esto coincide con observaciones teóricas donde la energía liberada impulsa a las partículas a alejarse del núcleo, dejando una densidad más baja en el centro.
- La simulación carece de ciertos elementos que podrían proporcionar una visión más completa, como las ondas de choque, que se deben a la simplificación del modelo.
- La implementación simplificada de la técnica SPH muestra resultados acordes con las observaciones de las supernovas tipo II, sin embargo, el tiempo de ejecución del algoritmo es mayor de lo esperado, por lo tanto, el código puede ser mejor optimizado.

Referencias

- [1] Gingold, R. A., & Monaghan, J. J. (1977). Smoothed particle hydrodynamics: Theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181(3), 375–389. <https://doi.org/10.1093/mnras/181.3.375>
- [2] Price, D. J. (2012). Smoothed particle hydrodynamics and magnetohydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 231(3), 759–794. <https://arxiv.org/abs/1012.1885>
- [3] Rosswog, S. (2009). Astrophysical smooth particle hydrodynamics. *New Astronomy Reviews*, 53(4–6), 78–104. <https://arxiv.org/abs/0903.5075>
- [4] Springel, V. (2010). E pur si muove: Galilean-invariant cosmological hydrodynamical simulations on a moving mesh. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 401(2), 791–851. <https://arxiv.org/abs/0901.4107>
- [5] Redacción National Geographic. (2022). Nova y supernova: ¿Cómo mueren las estrellas? *National Geographic*. Recuperado de <https://www.nationalgeographicla.com/espacio/2022/10/nova-y-supernova-como-mueren-las-estrellas>
- [6] Código de implementación SPH para supernovas tipo II https://colab.research.google.com/drive/12oAKjyE_KR1bHPere6F0bfK0VN2Z4ceH?usp=sharing