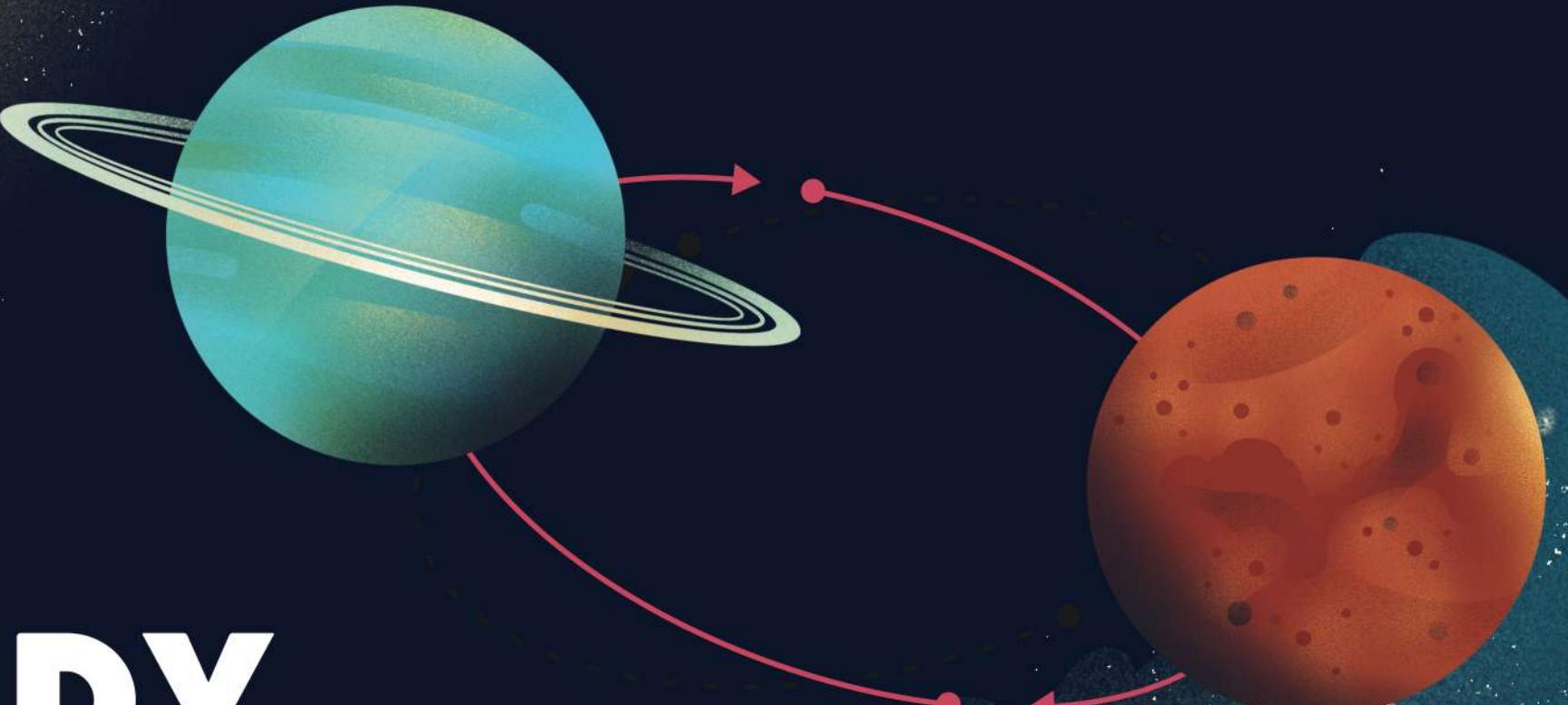
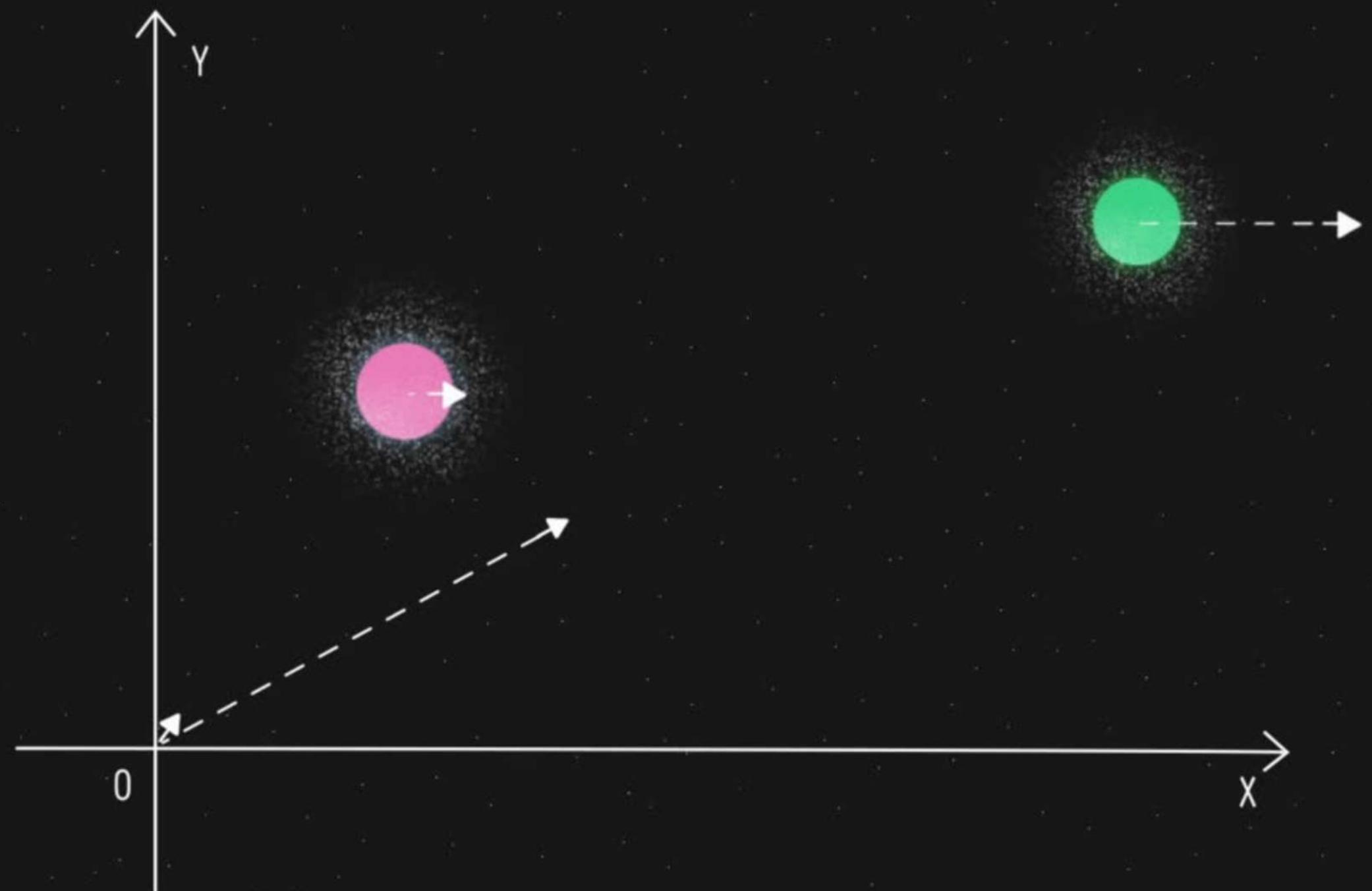


# ON THE TWO-BODY PROBLEM WITH SLOWLY DECREASING MASS

Proyecto computacion científica I  
2024-I

Nataly Phawllyn Neira Parra cod 614212782





[https://drive.google.com/file/d/1IQsUlnMWm\\_MZA8kAZSt4OMcebVPNrSsK/view?usp=sharing](https://drive.google.com/file/d/1IQsUlnMWm_MZA8kAZSt4OMcebVPNrSsK/view?usp=sharing)

Pacucci, F. (2020, agosto 9). Fabio Pacucci: La explicación del problema de los tres cuerpos de Newton - Fabio Pacucci. TED-Ed



M>>m, problema de un  
cuerpo

m<sub>1</sub>,m<sub>2</sub> problema de los  
2 cuerpos

{ masa constante  
masa variable

{ planteamiento de las  
ecuaciones  
solución numérica

# ABSTRACT

Scopus

1997

Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy

Prieto, Cristina M.

Docobo, José Angel D.

Dpto. Matemática Aplicada, Universidade de Vigo, Spain  
 b Observatorio Astronómico "Ramón María Aller", Spain  
 c Universidade de Santiago de Compostela, Spain

$$\dot{m} = -\alpha m^n$$

**Primer caso integrable  
de Mestschersky**  
**n=2**

creasing Mass      1 / 10 | - 90% + ☰

**ON THE TWO-BODY PROBLEM WITH SLOWLY DECREASING MASS**

C. PRIETO<sup>1</sup> AND J. A. DOCODO<sup>2</sup>  
*Observatorio Astronómico "Ramón María Aller"  
 P.O. Box 197; Universidad de Santiago de Compostela, Spain*  
<sup>1</sup>*Dpto. Matemática Aplicada. Universidad de Vigo, Spain.*  
<sup>2</sup>*Dpto. Matemática Aplicada. Universidad de Santiago. Spain.*

**Abstract.** We intend to present two approximate analytic solutions of the two-body problem with slowly decreasing mass which are obtained through the integration of the Hamilton equations.  
 The law of mass variation used was  $\dot{m} = -\alpha m^n$  on the first case, and  $\dot{m}_i = \alpha_i m_i^{n(i)}$ ;  $i = 1, 2$  on the second which gives rise to a perturbed Keplerian problem dependent on one and two small parameters respectively.  
 Practical applications are included.

**Key words:** Mass Loss, Celestial Mechanics

**1. INTRODUCTION**

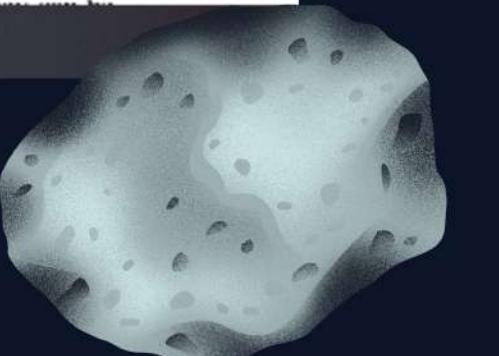
During the second half of the 19th century, M. Ch. Dufour (Dufour, 1866) and Th. V. Oppolzer (Oppolzer, 1884) were the first to examine the astronomical phenomenon of variable mass, more specifically in relation to the Earth-Moon system altered by an increase in mass due to the impact of meteorites.  
 Oppolzer's paper inspired H. Gylden (Gylden 1884) to search for the solution of the system of differential equations which describes the two-body motion when the masses are subject to variations by a known function of time.  
 In 1893 F. Mestschersky (Mestschersky 1893, 1902, 1949) was the first to point out a specific case of this problem which is integrable taking into consideration a law of mass variation

$$\mu(t) = \frac{1}{a + \alpha t}$$

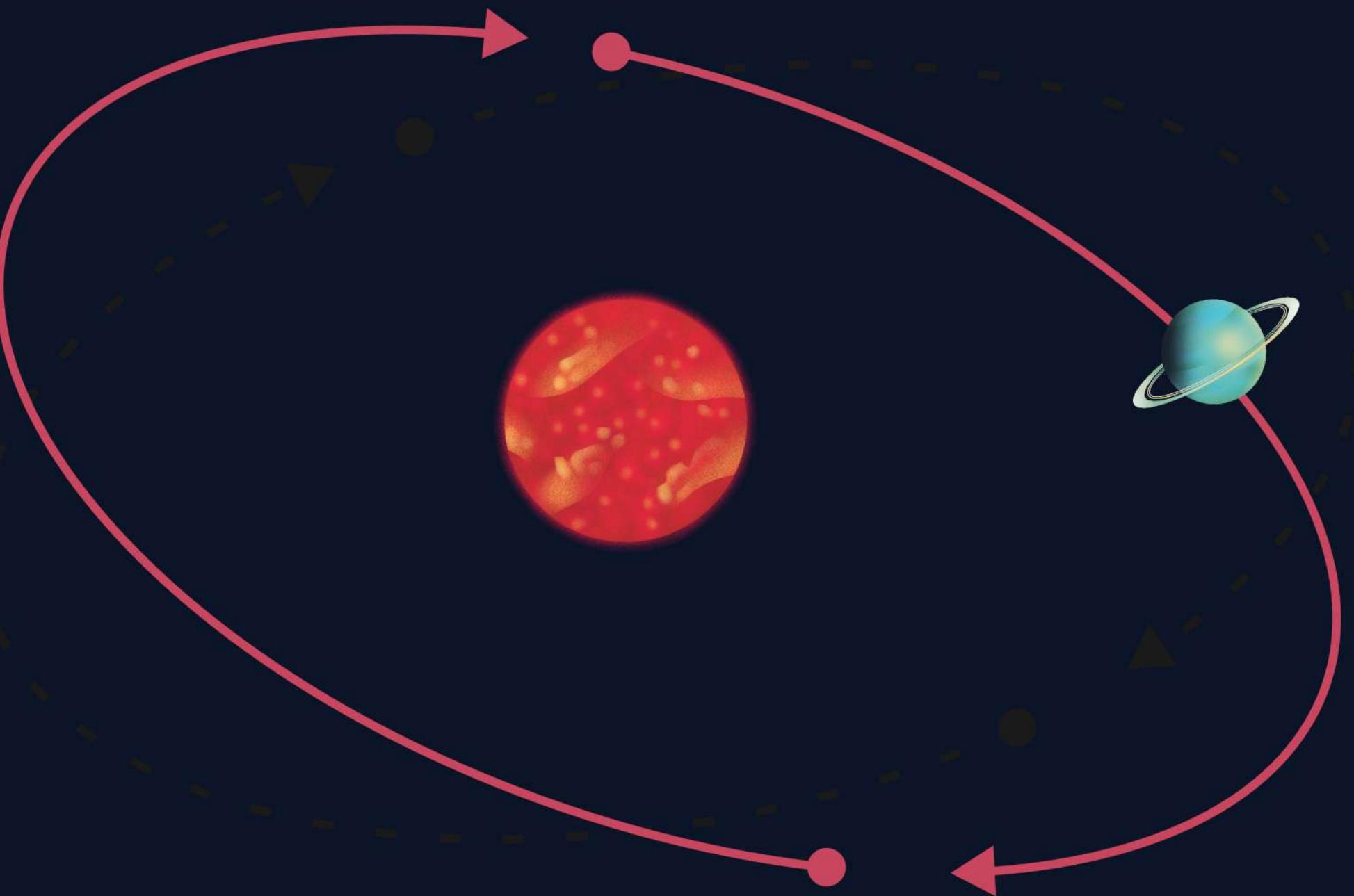
where  $a$  and  $\alpha$  are constants, and the transformation of coordinates

$$\xi = \frac{x}{a + \alpha t}; \quad \eta = \frac{y}{a + \alpha t}; \quad \tau = \frac{-1}{a(a + \alpha t)} \quad (1)$$

It is of vital importance to have this exact solution available when studying the



# PROBLEMA DE 1 CUERPO

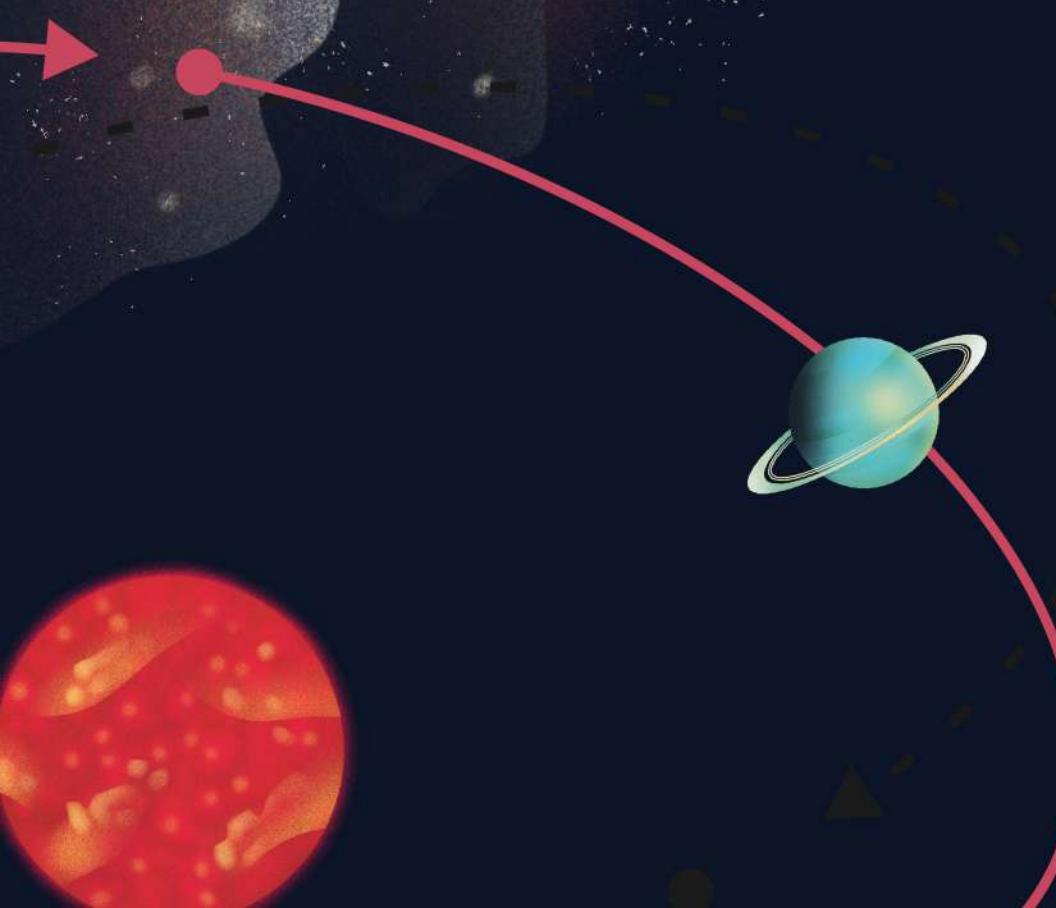


# PROBLEMA DE 1 CUERPO

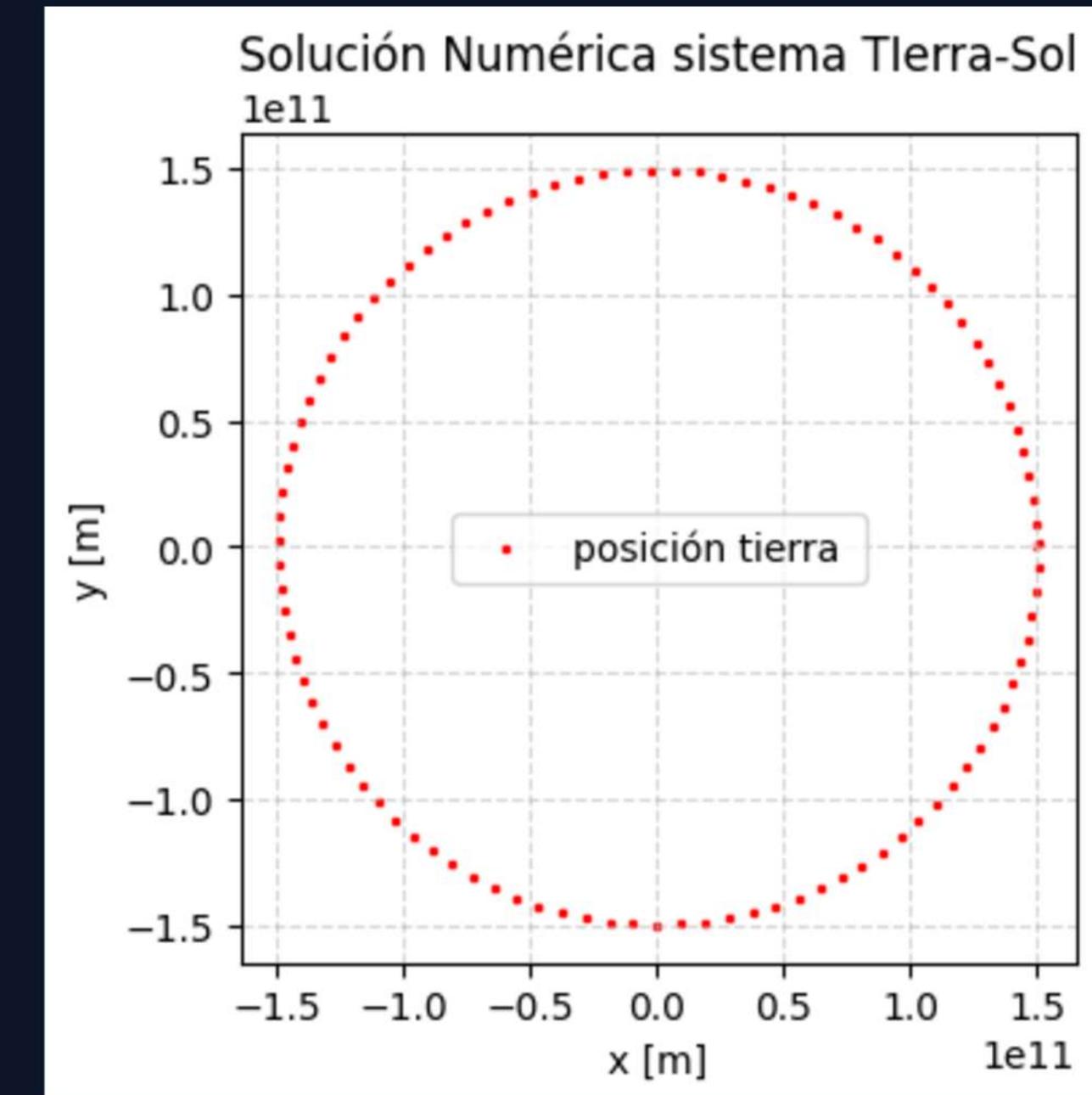
$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt}$$

masa  
constante

$$ma = F$$



$$\begin{cases} \dot{x} = V_x \\ \dot{y} = V_y \\ \dot{V}_x = -\frac{GM}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}x \\ \dot{V}_y = -\frac{GM}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}y \end{cases}$$



# PROBLEMA DE 1 CUERPO

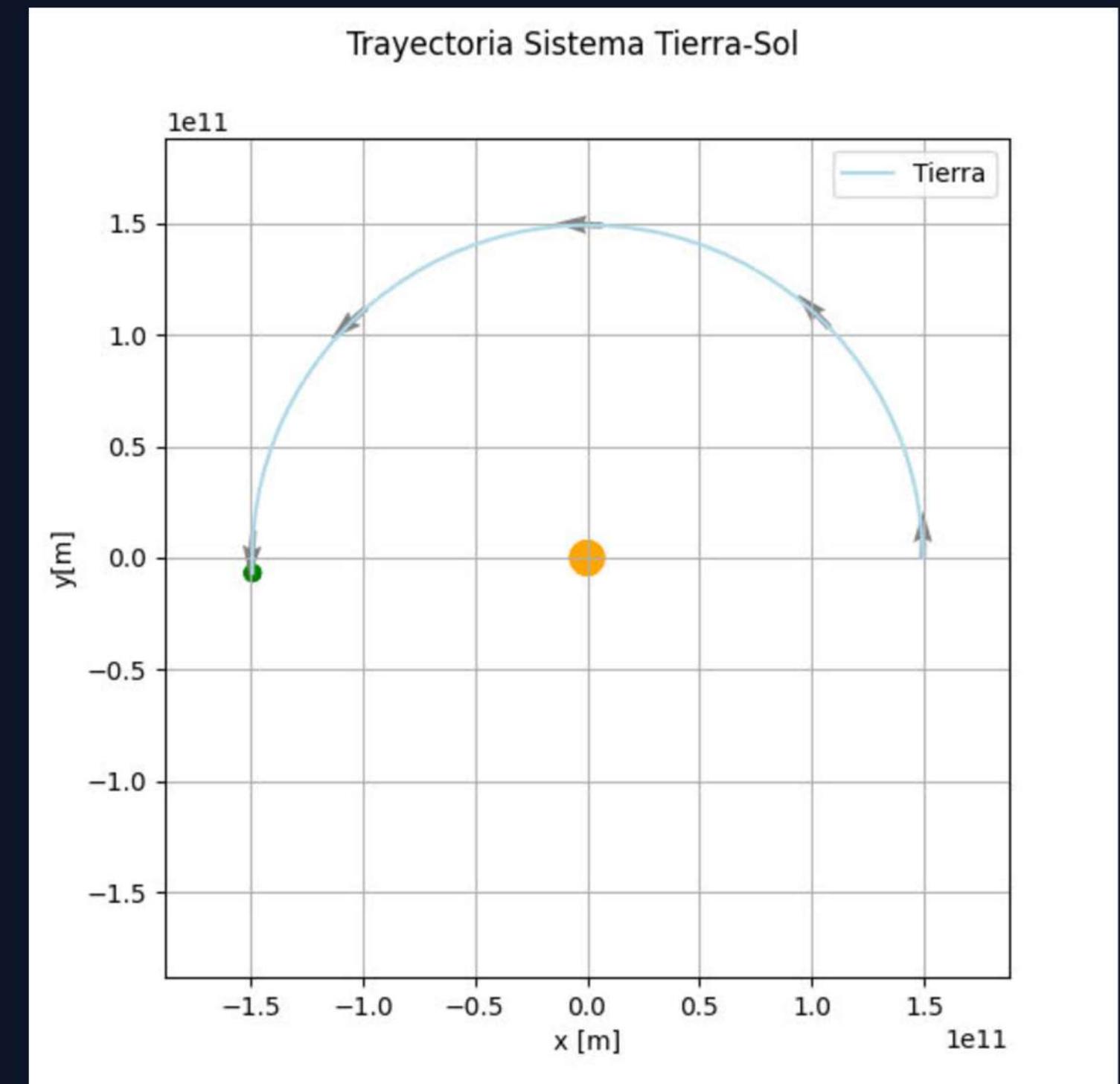
masa constante

- Masa del sol  $M = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$
- Constante gravitacional  $G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$  [1]
- Distancia Tierra-sol semieje mayor  $r = 149.598 \times 10^9 \text{ m}$



- $x(0) = 149.598 \times 10^6 \text{ m}$
- $y(0) = 0$
- $v_x(0) = 0$
- $v_y(0) = 29796.59 \text{ m/s}$

- $t_0 = 0 \text{ s}$
- $t_{final} = 3.167 \times 10^7 \text{ s}$

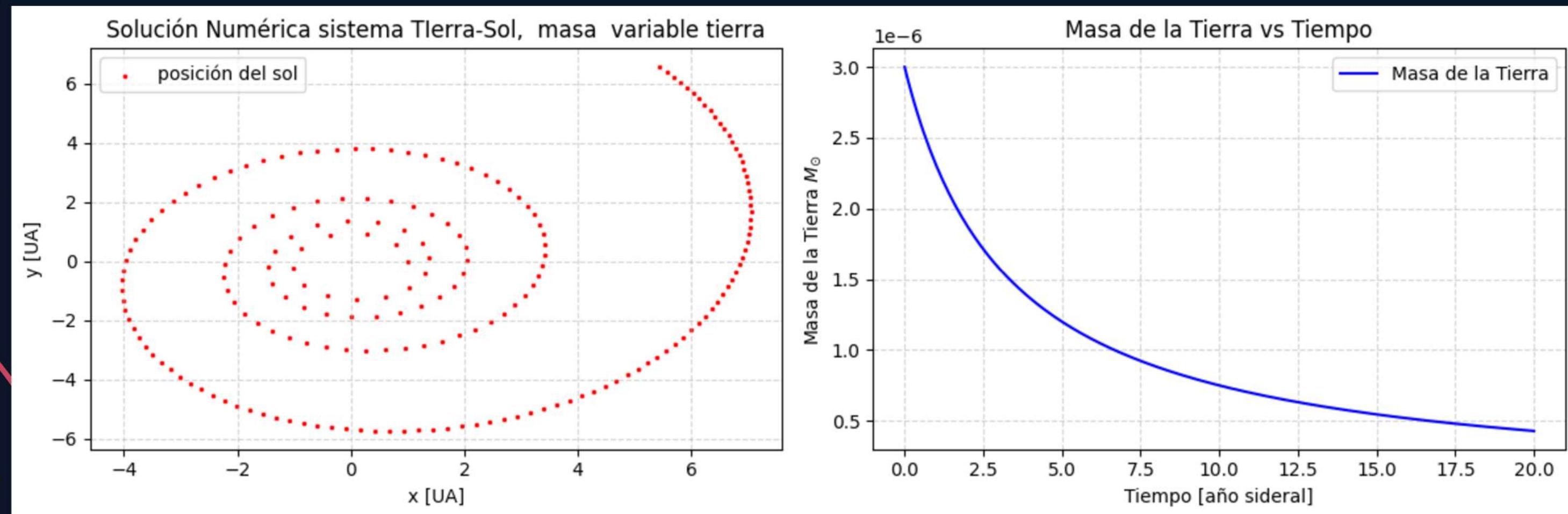


# PROBLEMA DE 1 CUERPO

masa variable en m

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = \dot{m}v + ma = F$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = V_x \\ \dot{y} = V_y \\ \dot{V}_x = -\frac{GM}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}x - (\alpha m)V_x \\ \dot{V}_y = -\frac{GM}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}y - (\alpha m)V_y \\ \dot{m} = \alpha m^2 \end{array} \right.$$



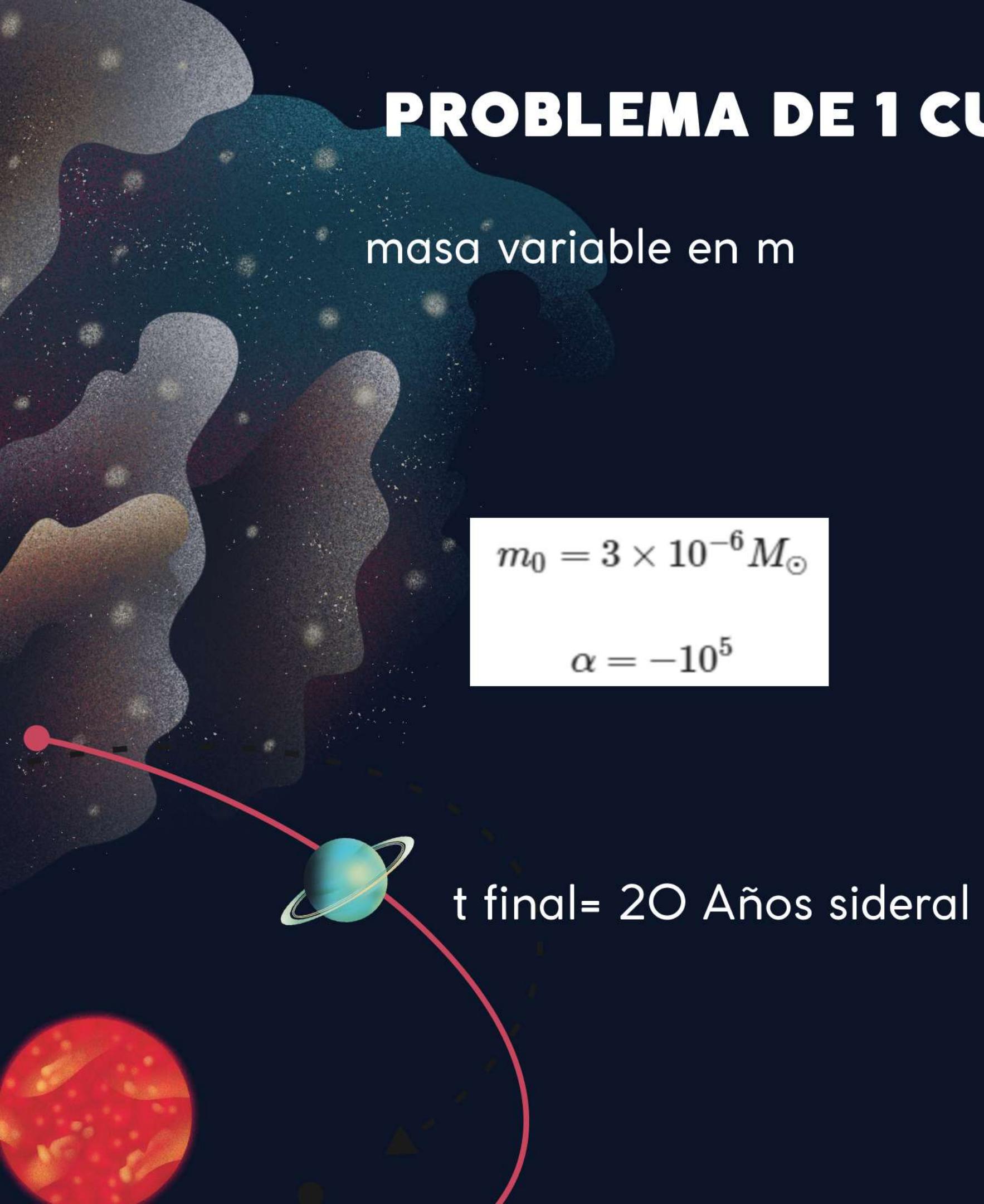
# PROBLEMA DE 1 CUERPO

masa variable en m

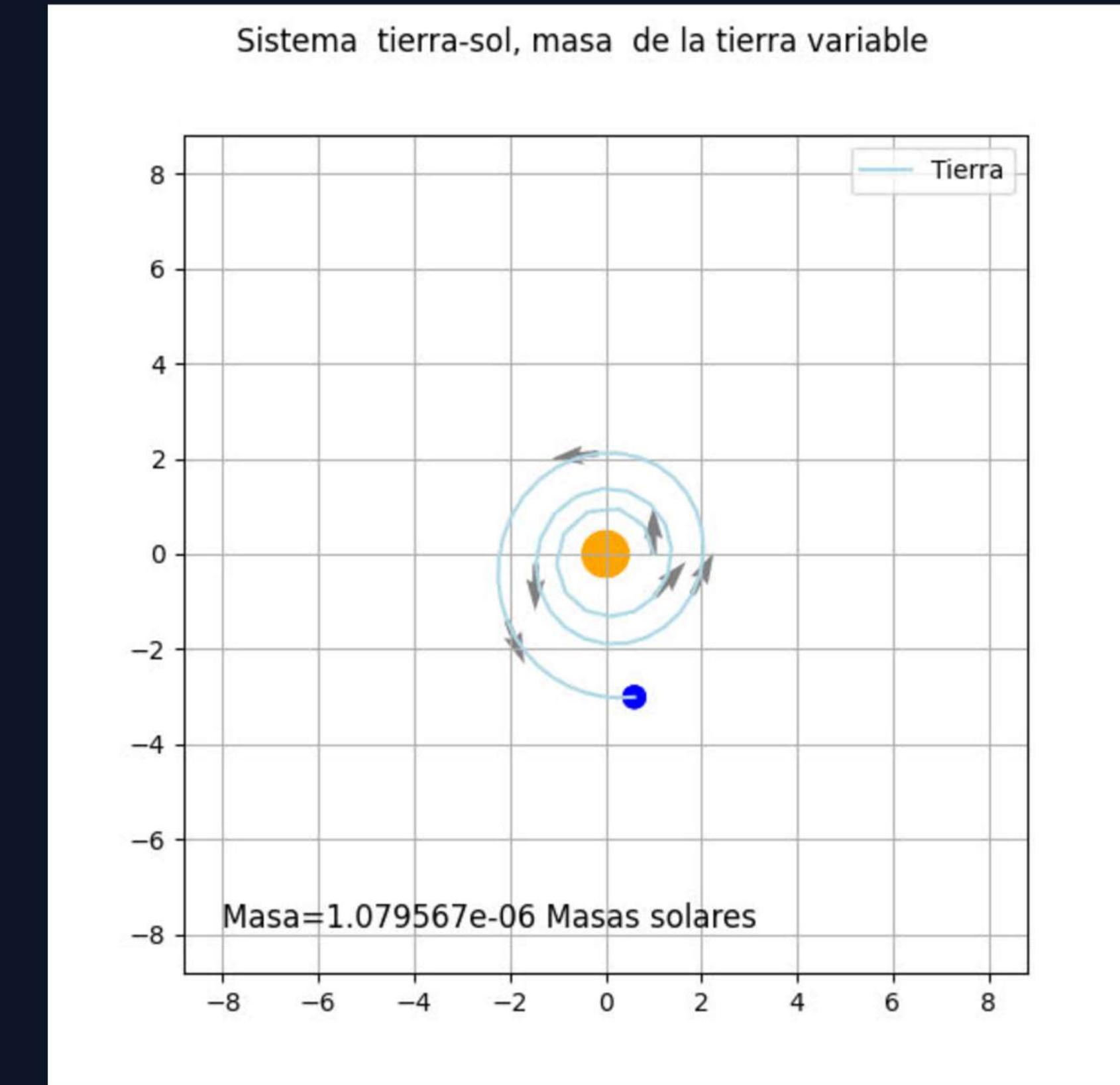
$$m_0 = 3 \times 10^{-6} M_{\odot}$$

$$\alpha = -10^5$$

t final= 20 Años sideral



Sistema tierra-sol, masa de la tierra variable



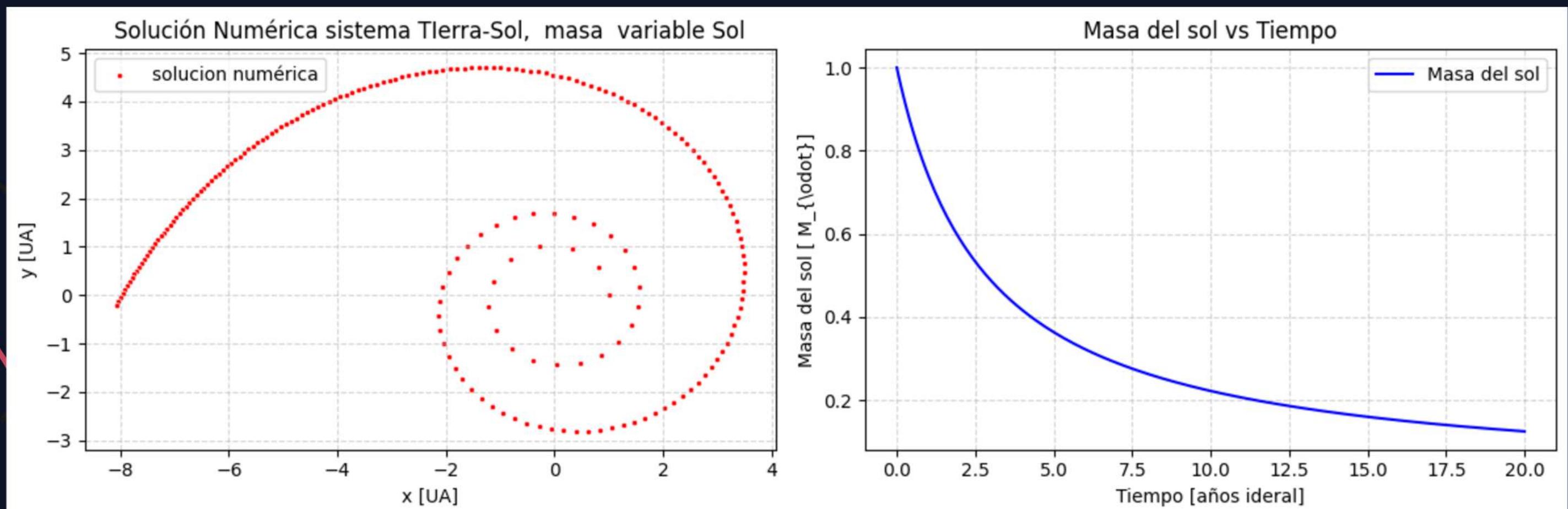
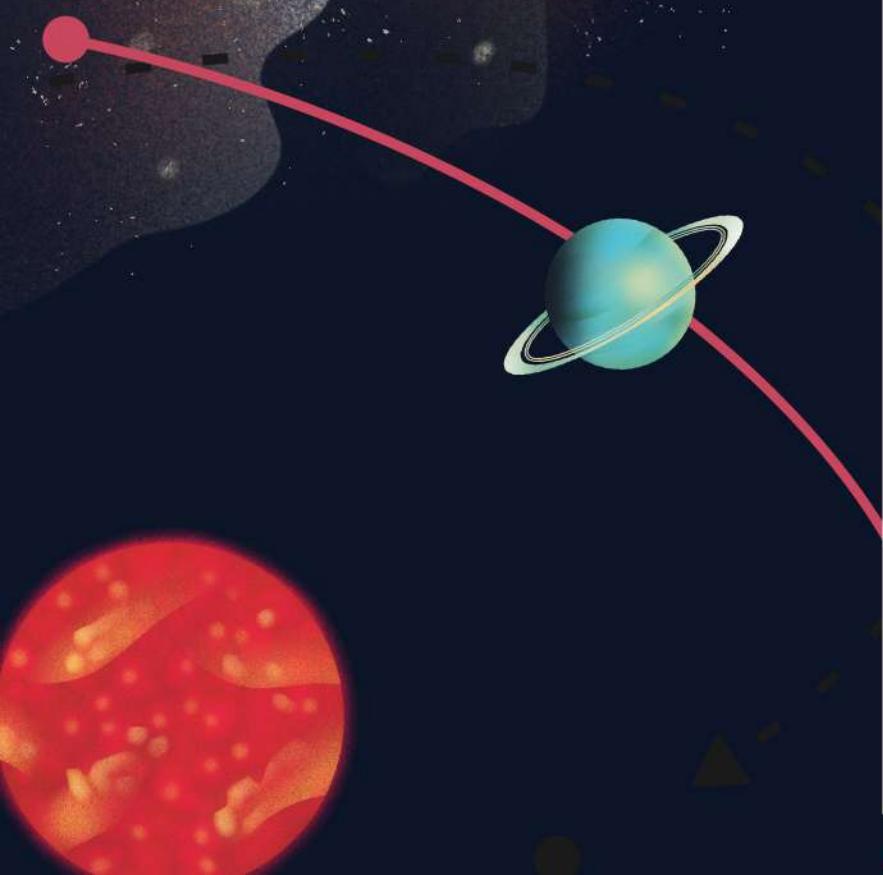
# PROBLEMA DE 1 CUERPO

masa variable en M

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt}$$

$$ma = F$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = V_x \\ \dot{y} = V_y \\ \dot{V}_x = -\frac{GM}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}x \\ \dot{V}_y = -\frac{GM}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}y \\ \dot{M} = \alpha M^2 \end{array} \right.$$



# PROBLEMA DE 1 CUERPO

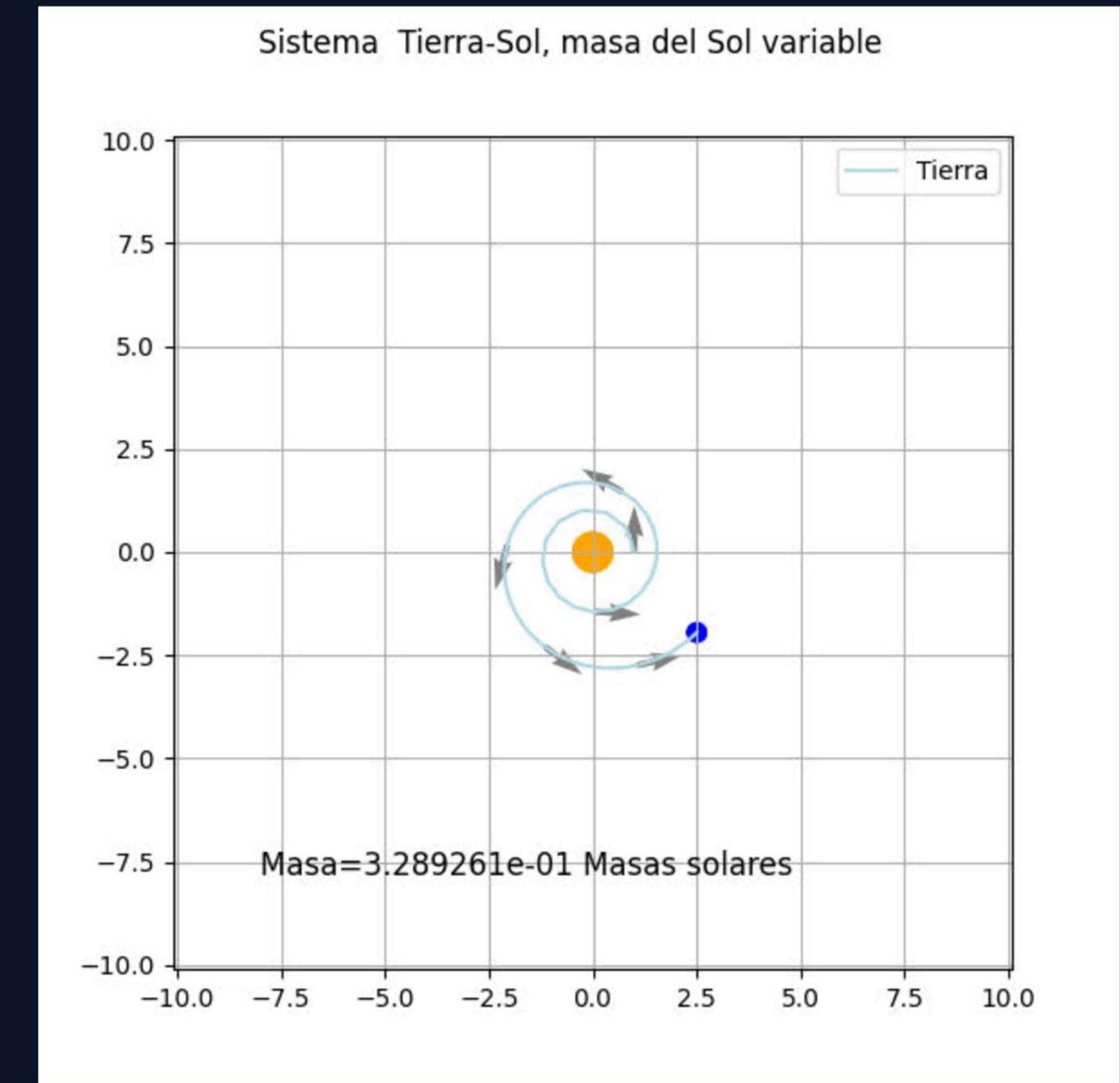
masa variable en M

$$M_0 = 1M_{\odot}$$

$$\alpha = -0.35$$

$$\alpha = 0.35 \times 10^{-14} \odot / u.t.$$

t final= 20 Años sideral



# COMPARACIÓN

## Artículo

con perdida de masa

$$\alpha = 0.35 \times 10^{-14} \odot / u.t.$$

tiempo final

SOL-TIERRA 100.000 años

## Condiciones iniciales

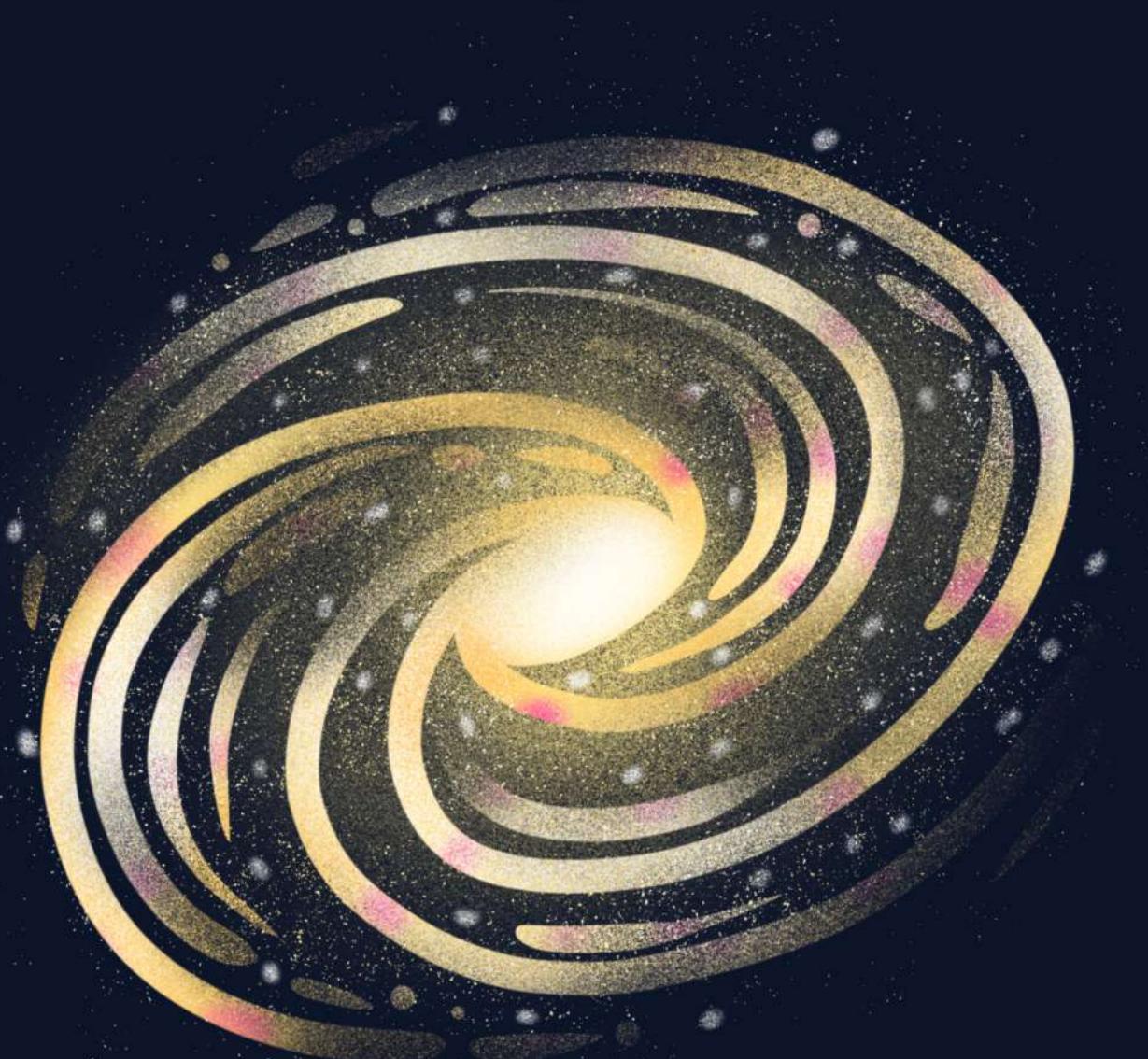
Triangulación de Delaunay

## Método

Runge-Kutta 8°orden

## Resultados

orbitas elípticas de baja excentricidad, en periodos cortos de tiempo , comportamiento espiral en tiempos grandes



## Presente trabajo

con perdida de masa

$$\alpha = 0.35$$

tiempo final

SOL-TIERRA 20 años

## Condiciones iniciales

Cartesianas- orbita bidimensional

## Método

LSODA  
solve\_ivp libreria  
scipy.integrate

## Resultados

orbitas elípticas de baja excentricidad, en periodos cortos de tiempo , comportamiento espiral en tiempos grandes

# PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS

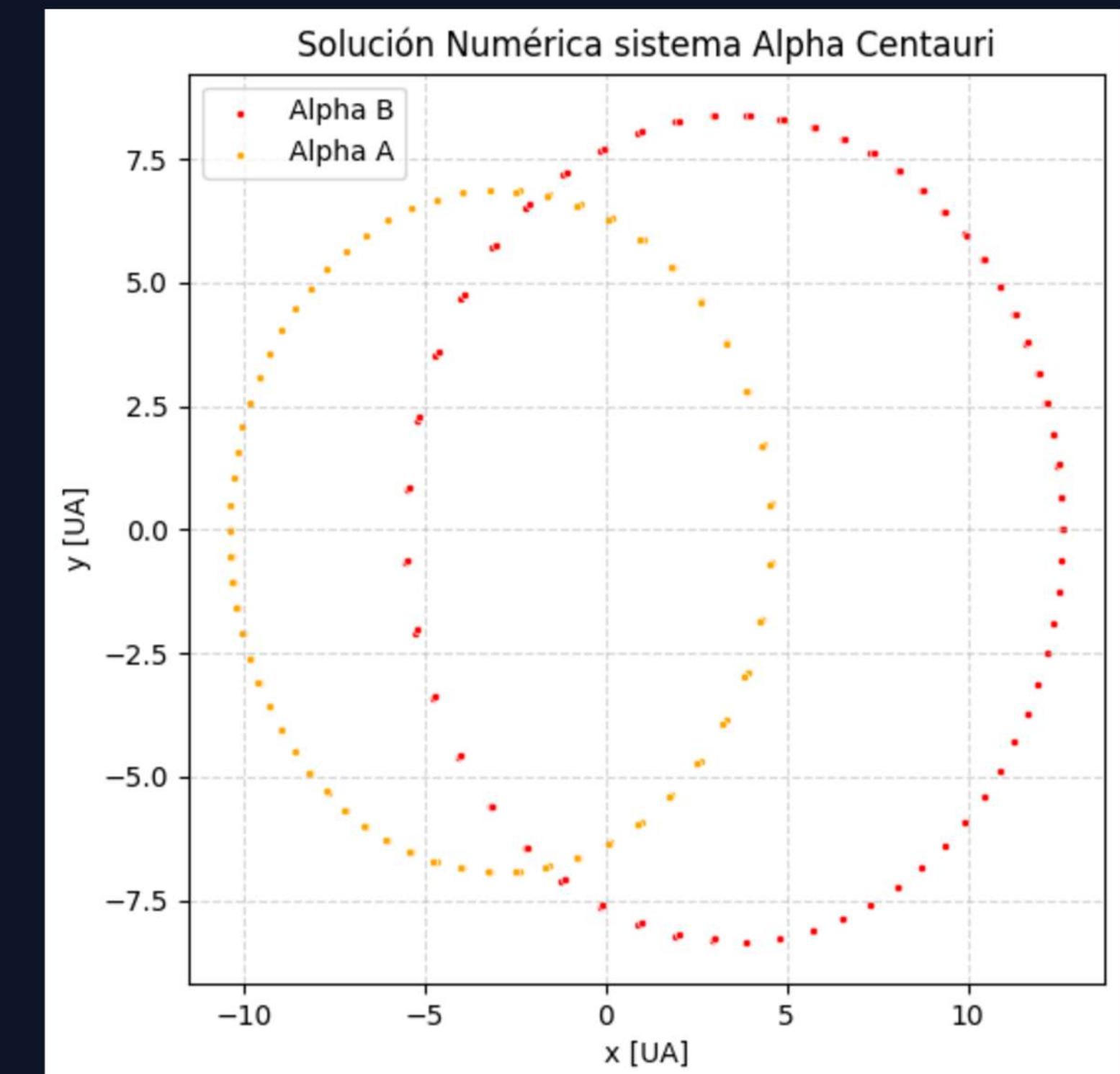


# PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS

masa constante

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V_x \\ \dot{y} &= V_y \\ \dot{V}_x &= -\frac{G(m_2^3)x_1}{(m_1 + m_2)^2(x_1^2 + y_1^2)^{3/2}} \\ \dot{V}_y &= -\frac{G(m_2^3)y_1}{(m_1 + m_2)^2(x_1^2 + y_1^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r_2 &= -\frac{m_1}{m_2}r_1 \\ V_2 &= -\frac{m_1}{m_2}V_1\end{aligned}$$

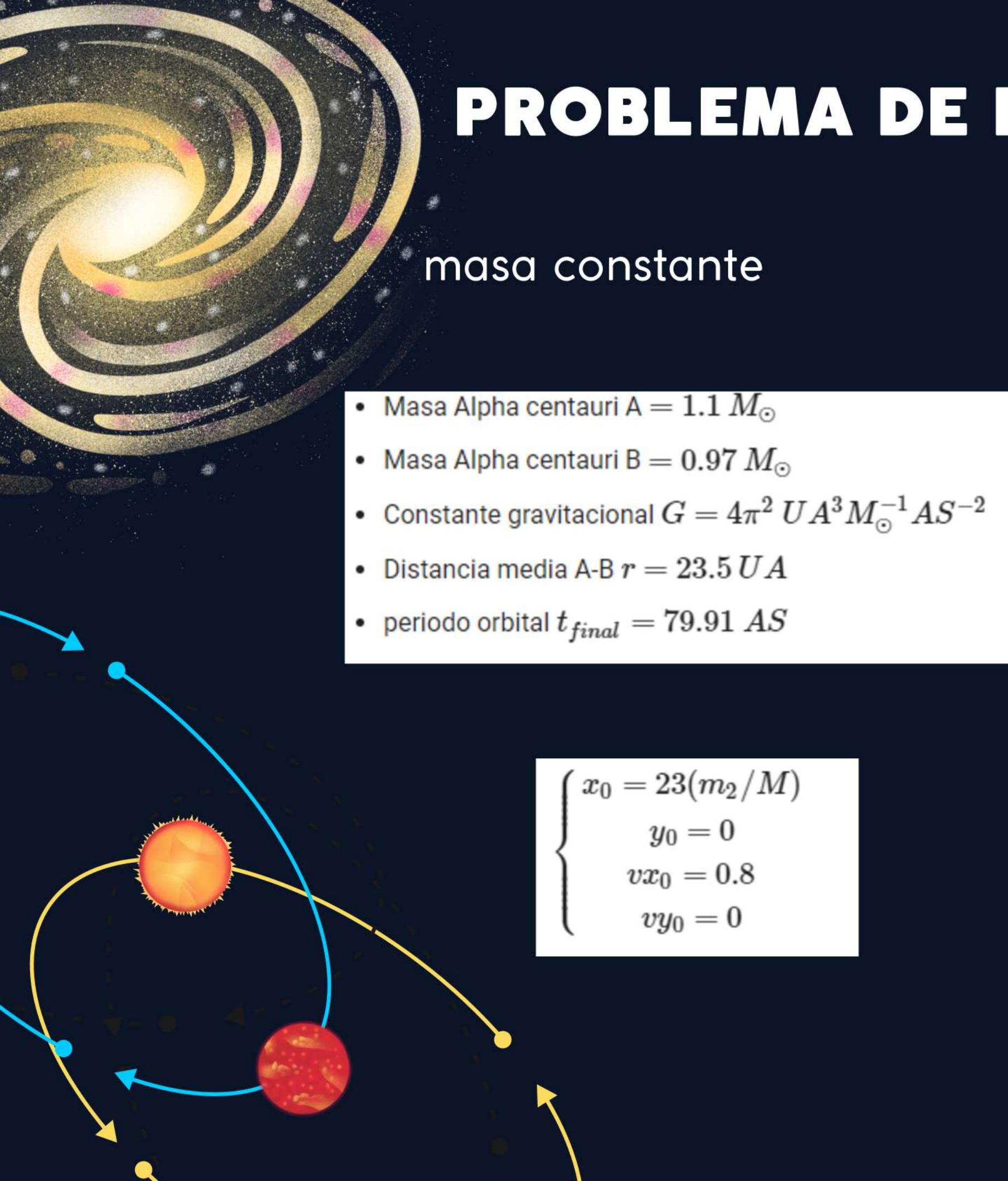


# PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS

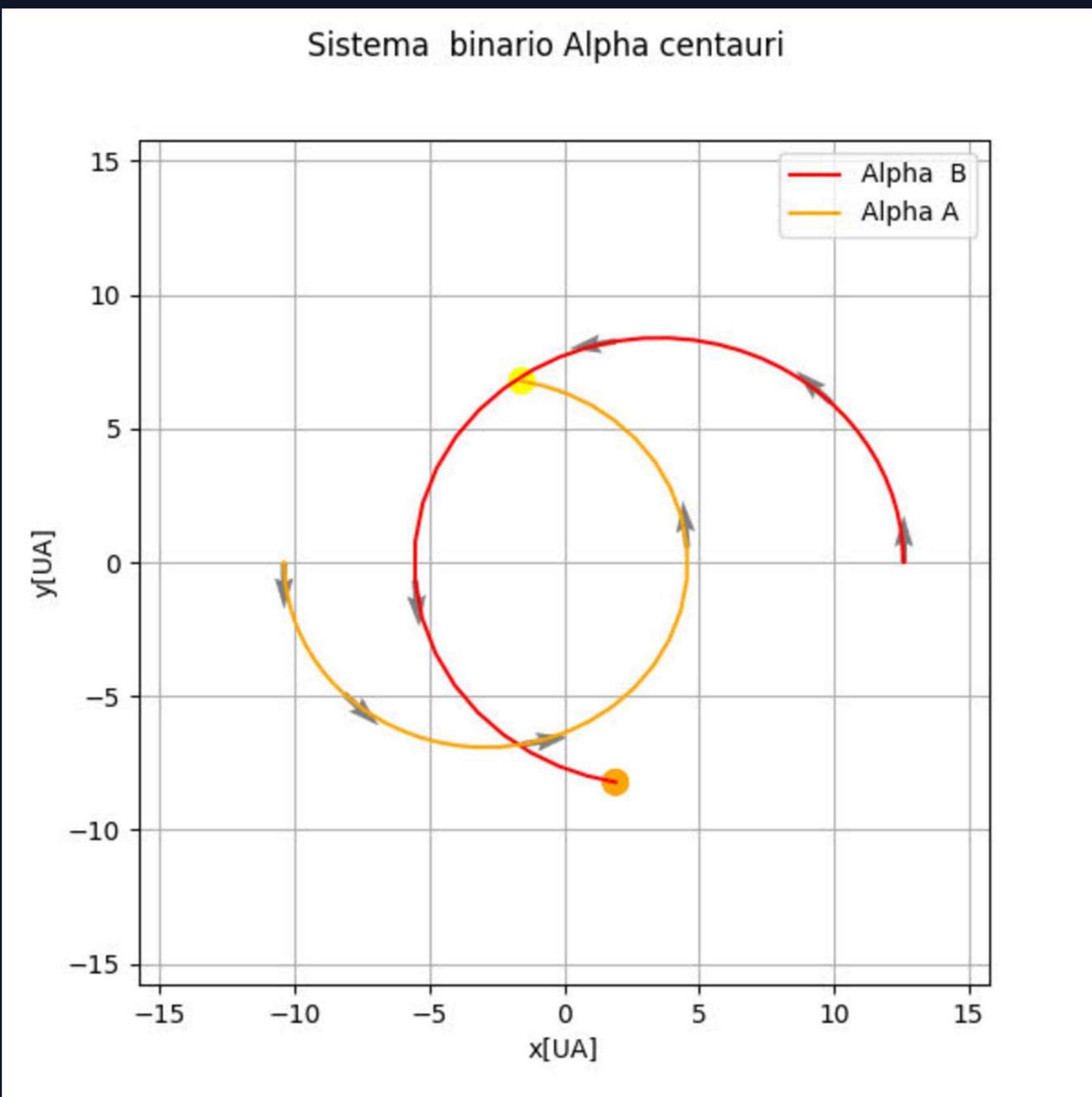
masa constante

- Masa Alpha centauri A =  $1.1 M_{\odot}$
- Masa Alpha centauri B =  $0.97 M_{\odot}$
- Constante gravitacional  $G = 4\pi^2 UA^3 M_{\odot}^{-1} AS^{-2}$
- Distancia media A-B  $r = 23.5 UA$
- periodo orbital  $t_{final} = 79.91 AS$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = 23(m_2/M) \\ y_0 = 0 \\ vx_0 = 0.8 \\ vy_0 = 0 \end{array} \right.$$



Sistema binario Alpha centauri

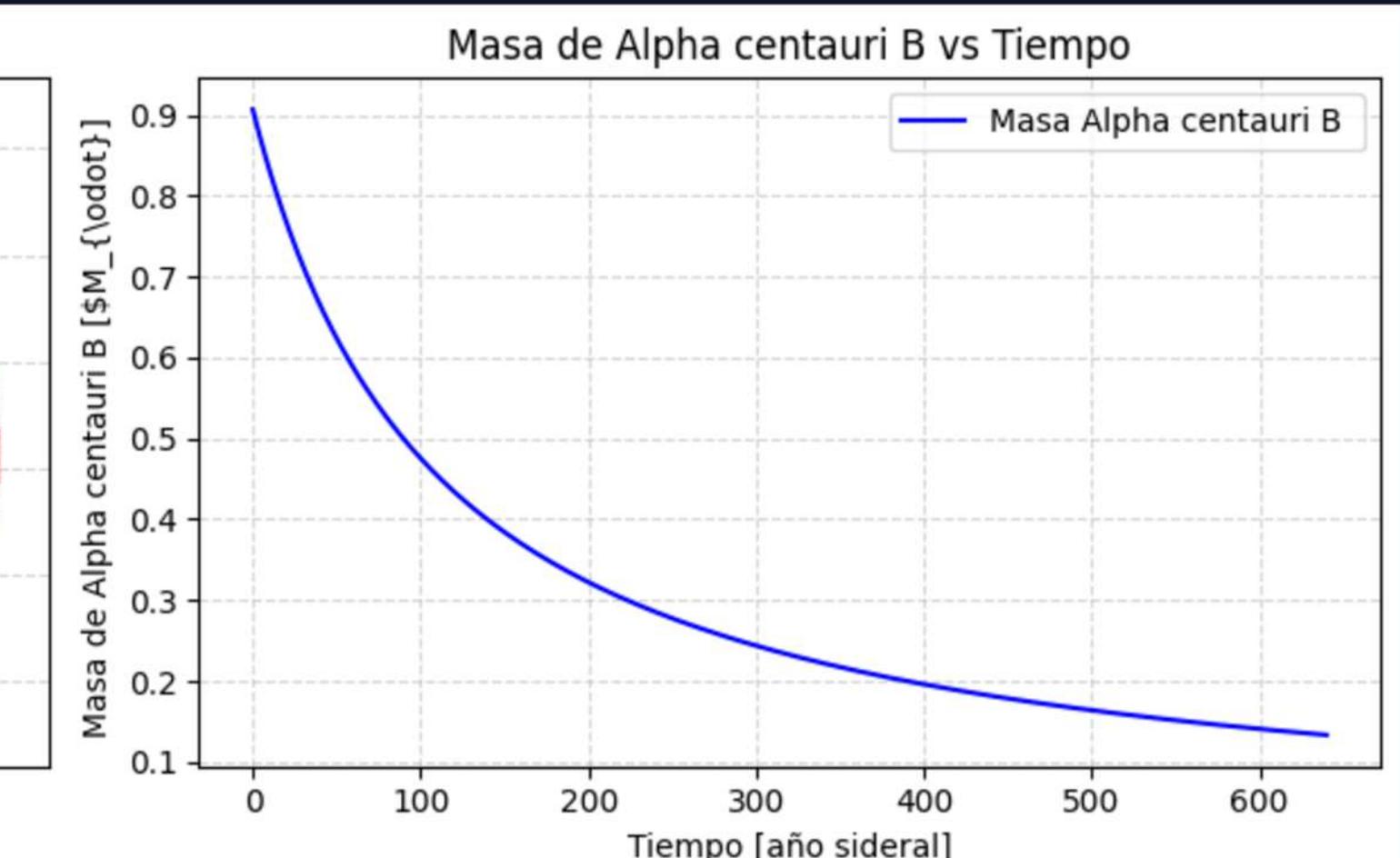
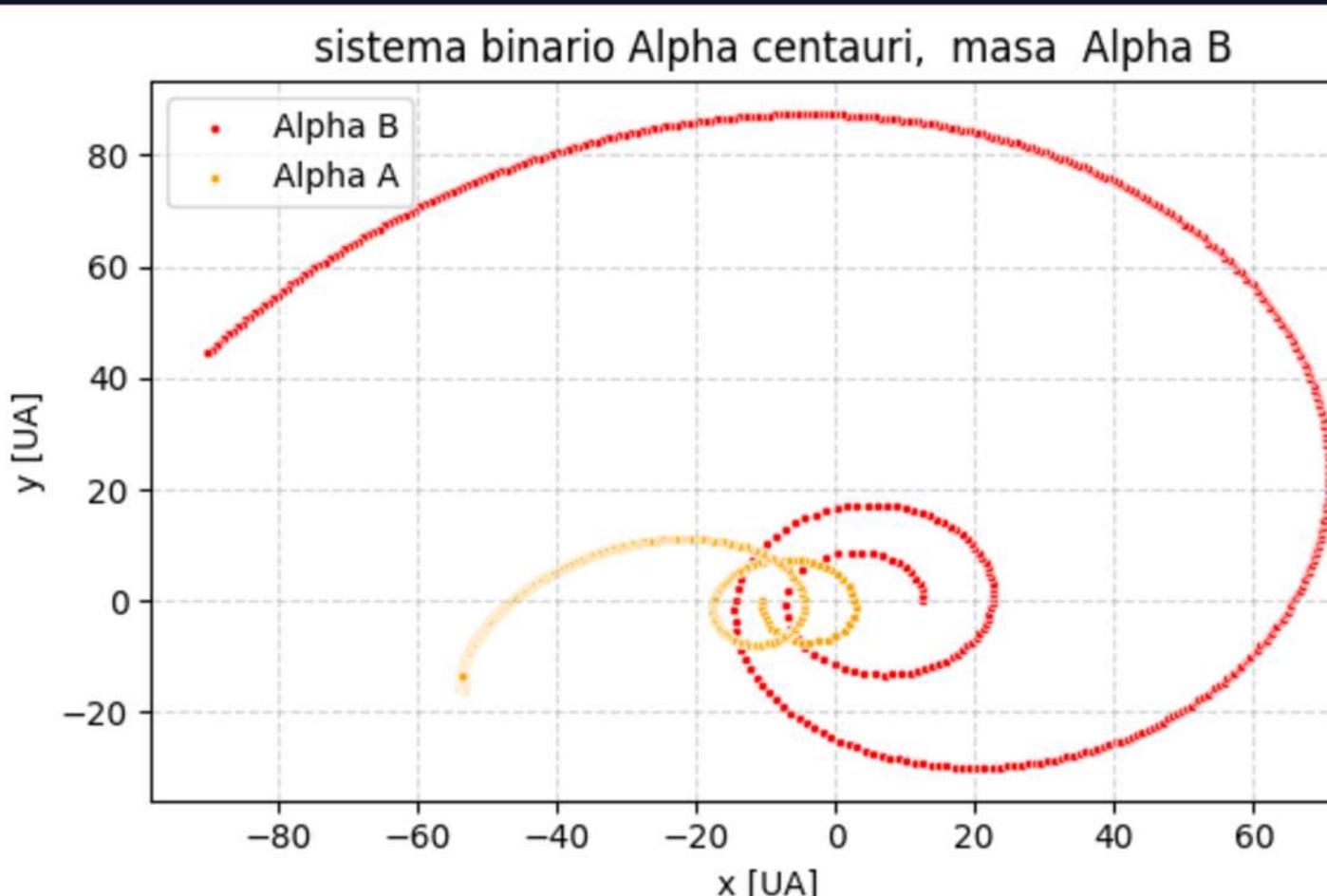
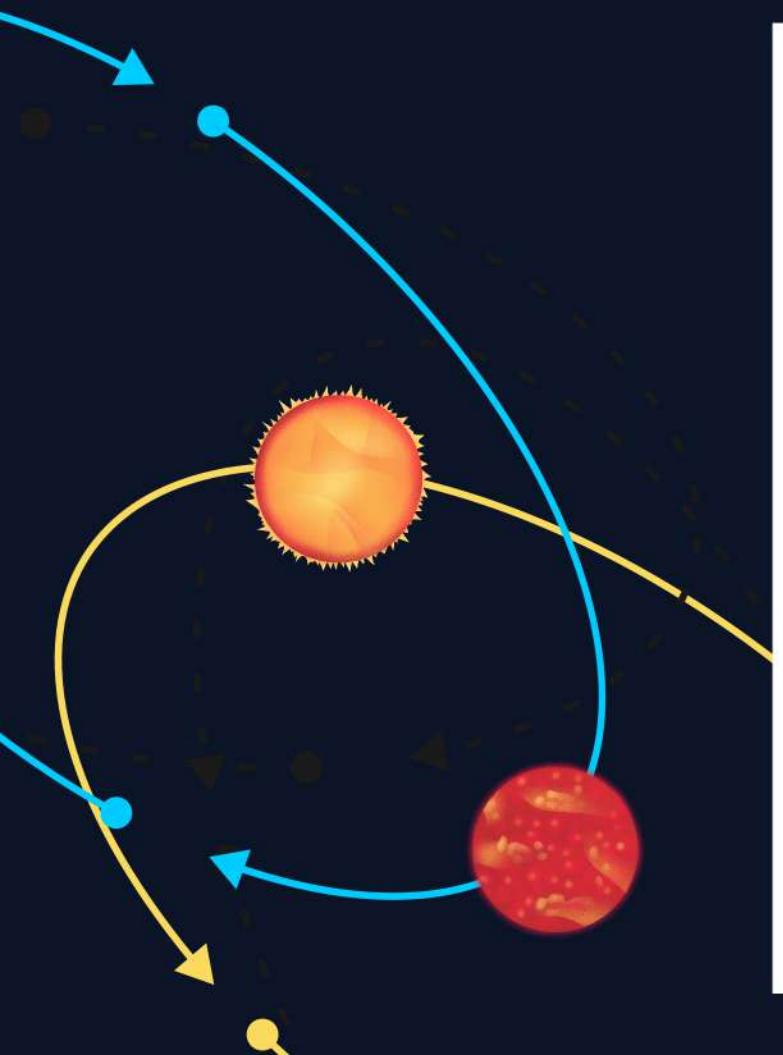


# PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS

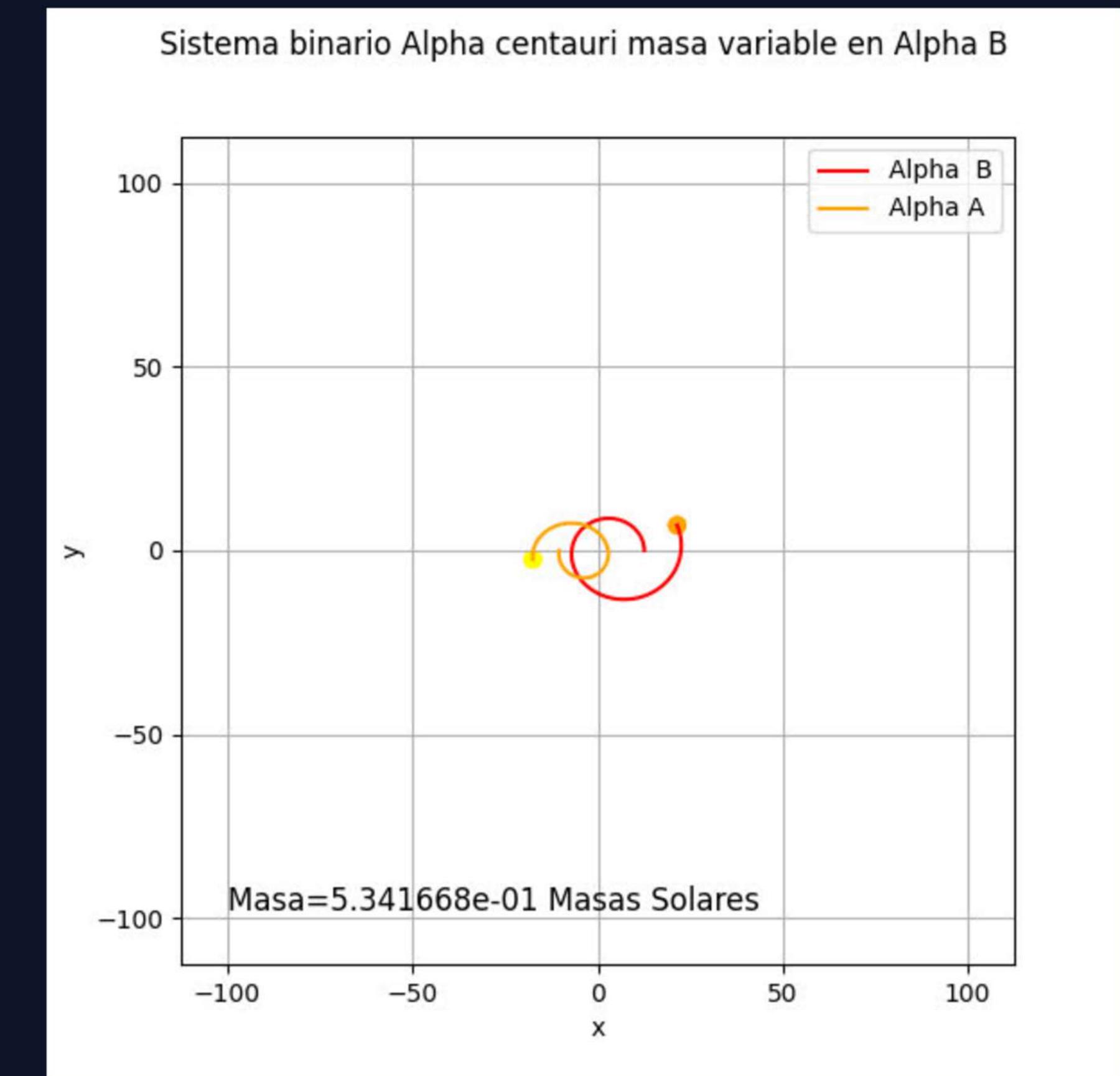
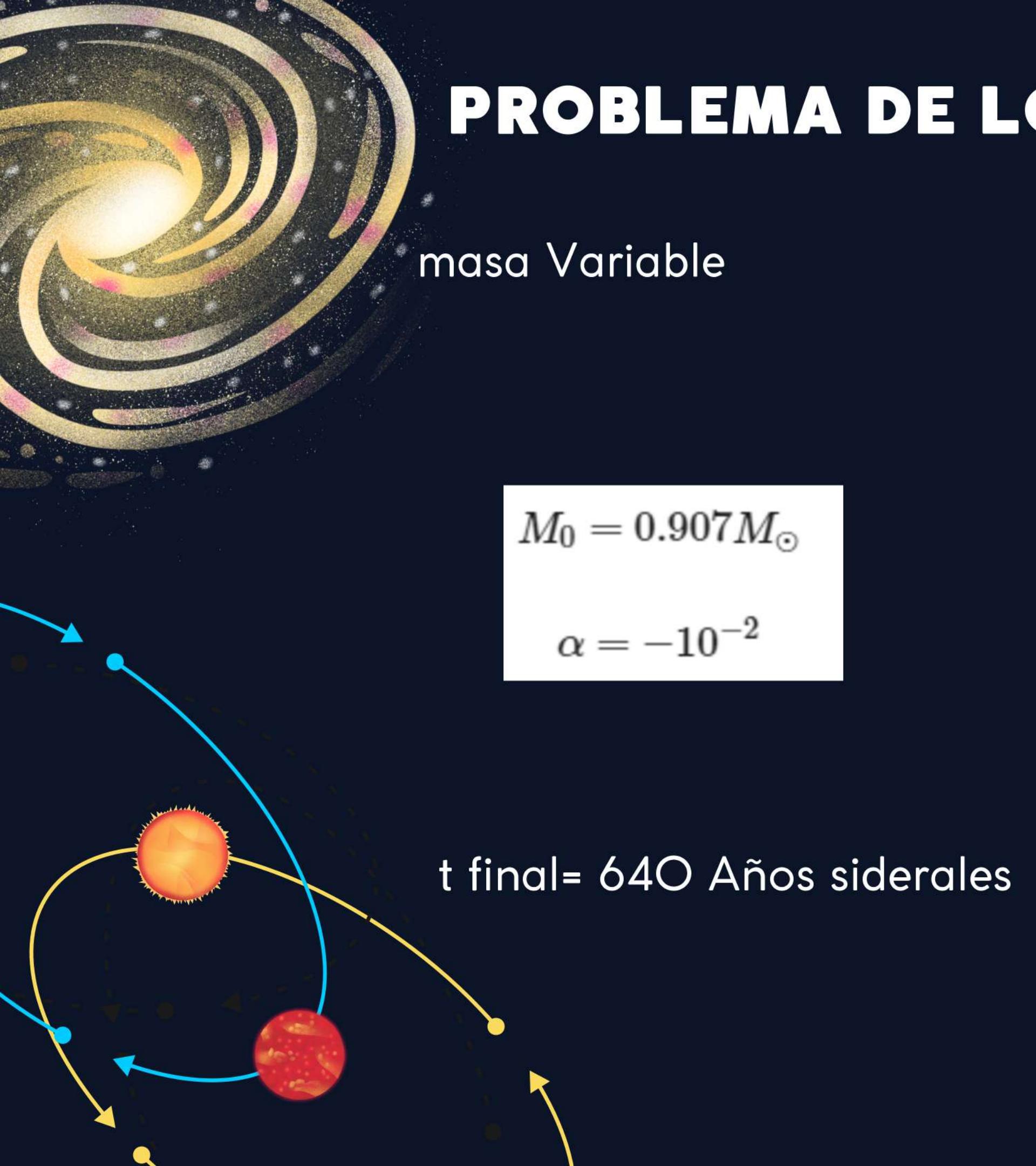
masa Variable

$$\left\{ \begin{array}{l} r_2 = -\frac{m_1}{m_2}r_1 \\ V_2 = -\frac{\dot{m}_1}{m_2}r_1 - \frac{m_1}{m_2}V_1 \end{array} \right.$$

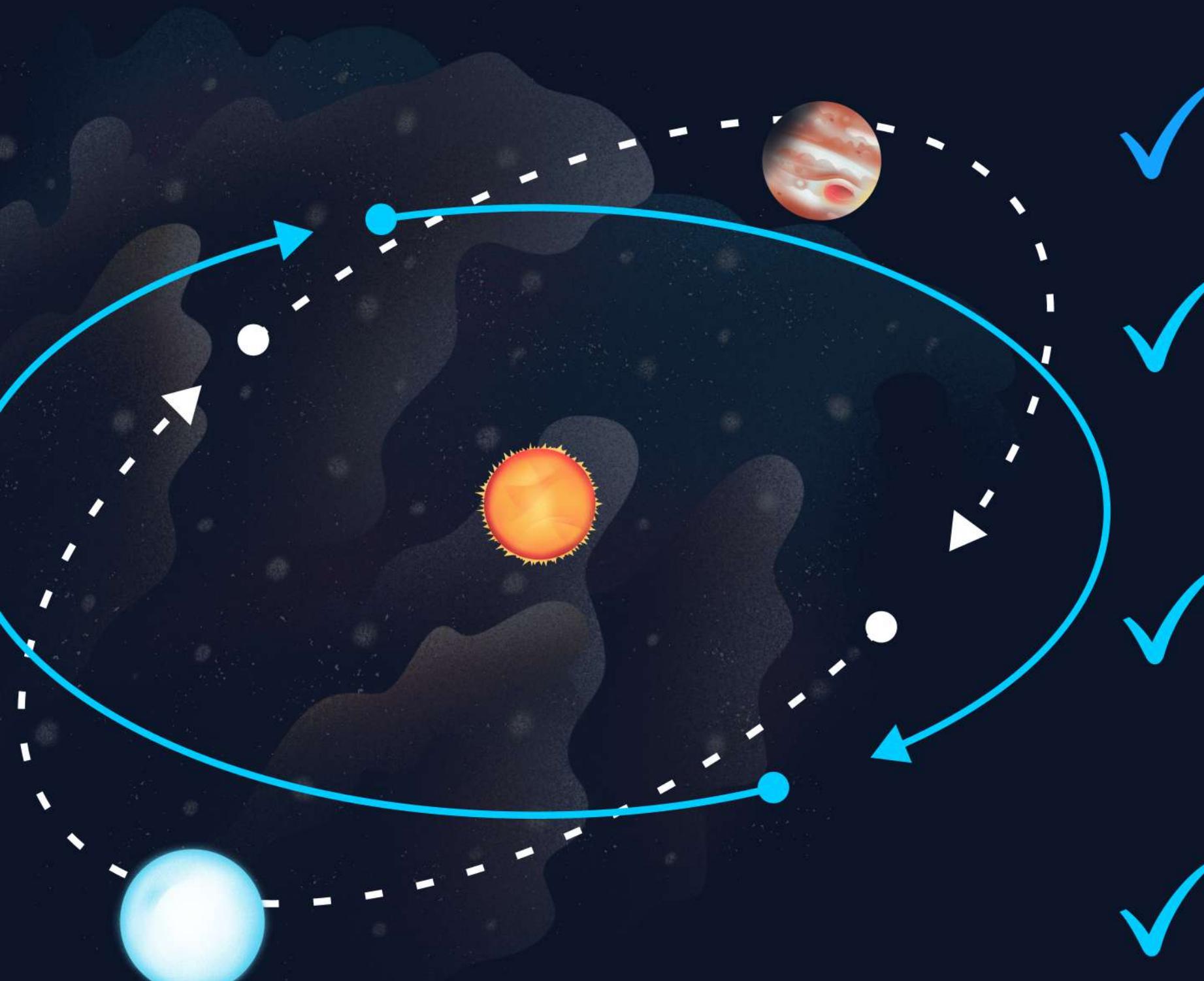
$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = V_x \\ \dot{y} = V_y \\ \dot{V}_x = -\frac{G(m_2^3)x_1}{(m_1+m_2)^2(x_1^2+y_1^2)^{3/2}} - (\alpha m_1)V_x \\ \dot{V}_y = -\frac{G(m_2^3)y_1}{(m_1+m_2)^2(x_1^2+y_1^2)^{3/2}} - (\alpha m_1)V_y \\ \dot{m}_1 = \alpha m_1^2 \\ \dot{x}_2 = -\alpha m_1 x_2 - \frac{m_1}{m_2}V_x \\ \dot{y}_2 = -\alpha m_1 y_2 - \frac{m_1}{m_2}V_y \\ \dot{V}_{x2} = -2\alpha^2 m_1 x_2 - (2 - \alpha m_1) \frac{m_1}{m_2}V_x + \frac{G(m_2^2 m_1)x_1}{(m_1+m_2)^2(x_1^2+y_1^2)^{3/2}} \\ \dot{V}_{y2} = -2\alpha^2 m_1 y_2 - (2 - \alpha m_1) \frac{m_1}{m_2}V_y + \frac{G(m_2^2 m_1)y_1}{(m_1+m_2)^2(x_1^2+y_1^2)^{3/2}} \end{array} \right.$$



# PROBLEMA DE LOS DOS CUERPOS



# CONCLUSIONES



- ✓ Se puede evidenciar computacionalmente que las ecuaciones diferenciales calculadas teóricamente para el problema de un cuerpo, tanto para masa constante como para masa variable, son correctas.
- ✓ Las ecuaciones que describen el movimiento del problema de los dos cuerpos corresponden a un problema rígido o **Stiff** dado que la solución encontrada difiere si se usa el método LSODA o RKT4 en el método `solve_ivp`
- ✓ Las ecuaciones planteadas para los problemas de dos cuerpos de masas comparables pueden tener consideraciones erróneas, dado que el valor usado de la velocidad inicial en el PVI solucionado numéricamente para el problema de dos cuerpos de masas comparables no se ajusta al teórico. Además, en el caso de masas variables, no orbitan alrededor del centro de masas como se planteó como hipótesis para la construcción de las ecuaciones.
- ✓ Una posible implementación futura es analizar los sistemas cuando ambas masas cambian en el tiempo simultáneamente. Específicamente, cuando la materia que pierde una de las masas la gana la otra, como se presenta en el sistema binario Algol (también conocido como Beta Persei), el cual presenta una paradoja en el proceso de muerte de la estrella debido a este fenómeno.

# CÓDIGO COLAB

<https://colab.research.google.com/drive/1mKBm4icHcoLUGF8E9r2TKLOmQGpR9WHR?usp=sharing>

# REFERENCIAS

- [1] C. . Prieto y J. Docobo, "on the two-bodyproblem with slowly decreasing mass", Celestial MechanicsandDynamical Astronomy, n.o 68, 1997.
- [2] L. M. Méndez-Pérez, L. A. Matos y E. J. Roca-Oria, "MODELO DE LOS DOS CUERPOS: SU ROL EN EL DESARROLLO HISTÓRICO DE LA FÍSICA Y SU USO EN LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA GENERAL", Revista Cubana de Física, vol. 31, n.o 1 E, E69, 2014. dirección: <http://www.revistacubanadefisica.org / RCFextradata / OldFiles / 2014 / Vol31 - N1E / RCF - 31-1E-EO69.pdf>.
- [3] J. G. Portilla B., "El problema de los dos cuerpos y el problema principal de saílélite artificial en ecuaciones diferenciales de primer orden", Revista Académica de la Academia Colombiana de Ciencias, vol. 20, n.o 76, mar. de 1996. dirección: [https://www.accefyn.com/revista/vVol\\_20/76/25-32.pdf](https://www.accefyn.com/revista/vVol_20/76/25-32.pdf).
- [4] N. P. Neira Parra, Implementación del Problema de los dos cuerpos, Google Colab, 2024. dirección: <https://colab.research.google.com/drive/1mKBm4icHcoLUGF8E9r2TKLOmQGpR9WHR?usp=sharing>.
- [5] Earth Fact Sheet, NASA.gov, Recuperado el 28 de marzo de 2024, de <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html>.
- [6] Sun Fact Sheet, NASA.gov, Recuperado el 4 de abril de 2024, de <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/sunfact.html>.
- [7] J. Walker y R. Resnick, Fundamentals of Physics: Chapters 1-21, 7.a ed. John Wiley & Sons, 2004, vol. 1, cap. 13, pág. 349.
- [8] M. J. Plavec, "IUE looks at the Algol paradox", en, Sky Telescope, vol. 65, pág. 413, 1983