



FUNDACIÓN UNIVERSITARIA KONRAD LORENZ

**LA ECUACIÓN DE TEUKOLSKY:
análisis matemático y solución numérica.**

NATALY PHAWLLYN NEIRA PARRA

Código 614212782

Trabajo de grado para optar por el título de:

Matemática

JOHN A. ARREDONO PhD

ALEJANDRO CARDENAS-AVENDAÑO PhD

Co-directores de trabajo de grado

Programa de Matemática

Facultad de Matemáticas e Ingeniería

Bogotá D.C. Noviembre de 2025

Dedicatoria

“La belleza del universo no es solo que está lleno de maravillas, sino que nos da la oportunidad de encontrar consuelo en su inmensidad, sabiendo que, aunque nuestra lucha parezca pequeña, formamos parte de algo mucho más grande.”

Neil deGrasse Tyson

Para ella, y por mi.

Agradecimientos

A lo largo de este recorrido académico, el presente trabajo y todo lo que lo ha precedido se han visto enriquecidos por el compromiso, la dedicación y el afecto que me han brindado. El apoyo constante y la generosidad compartida han dejado una huella significativa en cada paso de este proceso.

Las palabras, las acciones y el conocimiento compartido han hecho de este viaje algo verdaderamente memorable. Agradezco a quienes creyeron en mí cuando yo misma dudaba, y a aquellos que, con su ejemplo, me inspiraron a seguir luchando.

Gracias a mi familia, amigos y colegas, cuyo afecto elevó mi ánimo en momentos de incertidumbre. A quienes, con pequeños gestos, me acompañaron en el día a día, y a los que, desde la distancia, me enviaron toda su energía positiva.

Gracias al profe Alex y al profe Alejandro, cuya dedicación a la investigación dejó una marca indeleble en mi vida. Con su apoyo, hicieron que este proceso fuera más llevadero y enriquecedor. También agradezco a mis compañeros, amigos y otros docentes que, con sus conocimientos, han contribuido a este proceso de formación.

Este trabajo refleja no solo un esfuerzo personal, sino también el conjunto de experiencias, aprendizajes y logros alcanzados, fruto de la colaboración constante y de la inspiración recibida. **A todos ustedes, mi más sincero agradecimiento. *Este logro también es suyo.***

Índice general

Dedicatoria	II
Agradecimientos	III
Objetivos	VI
1. Introducción	1
2. Elementos básicos de Relatividad General	4
2.1. Principios de la relatividad general	5
2.2. Ecuaciones de campo Einstein	6
2.2.1. El tensor de Riemann	8
2.2.2. El tensor de Ricci y tensor de Einstein	9
3. Soluciones clásicas a las ecuaciones de campo	11
3.1. Solución de Schwarzschild	12
3.1.1. Características e implicaciones	15
3.2. Solución de Kerr	16
3.2.1. Características e implicaciones	23
4. Teoría de perturbaciones en relatividad	25
4.1. La ecuación maestra de Teukolsky	26
4.2. Soluciones de la ecuación de Teukolsky	37
4.2.1. Aproximación numérica	40
5. Modos Cuasinormales	49
5.1. Aproximación numérica de los QNM'S	52

5.1.1. Método de Leaver	53
5.1.2. Iteración de Newton	55
5.2. Análisis de Estabilidad	57
6. Conclusiones	61
A. Formalismo Newman Penrose	64
A.1. Spinors Y Tetradas	65
A.1.1. Spinors de Weyl	65
A.1.2. Tetradas Nulas	67
A.1.3. Rotaciones de la tetrada nula	72
A.2. Representación de las métricas clásicas	74
B. Repositorio de anexos	77
Referencias	81

Objetivos

Objetivo General

Estudiar la estructura matemática de la ecuación maestra de Teukolsky para perturbaciones gravitacionales en agujeros negros tipo Kerr.

Objetivos Específicos

- a. Desarrollar de manera rigurosa la derivación de la métrica de Schwarzschild y la métrica de Kerr como soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein.
- b. Comprender los fundamentos matemáticos del formalismo de Newman Penrose y su aplicación en la derivación de la ecuación de Teukolsky, enfatizando el papel de las simetrías y la separación de variables.
- c. Analizar el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación de Teukolsky y su vínculo con los modos cuasinormales.
- d. Identificar algunas de las implicaciones matemáticas y físicas del estudio espectral para la discusión contemporánea sobre la estabilidad de soluciones tipo Kerr.

Capítulo 1

Introducción

Junto con la mecánica cuántica, la aún denominada teoría de la relatividad, a la que en adelante nos referiremos como relatividad general, son los modelos físicos sobre los cuales están fundamentados todos los fenómenos para los que se tiene una explicación científica. En el contexto de la relatividad general, el problema básico, dado que es un modelo en ecuaciones diferenciales parciales, es hablar de las soluciones de dichas ecuaciones. En el contexto analítico, encontrar dichas soluciones es una tarea suficientemente titánica para que hoy en día solo se conozcan unas cuantas. Entre las más conocidas se encuentran las llamadas soluciones de Schwarzschild y Kerr, que describen la métrica del espacio alrededor de cuerpos esféricos con y sin rotación, respectivamente.

Debido a la dificultad de encontrar soluciones analíticas a las ecuaciones de la relatividad general, diversos enfoques para extender la frontera del conocimiento se han desarrollado, uno de ellos enmarcado en la teoría de perturbaciones, que consiste en agregar elementos a un problema ya resuelto y establecer condiciones bajo las cuales la solución original debe mantenerse estable en el tiempo. El estudio de la estabilidad de estas soluciones es un tema de investigación activa. Para dar un ejemplo, la estabilidad de la solución de Schwarzschild bajo perturbaciones no lineales fue establecida hace menos de una década [DHR16], mientras que la estabilidad de la solución de Kerr bajo perturbaciones lineales sigue siendo objeto de debate y análisis continuo [GKS22].

El estudio del comportamiento de sistemas en relatividad general, sometidos a perturbaciones no lineales, suele ser extremadamente complejo, y en muchos casos no se pueden resolver de forma directa. Por ello, el problema inicial usual es estudiar perturbaciones lineales, lo cual será el objetivo principal de este documento. Es en este contexto donde aparece en escena la ecuación maestra de Teukolsky [Teu73], que constituye una herramienta central que permite describir perturbaciones lineales de distintas caracte-

rísticas, siendo las más usuales los campos escalares, gravitacionales y electromagnéticos sobre sistemas con una solución analítica ya establecida, como la de Kerr. Mediante una formulación susceptible de analizarse como un problema espectral, es decir, se puede tratar de manera similar a un problema en el cual se busca encontrar los “modos” o frecuencias características del sistema, lo que simplifica significativamente el análisis.

Bajo esta motivación, la presente tesis se enfocará en el análisis matemático y la solución numérica de la ecuación maestra de Teukolsky. Como objetivo principal, se abordarán en detalle la estructura matemática de la ecuación, su formulación general y las propiedades espectrales que afectan la estabilidad de sus soluciones, tomando como base el enfoque desarrollado por Cook y Zalutskiy [CZ14b]. Por lo tanto, lo aquí desarrollado no pretende agotar el problema, sino contribuir a su comprensión desde una perspectiva teórico-computacional, teniendo como pregunta central: ¿cómo se puede entender, desde la matemática, el comportamiento de las soluciones de la ecuación de Teukolsky y lo que estas revelan sobre la estabilidad de las soluciones de Schwarzschild y Kerr de las ecuaciones de campo de Einstein?

El desarrollo de esta tesis se organiza de la siguiente manera: se contextualiza esta tesis dentro de la relatividad general en el capítulo (2). Luego, se aborda el primer objetivo, al desarrollar las soluciones propuestas (métricas) por Schwarzschild y Kerr a las ecuaciones de campo de Einstein, en el capítulo (3). Posteriormente, en el capítulo (4), se consideran perturbaciones lineales sobre la métrica tanto de Schwarzschild como de Kerr, y se describe el comportamiento de los campos perturbativos sobre estas. Durante este proceso, se puede evidenciar que el planteamiento sobre la métrica de Kerr presenta una dificultad añadida con respecto al desarrollo sobre Schwarzschild, lo que motiva el uso de un formalismo diferente para abordar su solución. Es aquí donde se desarrolla el segundo objetivo, pues se recurre al formalismo de Newman Penrose, cuyo desarrollo, presentado en el apéndice (A), describe el fundamento matemático que permite la correcta representación del problema, y aporta un enfoque simplificado, apto para plantear una EDP separable, como se muestra en la sección (4.2), obteniendo la ecuación maestra de Teukolsky, cuyas soluciones son los modos cuasinormales (QNM's).

Por otra parte, para trabajar el tercer objetivo, se aborda en el capítulo (5) el problema de la estabilidad de dos de las soluciones clásicas, Schwarzschild y Kerr. Para ello, se plantea la solución de la ecuación de Teukolsky por separación de variables. Se valida, en la sección (4.2), que las soluciones a las EDO resultantes, tanto angular como radial, cumplen con las condiciones teóricas, físicas y de frontera radiativas. Para la solución completa de la ecuación de Teukolsky, se explora, en la sección (5.2), el esquema numérico presentado por Cook y Zalutskiy (2014), aplicando iteraciones de Newton con el método de Galerkin para resolver el problema espectral en la ecuación angular, y el método de Leaver para las ecuaciones de con-

vergencia de la ecuación radial mediante fracciones continuas. Este esquema numérico permite abordar simultáneamente las ecuaciones diferenciales a resolver.

Para finalizar, se aborda el último objetivo en la sección (5.1), al implementar los métodos planificados en *Julia*. Dado que la ecuación de Teukolsky se construye sobre la métrica de Kerr, para mostrar estabilidad en Schwarzschild, se comprobará la eficacia del método numérico considerando el límite de Schwarzschild ($a = 0$), obteniendo resultados para campos escalares ($s = 0$) y campos gravitacionales ($s = 2$) para los modos $\ell = 2, \ell = 3$, comparando los resultados con los valores teóricos reportados por Berti (2009). Aquí se muestra que las frecuencias de los QNM's son negativas para todos los casos probados, lo que implica que las ondas generadas por los campos perturbativos decaen con el tiempo, proporcionando soporte numérico a la estabilidad de la métrica tanto de Kerr como de Schwarzschild, bajo perturbaciones lineales. Además, en la sección (5.2) se discutirá cómo la interpretación de este resultado tiene importantes implicaciones en su uso en la física experimental contemporánea, especialmente en el contexto de las perturbaciones de campos gravitacionales sobre la solución de Kerr.

Capítulo 2

Elementos básicos de Relatividad General

Para abordar los objetivos de este trabajo, es fundamental realizar un breve repaso histórico y teórico sobre el desarrollo matemático y el contexto físico de la ecuación de Teukolsky, comenzando con el concepto de gravedad. El estudio de la gravedad ha sido un tema central en la física desde el siglo XVII. Si bien su formulación matemática se debe a Isaac Newton, la idea de una tendencia natural de los cuerpos hacia el centro de la Tierra se remonta a la física aristotélica (siglo IV a. c.). Posteriormente, Johannes Kepler propuso en su *Astronomia Nova* (1609) la existencia de una fuerza magnética que guiaba el movimiento planetario, mientras que Galileo Galilei demostró experimentalmente la universalidad de la caída libre en sus *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche* (1638). Estas contribuciones sentaron las bases que culminaron en la formulación de la Ley de Gravitación Universal de Newton, expuesta en sus *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687) [New87]. Matemáticamente, la gravedad en la teoría Newtoniana se describe mediante una ecuación vectorial que relaciona la fuerza con las masas de los cuerpos y la distancia de separación entre ellos.

A pesar de su aceptación generalizada, la idea de la gravedad como una fuerza de acción a distancia generó intensos debates en la comunidad científica del siglo XVII. El principal problema de esta concepción radicaba en que la interacción entre cuerpos debía transmitirse de manera instantánea, es decir, con velocidad infinita, lo que implicaba una violación del principio de causalidad física. Si un cuerpo masivo modificaba su posición, la teoría Newtoniana predecía que todos los demás cuerpos del universo percibirían de inmediato ese cambio, sin mediación temporal alguna. Esta dificultad no era exclusiva de la gravitación, pues el electromagnetismo clásico presentaba una paradoja similar. La introducción del concepto de *campo* permitió resolver ambos problemas: un cuerpo con masa genera un campo gravitacional y un cuerpo con carga produce un campo eléctrico; son estos campos, y no los cuerpos directamente, los que interactúan

entre sí. De esta forma, la acción a distancia fue reemplazada por una interacción local mediada por el campo, cuya propagación ocurre a velocidad finita y se describe mediante ecuaciones diferenciales.

No fue sino hasta 1915 cuando Albert Einstein, con su teoría de la relatividad general [Ein15], reformuló el concepto de gravedad en un marco completamente geométrico. En lugar de concebirla como una fuerza, la relatividad general la interpreta como la curvatura del espacio–tiempo cuatridimensional (tres coordenadas espaciales y una temporal) inducida por la presencia de masa y energía. Este nuevo enfoque requirió una reformulación matemática profunda, en la que la ecuación vectorial de Newton fue reemplazada por las ecuaciones de campo de Einstein: un sistema tensorial cuyas soluciones, las métricas del espacio–tiempo, describen la geometría gravitacional en las cercanías de cuerpos masivos. Este cambio de perspectiva transformó de manera definitiva la comprensión del movimiento y la interacción gravitacional a escalas astronómicas.

A continuación, se desarrollará el marco teórico de la relatividad general, comenzando por los principios que rigen esta nueva concepción de la gravedad, la formulación de las ecuaciones de campo y el análisis de sus soluciones, las cuales dependen de las propiedades del cuerpo que curva el espacio–tiempo: La métrica de Schwarzschild [Sch16], que describe el espacio–tiempo alrededor de un cuerpo masivo, esférico y estático, y la métrica de Kerr [Ker63], que generaliza la anterior al caso de un cuerpo en rotación. Finalmente, se presentará una breve revisión de la teoría de perturbaciones, que permitirá introducir la ecuación de Teukolsky.

2.1. Principios de la relatividad general

La relatividad general es uno de los descubrimientos teóricos más importantes de la ciencia moderna. Comprender sus diferencias con el formalismo Newtoniano¹ y la relatividad especial, así como sus limitaciones, es un primer paso fundamental antes de abordar las matemáticas que la describen.

En el Libro de [DIn92] se exponen cinco principios básicos de la relatividad general, los cuales, explícita o implícitamente, guiaron la investigación de Einstein y la formulación de sus ecuaciones de campo:

- **El principio de Mach:** Sostiene que la inercia de un cuerpo es consecuencia de su interacción con el resto del universo, desafiando la visión clásica de Newton sobre el espacio y el movimiento. Sin embargo, su papel en la relatividad general es objeto de debate.
- **El principio de equivalencia:** Establece que no hay distinción observable entre un campo gravita-

¹El formalismo de la Mecánica Newtoniana considera como espacio ambiente el espacio Euclíadiano usual, es decir, \mathbb{R}^3 con la métrica usual.

cional uniforme y una aceleración uniforme del sistema de referencia. En otras palabras, los efectos locales de la gravedad son indistinguibles de los efectos de una aceleración.

- **El principio de covarianza:** Afirma que las leyes de la física deben tener la misma forma en todos los sistemas de coordenadas y referencia, sean inerciales o no. Esto implica que las ecuaciones deben ser invariantes bajo transformaciones generales de coordenadas y expresables en forma tensorial.
- **El principio de acoplamiento gravitatorio mínimo:** Es una estrategia matemática que permite introducir la gravedad en una teoría sin necesidad de agregar términos explícitos que contengan el tensor de curvatura al pasar de la relatividad especial a la general.
- **Principio de correspondencia:** La teoría de la relatividad general debe coincidir con la teoría de la gravitación de Newton en el límite de campos gravitacionales débiles y velocidades pequeñas en comparación con la velocidad de la luz.

Bajo ciertas condiciones, como la ausencia de vibraciones significativas en el campo gravitacional, es posible describir localmente el espacio-tiempo mediante una aproximación basada en la relatividad especial. Sin embargo, en situaciones no locales es necesario utilizar nuevas métricas, las cuales son no lineales y pueden interpretarse como los potenciales de los campos gravitacionales. Esto implica abandonar la concepción del espacio-tiempo como una estructura plana y Euclidiana. Es en este contexto donde las ecuaciones de campo de la relatividad general entran en juego.

2.2. Ecuaciones de campo Einstein

En esta sección, considerando los principios previamente discutidos, se expone la formulación de las ecuaciones de campo de Einstein. Nos apoyaremos ampliamente de los capítulos 5, 6 y 9 del libro de relatividad general de Adler, Bazin y Schiffer[ABS65], tanto para el desarrollo de esta sección como el de secciones posteriores.

Para empezar, es necesario introducir el objeto matemático **tensor**, que permiten reformular ecuaciones físicas originalmente expresadas en términos vectoriales en una forma covariante.² Un tensor de tipo (r, s) es una función multilineal que asocia r vectores covariantes y s vectores a un número real, cum-

²En el contexto tensorial, el término *covariante* se refiere a las componentes de un tensor (o vector) transforman de la misma manera que la base de coordenadas cuando se realiza un cambio de sistema de referencia. Por otra parte, *contravariante*, hace referencia a que las componentes transforman de manera inversa a la base de coordenadas. Como notación los índices en la parte superior de un tensor o vector indican contravarianza y en la parte inferior, covarianza.

riendo ciertas propiedades de linealidad [Cas]. Cada tensor admite una representación matricial asociada en coordenadas locales.

Consideremos, por ejemplo, la métrica usual de Euclides en \mathbb{R}^3 :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

la cual en forma tensorial se puede escribir como:

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{diag}(1, 1, 1).$$

Este tipo de representación tensorial es ampliamente utilizada en la formulación de la relatividad general, ya que permite expresar de forma covariante las leyes físicas en espacios curvos. Los tensores son esenciales para describir tanto la dinámica del campo gravitacional como la geometría del espacio-tiempo, incluyendo su curvatura. Un ejemplo fundamental del uso de esta estructura matemática es la formulación de las geodésicas, que en este contexto, representan las trayectorias seguidas por partículas libres, es decir, aquellas que no están sometidas a fuerzas externas y cuya aceleración propia es nula. La forma de una geodésica depende directamente de la geometría del espacio. Por ejemplo, en el formalismo Newtoniano, estas trayectorias corresponden a líneas rectas en un espacio Euclíadiano. En cambio, en relatividad general, las geodésicas ya no son necesariamente rectas, pues se encuentran determinadas por la métrica curva del espacio-tiempo.

Por ejemplo, en el caso de un espacio-tiempo vacío (sin presencia de masa ni energía), siguiendo la elección de la signatura usada por Adler *et al.* [ABS65]³, la geometría está descrita por la la métrica de Minkowski

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

con c la velocidad de la luz en el vacío, y t el tiempo propio⁴. En notación tensorial, la métrica de Minkowski

³Existen dos convenciones principales para la signatura de la métrica de Minkowski, que difieren únicamente en el signo global asignado al componente temporal. En la forma $(+, -, -, -)$, también llamada *signatura de Landau–Lifshitz* o *convención del físico*, los vectores temporales tienen norma positiva. Por otro lado, la convención $(-, +, +, +)$, usada por autores como Misner, Thorne y Wheeler, se denomina *signatura del matemático*, donde los vectores espaciales son positivos y los temporales negativos. Ambas signaturas son equivalentes físicamente su elección no altera las soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein ni los invariantes geométricos.

⁴En el formalismo relativista, el tiempo no es único; existe una medida diferente para cada observador. Se define el tiempo propio como el tiempo medido por un reloj que se mueve con la partícula de prueba a lo largo de su trayectoria. Está es una cantidad invariante.

se expresa como:

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1). \quad (2.1)$$

Ahora, en espacios no vacíos la materia y la energía afectan la geometría del espacio-tiempo, así que es necesario introducir una ecuación que relacione ambos aspectos. Esta es precisamente la función de las ecuaciones de campo de Einstein, que vinculan la curvatura del espacio-tiempo, representada por el tensor de Einstein, con el contenido material del universo, expresado mediante el tensor energía-momento. Antes de presentarlas en detalle, es conveniente repasar los objetos matemáticos que intervienen en su formulación, en particular, el tensor de Ricci, el escalar de curvatura y el propio tensor de Einstein, construidos a partir de derivadas covariantes y contracciones del tensor de Riemann.

2.2.1. El tensor de Riemann

Dado que las ecuaciones de campo de Einstein guardan la información geodésica del espacio-tiempo, en el proceso de planteamiento se debe asegurar que las ecuaciones:

- a. deben estar descritas haciendo uso de tensores covariantes;
- b. deben ser de segundo orden en los componentes de el tensor métrico;
- c. en el caso base, con el espacio vacío, las ecuaciones deben admitir como solución particular a la métrica de Lorentz sin gravedad, que equivale a la métrica de Minkowski;
- d. deben ser Quasi-lineales, es decir, ecuaciones diferenciales parciales que pueden ser lineal en las derivadas parciales de orden más alto, aunque puede ser no lineal en términos de la función incógnita y sus derivadas de orden inferior.

Para que la formulación de la relatividad general sea coherente con la geometría del espacio-tiempo, es necesario definir una cantidad que mida la curvatura del mismo. En un espacio plano, como el espacio-tiempo de Minkowski, los desplazamientos paralelos de vectores en distintas direcciones no producen cambios en ellos. Sin embargo, en un espacio-tiempo curvo, un vector transportado paralelamente puede sufrir modificaciones dependiendo de la trayectoria seguida. Este comportamiento es caracterizado por el

tensor de curvatura de Riemann denotado como $R_{\sigma\mu\nu}^\rho$, y que se define en términos de los **símbolos de Christoffel**⁵ como:

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\sigma\nu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\sigma\mu}^\rho + \Gamma_{\lambda\mu}^\rho \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda - \Gamma_{\lambda\nu}^\rho \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda, \quad (2.2)$$

donde los símbolos de Christoffel de segunda especie están definidos por Ivorra [Cas] para una métrica covariante dada g_{ij} sobre un sistema coordenado $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ como

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right),$$

donde $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Si se considera el caso del espacio-tiempo de Minkowski, los símbolos de Christoffel para dicha métrica son todos cero, lo que implica que el tensor de Riemann también es nulo, $R_{\sigma\mu\nu}^\rho = 0$, indicando que el espacio es plano, es decir, sin curvatura.

2.2.2. El tensor de Ricci y tensor de Einstein

Si se considera el tensor de Riemann nulo y se sigue el desarrollo de la ecuación de Laplace para el potencial gravitacional clásico, podemos hacer la contracción del tensor de Riemann para obtener el **tensor de Ricci**:

$$R_{\sigma\rho\nu}^\rho = R_{\sigma\nu} = 0. \quad (2.3)$$

Para garantizar la conservación de la energía y el momento en relatividad general, se introduce el **tensor de Einstein**, definido como:

$$G_{\sigma\nu} = R_{\sigma\nu} - \frac{1}{2} g_{\sigma\nu} R,$$

donde R es el escalar de curvatura de Riemann, dado por $R = g^{\sigma\nu} R_{\sigma\nu}$. En ausencia de materia y energía, el tensor de Einstein cumple:

$$G_{\sigma\nu} = 0, \quad (2.4)$$

la cual es llamada la ecuación de campo de Einstein en el vacío. Por otra parte, cuando se considera el

⁵Los símbolos de Christoffel son coeficientes que representan la conexión en coordenadas locales en una variedad diferenciable provista de una métrica. Existen los símbolos de *primera especie* (Γ_{kij}), definidos como combinaciones lineales de derivadas parciales del tensor métrico $g_{\mu\nu}$, y los de *segunda especie*, que se obtienen al contraer los de primera especie con el inverso de la métrica ($\Gamma_{ij}^k = g^{k\nu} \Gamma_{\nu ij}$).

espacio-tiempo no vacío con presencia de materia y energía, es necesario introducir un término que represente la energía y el momento del cuerpo. Por lo tanto, se introduce el **tensor de energía-momento** $T_{\sigma\nu}$, lo que da lugar a las ecuaciones de campo de Einstein en presencia de materia:

$$G_{\sigma\nu} + \Lambda g_{\sigma\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\sigma\nu} \quad (2.5)$$

donde Λ es la constante cosmológica, G es la constante gravitacional de Newton, c es la velocidad de la luz en el vacío. El tensor $T_{\sigma\nu}$ puede definirse, por ejemplo, bajo la métrica de Minkowski y considerando velocidades tridimensionales, como:

$$T_{\sigma\nu} = \rho_0 \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds} = \rho \frac{v_i v_j}{c^2}.$$

Para velocidades bajas, los términos de orden $(v/c)^2$ y $\rho_0(v/c)$ tienden a cero, por lo cual solo sobrevive la primera entrada del tensor $T_{\sigma\nu}$, recuperando la aproximación Newtoniana, lo cual es un resultado esperado teniendo en cuenta los principios de la relatividad.

Para solucionar las ecuaciones de campo de Einstein, es necesario considerar las propiedades específicas del cuerpo que curva el espacio-tiempo. En particular, diferentes distribuciones de masa, carga y momento angular dan lugar a distintas soluciones métricas, las cuales describen la geometría del espacio-tiempo en las cercanías del cuerpo en cuestión.

Capítulo 3

Soluciones clásicas a las ecuaciones de campo

Las soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein permiten modelar el comportamiento del espacio-tiempo en presencia de cuerpos compactos bajo condiciones ideales. Aunque estas ecuaciones ofrecen un marco general para entender la interacción entre geometría y materia, su complejidad hace que solo en casos con simetrías especiales sea posible obtener soluciones analíticas completas. En escenarios más realistas, donde las simetrías se rompen o las condiciones iniciales son dinámicas, es necesario recurrir a soluciones numéricas, una aproximación ampliamente empleada en la investigación contemporánea. No obstante, las soluciones exactas conservan un papel fundamental, ya que constituyen el punto de partida para el desarrollo de estudios perturbativos y para la validación de simulaciones numéricas más complejas.

En 1916, Karl Schwarzschild encontró la primer solución exacta a las ecuaciones de Einstein, aplicable al exterior de una masa puntual no rotante, bajo la suposición de simetría esférica [Sch16]. Esta solución, conocida como métrica de Schwarzschild, constituye la base para estudiar fenómenos como la deflexión de la luz, la precesión del perihelio o la formación de horizontes de eventos en agujeros negros[Cha83]. Décadas más tarde, Roy Kerr propuso una solución que describe el espacio-tiempo exterior a una masa rotante sin carga eléctrica, incorporando nuevas estructuras como la ergosfera y múltiples horizontes [Ker63].

En este capítulo se presentan las propiedades matemáticas y geométricas de ambas soluciones. Su análisis es fundamental para formular las ecuaciones que rigen las perturbaciones en fondos curvos y comprender el comportamiento dinámico de campos en presencia de agujeros negros. No se abordarán en este trabajo las soluciones con carga eléctrica, como la métrica de Kerr–Newman, ni aquellas con constante cosmológica, por estar fuera del alcance de este estudio.

3.1. Solución de Schwarzschild

Consideremos el espacio-tiempo alrededor de un cuerpo masivo, esférico, de radio r_0 , masa M , sin carga y sin rotación. Bajo estas suposiciones, podemos inferir lo siguiente:

- a. Dado que el entorno es vacío, se cumple la ecuación de campo de Einstein en el vacío (2.4), es decir, el tensor de energía-momento se anula: $T_{\sigma\nu} = 0$.
- b. Debido a la simetría esférica del sistema, es conveniente adoptar coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) . Además, la métrica debe ser invariante bajo rotaciones, lo que implica que no pueden aparecer términos dependientes de los ángulos θ o ϕ .
- c. Se asume que la solución es estática, lo que significa que no hay flujos de materia ni variaciones temporales en la curvatura. En consecuencia, la métrica no puede depender de la coordenada temporal t .
- d. En el límite cuando $r \rightarrow \infty$, es decir, alejándonos lo suficiente del cuerpo, la métrica propuesta debe recuperar la forma de la métrica de Minkowski, ya que en ausencia de masa o energía, la geometría del espacio-tiempo es plana.
- e. Para el cuerpo la masa se considera puntualmente distribuida y centrada en $r = 0$.

Las condiciones anteriormente descritas, determinan una métrica que soluciona las ecuaciones de Einstein en el vacío, en coordenadas esféricas de la forma:

$$ds^2 = A(r)dt^2 - C(r)dr^2 - D(r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

donde A , C y D son funciones de la coordenada radial r , por lo tanto el tensor métrico asociado ($g_{\sigma\nu}$) puede expresarse en forma matricial como:

$$g_{\sigma\nu} = \begin{pmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -D(r)\sin^2 \theta \end{pmatrix},$$

y cuya inversa contravariante está dada por:

$$g^{\sigma\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{A(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{C(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{D(r)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{D(r) \sin^2 \theta} \end{pmatrix}.$$

Primero, calculamos los símbolos de Christoffel de segunda especie usando la Ecu. (2.2.1) sobre la métrica $g_{\sigma\nu}$. Los términos no nulos son :

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \Gamma_{rt}^t = \frac{1}{2A} \frac{\partial A}{\partial r}, & \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2C} \frac{\partial C}{\partial r}, \\ \Gamma_{\phi r}^\phi &= \Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{2D} \frac{\partial D}{\partial r}, & \Gamma_{tt}^r &= \frac{1}{2C} \frac{\partial A}{\partial r}, \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= \frac{-1}{2C} \frac{\partial D}{\partial r}, & \Gamma_{\phi\phi}^r &= \frac{-\sin^2 \theta}{2C} \frac{\partial D}{\partial r}, \\ \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot \theta. \end{aligned}$$

Haciendo uso de estos resultados y la definición del tensor de Riemann (2.2), calculamos el tensor de Ricci (2.3), cuyos términos no nulos son:

$$\begin{aligned} R_{tt} &= \frac{3}{4C^2} \frac{\partial C}{\partial r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{2C} \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - \frac{1}{4CA} \left(\frac{\partial A}{\partial r} \right)^2, \\ R_{rr} &= -\frac{3}{4D^2} \left(\frac{\partial D}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{2D} \frac{\partial^2 D}{\partial r^2} + \frac{1}{4DC} \frac{\partial D}{\partial r} \frac{\partial C}{\partial r}, \\ R_{\theta\theta} &= \frac{-3}{4C^2} \frac{\partial C}{\partial r} \frac{\partial D}{\partial r} - \frac{1}{2C} \frac{\partial^2 D}{\partial r^2} + \frac{1}{4CD} \left(\frac{\partial D}{\partial r} \right)^2, \\ R_{\phi\phi} &= \frac{-3 \sin^2 \theta}{4C^2} \frac{\partial C}{\partial r} \frac{\partial D}{\partial r} - \frac{\sin^2 \theta}{2C} \frac{\partial^2 D}{\partial r^2} + \frac{\sin^2 \theta}{4CD} \left(\frac{\partial D}{\partial r} \right)^2 + \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Veamos que la Ecu. (2.3) implica que las entradas anteriores estén igualadas a cero. Además, dado que A, C, D solo dependen de r , las derivadas parciales pueden escribirse como una derivada total con respecto a r , de esta forma se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\begin{aligned} \frac{3}{4C^2}C'A' + \frac{1}{2C}A'' - \frac{1}{4CA}(A')^2 &= 0, \\ \frac{-3}{4A^2}(A')^2 - \frac{1}{2A}A'' + \frac{1}{4AC}A'C' - \frac{3}{4D^2}(D')^2 - \frac{1}{2D}D'' + \frac{1}{4DC}D'C' &= 0, \\ \frac{-3}{4C^2}C'D' - \frac{1}{2C}D'' + \frac{1}{4CD}(D')^2 &= 0, \\ \frac{-3\sin^2\theta}{4C^2}C'D' - \frac{\sin^2\theta}{2C}D'' + \frac{\sin^2\theta}{4CD}(D')^2 + \sin^2\theta &= 0, \end{aligned}$$

el cual es equivalente a,

$$\begin{aligned} 3AC'A' + 2CAA'' - C(A')^2 &= 0, \\ 3CD^2(A')^2 + 2ACD^2A'' - AD^2A'C' + 3A^2C(D')^2 + 2A^2CDD'' - A^2DD'C' &= 0, \\ 3DC'D' + 2CDD'' - (D')^2 &= 0, \\ 3DC'D' + 2CD D'' - 4C(D')^2 - 4C^2D &= 0. \end{aligned}$$

Por razones de isotropía, la métrica debe ser invariante respecto a rotaciones entorno a r , lo que implica que la función D solo puede depender de la coordenada radial de la forma:

$$D(r) = r^2.$$

Por lo tanto, de la tercera ecuación tenemos,

$$\begin{aligned} 0 &= 3DC'D' + 2CDD'' - (D')^2, \\ \Rightarrow 0 &= 3r^2C'(2r) + 2Cr^2(2) - (2r)^2, \\ \Rightarrow 0 &= C'(6r^3) + C(4r^2) - 4r^2, \\ \Rightarrow 0 &= 3rC' + 2C - 2, \end{aligned}$$

cuya solución corresponde a,

$$C(r)^{-1} = 1 + \frac{k_1}{r}.$$

Dado que los símbolos de Christoffel son simétricos, se debe cumplir que $A(r) = 1/C(r)$ para que se preserve la simetría en las primeras cuatro entradas de la métrica, por lo tanto, la métrica propuesta es de

la forma,

$$ds^2 = \left(1 + \frac{k_1}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{k_1}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

Para encontrar la constante de integración k_1 , debemos recuperar el límite Newtoniano. Es decir, la métrica en el límite de campos gravitacionales débiles debe aproximarse a la métrica de Minkowski, por lo tanto,

$$g_{00} = A(r) \approx 1 + 2\Phi(r),$$

donde $\Phi(r)$ es el potencial gravitacional clásico en la aproximación Newtoniana con unidades tales que la velocidad de la luz es $c^2 = 1$,

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r};$$

comparando con la métrica en estudio, se obtiene que la constante k_1 debe ser proporcional a GM particularmente,

$$k_1 = -2GM,$$

donde G es la constante gravitacional Newtoniana y M la masa del cuerpo.¹ Sustituyendo en la métrica propuesta, se obtiene que la **métrica de Schwarzschild** es,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.1)$$

3.1.1. Características e implicaciones

La métrica de Schwarzschild, exhibe diversas propiedades fundamentales que caracterizan la estructura de cuerpos con las propiedades descritas. Algunas de las características más importantes son:

- a. **Horizonte de eventos y radio de Schwarzschild:** El horizonte de eventos define la región del espacio-tiempo a partir de la cual ninguna información ni partícula puede escapar. En la métrica de Schwarzschild, este horizonte se localiza en: $r_s = 2GM$, donde r_s es el denominado **radio de Schwarzschild**². Si un objeto colapsa dentro de este radio, la atracción gravitacional se vuelve tan intensa que el colapso gravitacional es irreversible, resultando en la formación de un agujero negro.
- b. **Singularidad central:** La métrica de Schwarzschild presenta una singularidad en $r = 0$, donde las magnitudes geométricas que describen la curvatura del espacio-tiempo divergen, alcanzando valores

¹Algunos autores difieren en la forma de la elección de la constante k_1 , pues toman unidades particulares para que $G = 1$ o tienen en consideración la velocidad de la luz en el vacío $c^2 = 1$.

²Considerando la velocidad de la luz $c^2 \neq 1$, el radio de Schwarzschild es $r_s = 2GM/c^2$

infinitos. Esta singularidad es de naturaleza espacio-temporal y representa un límite de aplicabilidad de la relatividad general.

- c. **Trayectorias geodésicas y órbitas:** Las partículas de prueba que se desplazan en el espacio-tiempo con geometría descrita con la métrica de Schwarzschild siguen trayectorias geodésicas, que pueden clasificarse en diferentes tipos:

- **Órbitas circulares:** Se producen cuando la atracción gravitacional equilibra exactamente la inercia de la partícula. La estabilidad de estas órbitas depende de su radio, existiendo un radio crítico por debajo del cual las órbitas se vuelven inestables.
- **Órbitas elípticas:** En ausencia de otros efectos, los cuerpos siguen trayectorias keplerianas alrededor de la fuente de masa, en analogía con la mecánica clásica.
- **Trayectorias de escape:** Si la energía de la partícula es suficiente para superar la atracción gravitacional, su trayectoria puede ser parabólica o hiperbólica, permitiéndole escapar del campo gravitacional.

3.2. Solución de Kerr

En esta sección, nos apoyaremos en el capítulo 19 del libro de Relatividad General de D'Inverno [DIn92] y en el artículo de Visser sobre el espacio-tiempo de Kerr [Vis07].

A diferencia de la solución de Schwarzschild, donde el cuerpo solo es estático, esféricamente simétrico y sin carga, la solución de Kerr extiende este caso para un cuerpo **en rotación** con masa M y momento angular J . Bajo estas suposiciones, podemos inferir lo siguiente:

- a. Dado que el entorno es vacío, se cumple la ecuación de campo de Einstein en el vacío (2.4), es decir, el tensor de energía-momento se anula: $T_{\sigma\nu} = 0$.
- b. Debido a la simetría esférica del sistema, es conveniente adoptar coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) .
- c. Se asume que la solución es estática, lo que significa que no hay flujos de materia ni variaciones temporales en la curvatura. En consecuencia, la métrica no puede depender de la coordenada temporal t .
- d. Debido a la presencia de rotación la métrica debe ser axialmente simétrica, es decir, independiente de la coordenada azimutal ϕ .

- e. En el límite cuando $J \rightarrow 0$, la métrica debe recuperar la forma de la métrica de Minkowski.
- f. En el límite cuando $r \rightarrow \infty$, la métrica debe recuperar la forma de la métrica de Schwarzschild.
- g. Para el cuerpo la masa se considera puntuamente distribuida y centrada en $r = 0$.

Las condiciones anteriormente descritas, determinan una métrica que soluciona las ecuaciones de Einstein en el vacío, en coordenadas esféricas de la forma,

$$ds^2 = A(r, \theta)dt^2 + 2B(r, \theta)dtdr + 2C(r, \theta)dtd\theta + 2D(r, \theta)drd\theta + E(r, \theta)d\phi^2 + F(r, \theta)d\theta^2,$$

y puede expresarse en forma matricial como,

$$g_{\sigma\nu} = \begin{pmatrix} A(r, \theta) & B(r, \theta) & 0 & C(r, \theta) \\ B(r, \theta) & 0 & 0 & D(r, \theta) \\ 0 & 0 & E(r, \theta) & 0 \\ C(r, \theta) & D(r, \theta) & 0 & F(r, \theta) \end{pmatrix},$$

cuya inversa contravariante está dada por,

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{F(r, \theta)}{\beta} & \frac{D(r, \theta)}{\beta} & 0 & -\frac{C(r, \theta)}{\beta} \\ \frac{D(r, \theta)}{\beta} & \frac{A(r, \theta)F(r, \theta) - C^2(r, \theta)}{\beta} & 0 & \frac{B(r, \theta)C(r, \theta) - A(r, \theta)D(r, \theta)}{\beta} \\ 0 & 0 & \frac{1}{E} & 0 \\ -\frac{C(r, \theta)}{\beta} & \frac{B(r, \theta)C(r, \theta) - A(r, \theta)D(r, \theta)}{\beta} & 0 & \frac{B^2(r, \theta) - A(r, \theta)F(r, \theta)}{\beta} \end{pmatrix},$$

donde $\beta = AF - C^2 + 2BD - \frac{D^2A}{B^2}$. Además, $B(r, \theta)$ y β deben ser distintas de cero.

Dado que se usan las mismas ecuaciones de campo de Einstein que en la solución de Schwarzschild, se sigue el mismo razonamiento de resolución. Para los cálculos simbólicos, se utilizó el sistema SageMath [The23] (Ver anexos en B) en donde que se definió una métrica generalizada propuesta mediante funciones $A(r, \theta), B(r, \theta), \dots$ y se calcularon:

- Los símbolos de Christoffel de segunda especie definidos en la Ecu. (2.2.1), como por ejemplo,

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{-D(r, \theta)^2 \frac{\partial A}{\partial r} - B(r, \theta) D(r, \theta) \frac{\partial C}{\partial r} - (C(r, \theta)D(r, \theta) - B(r, \theta)F(r, \theta)) \frac{\partial B}{\partial r}}{2(2B(r, \theta)C(r, \theta)D(r, \theta) - A(r, \theta)D(r, \theta)^2 - B(r, \theta)^2F(r, \theta))},$$

- El tensor de Ricci en condiciones de vacío, en donde sus entradas extensas y se observan términos, sin un patrón definido en su disposición o estructura. como por ejemplo,

$$R_{tt} = \frac{(r, \theta)^2 C(r, \theta) D(r, \theta) - 3A(r, \theta) B(r, \theta) C(r, \theta) D(r, \theta)^2 + \dots [más\ términos]}{4(B(r, \theta)^2 D(r, \theta)^2 E(r, \theta) F(r, \theta) - 2B(r, \theta) C(r, \theta) D(r, \theta)^3 E(r, \theta) \dots [más\ términos])}.$$

Obteniendo así un sistema de 16 ecuaciones diferenciales parciales, una para cada componente independiente del tensor de Ricci. La solución de este sistema es complicado de realizar tradicionalmente, pues como se puede ver por el ejemplo de R_{tt} las entradas del tensor de Ricci son bastante extensas, por lo tanto se solucionan también usando SageMath.

Para el desarrollo de la solución, se considera que:

- El sistema está sobre dimensionado pues consta de 16 ecuaciones ($R_{tt} =, R_{tr} = 0, \dots$) y 6 incógnitas (A, B, C, \dots).
- Se eligen coordenadas tipo Eddington-Finkelstein ³, para tener $B = 1$.
- Por la simetría axial y estructura del espacio angular, $E = r^2 + a^2 \cos(2\theta)$ con $a = J/M$ el momento angular por unidad de masa.
- Por la simetría esférica del cuerpo $C, D \propto \sin^2(\theta)$.

A partir de estas consideraciones, y realizando los límites necesarios ($r \rightarrow \infty; a \rightarrow 0$) se llega al forma original de la **métrica de Kerr**,

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left[1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right] (du + a \sin^2 \theta d\phi)^2 + 2(du + a \sin^2 \theta d\phi)(dr + a \sin^2 \theta d\phi) \\ & + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Con esta solución podemos caracterizar la geometría del espacio alrededor de un cuerpo masivo en rotación. Sin embargo, esta no es la única forma que puede tomar la métrica de Kerr. Debido a la complejidad de los cálculos involucrados, muchos científicos optaron por reescribirla en distintos sistemas de coordenadas, como las coordenadas cartesianas, rational polynomial, Doran, Boyer–Lindquist, entre otras. Cada una responde a necesidades particulares según el contexto físico o computacional.

Una de las formas más utilizadas de la métrica de Kerr es la que se expresa en *coordenadas de Boyer–Lindquist*, introducidas por Robert H. Boyer y Richard W. Lindquist en 1967 [BL67]. Esta reformulación se

³Las coordenadas tipo Eddington-Finkelstein [MTW73] son un sistema de coordenadas que extiende la métrica de Schwarzschild de manera suave a través del horizonte de eventos, eliminando la singularidad de coordenadas en $r_s = 2GM$

propuso con el fin de expresar la métrica de Kerr en una forma más manejable, análoga a las coordenadas esféricas empleadas en el caso de Schwarzschild. Su principal ventaja radica en que minimiza los términos fuera de la diagonal, lo que simplifica el análisis matemático y facilita la interpretación geométrica del espacio-tiempo. En esta representación, los parámetros físicos fundamentales —la masa M y el momento angular $a = J/M$ — aparecen explícitamente en los coeficientes de la métrica, permitiendo identificar de forma directa la influencia de la rotación sobre la curvatura del espacio-tiempo. Desde el punto de vista geométrico, esta formulación resalta la simetría axial característica de la métrica Kerr y permite identificar con claridad tanto el horizonte de eventos como la ergosfera (cuyas características se explican con mayor detalle más adelante). Por estas razones, las coordenadas de Boyer-Lindquist se consolidaron como el estándar de referencia en la literatura teórica y numérica sobre agujeros negros en rotación.

Para llegar a esta forma realizamos el cambio de variable $u = t + r$ en la Ecu. (3.2),

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left[1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right] (dt + dr + a \sin^2 \theta d\phi)^2 + 2(dt + dr + a \sin^2 \theta d\phi)(dr + a \sin^2 \theta d\phi) \\ & + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \end{aligned}$$

solucionando término a término, se obtiene que el primer término se reduce a

$$\begin{aligned} - \left[1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right] (dt + dr + a \sin^2 \theta d\phi)^2 = & -dt^2 - 2dt dr - dr^2 - 2(dt + dr)a \sin^2 \theta d\phi + \\ & a^2 \sin^4 \theta d\phi^2 + \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} (dt + dr + a \sin^2 \theta d\phi)^2, \end{aligned}$$

por otro lado, para el segundo término se tiene,

$$\begin{aligned} 2(dt + dr + a \sin^2 \theta d\phi)(dr + a \sin^2 \theta d\phi) = & 2dt dr + 2dr^2 + 2a \sin^2 \theta dr d\phi + \\ & 2(dt + dr)a \sin^2 \theta d\phi + 2a^2 \sin^4 \theta d\phi^2, \end{aligned}$$

por ultimo,

$$(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) = (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + \cos^2 \theta a^2 \sin^2 \theta d\phi^2,$$

y al reducir términos semejantes semejantes se obtiene,

$$\begin{aligned} ds^2 = & -dt^2 + dr^2 + 2a \sin^2 \theta dr d\phi + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 \\ & + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} (dt + dr + a \sin^2 \theta d\phi)^2 \\ & + 3a^2 \sin^4 \theta d\phi^2 . \end{aligned}$$

Considerando propiedades trigonométricas para $(r^2 + a^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta d\phi^2 + 3a^2 \sin^4 \theta d\phi^2$, tenemos.

$$\begin{aligned} ds^2 = & -dt^2 + dr^2 + 2a \sin^2 \theta dr d\phi + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 \\ & + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} (dt + dr + a \sin^2 \theta d\phi)^2 . \end{aligned} \tag{3.3}$$

Sobre esta métrica aplicamos los cambios de coordenadas propuestas por Boyer-lindquist, como muestra Visser [Vis07]. Para llegar a una forma más canónica y simple se considera,

$$\begin{aligned} t &= t_{BL} + 2m \int \frac{r dr}{r^2 - 2mr + a^2} , \\ \phi &= -\phi_{BL} - a \int \frac{dr}{r^2 - 2mr + a^2} , \\ r &= r_{BL} , \\ \theta &= \theta_{BL} . \end{aligned}$$

cuyos diferenciales se expresan como,

$$\begin{aligned} dt &= dt_{BL} + \frac{2mr dr}{r^2 - 2mr + a^2} , \\ d\phi &= -d\phi_{BL} - \frac{adr}{r^2 - 2mr + a^2} , \\ dr &= dr_{BL} , \\ d\theta &= d\theta_{BL} . \end{aligned}$$

Al reemplazar estos diferenciales en la métrica (3.3) y dejando atrás el subíndice BL se obtiene,

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left(dt + \frac{2mr dr}{r^2 - 2mr + a^2} \right)^2 + dr^2 + \left(-d\phi - \frac{a dr}{r^2 - 2mr + a^2} \right) 2a \sin^2 \theta dr \\ & + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 + \left(-d\phi - \frac{a dr}{r^2 - 2mr + a^2} \right)^2 (r^2 + a^2) \sin^2 \theta \\ & + \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \left(\left(dt + \frac{2mr dr}{r^2 - 2mr + a^2} \right) + dr + a \sin^2 \theta \left(-d\phi - \frac{a dr}{r^2 - 2mr + a^2} \right) \right)^2, \end{aligned}$$

renombrando los término $\mathcal{P} = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ y $\mathcal{B} = r^2 - 2mr + a^2$, se llega a la expresión,

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left(dt + \frac{2mr dr}{\mathcal{B}} \right)^2 + dr^2 + \left(-d\phi - \frac{a dr}{\mathcal{B}} \right) 2a \sin^2 \theta dr \\ & + \mathcal{P} d\theta^2 + \left(-d\phi - \frac{a dr}{\mathcal{B}} \right)^2 (r^2 + a^2) \sin^2 \theta \\ & + \frac{2mr}{\mathcal{P}} \left(dt + \frac{2mr dr}{\mathcal{B}} + dr + a \sin^2 \theta \left(-d\phi - \frac{a dr}{\mathcal{B}} \right) \right)^2, \end{aligned}$$

Se desarrollan los productos presentes, obteniéndose para cada término los siguientes resultados:

- para el primero,

$$- \left(dt + \frac{2mr dr}{\mathcal{B}} \right)^2 = -dt^2 - \frac{4mr}{\mathcal{B}} dt dr - \frac{4m^2 r^2}{\mathcal{B}^2} dr^2,$$

- para el segundo,

$$\left(-d\phi - \frac{a dr}{\mathcal{B}} \right) 2a \sin^2 \theta dr = -2a \sin^2 \theta dr d\phi - \frac{2a^2 \sin^2 \theta}{\mathcal{B}} dr^2,$$

- para el tercero,

$$\begin{aligned} \left(-d\phi - \frac{a dr}{\mathcal{B}} \right)^2 (r^2 + a^2) \sin^2 \theta &= (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{2a (r^2 + a^2) \sin^2 \theta}{\mathcal{B}} d\phi dr \\ &+ \frac{a^2 (r^2 + a^2) \sin^2 \theta}{\mathcal{B}^2} dr^2, \end{aligned}$$

- y finalmente para el cuarto,

$$\begin{aligned} \frac{2mr}{\mathcal{P}} \left(dt + \frac{2mr dr}{\mathcal{B}} + dr + a \sin^2 \theta \left(-d\phi - \frac{a dr}{\mathcal{B}} \right) \right)^2 &= \frac{2mr}{\mathcal{P}} (dt^2 - 2a \sin^2 \theta dt d\phi + a^2 \sin^4 \theta d\phi^2 \\ &+ 2 \left[1 + \frac{\mathcal{B}}{2mr} - a^2 \sin^2 \theta \right] (dt dr - a \sin^2 \theta d\phi dr) + \left[1 + \frac{\mathcal{B}}{2mr} - a^2 \sin^2 \theta \right]^2 dr^2). \end{aligned}$$

Agrupando y reduciendo términos semejantes semejantes se obtiene,

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & - \left(1 - \frac{2mr}{\mathcal{P}} \right) dt^2 - \frac{4mra \sin^2 \theta}{\mathcal{P}} dt d\phi + \mathcal{P} d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta d\phi^2 \\
 & + \frac{4mr}{\mathcal{B}} dt dr - 2a \sin^2 \theta dr d\phi + \frac{2a(r^2 + a^2) \sin^2 \theta}{\mathcal{B}} d\phi dr \\
 & + \frac{2mr}{\mathcal{P}} \left(2 \left[1 + \frac{\mathcal{B}}{2mr} - a^2 \sin^2 \theta \right] (dt dr - a \sin^2 \theta d\phi dr) + \left[1 + \frac{\mathcal{B}}{2mr} - a^2 \sin^2 \theta \right]^2 dr^2 \right) + \\
 & - \frac{4m^2 r^2}{\mathcal{B}^2} dr^2 + dr^2 - \frac{2a^2 \sin^2 \theta}{\mathcal{B}} dr^2 + \frac{a^2(r^2 + a^2) \sin^2 \theta}{\mathcal{B}^2} dr^2 + \frac{2mr}{\mathcal{P}} \left(1 + \frac{\mathcal{B}}{2mr} - a^2 \sin^2 \theta \right)^2 dr^2 .
 \end{aligned}$$

Por ultimo, se toma a consideración las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
 \gamma &= 1 + \frac{2mr - a^2 \sin^2 \theta}{\mathcal{B}}, \\
 \mathcal{P} - \mathcal{B} &= 2mr - a^2 \sin^2 \theta, \\
 0 &= \frac{\gamma}{\mathcal{P}} - \frac{1}{\mathcal{B}}.
 \end{aligned}$$

Al aplicarlas al proceso de simplificación de las últimas filas, se cancelan los términos mixtos $d\phi dr$, $dt dr$ y el término dr^2 corresponde a $\frac{\mathcal{P}}{\mathcal{B}}$, teniendo así, la métrica de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist (t, r, θ, ϕ) como,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2mr}{\mathcal{P}} \right) dt^2 - \frac{4mra \sin^2 \theta}{\mathcal{P}} dt d\phi + \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{B}} dr^2 + \mathcal{P} d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2 \sin^2 \theta}{\mathcal{P}} \right) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.4)$$

donde recordemos $\mathcal{P} = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ y $\mathcal{B} = r^2 - 2mr + a^2$, manteniendo la definición de $a = J/m$ como el parámetro de rotación. En este trabajo se considerará la metrica de Kerr-BL como la descrita en la ecuación anterior y cuya matriz toma la forma,

$$g_{\sigma\nu} = \begin{pmatrix} - \left(1 - \frac{2mr}{\mathcal{P}} \right) & 0 & 0 & - \frac{2mra \sin^2 \theta}{\mathcal{P}} \\ 0 & \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{B}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{P} & 0 \\ - \frac{2mra \sin^2 \theta}{\mathcal{P}} & 0 & 0 & \left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2 \sin^2 \theta}{\mathcal{P}} \right) \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

3.2.1. Características e implicaciones

Como se ha mencionado antes, la métrica de Kerr exhibe propiedades fundamentales que permiten describir la geometría del espacio-tiempo alrededor de cuerpos masivos en rotación. Esta solución generaliza la métrica de Schwarzschild al incluir el momento angular, representado por el parámetro $a = J/M$. Algunas de las características más importantes son:

- Horizonte de eventos y ergosfera:** La geometría descrita por la métrica de Kerr presenta **dos horizontes** definidos por las raíces de la función $\mathcal{B} = r^2 - 2Mr + a^2$,

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2},$$

donde r_+ corresponde al horizonte de eventos exterior. Si $a > M$, los horizontes desaparecen, lo que llevaría a una *singularidad desnuda*, situación no permitida por la conjetura de censura cósmica⁴.

Una característica exclusiva de la métrica de Kerr es la **ergosfera**, una región situada fuera del horizonte de eventos donde el arrastre de referencia⁵ es tan intenso que ningún objeto puede permanecer en reposo respecto a un observador en el infinito. El límite exterior de esta región está dado por,

$$r_E = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}.$$

- Trayectorias geodésicas y órbitas:** Al igual que en Schwarzschild, las partículas de prueba y la luz siguen trayectorias geodésicas, pero el momento angular del cuerpo central introduce nuevos efectos relativistas:

- **Órbitas circulares ecuatoriales:** Se sitúan en el plano $\theta = \pi/2$. En Kerr existen tanto órbitas *prógradas* (en la dirección de rotación) como *retrogradas* (en sentido opuesto). Las órbitas prógradas pueden acercarse más al agujero negro, debido al arrastre del espacio-tiempo.
- **Órbitas elípticas:** Al igual que en Schwarzschild, siguen una generalización de las trayectorias keplerianas, pero aquí presentan precesión adicional inducida por la rotación del cuerpo.
- **Órbita ISCO (Innermost Stable Circular Orbit):** Existe un radio crítico por debajo del cual las órbitas circulares dejan de ser estables. En Kerr, el valor de este radio depende tanto del momento angular como del sentido del movimiento de la partícula.

⁴La conjetura de censura cósmica, propuesta por Roger Penrose [Pen69], sugiere que las singularidades generadas por colapsos gravitacionales no pueden ser observadas desde el exterior, ya que siempre están ocultas por un horizonte de eventos.

⁵El frame-dragging (arrastre de referencia) es un efecto relativista según el cual un cuerpo en rotación 'arrastra' consigo el espacio-tiempo circundante, haciendo que los sistemas de referencia cercanos se desplacen con él.

- **Órbitas de escape:** Cuando la energía total de una partícula supera cierto umbral, esta puede seguir trayectorias abiertas y escapar del campo gravitacional, aunque el momento angular modifica las condiciones necesarias para lograrlo.

Como se mencionó en secciones anteriores, las soluciones métricas de Schwarzschild y Kerr describen con precisión la geometría del espacio-tiempo en las cercanías de cuerpos masivos, ya sean estáticos o en rotación. Inicialmente, estas soluciones fueron desarrolladas como ejercicios teóricos dentro del marco de la relatividad general, sin una conexión directa con objetos astrofísicos observables. No fue sino hasta mediados del siglo XX [Pen65] que comenzaron a interpretarse físicamente como descripciones del entorno gravitacional extremo de agujeros negros, cuerpos cuya existencia fue inicialmente hipotética. Sin embargo, aunque los desarrollos realizados son teóricos e idealizados, marcan un punto de partida fundamental para el análisis en contextos reales. Por lo tanto, estas soluciones adquieren relevancia si exhiben un comportamiento estable ante eventos externos que generan perturbaciones, como la incidencia de la luz de las estrellas, las ondas gravitacionales generadas por otros sistemas, partículas que atraviesan los horizontes de eventos, entre otros. Esto conduce al desarrollo de la teoría de perturbaciones, un enfoque que revela el carácter dinámico y elástico del espacio-tiempo, cuya geometría puede oscilar, deformarse o propagarse en forma de ondas gravitacionales como respuesta a perturbaciones externas o fluctuaciones internas de energía.

Capítulo 4

Teoría de perturbaciones en relatividad

La ecuación de Teukolsky, en la cual está enfocada este trabajo, se encuentra descrita dentro del marco de la teoría de perturbaciones, y esta a su vez en la relatividad general. La teoría de perturbaciones se establece como un método para analizar pequeñas desviaciones respecto a soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein, con el fin de describir fenómenos físicos más realistas. Este método consiste que en lugar de resolver las ecuaciones completas para configuraciones dinámicas complejas, se parte de una métrica de fondo bien conocida (como Schwarzschild o Kerr) y se estudia cómo cambia la geometría que describe el espacio-tiempo ante alteraciones leves, ya sea por la presencia de campos externos, colisiones, o fluctuaciones internas.

Una motivación importante para el desarrollo de esta teoría fue comprender la estabilidad de los agujeros negros frente a perturbaciones externas. Históricamente, los primeros avances en esta dirección los dieron Regge y Wheeler, quienes en 1957 [RW57] analizaron perturbaciones en la geometría del espacio-tiempo en las cercanías de un agujero negro de Schwarzschild¹ y derivaron una ecuación diferencial que describe la evolución temporal de pequeñas perturbaciones métricas, mostrando que estas pueden interpretarse como ondas que se propagan sobre la geometría de fondo dada por la métrica de Schwarzschild. En este contexto, Vishveshwara introdujo en 1970 [Vis70] El concepto de *modos cuasinormales* (QNM's) se refiere a oscilaciones propias del espacio-tiempo con frecuencia compleja, caracterizadas por ser decadentes, a diferencia de los modos normales. Esto implica que los QNM's describen el proceso de retorno al equilibrio de un agujero negro después de ser perturbado.

Esta teoría permite, entonces, estudiar la estabilidad de soluciones exactas como la métrica de Sch-

¹Los agujeros negros de Schwarzschild y Kerr reciben su nombre por compartir las características de las soluciones métricas homónimas: masa sin carga ni rotación ($Q = 0, J = 0$) en el caso de Schwarzschild, y masa con rotación pero sin carga ($Q = 0, J \neq 0$) en el de Kerr.

warzschild y, por supuesto, la métrica de Kerr. Sin embargo, debido al creciente interés por objetos observables, resulta necesario desarrollar métodos que permitan vincular estas perturbaciones con cantidades físicas medibles. En esta línea, Bardeen y Press propusieron en 1973 [BP73] una formulación basada en el formalismo de Newman Penrose (Ver apéndice A), que permitió establecer una conexión directa entre las soluciones matemáticas de las perturbaciones y las señales de ondas gravitacionales observables, aquellas detectadas mediante interferometría láser por los observatorios LIGO (EE.UU.) y Virgo (Italia). Estos instrumentos registran variaciones de distancia del orden de $10^{-21}m$ provocadas por el paso de ondas gravitacionales generadas en eventos astrofísicos como la fusión de agujeros negros o estrellas de neutrones. Las frecuencias medidas durante la fase de ringdown coinciden con los modos QNM's predichos teóricamente.

Una forma complementaria de abordar el estudio de las perturbaciones consiste en analizar tanto la dinámica de partículas (a través de geodésicas) como la propagación de campos, incluyendo ondas escalares, electromagnéticas o gravitacionales. En sus notas de clase, Berti [Ber16] destaca cómo estos dos enfoques están profundamente relacionados. En particular, establece un puente conceptual entre la estabilidad de órbitas circulares y las frecuencias de los QNM's, lo que subraya el poder predictivo de la teoría de perturbaciones para describir fenómenos en sistemas gravitatorios reales.

Como en toda teoría física, es fundamental contar con una formulación matemática sólida. En este contexto, dicha formulación debe ser capaz de describir, la evolución de distintos tipos de campos en geometrías curvadas. Como se mencionó anteriormente, esto ya se había logrado para el caso de una geometría estática y esféricamente simétrica, descrita por la métrica de Schwarzschild. Saul Teukolsky extendió este análisis perturbativo al caso de agujeros negros en rotación, dando lugar a su ecuación maestra, que constituye la piedra angular de este trabajo.

4.1. La ecuación maestra de Teukolsky

El problema central que abordó Saul Teukolsky en su trabajo de 1973 [Teu73] (del cual nos basaremos ampliamente para el desarrollo de esta sección) fue la búsqueda de una formulación para describir las perturbaciones producidas por diversos campos (escalares, electromagnéticos y gravitacionales) en el entorno de un agujero negro de kerr, es decir, con la geometría de fondo curva² dada por la métrica de Kerr. El desafío no radica únicamente en escribir las ecuaciones que gobiernan dichas perturbaciones, sino en lograr que estas fueran *separables*, es decir, que permitieran descomponerse en ecuaciones diferenciales

²Se entiende por “geometría de fondo curva” un espacio-tiempo con curvatura no nula, usualmente representado por una métrica solución de las ecuaciones de Einstein

ordinarias dependientes de una sola variable, lo cual resultaba clave para su resolución analítica o numérica.

Antes de abordar el caso de Kerr, conviene ilustrar el enfoque general con un ejemplo simple:

Ejemplo 1. *Un campo escalar sin masa sobre la geometría de fondo curva dada por la métrica de Schwarzschild. En este caso, para un campo escalar Φ sin masa tenemos,*

$$\square\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi) = 0, \quad (4.1)$$

donde \square es el operador d'Alembertiano³ en el espacio-tiempo curvo, $g^{\mu\nu}$ es el contravariante de la métrica de Schwarzschild, y $\sqrt{-g}$ el negativo del determinante de la matriz asociada a la métrica dada.

Notemos que $\square\Phi = 0$, en el fondo de Schwarzschild, es una ecuación diferencial parcial que involucra cuatro variables independientes: el tiempo t y las coordenadas espaciales r, θ y φ . La solución es entonces una función escalar $\Phi(t, r, \theta, \varphi)$. Dado que la métrica de Schwarzschild es estática y esféricamente simétrica, es razonable suponer que las dependencias temporales y angulares pueden ser tratadas de manera separada, lo que sugiere la posibilidad de proponer una solución separable, mediante funciones conocidas (como exponenciales y armónicos esféricos) para las variables (t, θ, ϕ) , mientras que la dependencia radial queda contenida en una función por determinar. Estas condiciones determinan una solución de la forma,

$$\Phi(t, r, \theta, \varphi) = e^{-i\omega t} \sum_{\ell m} \frac{\psi_\ell(r)}{r} Y_{\ell m}(\theta, \varphi),$$

donde $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ representan los armónicos esféricos.

Siguiendo el desarrollo presentado en las notas de Berti [Ber16]⁴, sustituimos la solución propuesta en la Ecu. (4.1), con $A(r) = 1 - \frac{2GM}{r}$, en la métrica de Schwarzschild y el determinante de dicha métrica, $\sqrt{-g} = r^2 \sin \theta$, así,

$$\square\Phi = -\frac{1}{A(r)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 A(r) \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0.$$

³El operador d'Alembertiano es un operador diferencial de segundo orden que generaliza el operador de Laplace al contexto relativista. ($\square = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$)

⁴En este desarrollo, el autor (Berti) considera la constante $G = 1$ y por lo tanto, $k_1 = 2M$ en la métrica de Schwarzschild, además la función $A(r) = f(r)$.

Dado que los armónicos esféricos satisfacen la ecuación de Legendre, se tiene que,

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\phi^2 \right] Y_{\ell m} = -\ell(\ell+1) Y_{\ell m},$$

y utilizando la solución propuesta $\Phi(t, r, \theta, \phi)$, se obtiene la siguiente ecuación radial,

$$-\frac{\omega^2}{A(r)} \frac{\psi_\ell(r)}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 A(r) \frac{d}{dr} \left(\frac{\psi_\ell(r)}{r} \right) \right) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \frac{\psi_\ell(r)}{r} = 0.$$

Realizando un cambio de coordenada r_* , definida por $dr_*/dr = A^{-1}$, se obtiene una ecuación diferencial ordinaria tipo Schrödinger, la cual es una ecuación de onda unidimensional, para la función radial $\psi_\ell(r)$

$$\frac{d^2 \psi_\ell}{dr_*^2} + [\omega^2 - V_\ell(r)] \psi_\ell = 0, \quad (4.2)$$

donde el potencial efectivo está dado por:

$$V_\ell(r) = A(r) \left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right). \quad (4.3)$$

Con este resultado, es claro que las perturbaciones generadas por campos escalares en el espacio-tiempo con geometría de fondo curva dada por la métrica de Schwarzschild pueden interpretarse como ondas que se propagan en un medio efectivo caracterizado por una barrera de potencial. El potencial $V_\ell(r)$ actúa como una estructura de dispersión que regula el comportamiento de las soluciones, permitiendo el análisis de fenómenos como la reflexión, transmisión y QNM's. Para campos electromagnéticos y gravitacionales, el procedimiento es análogo pero más complejo, y fue desarrollado inicialmente por Regge, Wheeler y Zerilli [RW57].

Ejemplo 2. Consideremos ahora el mismo campo escalar sin masa sobre la geometría de fondo curva dada por la métrica de Kerr en coordenadas Boyer-Lindquist (Kerr-BL) (Ecu. 3.4), el operador d'Alembertiano tendrá la misma forma que en el ejemplo anterior (Ecu.4.1) y puede expresar como:

$$\begin{aligned} \square \Phi = -\frac{1}{\sqrt{-g}} & \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{-g} g^{tt} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{-g} g^{rr} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sqrt{-g} g^{\theta\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sqrt{-g} g^{\phi\phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sqrt{-g} g^{t\phi} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \right] = 0, \end{aligned}$$

donde las componentes correspondientes al contravariante de la métrica de Kerr-BL son:

$$\begin{aligned} g^{tt} &= -\left(1 - \frac{2mr}{\mathcal{P}}\right)^{-1}, & g^{rr} &= \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{P}}, \\ g^{\theta\theta} &= \frac{1}{\mathcal{P}}, & g^{\phi\phi} &= \left(r^2 + a^2 + \frac{2mr a^2 \sin^2 \theta}{\mathcal{P}}\right)^{-1} \sin^{-2} \theta, \\ g^{t\phi} &= \frac{2mr a \sin^2 \theta}{\mathcal{P}}, \end{aligned}$$

y $\sqrt{-g} = \frac{\mathcal{P} \sin \theta}{\mathcal{B}}$ es el determinante de la métrica de Kerr-BL. Por lo tanto, el operador d'Alembertiano completo se expresa como:

$$\begin{aligned} \square \Phi &= -\frac{\mathcal{P} \sin \theta}{\mathcal{B} \left(1 - \frac{2mr}{\mathcal{P}}\right)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \sin \theta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\cos \theta}{\mathcal{B}} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{\sin \theta}{\mathcal{B}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \\ &\quad + \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{B} \sin^2 \theta \left(r^2 + a^2 + \frac{2mr a^2 \sin^2 \theta}{\mathcal{P}}\right)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{2Mar \sin^3 \theta}{\mathcal{B}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial \phi} = 0. \end{aligned}$$

debido a la simetría axial del agujero negro de Kerr (simetría bajo rotaciones alrededor del eje), podemos suponer que $\Phi(t, r, \theta, \phi)$ tiene una forma dependiente del tiempo y del ángulo azimutal, es decir,

$$\Phi(t, r, \theta, \varphi) = e^{-i\omega t} e^{-im\phi} \sum_{\ell} \frac{\psi_{\ell}(r)}{r} \Theta_{\ell m}(\theta),$$

donde la función $\Theta_{\ell m}(\theta)$ no corresponde a un armónico esférico en este caso, sino a una función más compleja que depende de θ . Sin embargo, al sustituir esta solución en la ecuación anterior, la ecuación resultante no podrá separarse, ya que las variables r y θ interactúan entre sí a través de los términos cruzados. Esto se evidencia en los acoplamientos entre los términos temporales y angulares, como se observa en el término que involucra ∂_t y ∂_{ϕ} ,

$$-\frac{\mathcal{P} \sin \theta}{\mathcal{B} \left(1 - \frac{2Mr}{\mathcal{P}}\right)}, \quad \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{B} \sin^2 \theta \left(r^2 + a^2 + \frac{2mr a^2 \sin^2 \theta}{\mathcal{P}}\right)}.$$

Observación 1. Como se aprecia en el ejemplo anterior para la métrica de Kerr, el proceso que se aplica en el caso de Schwarzschild no es tan efectivo debido a una dificultad crucial: la ausencia de simetría esférica. Aunque la métrica de Kerr es estacionaria y axialmente simétrica, no posee simetría esférica, lo que impide la aplicación directa del método de separación de variables utilizado en el ejemplo de Schwarzschild para un campo de prueba escalar.

La dificultad que acabamos de exponer, fue superada por Teukolsky mediante el uso del *formalismo de Newman Penrose* (NP), que permite describir tanto la métrica como las ecuaciones de Einstein dentro de un marco matemático más manejable y generalizado, capaz de incorporar perturbaciones lineales no solo de campos escalares, sino también de campos gravitacionales y electromagnéticos.

El formalismo NP, desarrollado con mayor detalle en el apéndice A, reformula el análisis tensorial tradicional en términos de una base local construida a partir de tetradas nulas $\{l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu\}$, donde l^μ y n^μ son vectores reales y m^μ, \bar{m}^μ forman un par de vectores complejos conjugados. Vamos a ver como esta construcción permite que, al introducir perturbaciones lineales, sea posible aplicar la separación de variables incluso en la compleja geometría de Kerr-BL. Un aspecto fundamental señalado por Teukolsky es que, en un espacio-tiempo de tipo D⁵ como Kerr, las ecuaciones de campo de Einstein se pueden reorganizar de tal forma que las perturbaciones se expresen únicamente en términos de los escalares definidos en el formalismo NP, dando paso a las 18 ecuaciones NP descritas en (A.9).

Siguiendo la formulación propuesta por Chandrasekhar [Cha83] y al trabajo original de Teukolsky [Teu73], se introducen perturbaciones lineales sobre una geometría de fondo mediante una descomposición del tipo:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu}^{(1)}, \quad X = X^{(0)} + X^{(1)},$$

donde X representa indistintamente las tetradas nulas, los coeficientes de espín o los escalares de Weyl, entre otros. El superíndice (0) denota las cantidades correspondientes a la solución exacta conocida, en este caso, la métrica de Kerr, mientras que (1) indica la perturbación lineal introducida.

Al sustituir estas expresiones en las ecuaciones NP (A.9) y en las ecuaciones de Maxwell en NP (A.10), y conservar únicamente los términos de primer orden, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales lineales que describe la dinámica de las cantidades perturbadas. Dicho sistema incluye tanto las ecuaciones gravitacionales como las electromagnéticas, las cuales, en conjunto, caracterizan las perturbaciones de campos asociados a un sistema no vacío.⁶

⁵Hace referencia a la *Petrov's Classification of the Weyl Tensor* [Per25], en la cual el tipo D corresponde a espacio tiempos con dos direcciones principales nulas distintas y repetidas.

⁶En la tesis de Aimer [Aim23] se presenta una deducción detallada de este procedimiento, considerando la introducción de términos de perturbación únicamente en el campo gravitacional, y se llega al mismo par de ecuaciones correspondientes que se exponen a continuación.

Observación 2. Ecuaciones gravitacionales: Las ecuaciones gravitacionales, expresadas en términos de las derivadas direccionales y de los coeficientes de espín definidos sobre una tetrada nula, se obtienen al proyectar las ecuaciones de campo de Einstein en dicha base y considerar únicamente perturbaciones de primer orden⁷. De este modo, se derivan un conjunto de relaciones diferenciales que describen la evolución de los escalares de Weyl perturbados $\psi_0^{(1)}$ y $\psi_4^{(1)}$. Estas expresiones constituyen la forma linealizada de las ecuaciones gravitacionales en el formalismo de NP, cuya formulación se presenta a continuación siguiendo la exposición presentada por Teukolsky [Teu73].

$$\begin{aligned} [(D - 3\epsilon + \epsilon^* - 4\rho - \rho^*)(\Delta - 4\gamma + \mu) \\ - (\delta + \pi^* - \alpha^* - 3\beta - 4\tau)(\delta^* + \pi - 4\alpha) - 3\psi_2] \psi_0^{(1)} = 4\pi T_0, \quad (4.4) \end{aligned}$$

donde el término fuente T_0 está dado por

$$\begin{aligned} T_0 = (\delta + \pi^* - \alpha^* - 3\beta - 4\tau) [(D - 2\epsilon - 2\rho^*) T_{lm}^{(1)} - (\delta + \pi^* - 2\alpha^* - 2\beta) T_{ll}^{(1)}] \\ + (D - 3\epsilon + \epsilon^* - 4\rho - \rho^*) [(\delta + 2\pi^* - 2\beta) T_{lm}^{(1)} - (D - 2\epsilon + 2\epsilon^* - \rho^*) T_{mm}^{(1)}]. \end{aligned}$$

Como presenta el autor, el conjunto completo de ecuaciones de NP es invariante bajo el intercambio $l \leftrightarrow n$ y $m \leftrightarrow m^*$ independientemente de la elección específica de las direcciones nulas l y n ⁸, Aplicando esta transformación, Teukolsky obtuvo la ecuación complementaria,

$$\begin{aligned} [(\Delta + 3\gamma - \gamma^* + 4\mu + \mu^*)(D + 4\epsilon - \rho) \\ - (\delta^* - \pi^* + \beta^* + 3\alpha + 4\pi)(\delta - \tau + 4\beta) - 3\psi_2] \psi_4^{(1)} = 4\pi T_4, \quad (4.5) \end{aligned}$$

⁷En la presente tesis consideran únicamente perturbaciones lineales, ya que constituyen el primer y más sencillo nivel de aproximación en el estudio de la estabilidad de las soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein. Este enfoque permite aislar los efectos fundamentales de las perturbaciones sin introducir las complicaciones no lineales asociadas a órdenes superiores. Además, antes de abordar perturbaciones de mayor orden (lo cual está fuera de nuestro alcance), es necesario verificar que el comportamiento dinámico del sistema sea estable bajo perturbaciones pequeñas, lo que garantiza la validez física y matemática del modelo base.

⁸Esta transformación se denomina *simetría de primado* (prime symmetry), y corresponde a una simetría interna del formalismo NP, identificada por Geroch, Held y Penrose [GHP73]. Dicha simetría establece que el conjunto completo de ecuaciones de NP es invariante bajo el intercambio $l^\mu \leftrightarrow n^\mu$ y $m^\mu \leftrightarrow \bar{m}^\mu$, junto con las sustituciones correspondientes en los coeficientes de espín y las componentes del tensor de Weyl.

con término fuente,

$$\begin{aligned} T_4 = & (\Delta + 3\gamma - \gamma^* + 4\mu + \mu^*) [(\delta^* - 2\pi^* + 2\alpha) T_{nm^*} - (\Delta + 2\gamma - 2\gamma^* + \mu^*) T_{m^*m^*}] \\ & + (\delta^* - \pi^* + \beta^* + 3\alpha + 4\pi) [(\Delta + 2\gamma + 2\mu^*) T_{nm^*} - (\delta^* - \pi^* + 2\beta^* + 2\alpha) T_{m^*l}]. \end{aligned}$$

Aquí los términos T_{ab} , representa las proyecciones del tensor energía-momento sobre la tetrada nula $a, b \in \{m, n, l\}$, y los símbolos con asterisco (*) indican el conjugado complejo.

Observación 3. Ecuaciones Electromagnéticas: Las ecuaciones electromagnéticas en el formalismo de NP se expresan, al igual que las gravitacionales, en términos de las derivadas direccionales y de los coeficientes de espín definidos sobre una tetrada nula. Estas expresiones constituyen la forma linealizada de las ecuaciones de Maxwell en el formalismo de NP, y se presentan a continuación siguiendo la formulación establecida por Teukolsky [Teu73],

$$[(D - \epsilon + \epsilon^* - 2\rho - \rho^*)(\Delta + \mu - 2\gamma) - (\delta - \beta - \alpha^* - 2\tau + \pi^*)(\delta^* + \pi - 2\alpha)]\Phi_0 = 2\pi J_0, \quad (4.6)$$

donde

$$J_0 = (\delta - \beta - \alpha^* - 2\tau + \pi^*)J_l - (D - \epsilon + \epsilon^* - 2\rho - \rho^*)J_m.$$

Análogamente a las ecuaciones gravitacionales, aplicando transformación $l \leftrightarrow n$ y $m \leftrightarrow m^*$ se encuentra la siguiente ecuación,

$$[(\Delta + \gamma - \gamma^* + 2\mu + \mu^*)(D - \rho + 2\epsilon) - (\delta^* + \alpha + \beta^* + 2\pi - \tau^*)(\delta - \tau + 2\beta)]\Phi_2 = 2\pi J_2, \quad (4.7)$$

donde,

$$J_2 = (\Delta + \gamma - \gamma^* + 2\mu + \mu^*)J_{m^*} - (\delta^* + \alpha + \beta^* + 2\pi - \tau^*)J_n.$$

En estas expresiones, $J_l = J_\mu l^\mu$ corresponde a la proyección de la densidad de corriente cuatrivectorial⁹ sobre la tetrada nula. Las cantidades Φ_i representan las componentes de primer orden del campo electromagnético de prueba.

Las ecuaciones 4.4 y 4.6 exhiben la misma estructura diferencial y difieren únicamente en los coeficientes de espín y en la componente del campo seleccionada; de manera análoga, las ecuaciones 4.5 y 4.7

⁹En relatividad, el 4-corriente J^μ es un campo vectorial contravariante que combina en un único objeto covariante la densidad de carga y la densidad de corriente espacial, permitiendo una formulación unificada y geométricamente consistente de las leyes de conservación de la carga eléctrica.

comparten la misma estructura operatoria. En consecuencia, es natural introducir una variable unificada Ψ_s que recoja el comportamiento del campo perturbado y un parámetro discreto s , el peso de espín (spin weight) en la terminología de Teukolsky, que toma valores específicos según el tipo de perturbación considerada [Cha83; Teu73]. Bajo esta notación, el miembro derecho de la ecuación (términos fuente) también depende de la elección del campo y de sus proyecciones sobre la tetrada nula. La correspondencia empleada es la que se resume en la Tabla 4.1¹⁰. Teniendo las ecuaciones:

$$\begin{aligned} & \left[(D - (2s - 1)\epsilon + \epsilon^* - 2s\rho - \rho^*) (\Delta + \mu - 2s\gamma) \right. \\ & \quad \left. - (\delta + \pi^* - \alpha^* - (2s - 1)\beta - 2s\tau) (\delta^* + \pi - 2s\alpha) - (s - 1)(2s - 1)\psi_2 \right] \Psi_s = 4\pi T_s, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} & \left[(\Delta + (2(-s) - 1)\gamma - \gamma^* + 2(-s)\mu + \mu^*) (D + 2(-s)\epsilon - \rho) \right. \\ & \quad \left. - (\delta^* - \tau^* + \beta^* + (2(-s) - 1)\alpha + 2(-s)\pi) (\delta - \tau + 2(-s)\beta) \right. \\ & \quad \left. - ((-s) - 1)(2(-s) - 1)\psi_2 \right] \Psi_s = 4\pi T_s. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Observación 4. En la Ecu. (4.9) utilizaremos τ^* en lugar de π^* , siguiendo la gauge estándar de Kinnersley¹¹, dado que bajo esta elección ambos coeficientes de espín se relacionan mediante una rotación tipo III¹² de la tetrada nula, lo cual hace sus formas operatorias equivalentes.

Campo Físico	Ψ_s	s	T_s
Gravitacional (alto)	$\psi_0^{(1)}$	+2	T_0
Electromagnético (alto)	Φ_0	+1	$\frac{1}{2}J_0$
Escalar	Φ	0	T
Electromagnético (bajo)	Φ_2	-1	$\frac{1}{2}J_2$
Gravitacional (bajo)	$\psi_4^{(1)}$	-2	T_4

Tabla 4.1. Correspondencia entre el campo físico, la variable unificada, el peso de espín y el término fuente.

Observación 5. En esta unificación, las parejas $(\psi_0^{(1)}, \Phi_0)$ y $(\psi_4^{(1)}, \Phi_2)$ se organizan de acuerdo con el signo del peso de espín $s = \pm 2, \pm 1$, lo cual permite distinguir dos familias de ecuaciones: las denominadas altas

¹⁰Cabe señalar que en el trabajo original de Teukolsky [Teu73] también se consideran los campos de neutrinos, asociados a pesos de espín $s = \pm \frac{1}{2}$, cuyo término fuente está determinado por las proyecciones del correspondiente tensor de corriente espinorial sobre la tetrada nula.

¹¹El término *gauge*, se refiere a una elección de condiciones o transformaciones que no alteran las cantidades físicas observables de un sistema, pero sí la forma matemática de sus ecuaciones.

¹²Los tipos de rotación son explicados en el apéndice A

$(s > 0)$ y bajas ($s < 0$). Esta correspondencia se justifica por la simetría de primado, junto con las sustituciones adecuadas en los coeficientes de espín y en las componentes del tensor de Weyl [GHP73]. Dicha simetría garantiza que, a partir de una ecuación válida para $s > 0$, se obtenga su contraparte correspondiente para $s < 0$ mediante esta transformación.

Dado que se desea una única ecuación, y las ecuaciones resultantes (Ecu. 4.9) y (Ecu. 4.8) son mutuamente equivalentes bajo la simetría $s \mapsto -s$, se unifican como un operador diferencial aplicado sobre el campo Ψ_s de la forma,

$$\left[\mathcal{D}_s^\sigma \Delta_s^\sigma - \delta_s^\sigma \bar{\delta}_s^\sigma - (s-1)(2s-1) \psi_2 \right] \Psi_s = 4\pi T_s, \quad (4.10)$$

el parámetro $\sigma = \text{sign}(s)$ indica la naturaleza de las ecuaciones, distinguiendo entre las familias altas y bajas, según corresponda al campo de perturbación considerado. De este modo, los operadores direccionales con peso de espín para ($\sigma = +1$) se definen como:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_s &= D - (2s-1)\epsilon + \epsilon^* - 2s\rho - \rho^*, & \Delta_s &= \Delta + \mu - 2s\gamma, \\ \delta_s &= \delta + \tau^* - \alpha^* - (2s-1)\beta - 2s\tau, & \bar{\delta}_s &= \delta^* + \pi - 2s\alpha, \end{aligned}$$

mientras que para las bajas ($\sigma = -1$) se obtienen a partir de sus operadores primados, los cuales incorporan las transformaciones asociadas a la simetría de primado.

Por último, se reemplazan los valores de los coeficientes de spin, de weyl y los operadores siguiendo la gauge estándar de kinnersly para la geometría de fondo de Kerr-BL presentada en el ejemplo 5 (Ecu. A.6, Ecu. A.12, Ecu. A.13), en la Ecu. (4.10). Obteniendo así **LA ECUACIÓN MAESTRA DE TEUKOLSKY**:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{\mathcal{B}} - a^2 \sin^2 \theta \right] \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \frac{4mr}{\mathcal{B}} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial \phi} + \left[\frac{a^2}{\mathcal{B}} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} \\ &- \mathcal{B}^{-s} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mathcal{B}^{s+1} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) - 2s \left[\frac{a(r-m)}{\mathcal{B}} + \frac{i \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right] \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \\ &- 2s \left[\frac{m(r^2 - a^2)}{\mathcal{B}} - r - ia \cos \theta \right] \frac{\partial \Psi}{\partial t} + (s^2 \cot^2 \theta - s) \Psi = 4\pi \mathcal{P} T, \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde $\mathcal{B} = r^2 - 2mr + a^2$, $\mathcal{P} = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, $\Psi = \Psi_s$ es el campo elegido, $T = T_s$ representa el término fuente asociado al campo y s es el peso de espín.

La ecuación de Teukolsky (Ecu. 4.11) es una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden con

coeficientes variables, presenta singularidades regulares¹³ en $r = r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2}$, correspondientes a los horizontes de eventos y de Cauchy del espacio–tiempo de Kerr, y una singularidad irregular en $r \rightarrow \infty$. En la variable angular θ , aparecen singularidades regulares en los polos $\theta = 0$ y $\theta = \pi$, asociadas al término $\sin^{-2} \theta$.

Los términos de segundo orden de la ecuación diferencial pueden ser escritos en forma matricial como,

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \left[\frac{(r^2+a^2)^2}{\mathcal{B}} - a^2 \sin^2 \theta \right] & 0 & 0 & \frac{2mar}{\mathcal{B}} \\ 0 & -\mathcal{B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{2mar}{\mathcal{B}} & 0 & 0 & \left[\frac{a^2}{\mathcal{B}} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] \end{bmatrix},$$

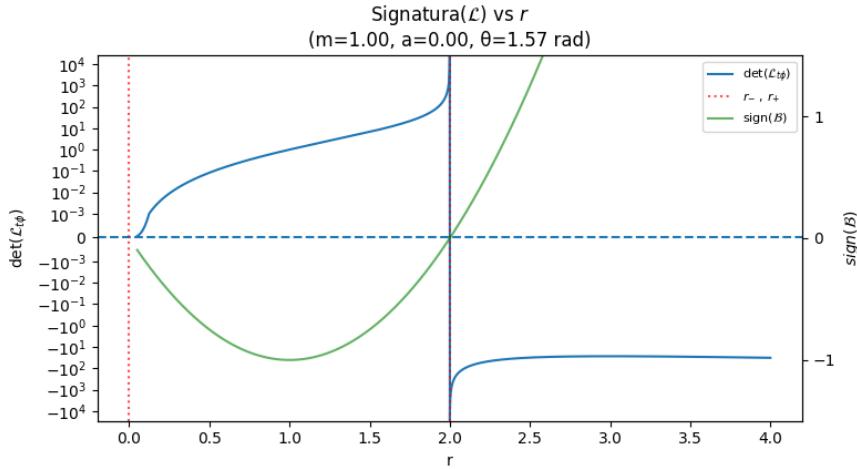
para determinar la clasificación de esta ecuación¹⁴, calculamos la signatura de \mathcal{L} , veamos que los términos en la diagonal $-\mathcal{B}, -1$ aportan 2 signos de la signatura. Por otra parte, por la presencia de términos mixtos (t, ϕ) se debe analizar la submatriz,

$$\mathcal{L}_{t,\phi} = \begin{bmatrix} \left[\frac{(r^2+a^2)^2}{\mathcal{B}} - a^2 \sin^2 \theta \right] & \frac{2mar}{\mathcal{B}} \\ \frac{2mar}{\mathcal{B}} & \left[\frac{a^2}{\mathcal{B}} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] \end{bmatrix},$$

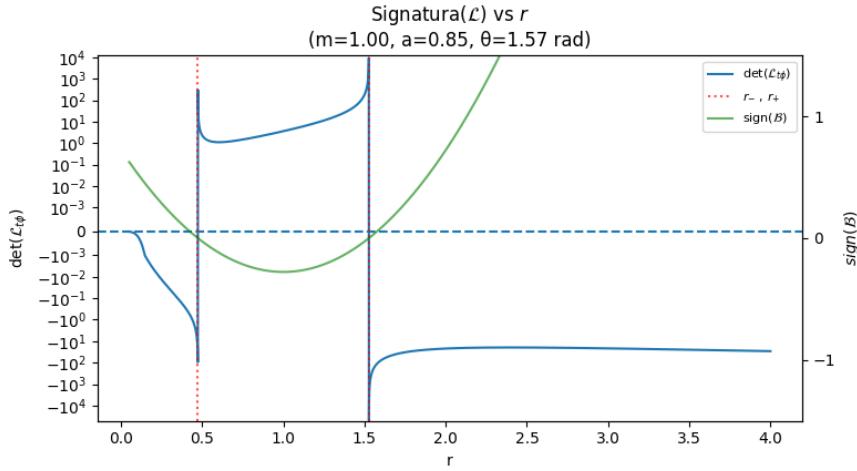
cuyo determinante, $\det(\mathcal{L}_{t\phi}) = \left(\frac{(r^2+a^2)^2}{\mathcal{B}} - a^2 \sin^2 \theta \right) \left(\frac{a^2}{\mathcal{B}} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) - \left(\frac{2mar}{\mathcal{B}} \right)^2$, aporta la información de los dos signos faltantes. Tomando las constantes $m, \sin \theta = 1$ en las unidades del problema, podemos analizar la signatura de \mathcal{L} comparando los signos del $\det(\mathcal{L}_{t,\phi})$ y \mathcal{B} dependiendo del valor del radio. Encuentramos 3 casos: para $a = 0, 0 < a < 1, a = 1$. dichos valores se encuentran representados en la gráfica 4.1. Veamos que independientemente del valor de a podemos encontrar que en las zonas delimitadas por los puntos singulares en r , anteriormente descritos, el signo del $\det(\mathcal{L}_{t,\phi})$ es siempre opuesto a el signo de \mathcal{B} , por lo tanto, la signatura para todo punto regular en el espacio–tiempo es $(1,3)$ y por consiguiente, la ecuación es de tipo hiperbólico, asociadas a procesos de propagación de ondas.

¹³Un punto singular de una EDP o EDO es *regular* si, en su vecindad, las soluciones pueden expresarse mediante series convergentes; en caso contrario, se denomina *irregular*, caracterizándose por soluciones con comportamiento divergente o asintótico.

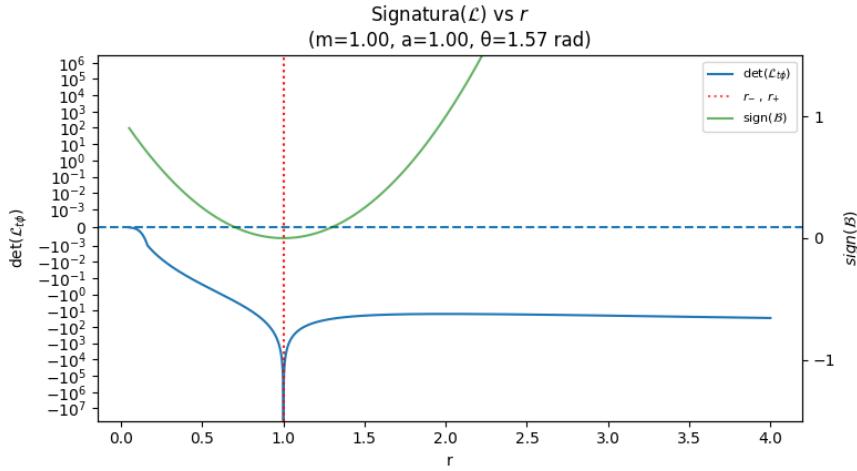
¹⁴En espacios de dimensión superior, la clasificación de las ecuaciones en derivadas parciales se extiende considerando la *signatura* del tensor métrico efectivo del operador principal: una signatura lorentziana $(1,3)$ o $(3,1)$ corresponde al caso hiperbólico, una signatura Euclidiana $(4,0)$ o $(0,4)$ caracteriza el caso elíptico, y una signatura degenerada, con un autovalor nulo, define el caso parabólico.



(a) Límite de Schwarzschild $a = 0$: antes del horizonte, $\text{sign}(\mathcal{L}) = (+, +, +, -)$ o $(-, -, +, -)$; después del horizonte, $\text{sign}(\mathcal{L}) = (+, -, -, -)$ o $(-, +, -, -)$.



(b) $0 < a < 1$: antes de r_- y después de r_+ , $\text{sign}(\mathcal{L}) = (+, -, -, -)$ o $(-, +, -, -)$; para $r_- < r < r_+$, $\text{sign}(\mathcal{L}) = (+, +, +, -)$ o $(-, -, +, -)$.



(c) $a = 1$: para todo r , $\text{sign}(\mathcal{L}) = (+, -, -, -)$ o $(-, +, -, -)$.

Figura 4.1. Análisis cualitativo de la signatura de \mathcal{L} .

Observación 6. Para el caso $s = 0$, la ecuación maestra de Teukolsky (4.11) en el vacío se reduce a la ecuación diferencial que describe la evolución de un campo escalar sin masa en un espacio-tiempo tipo D, tal como el de Kerr o Schwarzschild. Aunque la formulación de Teukolsky no adopta explícitamente la forma estándar de la ecuación de Klein-Gordon ($\square\Phi = 0$), explorada en ejemplos anteriores, ambas expresiones son equivalentes en contenido físico, pues describen la propagación de un campo escalar libre sobre el mismo fondo geométrico.

A pesar de la complejidad algebraica del formalismo NP, las perturbaciones derivadas de la ecuación de Teukolsky son físicamente equivalentes a las que se obtendrían al analizar las perturbaciones métricas en coordenadas convencionales. En el caso gravitacional, esto se debe a que las cantidades dinámicas centrales, ψ_0 y ψ_4 , son invariantes bajo transformaciones de gauge¹⁵ y bajo rotaciones infinitesimales de la tetrada nula, como demostró Teukolsky en el Apéndice A de su trabajo original [Teu73]. En términos físicos, dicha invarianza garantiza que las soluciones de la ecuación de Teukolsky representan perturbaciones reales contenidas en $\psi_0^{(1)}$ y $\psi_4^{(1)}$. Este principio, formalizado y extendido a las demás opciones de campos, posteriormente por Stewart y Walker [Ste75], quienes aseguran que el análisis de perturbaciones en el marco tetrádico conserva la equivalencia con las formulaciones tradicionales, dotando al formalismo de una estructura separable que facilita el estudio de la estabilidad de las métricas de fondo.

4.2. Soluciones de la ecuación de Teukolsky

Una vez establecida la ecuación de Teukolsky (Ecu. 4.11) dentro del marco de la teoría de perturbaciones, resulta de especial interés estudiar sus soluciones, ya que ellas describen el comportamiento dinámico de los campos físicos perturbados sobre el fondo de Kerr. Como se discutió anteriormente, dependiendo del valor del peso de espín s , la variable Ψ representa perturbaciones asociadas a distintos campos (gravitacionales, electromagnéticas o de neutrinos). La estructura hiperbólica de la ecuación sugiere que las soluciones deben poseer un carácter ondulatorio, reflejando la propagación y el decaimiento de las perturbaciones en el espacio-tiempo curvo. De hecho, los análisis de Teukolsky y de estudios posteriores [CZ14b] confirman que las soluciones físicamente relevantes corresponden a ondas que se propagan hacia el infinito nulo y hacia el horizonte de eventos, con comportamiento asintótico de tipo decaimiento radial, hecho que abordaremos con detalle mas adelante. Por esta razón, resulta natural adoptar una forma funcional que permita la separación de variables entre las dependencias radial y angular, proponiendo una solución

¹⁵El término *transformaciones gauge* hace referencia a cambios locales en las variables de un campo que no alteran las cantidades físicas observables del sistema. En relatividad, estas transformaciones expresan una simetría interna que deja invariantes las ecuaciones de movimiento.

del tipo¹⁶,

$$\Psi(t, r, \theta, \phi) = e^{i(m\phi - \omega t)} S_{m\ell}(\theta) R_{m\ell}(r), \quad (4.12)$$

donde ω es la frecuencia característica del modo, m el número azimutal¹⁷ y ℓ el número cuántico angular asociado al armónico esferoidal¹⁸ $S_{m\ell}(\theta)$. Cuyas derivadas parciales son :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= -i\omega \Psi, & \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= -\omega^2 \Psi, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} &= i m \Psi, & \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} &= -m^2 \Psi, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial r} &= e^{i(m\phi - \omega t)} S_{m\ell}(\theta) \frac{d R_{m\ell}(r)}{dr}, & \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial \phi} &= m \omega \Psi, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} &= e^{i(m\phi - \omega t)} R_{m\ell}(r) \frac{d S_{m\ell}(\theta)}{d\theta}. \end{aligned}$$

Partiendo de estas igualdades y la solución propuesta (Ecu. 4.12), al sustituir en la ecuación (Ecu. 4.11) con el término fuente ($T = 0$) y dividir por el factor común $e^{i(m\phi - \omega t)}$, se obtiene,

$$\begin{aligned} &- \omega^2 \left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{\mathcal{B}} - a^2 \sin^2 \theta \right] S_{m\ell} R_{m\ell} + \frac{4M\omega}{\mathcal{B}} m\omega S_{m\ell} R_{m\ell} - m^2 \left[\frac{a^2}{\mathcal{B}} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] S_{m\ell} R_{m\ell} \\ &- \mathcal{B}^{-s} S_{m\ell} \frac{d}{dr} \left(\mathcal{B}^{s+1} \frac{d R_{m\ell}}{dr} \right) - \frac{R_{m\ell}}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d S_{m\ell}}{d\theta} \right) - 2is m \left[\frac{a(r - M)}{\mathcal{B}} + \frac{i \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right] S_{m\ell} R_{m\ell} \\ &+ 2is \omega \left[\frac{M(r^2 - a^2)}{\mathcal{B}} - r - ia \cos \theta \right] S_{m\ell} R_{m\ell} + (s^2 \cot^2 \theta - s) S_{m\ell} R_{m\ell} = 0, \quad (4.13) \end{aligned}$$

recordando que $\mathcal{B} = r^2 - 2Mr + a^2$ y dividiendo todo por $S_{m\ell} R_{m\ell}$, es posible reorganizar los términos de la ecuación según su dependencia en las variables r y θ , de la siguiente manera:

- lado izquierdo de la ecuación,

$$\omega^2 a^2 \sin^2 \theta + \frac{m^2}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{S_{m\ell}(\theta)} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d S_{m\ell}(\theta)}{d\theta} \right) + \frac{2sm \cos \theta}{\sin^2 \theta} + 2saw \cos \theta + s^2 \cot^2 \theta - s; \quad (4.14)$$

¹⁶Por simplicidad notacional se omite el subíndice s ; no obstante, las funciones Ψ , S_{ml} y R_{ml} dependen implícitamente del peso de espín s .

¹⁷Con el fin de evitar ambigüedades en la notación, la masa del cuerpo se representará de aquí en adelante mediante M en lugar de m .

¹⁸El término *armónico esferoidal* hace referencia a una función especial que generaliza a los armónicos esféricos cuando el sistema deja de ser perfectamente esférico

- lado derecho de la ecuación,

$$\frac{\omega^2(r^2 + a^2)^2}{\mathcal{B}} - \frac{4Mar}{\mathcal{B}} m\omega + \frac{m^2a^2}{\mathcal{B}} + \mathcal{B}^{-s} \frac{1}{R_{m\ell}(r)} \frac{d}{dr} \left(\mathcal{B}^{s+1} \frac{dR_{m\ell}(r)}{dr} \right) + \frac{2isma(r - M)}{\mathcal{B}} - 2is\omega \left[\frac{M(r^2 - a^2)}{\mathcal{B}} - r \right]. \quad (4.15)$$

Esta reorganización muestra explícitamente que la ecuación puede, efectivamente, separarse en dos partes independientes: una que depende únicamente de la coordenada radial r y otra que depende del ángulo polar θ . Por lo tanto, es posible igualar cada lado de la ecuación a una constante de desacoplamiento, denotada por $A_{m\ell}$, la cual actúa como parámetro de separación entre las componentes angular y radial del campo perturbativo. Al agrupar los términos correspondientes y multiplicar por $S_{m\ell}(\theta)$ y $R_{m\ell}(r)$, respectivamente, se obtienen dos ecuaciones diferenciales ordinarias que describen la evolución de cada modo, estas expresiones representan las formas desacopladas y completamente separadas de la ecuación maestra de Teukolsky. Siguiendo la notación adoptada por Cook y Zalutskiy [CZ14b], se obtienen entonces las ecuaciones descritas a continuación:

- **Ecuación angular.**

La Ecu. (4.16) corresponde al comportamiento angular del campo (Ψ),

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dS_{m\ell}(x)}{dx} \right] + \left[(cx)^2 - 2csx + s + A_{m\ell} - \frac{(m + sx)^2}{1 - x^2} \right] S_{m\ell}(x) = 0, \quad (4.16)$$

donde $x = \cos \theta$ y $c = a\omega$. Esta es una ecuación diferencial ordinaria lineal, homogénea, de segundo orden para $S_{m\ell}(x)$, con coeficientes variables. El problema natural se plantea en el dominio $x \in [-1, 1]$ correspondiente a el rango $\theta \in [0, 2\pi]$, posee un punto singular regular en $x = \pm 1$ debidas al factores $\frac{1}{1-x^2}$ y un punto singular irregular en $x = \infty$ originado por el término $(cx)^2$. La ecuación diferencial de la parte angular puede ser reescrita induciendo un problema espectral de la forma,

$$\mathcal{L}_\theta[S_{m\ell}] = A_{m\ell} S_{m\ell},$$

con

$$\mathcal{L}_\theta(x = \cos\theta) = - \left[(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + (cx)^2 - 2csx + s - \frac{(m + sx)^2}{1 - x^2} \right]. \quad (4.17)$$

De modo que $S_{m\ell}$ es una autofunción (o función propia) de \mathcal{L}_θ y el parámetro espectral es $A_{m\ell}$. Así

solucionar la EDO (4.16) se reduce a encontrar las autofunciones.

- **Ecuación radial.**

La Ecu. (4.18), describe el comportamiento radial del campo Ψ ,

$$\mathcal{B}^{-s} \frac{d}{dr} \left(\mathcal{B}^{s+1} \frac{dR_{m\ell}(r)}{dr} \right) + \left[\frac{K^2 - 2is(r-M)K}{\mathcal{B}} + 4is\omega r - \bar{\lambda} \right] R_{m\ell}(r) = 0, \quad (4.18)$$

donde $K = (r^2 + a^2)\omega - am$, y $\bar{\lambda} = A_{m\ell} + a^2\omega^2 - 2ma\omega$. Observamos que se trata de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, homogénea y lineal, con coeficientes variables (en general complejos), presenta puntos singulares regulares en los ceros de $\mathcal{B}(r = r_{\pm})$ y un punto singular irregular en $r = \infty$, estructura que desciende de la ecuación maestra de Teukolsky. Al igual que en la ecuación angular, su forma puede escribirse como un problema espectral,

$$\mathcal{L}_r[R_{m\ell}] = \bar{\lambda} R_{m\ell},$$

con

$$\mathcal{L}_r(r) = \left[\mathcal{B} \frac{d^2}{dr^2} + 2(s+1)(r-M) \frac{d}{dr} + \frac{K^2 - 2is(r-M)K}{\mathcal{B}} + 4is\omega r \right]. \quad (4.19)$$

donde $\bar{\lambda} = A_{m\ell} + a^2\omega^2 - 2am\omega$ hereda la dependencia en el autovalor angular $A_{m\ell}$. De esta manera $R_{m\ell}$ es una autofunción (o función propia) de \mathcal{L}_r . Así solucionar la EDO (4.18) se reduce a encontrar las autofunciones.

4.2.1. Aproximación numérica

Para este caso abordaremos ambos problemas espectrales mediante una resolución numérica, en este procedimiento, cada ecuación se formula como un problema propio de tipo Galerkin, en el cual se buscan los autovalores y autovectores del operador diferencial correspondiente. Para ello, se elige una base ortogonal apropiada ($\{\phi_1, \phi_2 \dots \phi_n\}$). Este método consiste en proyectar la ecuación diferencial sobre dicho subespacio funcional, obteniendo la forma matricial general,

$$\mathcal{A}\mathbf{c} = \lambda G\mathbf{c},$$

donde,

$$\mathcal{A}_{ij} = \langle \phi_i, \mathcal{L}\phi_j \rangle, \quad G_{ij} = \langle \phi_i, \phi_j \rangle,$$

representan, respectivamente, la matriz de rigidez y la matriz de masa del sistema, construidas a partir del producto interno $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) W(x) dx$. La solución de este problema propio produce los autovalores λ_ℓ y los vectores de coeficientes $\mathbf{c}^{(\ell)}$ que definen las autofunciones aproximadas,

$$Y_\ell(x) = \sum_j c_j^{(\ell)} \phi_j(x).$$

Ambas ecuaciones, radial y angular, dependen del parámetro de desacoplamiento $A_{m\ell}(c)$ ¹⁹, el cual introduce un acoplamiento funcional entre los autovalores de la ecuación angular y la frecuencia compleja ω que interviene en la radial. Este acoplamiento implica que no existe una familia continua de soluciones $S_{m\ell}$ y $R_{m\ell}$ independientes, sino modos discretos que satisfacen simultáneamente ambas ecuaciones para pares específicos $(A_{m\ell}, \omega)$.

Elección de la base espectral

En la formulación espectral de la ecuación de Teukolsky, la elección de la base polinómica resulta determinante para garantizar la estabilidad numérica y la correcta representación de las condiciones de frontera. En este trabajo se emplean *polinomios de Chebyshev* debido a sus propiedades de ortogonalidad, su comportamiento bien condicionado en los extremos del intervalo $[-1, 1]$ y su capacidad para aproximar funciones suaves con alta precisión espectral.

Existen dos familias principales de polinomios de Chebyshev: los de tipo I, denotados por $T_n(x)$, y los de tipo II, denotados por $U_n(x)$. Ambos son ortogonales respecto a pesos distintos:

$$\langle f, g \rangle_T = \int_{-1}^1 \frac{f(x) g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \langle f, g \rangle_U = \int_{-1}^1 f(x) g(x) \sqrt{1-x^2} dx.$$

Esta diferencia implica comportamientos distintos en los extremos del dominio: los T_n presentan valores finitos en $x = \pm 1$, mientras que los U_n se anulan naturalmente en los límites ponderados por $\sqrt{1-x^2}$. Desde el punto de vista físico, esta distinción es aprovechada para tratar por separado las ecuaciones angular y radial que surgen de la separación de variables de la ecuación maestra de Teukolsky.

Para la ecuación angular, la base $U_n(x)$ resulta la más adecuada, ya que su ortogonalidad y regularidad en los polos $\theta = 0, \pi$ ($x = \pm 1$) aseguran una representación estable de las soluciones $S_{m\ell}$. Con el fin de validar esta elección, se implementó un código en lenguaje Julia (Ver Apéndice B) para resolver el problema espectral asociado, considerando el caso límite de Schwarzschild ($a = 0, s = 0, m = 1$). En

¹⁹El término de acoplamiento, por razones de convergencia de los métodos numéricos usados en Cook[CZ14b] es dependiente de ω , así $A_{m\ell}(c)$, con $c = a\omega$

este régimen, el operador angular (4.17) adopta la forma del operador de Laguerre, por lo que se espera obtener como soluciones los polinomios de Laguerre y los autovalores teóricos $\lambda_\ell = [2, 6, 12, 20, 30, \dots]$.

Al resolver el problema mediante una base compuesta por los primeros cinco polinomios de Chebyshev ($N = 5$), se obtuvieron los autovalores teóricos con una aproximación del orden de 10^{-6} , lo que evidencia la convergencia espectral del método.

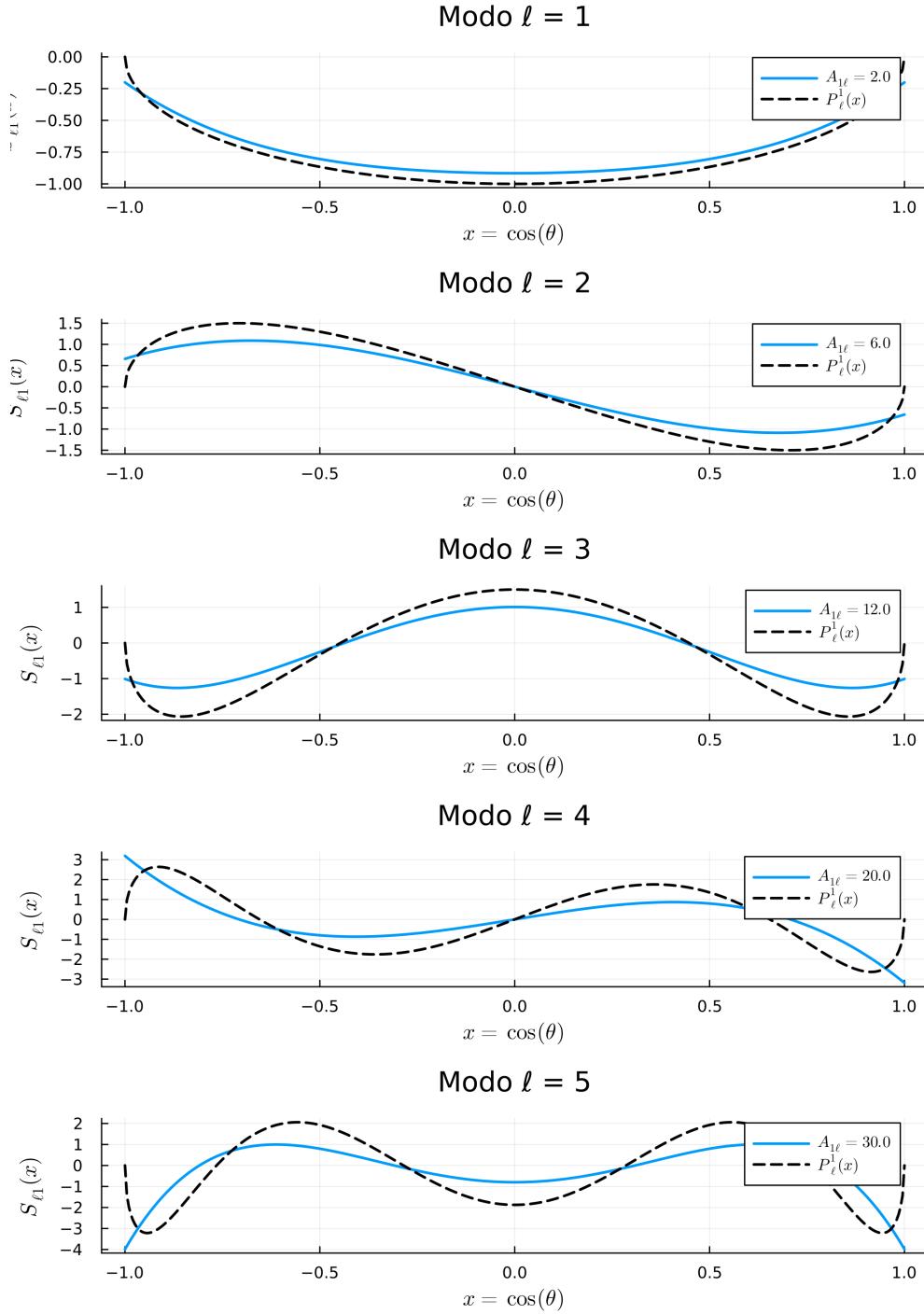


Figura 4.2. Comparación teórica de la solución angular para el límite de Schwarzschild $a = 0$, $s = 0$, $m = 1$.

La Figura 4.2 muestra las funciones asociadas a los autovectores obtenidos. Aunque los valores numéricos difieren levemente de los teóricos, el comportamiento funcional y la distribución de sus ceros coinciden con las predicciones analíticas, lo que confirma la idoneidad de la base $U_n(x)$ para representar las solucio-

nes angulares. Esta elección no se aparta del tratamiento teórico clásico, en el cual las soluciones exactas se expresan en términos de polinomios de Jacobi $P_\ell^{(\alpha,\beta)}(x)$; de hecho, los polinomios de Chebyshev de tipo II constituyen un caso particular de estos últimos, correspondiente a $\alpha = \beta = 1/2$. Por tanto, la utilización de la base $U_n(x)$ preserva la estructura analítica del problema angular y permite una implementación numérica consistente con la teoría de las funciones esferoidales de spin²⁰.

Por otra parte, la ecuación radial involucra condiciones de frontera radiativas: únicamente ondas entrantes en el horizonte ($r \rightarrow r_+$) y salientes en el infinito ($r \rightarrow \infty$). Para implementar estas condiciones físicas, se adopta el ansatz²¹ propuesto en la teoría (Ecu.4.20)[CZ14b], el cual factoriza el comportamiento asintótico conocido de las soluciones de la ecuación radial. Este procedimiento permite transformar la función original $R_{m\ell}(r)$, altamente oscilatoria y singular en los extremos, en una nueva función $H_{m\ell}(r)$ que es suave y acotada en todo el dominio radial,

$$R_{m\ell}(r) = (r - r_+)^{\xi} (r - r_-)^{\eta} e^{\zeta r} H_{m\ell}(r), \quad (4.20)$$

donde, recordemos, $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$ y los parámetros ζ , ξ , y η están definidos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \zeta &= \pm i\omega, & \xi &= \frac{-s \pm (s + 2i\sigma_+)}{2}, \\ \eta &= \frac{-s \pm (s - 2i\sigma_-)}{2}, & \sigma_{\pm} &= \frac{2\omega Mr_{\pm} - ma}{r_+ - r_-}. \end{aligned}$$

Veamos que el factor $(r - r_+)^{\xi}$ se usa para controlar el comportamiento entrante en el horizonte r_+ ; el factor $(r - r_-)^{\eta}$ se usa para controlar el comportamiento de la singularidad y el factor $e^{\zeta r}$ garantiza la decadencia de la solución en el infinito, imponiendo la condición saliente en $r \rightarrow \infty$.

Para implementar esta suposición de solución en la ecuación radial, debemos calcular sus derivadas, para esto consideramos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left((r - r_+)^{\xi} \right) &= \xi(r - r_+)^{\xi-1}, & \frac{d}{dr} \left((r - r_-)^{\eta} \right) &= \eta(r - r_-)^{\eta-1}, \\ \frac{d}{dr} \left(e^{\zeta r} \right) &= \zeta e^{\zeta r}. \end{aligned}$$

Usando la regla del producto para la derivada tenemos que:

²⁰La teoría de las *funciones esferoidales de espín* se desarrolló a mediados del siglo XX como una extensión de las funciones esferoidales ordinarias, formalizada inicialmente por C. Flammer en 1957 [Fla57]. Estas funciones surgen al resolver la parte angular de la ecuación de Teukolsky y generalizan los armónicos esféricos para sistemas con rotación.

²¹El término *ansatz* se utiliza en matemáticas y física teórica para designar una suposición o forma tentativa de una solución, elegida de manera que simplifique la ecuación original y permita determinar sus parámetros mediante sustitución.

$$\begin{aligned}\frac{dR_{m\ell}}{dr} &= (r - r_+)^{\xi}(r - r_-)^{\eta}e^{\zeta r} \left[\frac{d}{dr}H_{m\ell}(r) + QH_{m\ell}(r) \right], \\ \frac{d^2R_{m\ell}}{dr^2} &= (r - r_+)^{\xi}(r - r_-)^{\eta}e^{\zeta r} \left[\frac{d^2}{dr^2}H_{m\ell}(r) + Q\frac{d}{dr}H_{m\ell}(r) + Q \left(\frac{d}{dr}H_{m\ell}(r) + QH_{m\ell}(r) \right) \right],\end{aligned}$$

donde $Q = \eta(r - r_-)^{-1} + \zeta + \xi(r - r_+)^{-1}$.

Con esta transformación, el operador radial original (Ecu.4.19) se reescribe en términos de la variable $H_{m\ell}(r)$, como $\mathcal{L}_r[H_{m\ell}] = \bar{\lambda} H_{m\ell}$, con

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_r(r) &= \left[\mathcal{B} \frac{d^2}{dr^2} + [2\mathcal{B}Q + 2(s+1)(r-M)] \frac{d}{dr} \right. \\ &\quad \left. + 2(s+1)(r-M)Q + \mathcal{B}Q^2 + \frac{K^2 - 2is(r-M)K}{\mathcal{B}} + 4is\omega r \right], \quad (4.21)\end{aligned}$$

donde, recordemos, $\bar{\lambda} = A_{m\ell} + a^2\omega^2 - 2am\omega$, $K = (r^2 + a^2)\omega - am$, $\mathcal{B} = r^2 - 2Mr + a^2$.

Sin embargo, con esta forma, la solución del problema espectral en el caso radial impone que la función $H_{m\ell}(r)$ sea regular en el intervalo $r \in [r_+, \infty)$. Para poder usar la base de polinomios de Chebyshev, es necesario compactar este dominio al intervalo $z \in [-1, 1]$. El cambio de variable propuesto es el siguiente:

$$z = \frac{r - r_+}{r - r_-}, \quad r = \frac{zr_- - r_+}{z - 1}, \quad (4.22)$$

de modo que $z = 0$ corresponde al horizonte $r = r_+$ y $z = 1$ al infinito espacial. Para implementar este cambio de variable en la ecuación radial, debemos calcular sus derivadas con respecto a z :

$$\frac{dr}{dz} = \frac{r_+ - r_-}{(z-1)^2}, \quad \frac{d^2r}{dz^2} = \frac{-2(r_+ - r_-)}{(z-1)^3}.$$

Al aplicar la regla de la cadena tenemos que los operadores diferenciales con respecto a r son:

$$\frac{d}{dr} = \frac{(z-1)^2}{r_+ - r_-} \frac{d}{dz}, \quad \frac{d^2}{dr^2} = \frac{(z-1)^2}{r_+ - r_-} \frac{d^2}{dz^2} + \frac{2(z-1)}{r_+ - r_-} \frac{d}{dz}. \quad (4.23)$$

Así, el operador de la ecuación radial, (Ecu. 4.21), mantiene su forma y se consideran los valores del cambio de variable propuestos en la Ecu. (4.22) y Ecu. (4.23). En el dominio compacto $z \in [0, 1]$, la función $H_{m\ell}(z)$ resulta suave y puede expandirse en una base espectral de polinomios de Chebyshev de tipo I. De esta manera, las condiciones de frontera se incorporan analíticamente en los factores del ansatz (Ecu. 4.20),

lo que permite tratar numéricamente la función $H_{m\ell}(z)$ de forma independiente. Esto se evidencia en la Fig. 4.4, donde se muestra la solución numérica de $H_{m\ell}$ implementada en Julia para el caso límite de Schwarzschild con $\omega = 0,3745 - 0,0897i$ y $M = 1$.

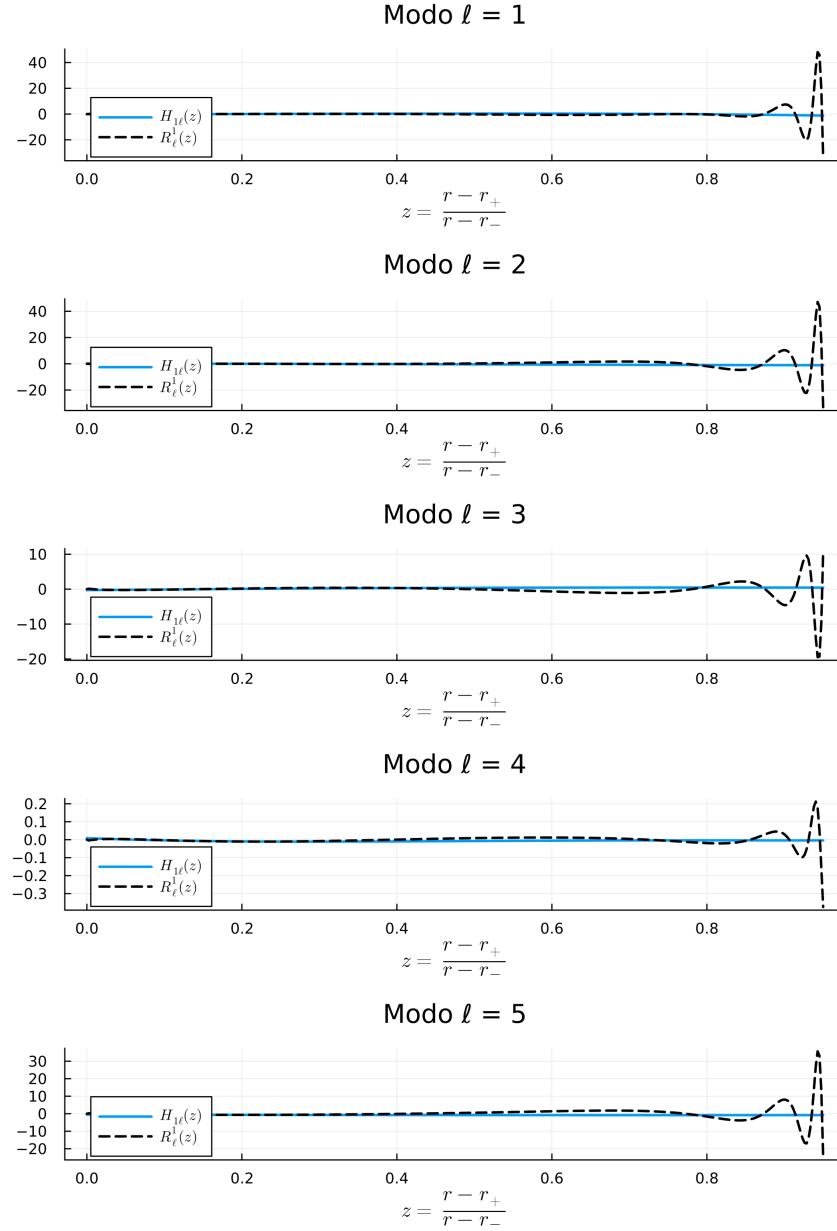


Figura 4.3. Comportamiento de $R_{m\ell}(z)$ comparado con $H_{m\ell}(z)$, para el límite de Schwarzschild $a = 0$, $s = 0$, $m = 1$, $\omega = 0,3745 - 0,0897i$, $M = 1$.

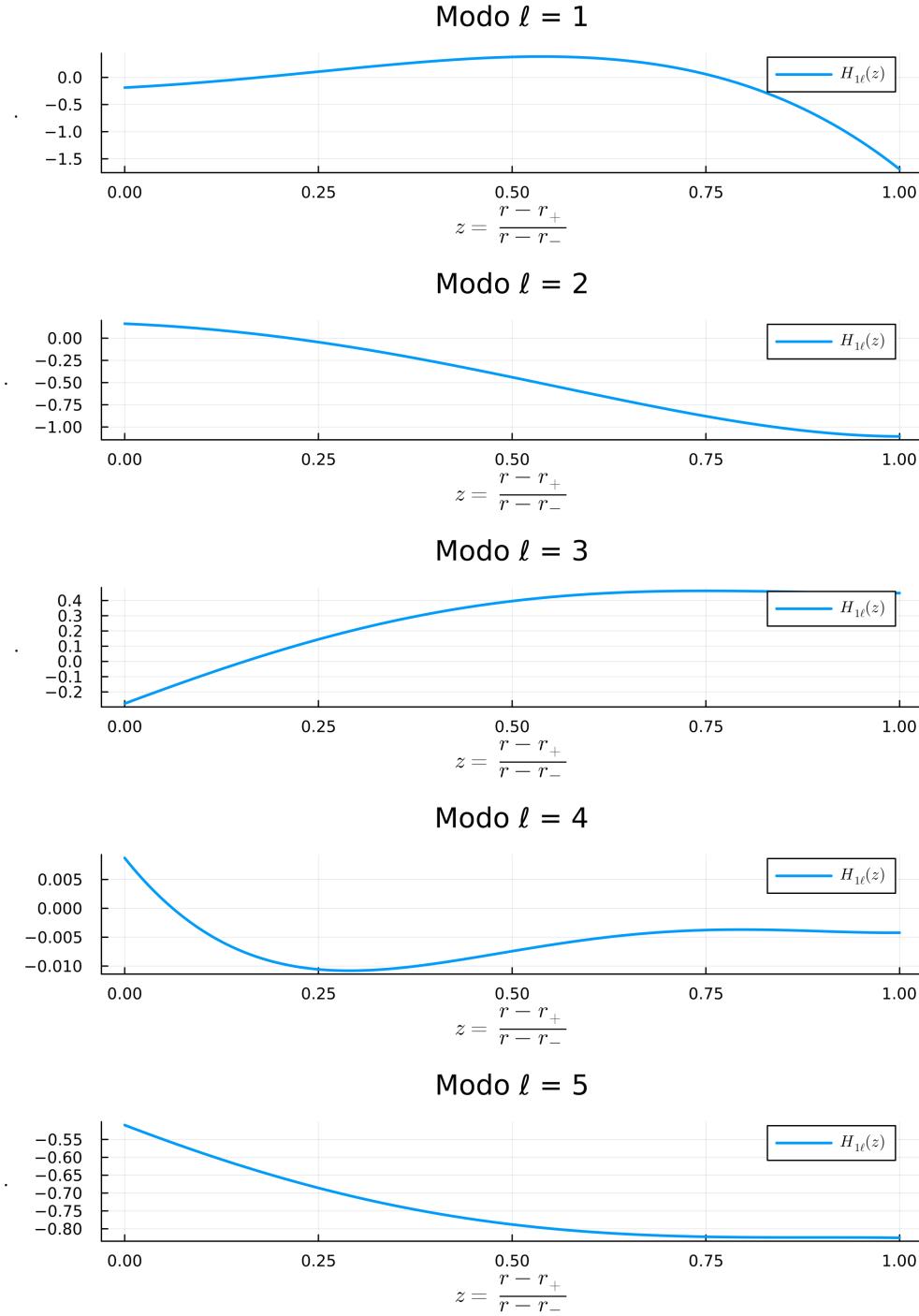


Figura 4.4. Solución numérica de $H_{m\ell}(z)$, para el límite de Schwarzschild $a = 0$, $s = 0$, $m = 1$, $\omega = 0,3745 - 0,0897i$, $M = 1$.

La solución obtenida es suave, acotada y libre de singularidades en los extremos del dominio. Asimismo, la función radial $R_{m\ell}$ (Fig. 4.3), reconstruida a partir del ansatz y de la solución numérica de $H_{m\ell}$ sobre una base de cinco polinomios de Chebyshev de tipo I, presenta una forma suave y oscilatoria, con un

crecimiento exponencial hacia $z \rightarrow 1$. Este comportamiento concuerda con la teoría, ya que la parte imaginaria negativa de la frecuencia ω indica un modo de decaimiento amortiguado, característico del régimen de Schwarzschild [Jin05].

Como se mencionó anteriormente, las ecuaciones diferenciales ordinarias resultantes de la separación de variables de la ecuación de Teukolsky no pueden resolverse de manera independiente. Ambas deben satisfacerse de forma simultánea junto con la condición de autovalor impuesta por la constante angular $A_{m\ell}(a\omega)$, asegurando además el cumplimiento de las condiciones de frontera correspondientes. Dado que el tratamiento analítico de este sistema es, en general, complicado, Cook y Zalutskiy [CZ14a] propusieron un esquema numérico basado en el método espectral, cuyo núcleo consiste en determinar los pares (A, ω) que satisfacen simultáneamente las ecuaciones radial y angular, y, por tanto, la ecuación de Teukolsky completa. Con los valores obtenidos se pueden caracterizar los distintos modos de oscilación del campo perturbado $\Psi_{m\ell}$, QNM's. La solución numérica de $\Psi_{m\ell}$ y el análisis detallado de su comportamiento serán abordados en el siguiente capítulo, dedicado al estudio de los QNM's y la estabilidad de las soluciones.

Capítulo 5

Aplicación de Modos Cuasinormales en la estabilidad de agujeros negros

En el contexto del análisis de ecuaciones diferenciales con aplicaciones físicas, como es el caso de la ecuación de Teukolsky, la elección de las condiciones de contorno constituye un elemento central en la determinación del espectro de soluciones admisibles. En sistemas confinados, como cavidades resonantes o pozos de potencial finitos, es habitual imponer condiciones en los bordes del dominio que restringen el comportamiento del campo, tales como las condiciones de Dirichlet o Neumann¹. Estas restricciones conducen a soluciones estacionarias con frecuencias reales discretas, conocidas como *modos normales*, cuya superposición forma una base ortonormal que describe completamente la evolución del sistema en ausencia de disipación.

Sin embargo, en el caso de agujeros negros, las características del espacio-tiempo imponen un enfoque distinto. El horizonte de eventos actúa como un sumidero que absorbe toda perturbación entrante, mientras que el infinito permite la propagación de ondas salientes. En este contexto, resulta natural considerar alternativas a las condiciones de contorno tradicionales. Entre las configuraciones estudiadas en la literatura, pueden destacarse las siguientes:

- a. **Condiciones reflectivas**, en las cuales se simula un confinamiento artificial mediante la introducción de fronteras reflectantes cerca del horizonte o en el infinito. Aunque útiles en algunos análisis formales, estas condiciones no corresponden a una situación física realista para agujeros negros astrofísicos.

¹Las *condiciones de Dirichlet* fijan el valor del campo sobre la frontera del dominio, mientras que las *condiciones de Neumann* especifican el valor de la derivada normal al borde.

- b. **Condiciones de dispersión**, donde se permite la existencia simultánea de componentes entrantes y salientes en el horizonte y en el infinito. Estas condiciones permiten estudiar la transmisión y reflexión de perturbaciones o procesos de scattering², pero no conducen a un espectro discreto de modos resonantes propios del sistema.
- c. **Condiciones radiativas**, que exigen la presencia de ondas puramente salientes en el infinito y puramente entrantes en el horizonte. Este planteamiento refleja fielmente la estructura causal del espacio-tiempo de Kerr, en la que ningún tipo de señal puede escapar del horizonte. Estas son las condiciones que se aplicaron en el capítulo anterior para la solución radial.

Como se ha mostrado anteriormente, al considerar agujeros negros de Kerr, las perturbaciones sobre la métrica son descritas por la ecuación maestra de Teukolsky. Las soluciones que se obtienen al imponer condiciones radiativas corresponden a los QNM's. Se les denomina “*quasi*” porque, a diferencia de los modos normales en sistemas conservativos, éstos se atenúan, lo cual introduce una componente imaginaria en su frecuencia compleja. Estas condiciones conducen a un espectro discreto de frecuencias que codifican la respuesta dinámica del agujero negro ante perturbaciones externas. En particular, la frecuencia puede expresarse como

$$\omega = \omega_R + i \omega_I,$$

donde ω_R representa la frecuencia de oscilación y ω_I caracteriza la tasa de amortiguamiento o decaimiento exponencial en el tiempo de la perturbación, ya que este término constituye el factor dominante en el exponente real de la solución propuesta en la ecuación 4.12. A diferencia de los modos normales, los QNM's no forman una base ortonormal, pero dominan la evolución dinámica del sistema durante la fase intermedia posterior a una perturbación. Por ejemplo, al considerar un campo perturbativo de naturaleza gravitacional ($s = \pm 2$), se observa el fenómeno de *ringdown*. En esta fase, las deformaciones del horizonte y del espacio-tiempo circundante excitan los QNM's, generando oscilaciones del campo gravitacional que se propagan hacia el exterior. Estas oscilaciones se manifiestan como ondas gravitacionales amortiguadas, cuya energía se irradia parcialmente hacia el infinito y parcialmente hacia el horizonte de eventos, mientras el sistema retorna gradualmente a su estado estacionario. La atenuación temporal de estas ondas está determinada por la parte imaginaria negativa de la frecuencia, $\text{Im}(\omega) < 0$. Este comportamiento corresponde precisamente a la señal observada por los detectores LIGO/Virgo [LC16], cuyas frecuencias medidas pueden compararse directamente con los valores teóricos predichos por los QNM's. Esta correspondencia abre la posibilidad de

²El término *scattering* hace referencia al fenómeno de dispersión que experimentan las ondas al interactuar con una región del espacio con curvatura o potencial no trivial, como el entorno de un agujero negro.

inferir parámetros físicos fundamentales, como la masa y el momento angular del agujero negro, a partir del espectro observado.

Los QNM's se etiquetan mediante un conjunto de índices (ℓ, m, n, s) , heredados de los parámetros introducidos en la solución propuesta (Ecu. 4.12). Recordemos que ℓ representa el número cuántico angular total, m el número azimutal, s el peso de espín del campo perturbador, y n el número de sobretono, asociado al orden de la resonancia.

Cada conjunto de estos parámetros determina una frecuencia compleja específica $\omega = \omega_{lmn}$, que caracteriza la dinámica de decaimiento de las perturbaciones en el espacio-tiempo de Kerr. Estudios recientes de alta precisión, como los realizados por Cook y Zalutskiy (2014)[CZ14b], han explorado detalladamente dos regímenes de especial interés:

- a. el límite extremo de Kerr ($a \rightarrow M$), donde emergen los denominados *Zero Damped Modes*, con tiempos de decaimiento muy largos;
- b. el límite de Schwarzschild ($a \rightarrow 0$), donde algunos QNM's se aproximan a frecuencias puramente imaginarias asociadas a modos especiales de transmisión total.

Para abordar estos regímenes, Cook y Zalutskiy emplearon uno de los avances más significativos en el análisis cuantitativo de los QNM's, desarrollado por Leaver [Lea85], quien introdujo una formulación basada en fracciones continuas para resolver la ecuación radial de Teukolsky en espacios-tiempo de Kerr, la cual estudiaremos con detalle más adelante. Este método permite calcular con alta precisión las frecuencias complejas asociadas a los QNM's para diferentes valores de los parámetros angulares m y ℓ .

En este punto es importante precisar que el objetivo científico fundamental es determinar el conjunto de frecuencias que caracterizan los QNM's, ya que son estos valores los que pueden compararse directamente con las mediciones experimentales. Desde una perspectiva matemática, la ecuación maestra de Teukolsky, como se mostró en el capítulo anterior, admite una formulación numérica precisa. No obstante, para obtener las frecuencias cuasinormales es necesario resolver de manera simultánea las ecuaciones resultantes de la separación de variables: la ecuación angular y la ecuación radial, ambas sujetas a las condiciones de contorno radiativas previamente establecidas. En este contexto, el propósito de este capítulo es presentar el procedimiento de cálculo de dichas frecuencias complejas, junto con la formulación de la solución de la ecuación de Teukolsky, y analizar su relevancia en la estabilidad de las soluciones clásicas de las ecuaciones de campo de Einstein.

5.1. Aproximación numérica de los QNM'S

Como se mostró anteriormente, para resolver la ecuación de Teukolsky (Ecu. 4.11) es necesario suponer una solución que permita la separación de variables en sus cuatro coordenadas (Ecu. 4.12). De ellas, el comportamiento temporal y azimutal (o axial) es conocido, por lo que el problema se reduce a estudiar las dependencias angular y radial. A partir de esta separación se obtienen dos ecuaciones diferenciales ordinarias (Ecu. 4.14, Ecu. 4.15), las cuales están acopladas de forma indirecta a través de los parámetros de la frecuencia compleja ω y de la constante de acoplamiento angular $A_{m\ell}$, además de depender de otros parámetros libres, como el espín del campo perturbativo (s). En consecuencia, la resolución completa de la ecuación de Teukolsky se reduce al estudio y solución conjunta de las ecuaciones diferenciales radial y angular.

La ecuación angular puede plantearse como un problema espectral de la forma,

$$\mathcal{L}_x(S_{m\ell}) = -A_{m\ell} S_{m\ell},$$

donde el operador \mathcal{L}_x (Ecu. 4.17) actúa sobre las funciones angulares de espín $S_{m\ell}(x)$ (denominadas *Spin-Weighted Spheroidal Harmonics*). Para un valor dado de ω , esta ecuación puede resolverse numéricamente —como se mostró en el capítulo anterior— mediante el método de Galerkin, expresando $S(x)$ como una combinación lineal de funciones pertenecientes a una base ortogonal elegida. Este método permite además determinar los valores propios $A_{m\ell}$ asociados a la parte angular del problema.

Por otra parte, la ecuación radial, aunque también puede interpretarse formalmente como un problema espectral, requiere que los parámetros ω y $A_{m\ell}$ sean consistentes con los obtenidos en la parte angular. De este modo, al considerar el tratamiento desarrollado para la ecuación radial, se propone un *ansatz* (Ecu. 4.20) que incorpora las condiciones radiativas, junto con un cambio de variable (Ecu. 4.23, Ecu. 4.22) que compacta el dominio al intervalo $[0, 1]$ y permite resolver el problema equivalente,

$$\mathcal{L}_z(H_{m\ell}) = 0,$$

donde el parámetro previamente tratado como autovalor, $\bar{\lambda}$, que depende explícitamente tanto de $A_{m\ell}$ como de ω y pasa a formar parte del operador diferencial. Este planteamiento, al acoplar ambos parámetros, ya no permite obtener una solución mediante el método de Galerkin para la parte radial. En este punto, se recurre al método propuesto por Leaver [Lea85], del cual nos basaremos ampliamente para la siguiente sección.

5.1.1. Método de Leaver

Para implementar este método en la ecuación diferencial de la parte radial, reconsideramos el problema,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_z(H_{m\ell}) = & \left[\frac{\mathcal{B}(z-1)^2}{r_+ - r_-} \frac{d^2}{dz^2} \right. \\ & + \left[\mathcal{B} + \mathcal{B}Q(z-1) + (s+1)(zr_- - r_+ - M(z-1)) \right] \frac{2(z-1)}{r_+ - r_-} \frac{d}{dz} \\ & + \frac{2(s+1)(zr_- - r_+ - M(z-1))}{z-1} Q + \mathcal{B}Q^2 \\ & \left. + \frac{K^2(z-1) - 2is(zr_- - r_+ - M(z-1))K}{\mathcal{B}(z-1)} + 4is\omega \frac{zr_- - r_+}{z-1} - \bar{\lambda} \right] (H_{m\ell}) = 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde, $\bar{\lambda} = A_{m\ell} + a^2\omega^2 - 2am\omega$, $K = \omega(z-1)^{-2}[(zr_- - r_+)^2 + a^2(z-1)^2] - am$,

$\mathcal{B} = (zr_- - r_+)^2(z-1)^{-2} - 2M(zr_- - r_+)(z-1)^{-1} + a^2$, $Q = \zeta + \frac{z-1}{r_- - r_+}(\eta + \xi/2)$ al reemplazar estos valores y simplificando tenemos

El método de Leaver se basa en expresar la solución como una serie de potencias centrada en $z = 0$,

$$H_{m\ell}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Al derivar y sustituir esta expresión en la ecuación diferencial anterior, se obtiene una relación de recurrencia de tres términos para los coeficientes a_n de la forma,

$$\alpha_n a_{n+1} + \beta_n a_n + \gamma_n a_{n-1} = 0, \quad (5.2)$$

donde los coeficientes α_n , β_n y γ_n dependen de los parámetros del sistema ($a, M, s, m, \omega, A_{m\ell}$) y de la forma explícita del operador radial. Dado que la solución $H_{m\ell}$ debe ser regular y acotada, la serie de potencias debe ser convergente. Para garantizar esta condición, se aplica el criterio de la razón,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0,$$

sustituyendo la relación de recurrencia (Ecu. 5.2), se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{-\gamma_{n+1}}{\beta_{n+1} + \alpha_{n+1} \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}}, \\ r_n &= \frac{-\gamma_{n+1}}{\beta_{n+1} + \alpha_{n+1} r_{n+1}}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde $r_n = a_{n+1}/a_n$ representa la razón entre coeficientes consecutivos como una fracción continua. y para el término inicial se tiene

$$r_0 = \frac{a_1}{a_0} = \frac{-\beta_0}{\alpha_0}.$$

Teniendo esto en cuenta, el método de Leaver consiste en asumir un valor inicial de ω y fijar un número máximo de iteraciones N_{\max} . A partir de ello, se realiza una iteración hacia atrás hasta obtener el valor de $r_0(\omega)$, el cual depende del valor de ω tomado como semilla. Posteriormente, se determinan las raíces de la función $f(\omega)$, que proporcionan los distintos valores de ω asociados a los diferentes modos o tonos (“ n ”). La cantidad de tonos posibles está determinada por el orden de la función f ,

$$f(w) = \beta_0(w) + r_0(w)\alpha_0(w). \quad (5.4)$$

Entre sus principales ventajas se destacan su alta estabilidad numérica y rápida convergencia, incluso para modos de alta sobretonalidad ($n \gg 1$) o valores complejos de ω cercanos al eje real, donde otros métodos (como las expansiones de WKB o las integraciones directas) suelen perder precisión³. Además, la formulación en términos de fracciones continuas evita la divergencia de la serie en regiones de interés físico y permite un control explícito del error mediante el parámetro N_{\max} . Esto hace del método de Leaver una herramienta especialmente eficiente para el cálculo de los QNM's en geometrías de Kerr y Schwarzschild, constituyendo un estándar de referencia en la literatura moderna sobre perturbaciones.

Ejemplo 3. Siguiendo las Notas de Berti [Ber16], para el límite de Schwarzschild ($a = 0$) se tiene que los coeficientes de la ecuación de recurrencia son:

$$\begin{aligned}\alpha_n &= 1 + n^2 + 2n(1 + i\omega) + 2i\omega, \\ \beta_n &= -1 - A_{m\ell} - 2n^2 + s^2 - 2n(1 + 4i\omega) - 4i\omega + 8\omega^2, \\ \gamma_n &= n^2 - s^2 + 4in\omega - 4\omega^2.\end{aligned}$$

Recordemos que, en el límite de Schwarzschild, el autovalor angular se reduce a $A_{m\ell} = \ell(\ell+1)$, correspondiente a los armónicos esféricos de spin. A partir de estos coeficientes se construye la fracción continua característica del método de Leaver, cuya convergencia define los valores permitidos de ω que satisfacen las condiciones de contorno físicas: radiación puramente entrante en el horizonte y puramente saliente en el infinito.

³En particular, los métodos WKB de orden finito presentan errores significativos para modos altamente amortiguados o de bajo número angular, mientras que los métodos de integración directa son sensibles a inestabilidades numéricas y a la elección de condiciones de contorno. Véase, por ejemplo, Konoplya y Zhidenko [KZ11] para una revisión detallada de las limitaciones de estos enfoques.

Para la implementación numérica se desarrolló un algoritmo en *Julia* (ver Apéndice B) que evalúa recursivamente la fracción continua para un número finito de iteraciones N_{\max} , asumiendo una semilla inicial ω_0 y aplicando el método de Newton-Raphson en el plano complejo para determinar las raíces de $f(\omega)$. El procedimiento consiste en iterar hacia atrás desde $n = N_{\max}$ hasta $n = 0$, calculando la razón entre los coeficientes sucesivos (Ecu. 5.3), hasta obtener $r_0(\omega)$, y posteriormente resolver la condición de fracción continua (Ecu.5.4)

Una vez implementado, el método permite determinar las frecuencias de los QNM's ($\omega_{n\ell}$) con notable precisión. En la Tabla 5.1 se presentan los resultados obtenidos para los casos $s = 0$ y $s = 2$, comparados con los valores de referencia reportados por Berti [BCS09]. Puede observarse que, para el tono fundamental ($n = 0$), las frecuencias calculadas coinciden con gran exactitud con los valores teóricos, lo que valida la correcta implementación del método de Leaver y confirma su alta estabilidad numérica en el límite esféricamente simétrico.

Modo		Valores encontrados		Berti (ref.)		error abs
s	ℓ	Re	-Im	Re	-Im	
0	2	0.483644	0.096759	0.483640	0.096760	4.06e-6
0	3	0.675366	0.096499	0.675367	0.096962	4.62e-4
2	2	0.346711	0.273914	0.373672	0.088962	1.82e-2
2	3	0.599443	0.092703	0.599443	0.092703	2.92e-7

Tabla 5.1. Comparación de frecuencias QNM en Schwarzschild ($a = 0$). Unidades: $M\omega$.

Nota: Los valores de referencia corresponden a la base de datos *Ringdown* de E. Berti y cols. para Schwarzschild.

Una vez verificada la eficiencia del método de Leaver, el paso siguiente consiste en implementarlo dentro del esquema general de la solución numérica de la ecuación de Teukolsky, utilizando como parámetro de entrada el valor de $A_{m\ell}$ obtenido previamente a partir de la ecuación angular. Este acoplamiento entre las partes radial y angular permite resolver de manera autosuficiente el problema espectral completo, garantizando la consistencia entre los modos angulares y las frecuencias cuasinormales resultantes.

5.1.2. Iteración de Newton

Como se ha mencionado anteriormente, este trabajo se inspira ampliamente en el desarrollo y los resultados presentados por Cook y Zalutskiy (2014)[CZ14b], donde el esquema de resolución numérica de la ecuación de Teukolsky se centra en la implementación de la iteración de Newton. Este método constituye una técnica iterativa de refinamiento utilizada para aproximar las raíces de una función no lineal $f(\omega) = 0$, usualmente mediante la evaluación sucesiva de:

$$\omega_{k+1} = \omega_k - \frac{f(\omega_k)}{f'(\omega_k)}.$$

En el contexto del presente trabajo, el procedimiento se emplea para obtener la frecuencia compleja ω que satisface simultáneamente las ecuaciones radial y angular de Teukolsky, de manera que los valores propios $A_{m\ell}$ y ω se determinen de forma consistente.

El proceso iterativo seguido se puede resumir en los pasos que se indican a continuación:

- Se asigna una frecuencia inicial ω_k , que puede corresponder a un valor aproximado obtenido de las tablas de Berti o del modo cuasinormal que se desea calcular, para un conjunto fijo de parámetros (s, a, m, M, ℓ, n) .
- Se resuelve, mediante el método de Galerkin, el problema espectral angular descrito en la Ecu. (4.17), y se obtiene el valor correspondiente de $A_{m\ell}$.
- Con los parámetros fijos establecidos y el valor correspondiente de $A_{m\ell}$, se resuelve el problema radial mediante el método de Leaver (Ecu. 5.1), determinando un nuevo valor de la frecuencia ω_{k+1} , como la raíz de la función f , que satisface las condiciones de contorno radiativas.
- Se calcula el error o diferencia entre la frecuencia encontrada y la frecuencia semilla empleada:

$$\text{error} = \|\omega_{k+1} - \omega_k\|,$$

y se compara con un criterio de tolerancia preestablecido ε .

- Si el número máximo de iteraciones no ha sido alcanzado y el criterio de convergencia $\text{error} < \varepsilon$ no se cumple, se actualiza la frecuencia inicial según $\omega_k = \omega_{k+1}$, repitiendo el proceso hasta lograr la convergencia.

De esta forma, la iteración de Newton actúa como un puente entre las dos partes del problema espectral, la angular y la radial, garantizando que el valor de $A_{m\ell}$ utilizado en la ecuación radial corresponda al mismo estado propio de la ecuación angular. Este procedimiento iterativo asegura la coherencia física de las soluciones y permite obtener, con alta precisión, las frecuencias de los QNM's asociadas a cada modo (s, m, ℓ, n) del sistema.

Observación 7. *La solución numérica completa de la ecuación de Teukolsky puede reconstruirse para cada uno de sus modos, teniendo en cuenta la suposición inicial (ver Ecuación 4.12):*

$$\Psi_{m\ell}(t, r, \theta, \phi) = e^{i(m\phi - \omega t)} S_{m\ell}(\theta) R_{m\ell}(r),$$

donde los parámetros (s, m, ℓ, n) se fijan para caracterizar el modo particular de la perturbación. La reconstrucción de la solución se realiza considerando los siguientes componentes:

- **Parte temporal y azimutal:** corresponde al factor exponencial asociado a las dependencias en t y ϕ , construido con el valor final de la frecuencia compleja ω obtenida tras la iteración de Newton para el tono y modo seleccionados. El signo de la parte imaginaria de ω determina el comportamiento envolvente del campo perturbado, ya sea amortiguado o creciente.

$$e^{i(m\phi - \omega t)}.$$

- **Parte angular:** se representa como una combinación lineal de los elementos del autovector $c^{(\ell)}$ correspondiente al último autovalor $A_{m\ell}$ calculado para la frecuencia ω convergente. Esta expansión se expresa sobre la base de los polinomios de Chebyshev de segundo tipo, $U_n(x) := \{\phi_1(x), \dots, \phi_j(x), \dots, \phi_n(x)\}$, de la forma,

$$S_{m\ell}(\theta) = \sum_{j=0}^n c_j^{(\ell)} \phi_j(\cos \theta).$$

- **Parte radial:** corresponde al ansatz propuesto en serie de potencias (Ecu.4.20), cuyos coeficientes a_n satisfacen la ecuación de recurrencia (Ecu. 5.2) para los valores finales de los coeficientes α_n , β_n y γ_n , determinados a partir de los últimos valores de $A_{m\ell}$ y ω obtenidos en la iteración de Newton,

$$R_{m\ell}(r) = (r - r_+)^{\xi} (r - r_-)^{\eta} e^{\zeta r} \sum_{n=0}^N a_n \left(\frac{r - r_+}{r - r_-} \right)^n.$$

En conjunto, estos tres componentes definen la estructura completa de la perturbación $\Psi_{m\ell}(t, r, \theta, \phi)$ para cada modo (s, m, ℓ, n) , permitiendo la reconstrucción coherente del campo en todo el dominio exterior al horizonte de eventos del agujero negro,

$$t \in [0, \infty), \quad \phi \in [0, 2\pi), \quad \theta \in [0, \pi], \quad r \in [r_+, \infty),$$

preservando las condiciones de contorno radiativas y la periodicidad azimutal del sistema.

5.2. Análisis de Estabilidad

Dentro del ámbito matemático, no basta con encontrar una solución a una ecuación diferencial: es igualmente fundamental analizar su estabilidad. Recordemos brevemente la línea teórica que ha guiado

este trabajo. Partimos del marco de la Relatividad General y, en particular, de las ecuaciones de campo de Einstein, cuyas soluciones clásicas, como las métricas de Schwarzschild y Kerr, describen el espacio-tiempo generado por cuerpos con propiedades físicas específicas. Estas soluciones determinan una métrica que define una geometría de fondo en torno al objeto central. Sin embargo, surge una cuestión fundamental: ¿qué tan estables son dichas soluciones ante pequeñas perturbaciones?

Es precisamente aquí donde se introduce la teoría de perturbaciones, que consiste en añadir un término pequeño a la solución clásica y verificar si la métrica resultante continúa satisfaciendo las ecuaciones de Einstein. Este proceso es altamente no trivial y, en el caso de la métrica de Kerr, requiere adoptar un formalismo alternativo que permita describir la evolución de las perturbaciones según su naturaleza física. Dichas perturbaciones pueden representarse mediante campos escalares, electromagnéticos, gravitacionales o incluso de neutrinos. En este contexto, la ecuación maestra de Teukolsky proporciona una formulación unificada capaz de contener la información esencial del campo perturbado. Resolver esta ecuación permite estudiar el comportamiento de los términos perturbativos asociados a los distintos campos sobre la métrica de Kerr (y, en el límite $a \rightarrow 0$, sobre la de Schwarzschild), lo que posibilita analizar la estabilidad de las soluciones clásicas y de la geometría de fondo.

Las soluciones de la ecuación de Teukolsky (los QNM's) representan la respuesta dinámica intrínseca del espacio-tiempo frente a pequeñas perturbaciones. Como se analizó anteriormente, estas soluciones describen ondas que se propagan radialmente, con una envolvente cuya amplitud depende del tiempo. Dicha dependencia temporal encierra la información más relevante, pues en ella aparecen las frecuencias características del sistema, las cuales son, en general, complejas. Al separar la parte exponencial de la solución, puede escribirse como,

$$e^{i(m\phi - \omega t)} = e^{i(m\phi - \omega_R t)} e^{\omega_I t},$$

donde la parte real ω_R determina la frecuencia de oscilación, mientras que la parte imaginaria ω_I controla la evolución temporal de la amplitud. De este modo, se distinguen dos comportamientos posibles. Para $\omega_I > 0$, el término exponencial crece con el tiempo, lo que implica que la perturbación aumenta sin límite y, por tanto, la métrica de fondo resulta inestable. En cambio, cuando $\omega_I < 0$, el factor exponencial decae, amortiguando las oscilaciones a medida que $t \rightarrow \infty$. En este caso, los términos perturbativos desaparecen y el sistema retorna gradualmente a su configuración estacionaria original, garantizando la estabilidad lineal de la métrica de fondo.

Veamos que, por la forma de la solución planteada, los QNM's actúan como “modos resonantes” del espacio-tiempo, análogos a las vibraciones amortiguadas de un sistema dinámico. En este contexto, recor-

demos el clásico ejemplo de un resorte amortiguado: cuando la frecuencia de excitación externa entra en sincronía con la frecuencia interna del sistema, la amplitud de oscilación crece exponencialmente hasta el punto de que el sistema puede llegar a romperse. Por otro lado, para frecuencias no acopladas y menores que la frecuencia propia, el sistema de oscilación externa amortigua la oscilación propia del resorte, de tal manera que la amplitud decae hasta que el sistema alcanza su estado base o de equilibrio. Este comportamiento, que ocurre cuando las frecuencias de oscilación externa e interna se desacoplan, es el que se observa en muchos sistemas físicos, donde la falta de sincronización lleva a la disipación gradual de las oscilaciones, permitiendo que el sistema vuelva a su equilibrio [Gol16].

Aunque reconstruir la métrica perturbada no sea posible en este contexto, el estudio de los términos perturbativos nos brinda información esencial sobre el sistema. En particular, si el objetivo es analizar la estabilidad de la métrica de fondo $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}^{(0)}$ cuando $t \rightarrow \infty$, vemos que este fenómeno se manifiesta cuando $\omega_I < 0$, ya que las perturbaciones decaen con el tiempo y la métrica de fondo se estabiliza. Es importante señalar que, aunque los términos perturbativos, como ψ_2 y ψ_4 en el formalismo NP, dependen de la elección de la tetrada nula (Ver apéndice A), que a su vez depende de la geometría de fondo, intentar recuperar directamente la métrica perturbada a partir de estos términos no es óptimo. El análisis de la estabilidad no requiere la reconstrucción completa, sino solo el comportamiento de los QNM's y su influencia en la métrica de fondo.

Es en este punto donde los resultados numéricos obtenidos ganan gran valor, como se vio en el ejemplo de Berti [BCS09], para el caso de Schwarzschild, replicado en este trabajo (Tabla 5.1) y los resultados numéricos obtenidos por Teukolsky [Teu73], Leaver [Lea85] y, más recientemente, por Cook y Zalutskiy [CZ14b], confirman consistentemente que las frecuencias cuasinormales presentan una parte imaginaria negativa, lo que indica la estabilidad lineal de los agujeros negros de Kerr y Schwarzschild bajo perturbaciones de distintos espines. Esta tendencia ha sido corroborada de manera observational en la fase de *ringdown* de eventos de fusión binaria de agujeros negros detectados por LIGO/Virgo [LC16], cuyas señales muestran el mismo patrón de amortiguamiento exponencial predicho teóricamente. Así, los resultados numéricos respaldan la estabilidad de las soluciones clásicas de las ecuaciones de campo de Einstein ante distintos tipos de perturbación, sin necesidad de evolucionarlas directamente en el tiempo.

Ondas gravitacionales

Dentro de las soluciones encontradas, destaca especialmente la asociada al peso de espín $s = \pm 2$, correspondiente a campos gravitacionales. Estos QNM's describen las llamadas ondas gravitacionales, que teóricamente se generan cuando una perturbación sobre un agujero negro induce ondas en el campo gra-

vitacional. Como se explicó previamente, estas ondas se comportan como perturbaciones que decaen con el tiempo. Bajo la suposición de estabilidad de la métrica de fondo, esto implica que su presencia en el espacio-tiempo está asociada a un evento que generó dicha perturbación en un tiempo t dado.

Este comportamiento da a los científicos la capacidad de reconocer eventos que han generado perturbaciones en el campo gravitacional, como colisiones de agujeros negros o perturbaciones externas de otros objetos, como la cercanía de estrellas a agujeros negros. Aunque en las escalas astronómicas estas perturbaciones son pequeñas, su estudio ha permitido avances significativos en la observación y comprensión de los fenómenos asociados a los agujeros negros [BCS09].

Desde hace algunos años, particularmente desde el primer intento de medición de ondas gravitacionales con los interferómetros LIGO y Virgo [TWA+15], se ha hecho un esfuerzo intensivo por observar y analizar estas ondas. Estas observaciones se han vinculado a sucesos como las fusiones de agujeros negros o interacciones de estrellas con agujeros negros, tal como la teoría había ayudado a predecir. Este enfoque es vital, ya que las frecuencias de los QNM's obtenidas numéricamente se utilizan para extraer parámetros físicos de los agujeros negros a partir de las observaciones de ondas gravitacionales. Al tener en cuenta las condiciones de estabilidad de la métrica de fondo, los científicos pueden confiar en que las medidas de estos parámetros son precisas, lo que, a su vez, mejora la calidad de las predicciones y análisis astrofísicos. Así, los observables, como las señales detectadas, contienen información crucial sobre las características de estos objetos astronómicos, como su masa, momento angular y espín [LC16].

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se estudió la estructura matemática de la ecuación maestra de Teukolsky (Ecu. 4.11), desde las condiciones matemáticas que permiten su derivación hasta las soluciones numéricas asociadas, así como las aproximaciones útiles para calcular perturbaciones en diversos campos escalares y vectoriales típicos de la física; todo esto dentro del marco de la teoría de la relatividad general. El objetivo final es comprender las perturbaciones gravitacionales en agujeros negros de Kerr. Este objetivo central se alcanza a partir de los siguientes resultados:

- Se desarrolló de manera rigurosa el procedimiento para obtener dos de las soluciones exactas más conocidas de las ecuaciones de campo de Einstein, teniendo en cuenta las características físicas del objeto masivo fuente de estudio en cada caso. En primer lugar, se desarrolla el caso de Schwarzschild, aplicando únicamente la simetría esférica, que corresponde al escenario más simple. Se propone una forma general de la métrica y, a partir del cálculo explícito de los tensores de Ricci y Riemann, se determinan los coeficientes que la definen. El procedimiento aplicado para el caso Schwarzschild sirve como guía para abordar posteriormente el caso de Kerr, en el cual se consideran tanto la simetría esférica como la rotacional. Este análisis conllevó a las expresiones correspondientes a la métrica de Schwarzschild (Ecu. 3.1) y a la métrica de Kerr (Ecu. 3.2) en coordenadas esféricas. Sin embargo, en el caso de la métrica de Kerr, se aplicó un cambio de coordenadas a unas coordenadas útiles conocidas como coordenadas de Boyer-Lindquist (Ecu. 3.4). Este cambio es fundamental, ya que la representación de la métrica en estas coordenadas elimina términos fuera de la diagonal, lo que facilita el tratamiento matemático de las perturbaciones posibles sobre tal métrica.
- En el apéndice (A) se presentan los fundamentos matemáticos del formalismo de Newman Penrose, junto con la descripción de sus elementos constitutivos y propiedades esenciales. Se ilustra su utili-

dad en la representación de las ecuaciones de campo de Einstein y de las ecuaciones de Maxwell, así como la elección de tetradas nulas para los espacios-tiempo de Schwarzschild y Kerr. En el capítulo (4), este formalismo se aplicó al estudio de las perturbaciones sobre la métrica de Kerr, expresando la métrica, los términos perturbativos y demás cantidades relevantes en la base compleja definida por la tetrada nula correspondiente a dicho espacio-tiempo. Se verificó que esta representación permite formular de manera sistemática las ecuaciones que describen los campos perturbativos sin pérdida de información física. Se señala, además, que los coeficientes de espín se relacionan mediante rotaciones tipo III de la tetrada nula, lo que posibilita la unificación de las ecuaciones electromagnéticas y gravitacionales en una ecuación maestra, resultado de la incorporación de los términos perturbativos (Obser. 4). Este proceso conduce a la formulación de la ecuación de Teukolsky (Ecu. 4.10) la cual, al retornar a las variables originales, da lugar a una ecuación diferencial parcial que puede resolverse mediante el método tradicional de separación de variables (Ecu. 4.11). Este método reduce el problema a uno en el cual solo debe resolverse una ecuación diferencial ordinaria para la parte angular (Ecu. 4.16) y otra ecuación similar para la parte radial (Ecu. 4.18).

- Se analizó el comportamiento de las soluciones de la ecuación de Teukolsky, identificando tres características principales asociadas a cada factor de la solución:

1. **Factor angular:** Se comporta como armónicos espinoidales, y en el límite de Schwarzschild ($a = 0$), recupera la forma de los polinomios de Laguerre de cada uno de los modos asociados (Fig. 4.2), definiéndose así la evolución espacial de las perturbaciones.
2. **Factor radial:** Presenta un comportamiento oscilatorio, con ondas salientes hacia el infinito y entrantes en el horizonte de eventos, cumpliendo así las condiciones de frontera radiativas (Fig. 4.3). Este comportamiento es directamente relevante en el análisis asintótico, ya que determina cómo las perturbaciones se propagan en las regiones extremas del espacio-tiempo.
3. **Factor envolvente:** Representado por el término exponencial de la solución propuesta, cuyo comportamiento está definido por la parte imaginaria de las frecuencias ω_I . Los valores encontrados para el límite de Schwarzschild (Tabla. 5.1) y los valores teóricos para Kerr muestran una tendencia decreciente que tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito. Este comportamiento asintótico es característico de los QNM's, donde la parte imaginaria de la frecuencia determina la tasa de decaimiento de las ondas, lo que se expresa como un dacaimiento de la energía de las perturbaciones con el tiempo.

- Se identificó la estabilidad de la métrica de Schwarzschild al corroborar numéricamente que los

valores imaginarios de las frecuencias de los QNM's para $a = 0$ corresponden a valores negativos (Tabla 5.1). Esto implica que, cuando el tiempo tiende a infinito, los términos perturbativos tienden a cero, asegurando que el espacio-tiempo conserva la métrica de fondo asociada. Para la métrica de Kerr, se extendió el resultado comentado al corroborar que los valores presentados en la literatura para la frecuencia ω_I también son negativos, lo que respalda su estabilidad ante perturbaciones.

- Por otro lado, se discutieron las implicaciones del resultado teórico anterior en las aplicaciones experimentales, especialmente aquellas propias del contexto de las ondas gravitacionales ($s = \pm 2$). La estabilidad de la métrica de fondo permite validar las características físicas que se extraen de la medición de las ondas gravitacionales emitidas por los agujeros negros, tales como el espín, la masa, entre otros. Además, esta estabilidad facilita la detección de eventos astrofísicos de interés, resultado de la detección de las ondas gravitacionales que estos generan.
- Se constató que desde el punto de vista matemático, el estudio espectral de los QNM's proporciona una herramienta fundamental para comprender la estabilidad de las soluciones tipo Kerr. Sin embargo, debido a las limitaciones de este trabajo, no se desarrolló un análisis numérico completo para una métrica con valores $a \neq 0$ ni tampoco para el límite $a \rightarrow M$. En futuros trabajos se podría completar dicho desarrollo, utilizando los mismos métodos espectrales aplicados en el presente trabajo a la métrica de Kerr en el límite de Schwarzschild.

La exploración numérica desarrollada en este trabajo podría ampliarse mediante la implementación de nuevos métodos numéricos que optimicen la precisión y estabilidad de los cálculos espectrales. Futuras investigaciones también podrían orientarse hacia una comprensión más profunda del comportamiento analítico de las frecuencias complejas asociadas a los QNM's, así como a la demostración rigurosa de la discreción y completitud de sus valores propios, aspectos que continúan siendo de gran interés en la investigación contemporánea de la matemática aplicada a la relatividad general.

Por otra parte, es importante recordar la naturaleza exploratoria del presente trabajo, cuyo enfoque se ha centrado en un caso particular: la métrica de Kerr bajo perturbaciones lineales. No obstante, el marco teórico y numérico aquí desarrollado constituye un punto de partida para extender el análisis perturbativo lineal a otras soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein, considerando configuraciones más generales como cuerpos masivos, rotantes y cargados (Kerr Newman). Asimismo, el estudio de perturbaciones de orden no lineal representa una vía prometedora para aportar evidencia hacia una demostración formal de la estabilidad dinámica de los agujeros negros astrofísicos.

Apéndice A

Formalismo Newman Penrose

En matemáticas, es común encontrar espacios vectoriales donde la representación de una ecuación resulta más sencilla sobre una base particular que sobre otra. En este trabajo, por ejemplo, hemos visto cómo el uso de una base de coordenadas esféricas en el espacio-tiempo resulta conveniente para describir las distintas métricas en las cercanías de un cuerpo esférico, ya que refleja de manera natural la geometría del sistema. De manera similar, las ecuaciones de Einstein pueden adquirir una representación más manejable al elegirse una base distinta sobre el mismo campo vectorial. Es basándose en este principio que surge el formalismo de Newman Penrose (NP).¹

En la década de 1960, el matemático *Roger Penrose* y el físico teórico *Ezra Newman* [NP62] propusieron el uso de tetradas nulas como una herramienta matemática capaz de simplificar de manera significativa las ecuaciones de campo de Einstein en relatividad general, especialmente al abordar perturbaciones gravitacionales y el estudio de agujeros negros. Este formalismo permitió descomponer la curvatura del espacio-tiempo en componentes más manejables y relacionarlas de forma directa con la propagación de ondas gravitacionales. Para trabajar de manera efectiva con el formalismo NP, es fundamental comprender el uso de tetradas y spinors: las tetradas son conjuntos de cuatro vectores linealmente independientes que forman una base local del espacio tangente, mientras que los spinors son objetos matemáticos con componentes complejas que transforman según representaciones de espín del grupo de Lorentz² ($\mathbb{SL}(2, C)$). Ambos conceptos proporcionan la base para expresar las ecuaciones de Einstein de forma más compacta y manejable, especialmente en geometrías curvadas.

¹En física, un formalismo se refiere a la implementación de un conjunto de reglas matemáticas y estructuras lógicas para describir un fenómeno físico de manera más simple.

²El grupo de Lorentz es el conjunto de todas las transformaciones lineales del espacio-tiempo que preservan la métrica de Minkowski, es decir, que conservan la distancia espacio-temporal entre eventos.

En este capítulo se explorarán brevemente los formalismos de spinors y de tetradas nulas, así como la relación entre ambos, sentando las bases conceptuales y matemáticas necesarias para introducir posteriormente el formalismo NP y su aplicación a distintas métricas del espacio-tiempo, incluyendo las de Schwarzschild y Kerr.

A.1. Spinors Y Tetradas

En el formalismo NP, las tetradas nulas y los spinors están estrechamente relacionados: cada tetrada nula se puede construir a partir de un spin basis $\{o^A, \iota^A\}$ mediante combinaciones bilineales de spinors. Esta correspondencia, que se explicará en detalle más adelante, permite que los tensores de curvatura, como los tensores de Riemann o Ricci presentes en las ecuaciones de Einstein, se proyecten en componentes más manejables, facilitando el cálculo de los coeficientes de espín y de los escalares de Weyl, que codifican la curvatura libre del espacio-tiempo. En otras palabras, el uso de spinors proporciona una estructura algebraica más compacta que la manipulación directa de los tensores, mientras que las tetradas nulas ofrecen una base geométrica explícita para proyectar estas componentes en el espacio-tiempo, lo que hace posible un tratamiento sistemático de las perturbaciones gravitacionales, que constituye el objetivo de este desarrollo teórico. Para ello, en esta sección nos apoyaremos ampliamente en los libros de Robert M. Wald [Wal84] y S. Chandrasekhar [Cha83].

A.1.1. Spinors de Weyl

Los spinors fueron introducidos en matemáticas a comienzos del siglo XX por Élie Cartan, en el marco de su estudio sobre las representaciones del grupo ortogonal y la teoría de las álgebras de Clifford. En su memoria de 1913, *Les groupes de transformations continus, infinis, simples*, [Car13] Cartan mostró que además de los tensores tradicionales existían nuevos objetos algebraicos asociados de manera natural a la rotación en espacios euclidianos de dimensión arbitraria: los spinors. Décadas más tarde, Newman y Penrose retomaron esta estructura y la aplicaron al estudio de la relatividad general. En el presente trabajo nos centraremos únicamente en los conceptos básicos de dicha adaptación, es decir, en la incorporación de los spinors al marco de la relatividad general, los spinors de Weyl³.

En este contexto surge el denominado formalismo NP, el cual se fundamenta en el uso de tetradas nulas,

³Existen diferentes clases de spinors según la representación que se considere: los spinors de Pauli (usados en mecánica cuántica no relativista), los spinors de Weyl (dos componentes, en relatividad especial) y los spinors de Dirac (cuatro componentes, que combinan dos spinors de Weyl). Todos ellos están vinculados a representaciones del grupo de Lorentz. [PR84].

cuyos vectores pueden construirse a partir de combinaciones bilineales de un par de spinors de weyl, a los que en adelante nos referiremos simplemente como spinors, de una base espinorial. Para formalizar esto, consideremos un espacio vectorial complejo S de dimensión dos, junto con el tensor ϵ_{AB} ⁴ una forma bilineal antisimétrica, es decir, $\epsilon_{AB} = -\epsilon_{BA}$, se define el par (S, ϵ_{AB}) como el espacio spinorial.

Sobre este espacio se define el producto bilineal antisimétrico

$$\langle \xi, \eta \rangle = \epsilon_{AB} \xi^A \eta^B,$$

el cual sirve para subir y bajar índices⁵ y cumple con la siguientes propiedades:

- Bilinealidad: $\langle a\xi + b\eta, \zeta \rangle = a\langle \xi, \zeta \rangle + b\langle \eta, \zeta \rangle$,
- No degeneración: $\langle \xi, \eta \rangle = 0, \forall \eta \Rightarrow \xi = 0$,
- Antisimetría: $\langle \xi, \eta \rangle = -\langle \eta, \xi \rangle$.

vale la pena resaltar que este no es un producto interno en el sentido usual de espacios de Hilbert (no es definido positivo), sino una forma bilineal antisimétrica, también llamada spinor alternante.

Dado un espacio vectorial, es natural buscar una base que permita expresar cualquier elemento de él, y el espacio spinorial no es la excepción, una vez definido el producto bilineal, podemos elegir las bases

$$\mathcal{B}_\infty = \{o^A, \iota^A\} \text{ de } S \text{ tal que } \langle o, \iota \rangle = 1, \quad (\text{A.1})$$

$$\mathcal{B}'_\infty = \{o^{A'}, \iota^{A'}\} \text{ de } \bar{S}, \text{ el conjugado complejo de } S. \quad (\text{A.2})$$

La utilidad de estas bases no se limita al propio espacio spinorial, sino que se extiende también al espacio-tiempo en forma local, pues a partir de ellas es posible establecer una correspondencia, por ejemplo, con los vectores en el espacio-tiempo de Minkowski.

Consideremos el espacio spinorial complejo bidimensional S y su conjugado complejo \bar{S} . El producto tensorial $S \otimes \bar{S}$ tiene dimensión compleja $2 \times 2 = 4$, y su subespacio de matrices hermíticas⁶ $\text{Herm}(S \otimes \bar{S})$ es isomorfo al espacio-tiempo de Minkowski $(\mathbb{R}^{1,3})$ [PR84]. La correspondencia se da mediante la elección

⁴Los índices en mayúscula (A,B,...) toman solamente los valores de 0 y 1, y los indices primados (A',B',...) se utilizan para denotar el spinor conjugado complejo correspondiente al mismo índice.

⁵"Subir y bajar índices" hace referencia a transformar componentes de contravariantes a covariantes (y viceversa).

⁶La matriz hermítica tiene números complejos como elementos y es igual a su matriz transpuesta conjugada, $M = M^\dagger$

de una base del espacio vectorial, 4-dimensional complejo, de la siguiente manera

$$t^{AA'} = \frac{1}{\sqrt{2}} (o^A o^{A'} + \iota^A \iota^{A'}), \quad x^{AA'} = \frac{1}{\sqrt{2}} (o^A \iota^{A'} + \iota^A o^{A'}), \quad (\text{A.3})$$

$$y^{AA'} = \frac{i}{\sqrt{2}} (o^A \iota^{A'} - \iota^A o^{A'}), \quad z^{AA'} = \frac{1}{\sqrt{2}} (o^A o^{A'} - \iota^A \iota^{A'}). \quad (\text{A.4})$$

Donde los productos bilineales $\{o^A o^{A'}, o^A \iota^{A'}, \iota^A o^{A'}, \iota^A \iota^{A'}\}$ son elementos de $\text{Herm}(S \otimes \bar{S})$ y son estos objetos los que proporcionan la base a partir de la cual se construye la noción de tetrada nula en el formalismo NP.

A.1.2. Tetradas Nulas

Las tetradas nulas⁷ están constituidas por cuatro vectores linealmente independientes que forman una base del espacio tangente en cada punto del espacio-tiempo, y que permiten proyectar en ella las componentes relevantes de un campo sin alterar la validez de las ecuaciones. Estos vectores, para el caso del espacio tiempo de Minkowski, se definen a partir de los productos bilineales de la base espinorial de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} l^a &= o^A o^{A'}, & n^a &= \iota^A \iota^{A'}, \\ m^a &= o^A \iota^{A'}, & \bar{m}^a &= \iota^A o^{A'}. \end{aligned}$$

Como muestran Penrose y Rindler [PR84], la condición de normalización sobre la base espinorial, $\langle o, \iota \rangle = 1$, implica también que

$$\begin{aligned} o_A \iota^A &= 1, & \iota_A o^A &= -1, \\ o_A o^A &= 0, & \iota_A \iota^A &= 0. \end{aligned}$$

De esto se sigue que los vectores de la tetrada cumplen las siguientes propiedades:

- Cada vector es nulo con respecto a la métrica de Minkowski

$$l^a l_a = n^a n_a = m^a m_a = \bar{m}^a \bar{m}_a = 0,$$

⁷Existen diversos formalismos de tetradas en contextos como la geometría conforme, la teoría de cuerdas, la geometría con torsión o espacios-tiempo curvos no triviales. Aquí nos centraremos en el caso propio del formalismo de Newman Penrose.

- Los productos mixtos también se anulan:

$$l^a m_a = l^a \bar{m}_a = n^a m_a = n^a \bar{m}_a = 0,$$

- Los vectores l^a y n^a son reales y satisfacen

$$l^a n_a = 1, \quad l^a = \bar{l}^a \quad \text{y} \quad n^a = \bar{n}^a.$$

- Los vectores m^a y \bar{m}^a forman un par de conjugados complejos

$$m^a \bar{m}_a = -1.$$

Estas propiedades se cumplen para toda tetrada nula en cualquier espacio-tiempo, independientemente de la métrica particular que lo describa. Esto se debe a que forman parte de las condiciones de normalización y ortogonalidad que definen a una tetrada nula como una base del espacio tangente.

Dado que el objetivo del uso de tetradas es reescribir las ecuaciones de Einstein en una nueva base, resulta conveniente mostrar primero cómo se expresa la métrica en dicha base. En particular, al considerar el espacio-tiempo de Minkowski, podemos reescribir su métrica dada en la Ec. (2.1) como

$$\eta_{ab} = n_a l_b + l_a n_b - m_a \bar{m}_b - \bar{m}_a m_b,$$

esta representación no solo diagonaliza efectivamente la forma bilineal, si no que permite separar las direcciones nulas y complejas, lo que simplifica notablemente el álgebra. Consecuentemente, para reescribir las ecuaciones de campo en esta base, se deben proyectar las cantidades geométricas relevantes, como: la conexión, vía coeficientes de spín y la curvatura, vía escalares de Weyl.

Partiendo de la base del espacio spinorial, Rozo en [Ovi19] define la derivada de un spinor de manera análoga a la derivada covariante⁸ en el espacio tensorial:

$$\nabla_\mu \xi^A = \partial_\mu \xi^A - \Gamma^A{}_{B\mu} \xi^B,$$

⁸La derivada covariante se denota por el mismo símbolo ∇_a . Para un campo escalar f coincide con la derivada parcial, $\nabla_a f = \partial_a f$, y para tensores de rango superior se define mediante los símbolos de Christoffel:

$$\nabla_a T^{b_1 \dots b_r}{}_{c_1 \dots c_s} = \partial_a T^{b_1 \dots b_r}{}_{c_1 \dots c_s} + \sum_{i=1}^r \Gamma^{b_i}{}_{ad} T^{b_1 \dots d \dots b_r}{}_{c_1 \dots c_s} - \sum_{j=1}^s \Gamma^d{}_{ac_j} T^{b_1 \dots b_r}{}_{c_1 \dots d \dots c_s}.$$

donde $\Gamma^A_{B\mu}$ es la conexión afín espinorial, análoga a los símbolos de Christoffel en el formalismo tensorial. A partir de esta derivada covariante se introducen los 12 coeficientes de spín (o de rotación), que constituyen las componentes linealmente independientes de la conexión en el formalismo NP, definidos a partir de los operadores direccionales como:

$$\begin{aligned}\kappa &= Dn^b, \quad \sigma = \delta n^b, \quad \rho = Dm^b, \quad \tau = \delta l^b, \\ \alpha &= D\bar{m}^b, \quad \beta = \delta \bar{m}^b, \quad \gamma = \Delta m^b, \quad \lambda = \Delta \bar{m}^b, \\ \mu &= Dm^b, \quad \nu = \delta m^b, \quad \pi = \delta l^b, \quad \rho = D'l^b.\end{aligned}\tag{A.5}$$

donde

$$D = l^a \nabla_a, \quad \Delta = n^a \nabla_a, \quad \delta = m^a \nabla_a, \quad \bar{\delta} = \bar{m}^a \nabla_a.\tag{A.6}$$

Estos escalares miden cómo los vectores de la tetrada nula cambian a medida que nos movemos a lo largo del espacio tiempo, no todos tienen interpretación física, sin embargo cargan la información de las geodésicas como rotación, expansión, cizalla y distorsión.

Dando continuidad al ejemplo que venimos desarrollando en el caso de la métrica de Minkowski todos estos coeficientes son cero, pues $\Gamma^A_{B\mu} = 0$, $\nabla l = \nabla n = \nabla m = \nabla \bar{m} = 0$. un resultado esperado, pues esto refleja la planitud del espacio tiempo, es decir, la ausencia de curvatura que distorsione los haces de luz ni que genere efectos gravitacionales.

Por otra parte, escalares de Weyl, Dependen directamente del tensor de Weyl C_{abcd} que se define, como es mostrado por Penrose y Rindler en [PR84], como la parte libre de traza del tensor de Riemann

$$C_{abcd} = R_{abcd} - \left(g_{ac}R_{bd} - g_{ad}R_{bc} - g_{bc}R_{ad} + g_{bd}R_{ac} \right) + \frac{R}{3} \left(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc} \right).$$

donde R_{abcd} es el tensor, $R_{ab} := R^c_{acb}$ es el tensor de Ricci (contracción del tensor de Riemann), $R := g^{ab}R_{ab}$ es la escalar de Ricci (o curvatura escalar).

El tensor de Weyl comparte la simetría del tensor de Ricci y define la proyección sobre la tetrada nula como:

$$\begin{aligned}\psi_0 &= -C_{abcd} l^a m^b l^c m^d, \quad \psi_1 = -C_{abcd} l^a n^b l^c m^d, \\ \psi_2 &= -C_{abcd} l^a m^b \bar{m}^c n^d, \quad \psi_3 = -C_{abcd} l^a n^b \bar{m}^c n^d, \\ \psi_4 &= -C_{abcd} n^a \bar{m}^b n^c \bar{m}^d.\end{aligned}\tag{A.7}$$

Estos escalares poseen una interpretación física explícita, en particular al estar asociados con la radiación gravitacional que puede generarse en el espacio-tiempo descrito por la métrica considerada:

- ψ_0 : parte del campo gravitacional asociada a radiación entrante a lo largo de l^a ,
- ψ_4 : parte asociada a radiación saliente a lo largo de n^a ,
- ψ_2 : componente “coulombiana” (masa, campo estático central),
- ψ_1 y ψ_3 : contribuciones de tipo dipolar/cuadrupolar intermedias.

Particularmente, el escalar ψ_2 es de gran importancia porque caracteriza el campo gravitacional de marea asociado a la parte estática del espacio-tiempo, incorporando la contribución monopolar (masa) y dipolar (momento angular) del agujero negro. Como se mostrará más adelante, ψ_2 constituye el único escalar de Weyl no nulo en las soluciones de tipo D⁹. Por ejemplo, las métricas de Schwarzschild y Kerr.

Otros coeficientes importantes definidos en el formalismo NP son los coeficientes de Ricci definido en [Aim23] como:

$$\begin{aligned} \Phi_{00} &= -\frac{1}{2}R_{ab}l^al^b, & \Phi_{01} &= -\frac{1}{2}R_{ab}l^am^b, \\ \Phi_{02} &= -\frac{1}{2}R_{ab}m^am^b, & \Phi_{10} &= -\frac{1}{2}R_{ab}l^a\bar{m}^b, \\ \Phi_{11} &= -\frac{1}{2}R_{ab}l^an^b + 3\Lambda, & \Phi_{12} &= -\frac{1}{2}R_{ab}m^an^b, \\ \Phi_{20} &= -\frac{1}{2}R_{ab}\bar{m}^al^b, & \Phi_{21} &= -\frac{1}{2}R_{ab}\bar{m}^an^b, \\ \Phi_{22} &= -\frac{1}{2}R_{ab}n^an^b, \end{aligned} \tag{A.8}$$

donde Λ es proporcional a la traza del tensor de Ricci, y para el contexto vacío es proporcional a la constante cosmología presente en las ecuaciones de campo de Einstein.

Teniendo todos los coeficientes necesarios podemos ver que las ecuaciones de campo de Einstein son proyectadas en el formalismo NP, si aplicamos la identidad de Ricci de la geometría diferencial estándar al

⁹Hace referencia a la *Petrov's Classification of the Weyl Tensor* [Per25], en la cual el tipo D corresponde a espacio tiempos con dos direcciones principales nulas distintas y repetidas.

marco spinor como lo muestra Aimer en [Aim23], obteniendo las siguientes dieciocho ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 D\rho - \bar{\delta}\kappa &= \rho^2 + \sigma\bar{\sigma} - \bar{\kappa}\tau - \kappa(3\alpha + \bar{\beta} - \pi) + \rho(\epsilon + \bar{\epsilon}) + \Phi_{00}, \\
 \delta\nu - \Delta\mu &= \mu^2 + \lambda\bar{\lambda} + \mu(\gamma + \bar{\gamma}) - \bar{\nu}\pi + \nu(\tau - 3\beta - \bar{\alpha}) + \Phi_{22}, \\
 D\sigma - \delta\kappa &= \sigma(\rho + \bar{\rho} + 3\epsilon - \bar{\epsilon}) - \kappa(\tau - \bar{\pi} + \bar{\alpha} + 3\beta) + \psi_0, \\
 \Delta\lambda - \bar{\delta}\nu &= \nu(3\alpha + \bar{\beta} + \pi - \bar{\tau}) - \lambda(\mu + \bar{\mu} + 3\gamma - \bar{\gamma}) - \psi_4, \\
 D\tau - \Delta\kappa &= \rho(\tau + \bar{\pi}) + \sigma(\bar{\tau} + \pi) + \tau(\epsilon - \bar{\epsilon}) - \kappa(3\gamma + \bar{\gamma}) + \psi_1 + \Phi_{01}, \\
 D\nu - \Delta\pi &= \mu(\pi + \bar{\tau}) + \lambda(\bar{\pi} + \tau) + \pi(\gamma - \bar{\gamma}) - \nu(3\epsilon + \bar{\epsilon}) + \psi_3 + \Phi_{21}, \\
 \delta\rho - \bar{\delta}\sigma &= \rho(\bar{\alpha} + \beta) - \sigma(3\alpha - \bar{\beta}) + \tau(\rho - \bar{\rho}) + \kappa(\mu - \bar{\mu}) - \psi_1 + \Phi_{01}, \\
 \delta\lambda - \bar{\delta}\mu &= \nu(\rho - \bar{\rho}) + \pi(\mu - \bar{\mu}) + \mu(\alpha + \bar{\beta}) + \lambda(\bar{\alpha} - 3\beta) - \psi_3 + \Phi_{21}, \\
 \delta\tau - \Delta\sigma &= \mu\sigma + \rho\bar{\lambda} + \tau(\tau + \beta - \bar{\alpha}) - \sigma(3\gamma - \bar{\gamma}) - \kappa\bar{\nu} + \Phi_{02}, \\
 D\lambda - \bar{\delta}\pi &= \rho\lambda + \bar{\sigma}\mu + \pi^2 + \pi(\alpha - \bar{\beta}) - \bar{\nu}\kappa - \lambda(3\epsilon + \bar{\epsilon}) + \Phi_{20}, \\
 \Delta\rho - \bar{\delta}\tau &= \tau(\bar{\beta} - \alpha - \bar{\tau}) + \rho(\gamma + \bar{\gamma}) + \nu\kappa - \rho\bar{\mu} - \sigma\lambda - \psi_2 - 2\Lambda, \\
 D\mu - \delta\pi &= \mu\bar{\rho} + \sigma\lambda + \pi\bar{\pi} - \kappa\nu - \mu(\epsilon + \bar{\epsilon}) - \pi(\bar{\alpha} + \beta) + \psi_2 + 2\Lambda, \\
 \delta\gamma - \Delta\beta &= \gamma(\tau - \bar{\alpha} - \beta) + \mu\tau - \sigma\nu - \epsilon\bar{\nu} - \beta(\gamma - \bar{\gamma} - \mu) + \alpha\bar{\lambda} + \Phi_{12}, \\
 D\alpha - \bar{\delta}\epsilon &= \alpha(\rho + \bar{\epsilon} - 2\epsilon) + \beta\bar{\sigma} - \bar{\beta}\epsilon - \kappa\lambda - \bar{\kappa}\gamma + \pi(\epsilon + \rho) + \Phi_{10}, \\
 D\beta - \delta\epsilon &= \sigma(\alpha + \pi) + \beta(\bar{\rho} - \bar{\epsilon}) - \kappa(\mu + \gamma) - \epsilon(\bar{\alpha} - \bar{\pi})\epsilon + \psi_1, \\
 \Delta\alpha - \bar{\delta}\gamma &= \nu(\rho + \epsilon) - \lambda(\tau + \beta) + \alpha(\bar{\gamma} - \bar{\mu}) + \gamma(\bar{\beta} - \bar{\tau}) - \psi_3, \\
 D\gamma - \Delta\epsilon &= \alpha(\tau + \bar{\pi}) + \beta(\bar{\tau} + \pi) - \gamma(\epsilon + \bar{\epsilon}) - \epsilon(\gamma + \bar{\gamma}) + \tau\pi - \nu\kappa + \psi_2 + \Phi_{11} - \Lambda, \\
 \delta\alpha - \bar{\delta}\beta &= \mu\rho - \lambda\sigma + \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} - 2\alpha\beta + \gamma(\rho - \bar{\rho}) + \epsilon(\mu - \bar{\mu}) - \psi_2 + \Phi_{11} + \Lambda.
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

Estas ecuaciones son llamadas ***Las ecuaciones NP*** y como se menciona anteriormente, son equivalentes a las ecuaciones de Einstein; sin embargo, en este formalismo es necesario proporcionar una métrica, lo que nos lleva a describir el espacio-tiempo de manera explícita. En el caso de la métrica de Minkowski, que describe un espacio-tiempo plano sin curvaturas, las ecuaciones NP se anulan por completo. Esto implica que, en un espacio-tiempo plano, no hay perturbaciones y la curvatura es nula. Este comportamiento es completamente diferente al que se observa en soluciones más complejas, como la métrica de Schwarzschild o Kerr.

En este punto es conveniente recordar que el formalismo NP no se limita al tratamiento de la gravedad, sino que también permite expresar las *ecuaciones de Maxwell* en términos de las derivadas direccionales

y de los coeficientes de espín definidos sobre la tetrada nula. Físicamente, estas ecuaciones describen la dinámica del campo electromagnético en un espacio-tiempo curvo, es decir, cómo las componentes del tensor de Faraday $F_{\mu\nu}$ se acoplan con la geometría subyacente. La proyección presentada en [Teu73] es:

$$\begin{aligned} (D - 2\rho)\phi_1 - (\delta^* + \pi - 2\alpha)\phi_0 &= 2\pi J_l, \\ (\delta - 2\tau)\phi_1 - (\Delta + \mu - 2\gamma)\phi_0 &= 2\pi J_m, \\ (D - \rho + 2\epsilon)\phi_2 - (\delta^* + 2\pi)\phi_1 &= 2\pi J_{m^*}, \\ (\delta - \tau + 2\beta)\phi_2 - (\Delta + 2\mu)\phi_1 &= 2\pi J_n, \end{aligned} \tag{A.10}$$

aquí ϕ 's representa un campo de prueba de primer orden y $J_l = J_\mu l^\mu$, etc., con J_μ la densidad de corriente cuatrivectorial.

Desde el punto de vista geométrico estas ecuaciones, al igual que las de campo de Einstein, requieren especificar una geometría de fondo, pues los coeficientes de espín y los operadores diferenciales dependen explícitamente de ella. En este contexto, podemos ver que el formalismo NP no tiene como objetivo simplificar directamente la solución de las ecuaciones de Einstein o Maxwell, sino que nos permite verificar características clave de la solución al añadir perturbaciones. Esto es particularmente útil al analizar espacios-tiempo curvados, como los agujeros negros de Kerr, donde las soluciones exactas son más complejas.

A.1.3. Rotaciones de la tetrada nula

Como se discutió anteriormente el formalismo NP se construye a partir de una base local compuesta por cuatro vectores nulos que satisfacen las relaciones de ortogonalidad, de forma general esta tetrada permiten reexpresar la métrica, sin embargo, esta tetrada no es única, la elección expuesta en los ejemplos posteriores corresponden a elecciones particulares de la tetrada para la geometría de fondo dada. Existen transformaciones locales que dejan invariante la métrica pero modifican los vectores base. Estas transformaciones, conocidas como *rotaciones de tetrada*, preservan la estructura nula del marco y generan un grupo continuo de simetrías internas del formalismo NP [GHP73]. De acuerdo con la clasificación introducida por Newman y Penrose, y desarrollada por Geroch, Held y Penrose, las rotaciones se dividen en tres tipos principales: I, II y III.

- *Rotación tipo I*: el vector l^μ permanece invariante, mientras que los demás vectores se transforman

de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} l^\mu &\rightarrow l^\mu, & m^\mu &\rightarrow m^\mu + a l^\mu, \\ \bar{m}^\mu &\rightarrow \bar{m}^\mu + a^* l^\mu, & n^\mu &\rightarrow n^\mu + a^* m^\mu + a \bar{m}^\mu + aa^* l^\mu, \end{aligned}$$

donde a es un campo complejo suave que parametriza la rotación. En el contexto de los coeficientes de espín, esta rotación afecta a los términos asociados con derivadas en la dirección de l^μ , como κ y σ .

- *Rotación tipo II:* El vector n^μ se mantiene fijo y los restantes se transforman según:

$$\begin{aligned} n^\mu &\rightarrow n^\mu, & m^\mu &\rightarrow m^\mu + b n^\mu, \\ \bar{m}^\mu &\rightarrow \bar{m}^\mu + b^* n^\mu, & l^\mu &\rightarrow l^\mu + b^* m^\mu + b \bar{m}^\mu + bb^* n^\mu, \end{aligned}$$

donde b es un campo complejo suave que parametriza la rotación. Los coeficientes de espín que se modifican principalmente bajo este cambio son aquellos relacionados con derivadas en la dirección de n^μ , como ν y λ .

- *Rotación tipo III:* Se mantiene fijos los vectores l^μ y n^μ , y rota el par (m^μ, \bar{m}^μ) mediante una fase compleja $e^{i\chi(x)}$:

$$m^\mu \rightarrow e^{i\chi} m^\mu, \quad \bar{m}^\mu \rightarrow e^{-i\chi} \bar{m}^\mu, \quad l^\mu \rightarrow l^\mu, \quad n^\mu \rightarrow n^\mu.$$

En consecuencia, los coeficientes de espín que involucran estas direcciones, particularmente π, τ, α y β , se transforman según:

$$\tau \rightarrow e^{i\chi} \tau, \quad \pi \rightarrow e^{-i\chi} \pi, \quad \alpha \rightarrow e^{-i\chi} (\alpha + \frac{i}{2} D\chi), \quad \beta \rightarrow e^{i\chi} (\beta + \frac{i}{2} \Delta\chi).$$

En esta última, la libertad de fase se interpreta como una gauge angular interna del formalismo NP. En la elección estándar de Kinnersley, utilizada en el tratamiento de las perturbaciones sobre el espacio–tiempo de Kerr [Teu73], se elige la fase de manera que los coeficientes de espín adopten formas simples, por ejemplo:

$$\tau = -\frac{ia \sin \theta}{\sqrt{2} \rho^2}, \quad \pi = \frac{ia \sin \theta}{\sqrt{2} \rho^2}.$$

Las tres rotaciones tipo I, II y III constituyen simetrías internas del formalismo NP, y son responsables

de la libertad de elección de tetrada que aparece en las formulaciones de las ecuaciones de campo y de perturbación.

A.2. Representación de las métricas clásicas

Una vez descritas las bases del formalismo NP, es de gran interés poder escribir explícitamente las métricas correspondientes a las soluciones clásicas. Durante el desarrollo anterior, hemos explorado la solución de Minkowski, pero en esta sección nos enfocaremos en escribir de manera explícita las soluciones de Schwarzschild y Kerr. Esta última es de particular interés en este trabajo, ya que constituye la base para los desarrollos posteriores relacionados con los agujeros negros rotantes. Los resultados obtenidos de esta solución nos proporcionarán el marco necesario para continuar con el análisis de perturbaciones gravitacionales y la derivación de la ecuación de Teukolsky.

La base del formalismo NP, como se mostró anteriormente, se centra en la correcta elección de la tetrada nula, que depende de las simetrías subyacentes del espacio-tiempo que se desea caracterizar, y de allí se avanza al cálculo de los coeficientes de spin y de Weyl. La flexibilidad de este formalismo proviene de la estructura del cono de luz en relatividad general, así como de la clasificación de Petrov tipo D de los problemas de Schwarzschild y Kerr.

Observación 8. *La clasificación de Petrov tipo D resulta fundamental, pues bajo ella pueden aplicarse diversos teoremas de geometría diferencial que permiten simplificar las ecuaciones de campo y obtener soluciones exactas que describen agujeros negros, como se muestra en [Cha83]. No obstante, el desarrollo detallado de dichos teoremas, así como la elección explícita de la tetrada y el cálculo de los coeficientes característicos asociados a cada solución particular, exceden el alcance del presente trabajo. En consecuencia, nos limitaremos a presentar las tetradas nulas, los coeficientes de espín, los coeficientes de Weyl y la forma reescrita de las métricas de Schwarzschild y Kerr, sin abordar los cálculos explícitos.*

Veamos dos ejemplos representativos de estas construcciones: la geometría de fondo curva descrita por la métrica de Schwarzschild y la correspondiente a la métrica de Kerr en coordenadas de Boyer–Lindquist. Ambos casos constituyen el punto de partida fundamental para el estudio de perturbaciones en espacios-tiempo de tipo D, y proporcionan la base sobre la cual se formula la ecuación maestra de Teukolsky (4).

Ejemplo 4. Métrica de Schwarzschild

En primer lugar, analizaremos el caso de la métrica de Schwarzschild, correspondiente a un espacio-tiempo estático y esféricamente simétrico, cuya sencillez permite ilustrar con claridad la estructura básica del formalismo NP. En esta geometría, las tetradas nulas se eligen de modo que los vectores l^μ y n^μ estén orientados

radialmente, mientras que m^μ y \bar{m}^μ definen la base compleja sobre la 2-esfera. Tomando como base los desarrollos de O'Donnell en [ODo03] y considerando la métrica de Schwarzschild encontrada en la sección 3.1 descrita por la Ecu. (3.1) cuyas componentes del tensor $g_{\mu\nu}$ son:

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right), \quad g_{rr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta.$$

podemos elegir la tetrada nula como:

$$\begin{aligned} l^a &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{g_{rr}}, \sqrt{g_{tt}}, 0, 0), & n^a &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{g_{tt}}, \sqrt{g_{rr}}, 0, 0), \\ m^a &= (0, 0, \sqrt{g_{\theta\theta}}, 0), & \bar{m}^a &= \frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}}(0, 0, 0, i). \end{aligned} \tag{A.11}$$

Así, la métrica de Schwarzschild se reescribe como

$$g_{\mu\nu} = -l_\mu n_\nu - n_\mu l_\nu + m_\mu \bar{m}_\nu + \bar{m}_\mu m_\nu$$

Con respecto a los coeficientes de spin y los coeficientes de Weyl todos se anulan excepto por $\lambda = 1/r$.

Ejemplo 5. Métrica de Kerr

Consideraremos la métrica de Kerr, que extiende el caso anterior al incluir el momento angular del cuerpo central. A diferencia de Schwarzschild, la rotación rompe la simetría esférica y exige la introducción de una tetrada compleja más general, conocida como tetrada de Kinnersley, que se adapta naturalmente a la estructura de los conos nulos del espacio-tiempo en rotación. Tomando como base los desarrollos de Teukolsky en [Cha83; Teu72] y considerando la métrica de Kerr en coordenadas Boyer-Lindquist encontrada en la sección 3.2 descrita por la Ecu. (3.4) podemos la tetrada nula como:

$$\begin{aligned} l^a &= \left(\frac{r^2 + a^2}{\mathcal{B}}, 1, 0, \frac{a}{\mathcal{B}}\right), \\ n^a &= \frac{1}{2\mathcal{P}}(r^2 + a^2, -\mathcal{B}, 0, a), \\ m^a &= \frac{1}{\sqrt{2}(r + ia \cos \theta)}(ia \sin \theta, 0, 1, i \csc \theta). \end{aligned} \tag{A.12}$$

Así, la métrica de Kerr se reescribe como

$$g_{\mu\nu} = l_\mu n_\nu + n_\mu l_\nu - m_\mu \bar{m}_\nu - \bar{m}_\mu m_\nu$$

Con respecto a los coeficientes de spin y los coeficientes de Weyl todos se anulan excepto por:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{-1}{r - ia \cos\theta}, & \tau &= \frac{-ia\rho\rho^*}{\sqrt{2}} \sin\theta, & \beta &= \frac{-\rho^* \cot\theta}{2\sqrt{2}}, \\ \pi &= \frac{ia\rho^2}{\sqrt{2}} \sin\theta, & \mu &= \frac{\rho^2\rho^*\mathcal{B}}{2}, & \gamma &= \mu + \frac{\rho\rho^*(r-m)}{2}, \\ \alpha &= \pi - \beta^* & \psi_2 &= m\rho^3 \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Apéndice B

Repositorio de anexos

En este apéndice se proporciona información sobre el repositorio de GitHub que contiene el código y los archivos de apoyo relacionados con el desarrollo de la tesis. El repositorio está disponible en el siguiente enlace:

https://github.com/NataPhawllyn/tesis_ecu_Teukolsky

A continuación se presenta una lista de los archivos contenidos en el repositorio:

- `analisis_signatura.ipynb`: Contiene el código en Python para generar las gráficas de apoyo (Fig. 4.1) para el análisis de la signatura del operador diferencial de la ecuación de Teukolsky.
- `paquetes_juli.jl`: Contiene los paquetes necesarios para configurar el entorno necesario para ejecutar los archivos: `utilidades_y_funciones.jl`, `sol_teukolsky.jl`.
- `utilidades_y_funciones.jl`: Contiene las funciones necesarias en lenguaje Julia para ejecutar el archivo de `sol_teukolsky.jl`.
- `sol_teukolsky.jl`: Contiene el código en Julia para generar las gráficas de apoyo (Fig. 4.2, 4.4, 4.3) para el análisis cualitativo de las soluciones de las EDO asociadas a la ecuación de Teukolsky. Además, se implementa el método numérico propuesto por iteraciones de Newton para el cálculo de las frecuencias en el límite de Schwarzschild (Tabla 5.1).
- `notebook_calculos.ipynb`: Contiene algunos cálculos de apoyo en Sage, usados en el desarrollo de la métrica Kerr (Sección 3.2).
- `README.md`: Contiene instrucciones detalladas sobre el uso y ejecución de los programas, así como una descripción general del propósito y funcionamiento de los scripts.

Referencias

- [ABS65] Ronald Adler, Maurice Bazin y Menahem Schiffer. *Introduction to General Relativity*. New York: McGraw-Hill, 1965, págs. xvi + 451. ISBN: 978-0070004207.
- [Aim23] Jack Aimer. «Perturbations of the Kerr spacetime: an analysis of the Teukolsky equation». Supervised by Chris Stevens. Discusses the Newman–Penrose formalism, Teukolsky master equation, and separation of variables for different spin weights. MMathSci Thesis. University of Canterbury, 2023. URL: <https://ir.canterbury.ac.nz/handle/10092/105877>.
- [BCS09] Emanuele Berti, Vitor Cardoso y Andrei O. Starinets. *Ringdown: Quasinormal mode frequencies of black holes*. <https://pages.jh.edu/~eberti2/ringdown/>. Data repository. Online database containing tabulated quasinormal mode frequencies for Schwarzschild and Kerr black holes. Includes data files s010.dat, s111.dat, s212.dat, etc. 2009. doi: [10.1088/0264-9381/26/16/163001](https://doi.org/10.1088/0264-9381/26/16/163001). URL: <https://pages.jh.edu/~eberti2/ringdown/>.
- [Ber16] Emanuele Berti. *Black Hole Perturbation Theory*. <https://www.icts.res.in/event/page/3071>. Lecture notes from the ICTS Summer School on Gravitational-Wave Astronomy, Bangalore, India, July 25 – August 5, 2016. 2016.
- [BL67] Robert H. Boyer y Richard W. Lindquist. «Maximal Analytic Extension of the Kerr Metric». En: *Journal of Mathematical Physics* 8.2 (1967), págs. 265-281. doi: [10.1063/1.1705193](https://doi.org/10.1063/1.1705193).
- [BP73] James M. Bardeen y William H. Press. «Radiation fields in the Schwarzschild background». En: *Journal of Mathematical Physics* 14.1 (1973), págs. 7-19. doi: [10.1063/1.1666175](https://doi.org/10.1063/1.1666175).
- [Car13] Élie Cartan. «Les groupes de transformations continus, infinis, simples». En: *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* 30 (1913), págs. 263-355.
- [Cas] Carlos Ivorra Castillo. *Geometría Diferencial*. Libro de acceso abierto.
- [Cha83] Subrahmanyam Chandrasekhar. *The Mathematical Theory of Black Holes*. Vol. 69. International Series of Monographs on Physics. Oxford University Press, 1983. ISBN: 9780198503705.

- [CZ14a] Gregory B. Cook y Maxim Zalutskiy. «Gravitational Perturbations of the Kerr Geometry: A Numerical Approach». En: *Phys. Rev. D* 90 (10 2014), pág. 104013. doi: [10.1103/PhysRevD.90.104013](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.90.104013).
- [CZ14b] Gregory B. Cook y Maxim Zalutskiy. «Gravitational perturbations of the Kerr geometry: High-accuracy study». En: *Physical Review D* 90.12 (2014), pág. 124021. doi: [10.1103/PhysRevD.90.124021](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.90.124021). arXiv: [1410.7698 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1410.7698).
- [DHR16] Mihalis Dafermos, Gustav Holzegel e Igor Rodnianski. «The linear stability of the Schwarzschild solution to gravitational perturbations». En: *arXiv preprint* (2016). arXiv: [1601.06467 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1601.06467). URL: <https://arxiv.org/abs/1601.06467>.
- [DIn92] Ray D’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity*. Oxford: Oxford University Press, 1992. ISBN: 978-0198596868.
- [Ein15] Albert Einstein. «Die Feldgleichungen der Gravitation». En: *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften* (1915), págs. 844-847.
- [Eva10] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. 2nd. Vol. 19. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2010.
- [Fla57] C. Flammer. *Spheroidal Wave Functions*. Formalización matemática clásica de las funciones esferoidales. Stanford, California: Stanford University Press, 1957, págs. xv + 240. ISBN: 9780804702304.
- [GHP73] Robert Geroch, Alan Held y Roger Penrose. «A space-time calculus based on pairs of null directions». En: *Journal of Mathematical Physics* 14.7 (1973), págs. 874-881. doi: [10.1063/1.1666410](https://doi.org/10.1063/1.1666410). URL: <https://doi.org/10.1063/1.1666410>.
- [GKS22] Elena Giorgi, Sergiu Klainerman y Jeremie Szeftel. «Wave equations estimates and the nonlinear stability of slowly rotating Kerr black holes». En: *arXiv preprint* (2022). arXiv: [2205.14808 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/2205.14808). URL: <https://arxiv.org/abs/2205.14808>.
- [Gol16] Herbert Goldstein. *Classical Mechanics*. 3rd. Addison-Wesley, 2016.
- [Jin05] Jiliang Jing. «Dirac Quasinormal Modes of Schwarzschild Black Hole». En: *Physical Review D* 71.12 (2005), pág. 124006. doi: [10.1103/PhysRevD.71.124006](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.71.124006).
- [Ker63] Roy P. Kerr. «Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics». En: *Physical Review Letters* 11.5 (1963), págs. 237-238. doi: [10.1103/PhysRevLett.11.237](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.11.237).

- [KZ11] R. A. Konoplya y A. Zhidenko. «Quasinormal modes of black holes: from astrophysics to string theory». En: *Reviews of Modern Physics* 83.3 (2011), págs. 793-836. doi: [10.1103/RevModPhys.83.793](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.83.793).
- [LC16] B.P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration y Virgo Collaboration). «Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger». En: *Physical Review Letters* 116.6 (2016), pág. 061102. doi: [10.1103/PhysRevLett.116.061102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.061102).
- [Lea85] Edward W. Leaver. «An analytic representation for the quasi-normal modes of Kerr black holes». En: *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* 402.1823 (1985), págs. 285-298.
- [MTW73] Charles W. Misner, Kip S. Thorne y John Archibald Wheeler. *Gravitation*. San Francisco: W. H. Freeman, 1973. ISBN: 9780716703440.
- [New87] Isaac Newton. *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Primera edición. Londres: Royal Society, 1687.
- [NP62] Ezra Newman y Roger Penrose. «An Approach to Gravitational Radiation by a Method of Spin Coefficients». En: *J. Math. Phys.* 3.6 (1962), págs. 566-578. doi: [10.1063/1.1724255](https://doi.org/10.1063/1.1724255).
- [ODo03] Peter O'Donnell. *Introducción a los 2-espinores en la relatividad general*. Singapur: World Scientific, 2003.
- [Ovi19] Daniel Fernando Rozo Oviedo. «Introducción a la formulación de Newman-Penrose y al formalismo de tétradas con aplicación en cálculos en Relatividad General». Monografía presentada para el grado de Físico, Departamento de Física. Tesis doct. Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes, 2019. URL: <https://www.uniandes.edu.co/>.
- [Pen65] Roger Penrose. «Gravitational collapse and space-time singularities». En: *Physical Review Letters* 14.3 (1965), págs. 57-59.
- [Pen69] Roger Penrose. «Gravitational Collapse: The Role of General Relativity». En: *Rivista del Nuovo Cimento, Numero Speciale I*. Società Italiana di Fisica, 1969, págs. 252-276.
- [Per25] David Pereñiguez. *The Spinor Description of General Relativity and Applications to Black Hole Physics*. <https://attp2025.netlify.app/>. Lecture notes for the Ph.D. School „Advanced Topics in Theoretical Physics 2025”, University of Perugia. 2025.
- [PR84] Roger Penrose y Wolfgang Rindler. *Spinors and Space-Time, Volume 1: Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields*. Cambridge: Cambridge University Press, 1984. ISBN: 9780521337076.

- [RW57] Tullio Regge y John A. Wheeler. «Stability of a Schwarzschild Singularity». En: *Physical Review* 108.4 (1957), págs. 1063-1069. doi: [10.1103/PhysRev.108.1063](https://doi.org/10.1103/PhysRev.108.1063).
- [Sch16] Karl Schwarzschild. «Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie». En: *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften* (1916), págs. 189-196.
- [Ste75] John M. Stewart. «Perturbations of Friedmann–Robertson–Walker cosmological models». En: *Classical and Quantum Gravity* 146.2 (1975). El Lema 2 establece la invariancia de las perturbaciones lineales bajo transformaciones de coordenadas, fundamento para el uso del formalismo Newman–Penrose en geometrías tipo D., págs. 211-221. doi: [10.1088/rspa.1975.0011](https://doi.org/10.1088/rspa.1975.0011). URL: <https://doi.org/10.1088/rspa.1975.0011>.
- [Teu72] Saul A. Teukolsky. «Rotating Black Holes: Separable Wave Equations for Gravitational and Electromagnetic Perturbations». En: *Physical Review Letters* 29.17 (1972). California Institute of Technology, Pasadena, California, págs. 1114-1118. doi: [10.1103/PhysRevLett.29.1114](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.29.1114). URL: <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.29.1114>.
- [Teu73] Saul A. Teukolsky. «Perturbations of a Rotating Black Hole. I. Fundamental Equations for Gravitational, Electromagnetic, and Neutrino-Field Perturbations». En: *The Astrophysical Journal* 185 (1973), págs. 635-647. doi: [10.1086/152444](https://doi.org/10.1086/152444). arXiv: [1410.7698 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/1410.7698).
- [The23] The Sage Developers. *SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 9.8)*. 2023. URL: <https://www.sagemath.org>.
- [TWA+15] K. S. Thorne, C. M. Will, J. Aasi et al. «A Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory». En: *Reports on Progress in Physics* 78.2 (2015), pág. 025901. doi: [10.1088/0034-4885/78/2/025901](https://doi.org/10.1088/0034-4885/78/2/025901).
- [Vis07] Matt Visser. «The Kerr spacetime: A brief introduction». En: *arXiv:0706.0622* (2007). URL: [http://arxiv.org/abs/0706.0622](https://arxiv.org/abs/0706.0622).
- [Vis70] C. V. Vishveshwara. «Scattering of gravitational radiation by a Schwarzschild black-hole». En: *Nature* 227 (1970), págs. 936-938. doi: [10.1038/227936a0](https://doi.org/10.1038/227936a0).
- [Wal84] Robert M. Wald. *General Relativity*. 1st. Chicago: University of Chicago Press, 1984.