

Отчет по лабораторной работе 3.6.1

«Спектральный анализ электрических сигналов»

Цель работы: изучение спектрального состава периодических электрических сигналов

В работе используются: анализатор спектра СК4-56, генератор прямоугольных импульсов Г5-54, генератор сигналов специальной формы Г6-34, осциллограф С1-76.

Теоретические сведения:

Представление периодического сигнала в виде суммы гармонических сигналов называется разложением в ряд Фурье.

Пусть заданная функция $f(t)$ периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, где T – период повторения. Ее разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)]$$

Здесь $\frac{a_0}{2}$ – среднее значение $f(t)$,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t) dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t) dt.$$

Рассмотрим периодические функции, которые исследуются в нашей работе.

1. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов (рис. 1) с амплитудой V_0 , длительностью τ , частотой повторения $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, где T – период повторения импульсов. Найдем коэффициенты разложения ряда Фурье:

$$\frac{a_0}{2} = V_0 \frac{\tau}{T},$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0 \cos(n\Omega_1 t) dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega_1 \frac{\tau}{2})}{n\Omega_1 \frac{\tau}{2}} \sim \frac{\sin x}{x}.$$

Поскольку наша функция четная, все коэффициенты синусоидальных гармоник $b_n = 0$. Спектр a_n последовательности прямоугольных импульсов представлен на рис.2 (изображен случай, когда T кратно τ).

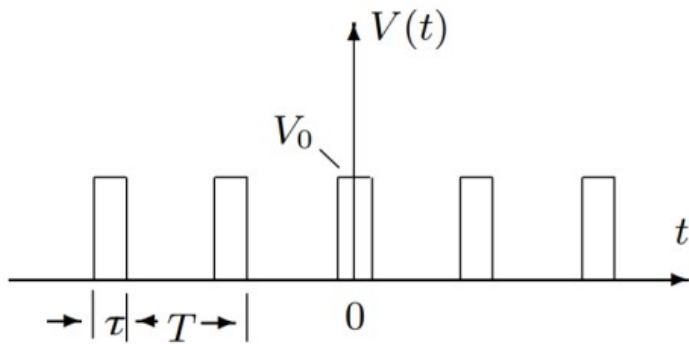


Рис 1: Прямоугольные импульсы

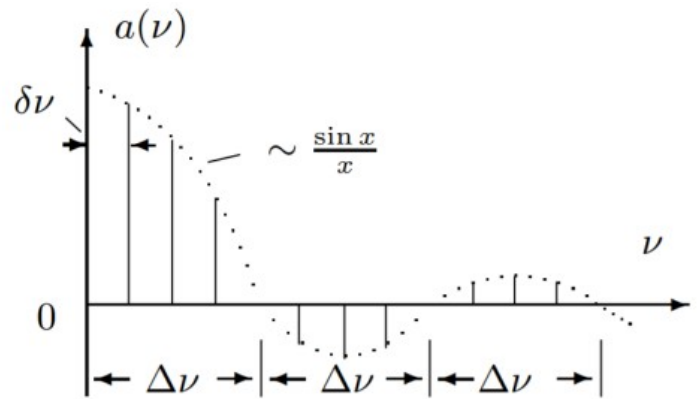


Рис 2: Спектр последовательности прямоугольных импульсов

Назовем **шириной спектра** $\Delta\omega$ расстояние от главного максимума ($\omega = 0$) до первого нуля огибающей, возникающего при $n = \frac{2\pi}{\tau\Omega_1}$. При этом

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi$$

или

$$\Delta\nu\Delta t \simeq 1 \quad (1)$$

Полученное соотношение взаимной связи интервалов $\Delta\nu$ и Δt является частным случаем соотношения неопределенности в квантовой механике.

2. Периодическая последовательность цугов гармонического колебания $V_0\cos(\omega_0 t)$ с длительностью цуга τ и периодом повторения T (рис. 3).

Функция $f(t)$ снова является четной относительно $t = 0$. Коэффициент при n -й гармонике равен

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0 \cos(n\Omega_1 t) dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \left(\frac{\sin[(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin[(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} \right)$$

Зависимость для случая, когда $\frac{T}{\tau}$ равно целому числу, представлена на рис. 4. Сравнивая спектр последовательности прямоугольных импульсов и цугов, мы видим, что они аналогичны, но их максимумы сдвинуты по частоте на величину ω_0 .

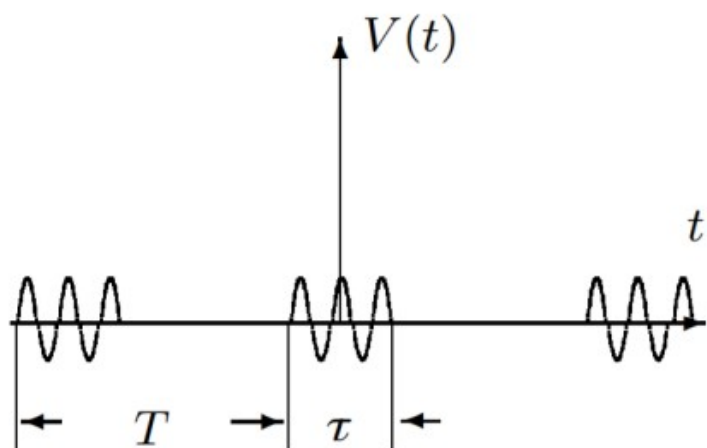


Рис 3: Последовательность цугов

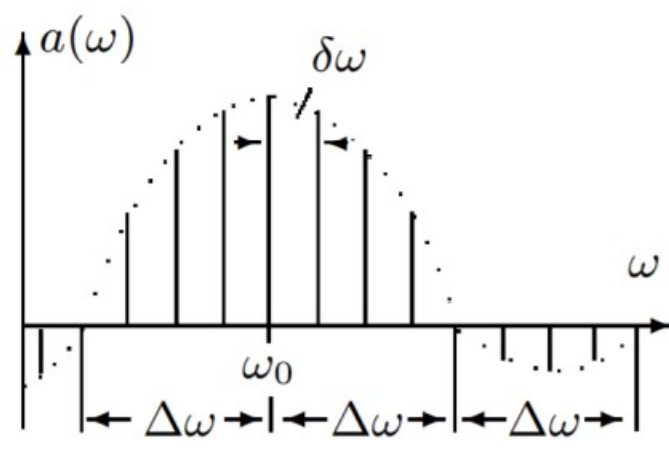


Рис 4: Спектр последовательности цугов

3. Амплитудно-модулированные колебания. Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты ω_0 , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой Ω ($\Omega \ll \omega_0$) (рис. 5):

$$f(t) = A_0 [1 + m \cos \Omega t] \cos \omega_0 t.$$

Коэффициент m называют **глубиной модуляции**. При $m < 1$ амплитуда колебаний меняется от минимальной $A_{\min} = A_0(1-m)$ до максимальной $A_{\max} = A_0(1+m)$. Глубина модуляции может быть представлена в виде:

$$m = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}}$$

Простым тригонометрическим преобразованием можно найти спектр амплитудно — модулированных колебаний:

$$f(t) = A_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t. \quad (3)$$

Спектр таких колебаний содержит три составляющих: основную компоненту и две боковых (рис. 6). Первое слагаемое в правой части представляет собой исходное не модулированное колебание с основной (несущей) частотой ω_0 и амплитудой $a_{\text{осн}} = A_0$. Второе и третье слагаемые соответствуют новым гармоническим колебаниям с частотами $\omega_0 + \Omega$ и $\omega_0 - \Omega$. Амплитуды этих двух колебаний одинаковы и составляют $m/2$ от амплитуды не

модулированного колебания $a_{\text{бок}} = \frac{A_0 m}{2}$. Начальные фазы всех трех колебаний одинаковы

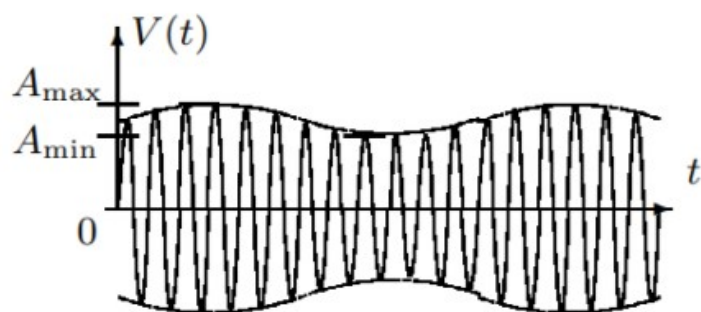


Рис 5: Модулированные гармонические колебания

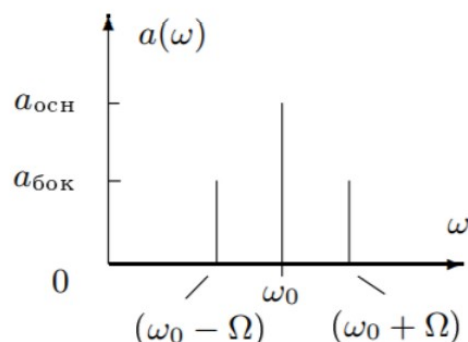


Рис 6: Спектр модулированных гармонических

Экспериментальные установки

1. **Экспериментальная установка А** для исследования спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов представлена на рис.7. Сигнал с выхода генератора прямоугольных импульсов Г5-54 подается на вход анализатора спектра и одновременно на вход Y осциллографа. С генератора импульсов на осциллограф подается также сигнал синхронизации, запускающий ждущую развертку осциллографа. При этом на экране осциллографа можно наблюдать саму последовательность прямоугольных импульсов, а на экране ЭЛТ анализатора спектра распределение амплитуд спектральных составляющих этой последовательности.

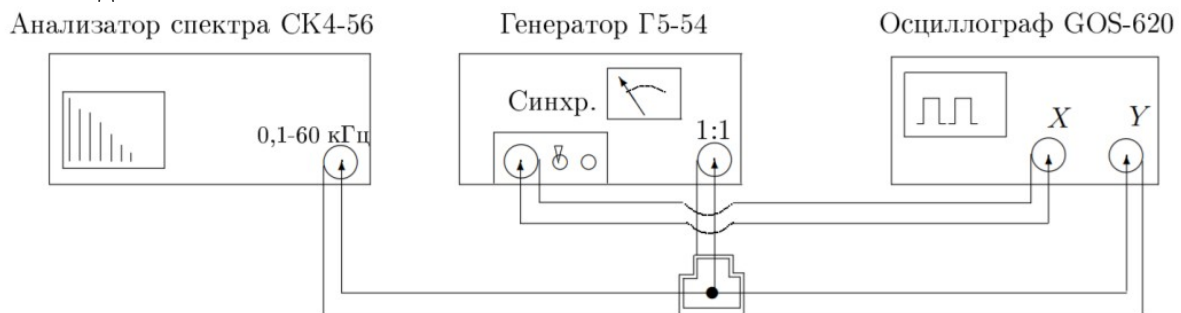


Рис 7: Схема для исследования спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

2. **Экспериментальная установка Б** для исследования спектра периодической последовательности цугов гармонических колебаний (рис. 8). Генератор Г:-34 вырабатывает синусоидальные колебания высокой частоты. На вход АМ (амплитудная модуляция) генератора Г6-34 подаются прямоугольные импульсы с генератора Г5-54 и синусоида модулируется - «нарезается» на отдельные куски — цуги. Эти цуги с выхода генератора Г6-34 поступают на вход спектроанализатора и одновременно на вход Y осциллографа. Сигнал синхронизации подается на осциллограф с генератора импульсов.

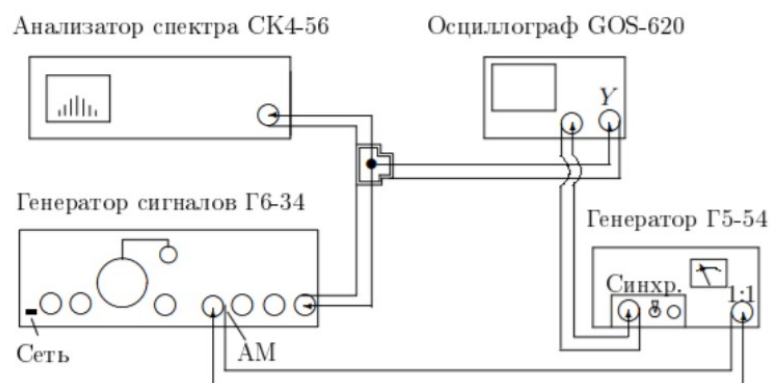


Рис 8: Схема для исследования спектра периодической последовательности цугов гармонических колебаний

3. **Экспериментальная установка В** для исследования спектра амплитудно-модулированного сигнала (рис. 9). В генератор сигналов встроен модуляционный генератор, который расположен в левой части Г6-34. Синусоидальный сигнал с частотой модуляции $f_{\text{мод}} = 1 \text{ кГц}$ подается с модуляционного генератора на вход АМ (амплитудная модуляция) генератора, вырабатывающего синусоидальный сигнал высокой частоты (частота несущей

$\nu_0 = 25 \text{ кГц}$). Амплитудно-модуляционный сигнал с основного выхода генератора поступает на осциллограф и на анализатор спектра.

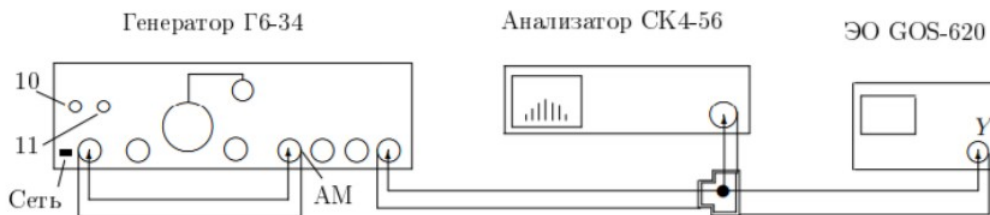


Рис 9: Схема для исследования спектра амплитудно-модулированного сигнала

Ход работы

1. Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

Соберем схему согласно рис. 7 и включим в сеть только генератор Г5-54. Установив на анализаторе режим работы с однократной разверткой, получим на его экране спектр импульсов с параметрами $f_{повт} = 1 \text{ кГц}$; $\tau = 25 \text{ мкс}$; частотный масштаб $m_x = 5 \text{ кГц / дел.}$ Полученная картина представлена на рис.10.

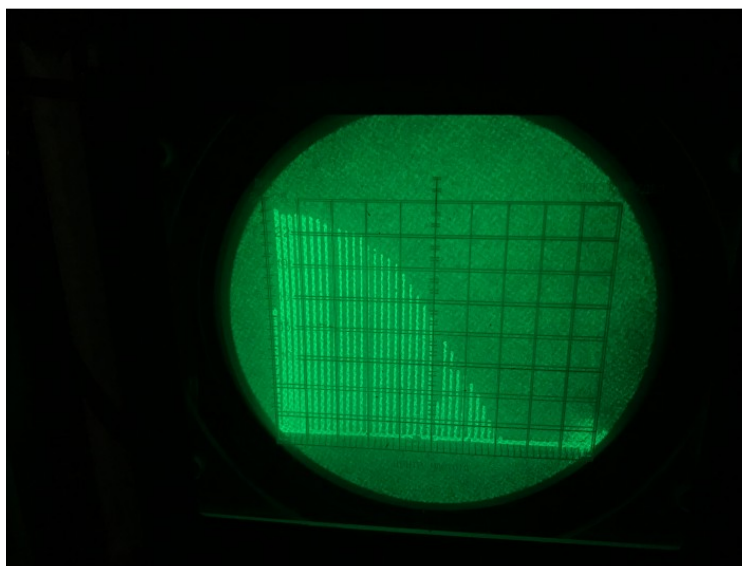


Рис 10: Спектр прямоугольных импульсов

При увеличении длительности импульсов τ вдвое на экране получаем следующую картину (рис.11), а при увеличении вдвое $f_{повт}$ — рис.12. Таким образом, в первом случае уменьшилась ширина спектра, а во втором — увеличилось расстояние между компонентами спектра.

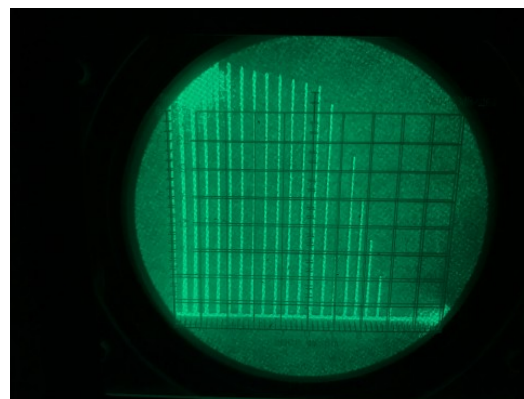
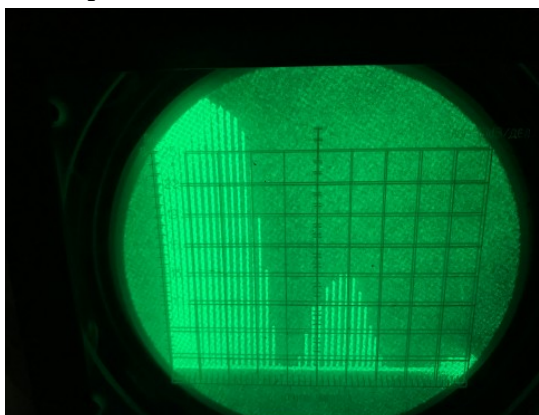


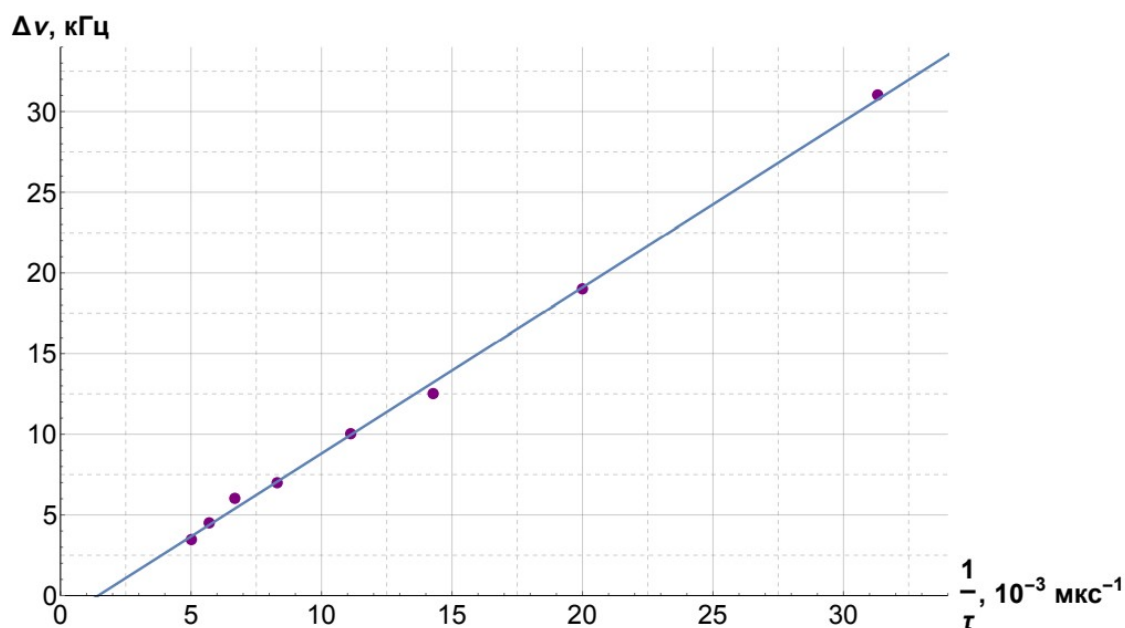
Рис 12: Спектр прямоугольных импульсов при

Рис 11: Спектр прямоугольных импульсов при $\tau = 50 \text{ мкс}$

$$f_{\text{порт}} = 2 \text{ кГц}$$

Теперь проведем измерения зависимости ширины спектра от длительности импульсов, оставляя неизменным $f_{\text{порт}} = 1 \text{ кГц}$. Результаты занесем в таблицу и построим график зависимости $\Delta\nu(1/\tau)$.

N	τ , мкс	$\Delta\nu$, кГц	$1/\tau$, 10^{-3} мкс^{-1}
1	32	31.-	31.3
2	50	19.0	20.0
3	70	12.5	14.3
4	90	10.0	11.1
5	120	7.0	8.3
6	150	6.0	6.7
7	175	4.5	5.7
8	200	3.5	5.0



Из него получаем уравнение аппроксимирующей прямой: $y = (1.029 \pm 0.017)x + (-1.497 \pm 0.268)$. Коэффициент наклона данной прямой удовлетворяет соотношению неопределенности (1).

2. Исследование спектра периодической последовательности цугов гармонических колебаний

Соберем схему, изображенную на рис.8. Установив частоту несущей $\nu_0 = 25 \text{ кГц}$, посмотрим, как изменяется вид спектра при увеличении длительности импульса вдвое (т.е. при $\tau = 50, 100 \text{ мкс}$, $f_{\text{порт}} = 1 \text{ кГц}$). Получаем, что ширина спектра уменьшится, а модули спектра (амплитуда) увеличатся.

При фиксированных значениях $f_{\text{порт}} = 1 \text{ кГц}$, $\tau = 100 \text{ мкс}$ и частотном масштабе $m_x = 5 \text{ кГц / дел}$ посмотрим, как меняется картина спектра при изменении несущей частоты ν_0 (на генераторе Г6-34 $\nu_0 = 10, 25, 40 \text{ кГц}$). Результаты представлены на рисунках 13-15.

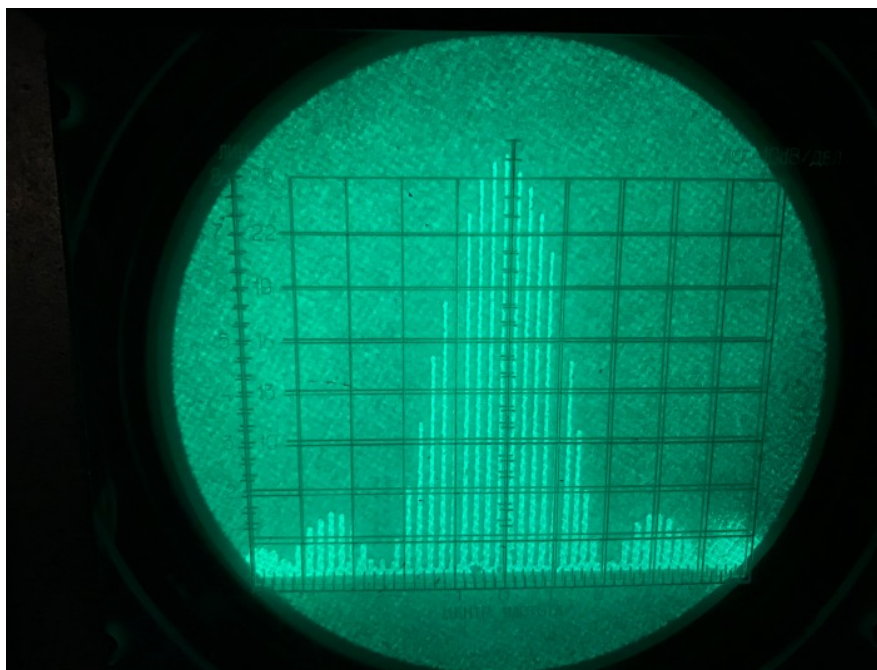


Рис 13: Спектр при частоте несущей $\nu_0 = 25$ кГц

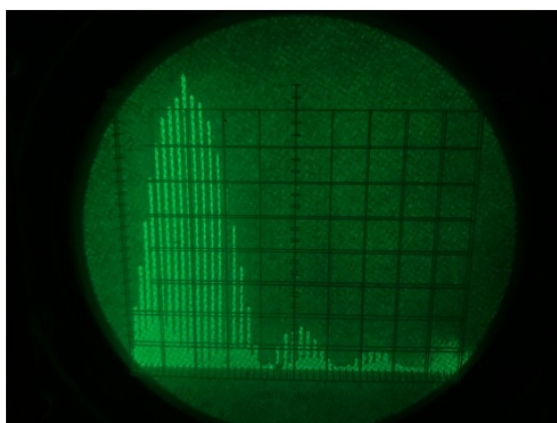


Рис 14: Спектр при частоте несущей $\nu_0 = 10$ кГц

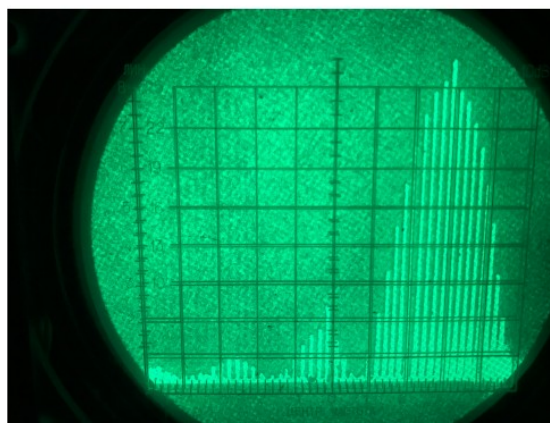
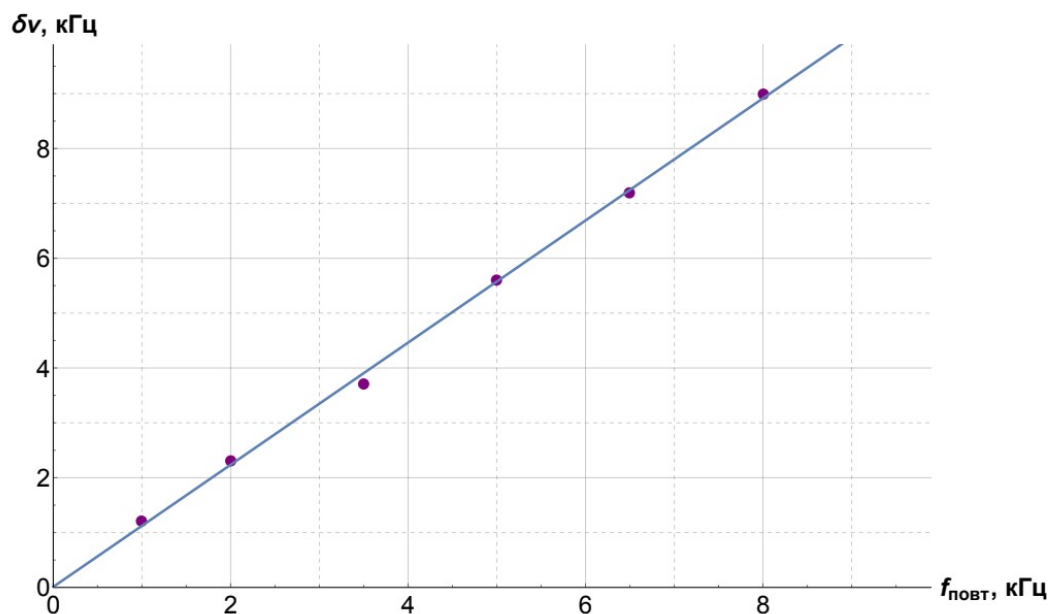


Рис 15: Спектр при частоте несущей $\nu_0 = 40$ кГц

При фиксированной длительности импульсов $\tau = 50$ мкс исследуем зависимость расстояния между соседними спектральными компонентами от периода T (частоты повторения импульсов $f_{повт}$). Проведем измерения для 5-6 значений частоты $f_{повт}$ в диапазоне 1-8 кГц, подбирая горизонтальный масштаб m_x , удобный для измерений. Результаты занесем в таблицу и построим график зависимости расстояния между компонентами спектра $\delta\nu$ от частоты повторения импульсов $f_{повт}$.

N	$f_{повт}$, кГц	$\delta\nu$, кГц
1	1.0	1.2
2	2.0	2.3
3	3.5	3.7
4	5.0	5.6
5	6.5	7.2
6	8.0	9.0

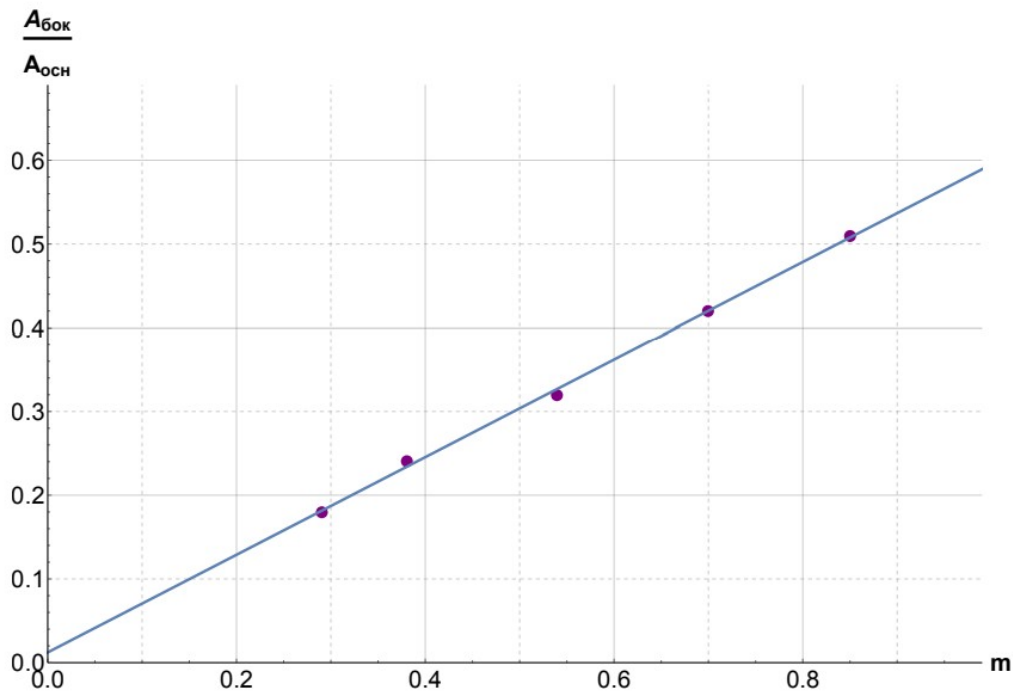


Из него получаем уравнение аппроксимирующей прямой: $y = (1.10 \pm 0.02)x + (0.01 \pm 0.10)$. Из графика видно, что при стремлении частоты повторения к нулю стремится к нулю и расстояние между компонентами спектра.

3. Исследование спектра гармонических сигналов, модулированных по амплитуде

Соберем схему, изображенную на рис.9. Изменяя глубину модуляции на Г6-34, исследуем зависимость отношения амплитуды боковой линии спектра к амплитуде основной линии ($A_{осн}/A_{бок}$) от глубины модуляции m , которая находится из отношения амплитуд на осциллографе по формуле (2). Результаты занесем в таблицу и построим график.

N	A_{min}	A_{max}	$A_{осн}$	$A_{бок}$	m	$A_{бок}/A_{осн}$
1	1.0	1.8	6.0	1.1	0.29	0.18
2	0.6	2.0	6.3	2.0	0.54	0.32
3	0.4	2.3	6.5	2.7	0.70	0.42
4	0.2	2.5	6.3	3.2	0.85	0.51
5	0.8	1.8	6.3	1.5	0.38	0.24



Из него получаем уравнение аппроксимирующей прямой: $y = (0.54 \pm 0.03)x + (0.012 \pm 0.0007)$. Т.е. наш коэффициент $a = 0.54 \pm 0.03$, что примерно совпадает с теоретическим значением из формулы (3)

Вывод

В данной работе мы изучили понятие спектра и спектрального анализа, а также исследовали спектральный состав периодических электрических сигналов.

А именно, мы посмотрели на прямоугольные импульсы, цуги гармонических колебаний и гармонические сигналы, модулированные по амплитуде. Кроме того, нами экспериментально проверен частный случай выполнения соотношения неопределенности.