In [1]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy
import scipy.linalg
```

1.1 Исследовать на линейную зависимость:

$$f_1(x) = e^x, f_2(x) = 1, f_3(x) = x + 1, f_4(x) = x - e^x.$$

Решение: Вектор f_4 можно представить в ввиде комбинации векторов f_1, f_2 и f_3:

$f_4(x) = f_3(x) - f_2(x) - f_1(x) = (x + 1) - 1 - e^x.$

Т.о. $f_1(x) = e^x, f_2(x) = 1, f_3(x) = x + 1, f_4(x) = x - e^x$ линейно зависимы.

1.2. Исследовать на линейную зависимость:

$$f_1(x) = 2, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2, f_4(x) = (x + 1)^2$$

Решение: Вектор $f_4(x)$ можно представить в ввиде комбинации векторов $f1$, $f2$ и $f3$:

$f_4(x) = f_3(x) + 2f_2(x) + 0,5f_1(x) = x^2 + 2x + 0.5 * 2$

Т.о. $f_1(x) = 2, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2, f_4(x) = (x + 1)^2$ линейно зависимы.

1.3. Найти координаты вектора $x = (2, 3, 5) \in \mathbb{R}^3$ в базисе $b_1 = (0, 0, 10)$, $b_2 = (2, 0, 0)$, $b_3 = (0, 1, 0)$.

Решение: Сначала необходимо проверить образуют ли векторы b_1, b_2 и b_3 базис. Векторы образуют базис, если определитель, составленный из координат этих векторов, отличен от нуля, в противном случае вектора не являются базисными и вектор X нельзя разложить по данному базису. Вычислим определитель матрицы:

In [2]:
```
B = np.array([[0, 0, 10], [2, 0, 0], [0, 1, 0]])
p = int(np.linalg.det(B))
print(f'Определитель матрицы B = {p}')
```

```
Определитель матрицы B = 20
```

Так как определитель отличен от нуля, то векторы образуют базис, следовательно, вектор X можно разложить по данному базису. Т.е. существуют такие числа α_1, α_2, α_3, что имеет место равенство: X = $\alpha_1 \cdot b_1$ + $\alpha_2 \cdot b_2$ + $\alpha_3 \cdot b_3$

Запишем данное равенство в координатной форме: (2;3;5) = α_1·(0;0;10) + α_2·(2;0;0) + α_3·(0;1;0)

Используя свойства векторов, получим следующее равенство:

(2; 3; 5) = ($0 \cdot \alpha_1$; $0 \cdot \alpha_1$; $10 \cdot \alpha_1$) + ($2 \cdot \alpha_2$; $0 \cdot \alpha_2$; $0 \cdot \alpha_2$) + ($0 \cdot \alpha_3$; $1 \cdot \alpha_3$; $0 \cdot \alpha_3$)

(2; 3; 5) = ($0 \cdot \alpha_1$ + $2 \cdot \alpha_2$ + $0 \cdot \alpha_3$; $0 \cdot \alpha_1$ + $0 \cdot \alpha_2$ + $1 \cdot \alpha_3$; $10 \cdot \alpha_1$ + $0 \cdot \alpha_2$ + $0 \cdot \alpha_3$)

По свойству равенства векторов имеем:

$0 \cdot \alpha_1$ + $2 \cdot \alpha_2$ + $0 \cdot \alpha_3$ = 2

$0 \cdot \alpha_1$ + $0 \cdot \alpha_2$ + $1 \cdot \alpha_3$ = 3

$10 \cdot \alpha_1$ + $0 \cdot \alpha_2$ + $0 \cdot \alpha_3$ = 5

из системы получаем, что $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 3$, т.е. X = $0.5 \cdot b_1$ + b_2 + $3 \cdot b_3$

1.4. Найти координаты вектора $3x^2 - 2x + 2 \in \mathbb{R}^3[x]$:

а) в базисе 1, x, x^2

Решение: Сначала необходимо проверить образуют ли многочлены 1, х и x^2 базис. Векторы образуют базис, если определитель, составленный из координат этих векторов, отличен от нуля, в противном случае вектора не являются базисными и вектор X нельзя разложить по данному базису. Вычислим определитель матрицы:

In [3]:
```
A = np.array([[0, 0, 1], [0, 1, 0], [1, 0, 0]])
d = int(np.linalg.det(A))
print(f'Определитель матрицы A = {d}')
```

```
Определитель матрицы A = -1
```

Так как определитель отличен от нуля, то векторы образуют базис, следовательно, многочлен X можно разложить по данному базису. Т.е. существуют такие числа α_1, α_2, α_3, что имеет место равенство: X = $\alpha_1 \cdot b_1$ + $\alpha_2 \cdot b_2$ + $\alpha_3 \cdot b_3$

Запишем данное равенство в координатной форме: (3; -2; 2) = α_1·(0;0;1) + α_2·(0;1;0) + α_3·(1;0;0)

Используя свойства векторов, получим следующее равенство:

(3; -2; 2) = ($0 \cdot \alpha_1$; $0 \cdot \alpha_1$; $1 \cdot \alpha_1$) + ($0 \cdot \alpha_2$; $1 \cdot \alpha_2$; $0 \cdot \alpha_2$) + ($1 \cdot \alpha_3$; $0 \cdot \alpha_3$; $0 \cdot \alpha_3$)

(3; -2; 2) = ($0 \cdot \alpha_1$ + $0 \cdot \alpha_2$ + $1 \cdot \alpha_3$; $0 \cdot \alpha_1$ + $1 \cdot \alpha_2$ + $0 \cdot \alpha_3$; $1 \cdot \alpha_1$ + $0 \cdot \alpha_2$ + $0 \cdot \alpha_3$)

По свойству равенства векторов имеем:

$0 \cdot \alpha_1$ + $0 \cdot \alpha_2$ + $1 \cdot \alpha_3$ = 3

$0 \cdot \alpha_1$ + $1 \cdot \alpha_2$ + $0 \cdot \alpha_3$ = -2

$1 \cdot \alpha_1$ + $0 \cdot \alpha_2$ + $0 \cdot \alpha_3$ = 2

из системы получаем, что $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -2$, $\alpha_3 = 3$, т.е. X = $2 \cdot b_1$ - $2 \cdot b_2$ + $3 \cdot b_3$

1.4. Найти координаты вектора $3x^2 - 2x + 2 \in \mathbb{R}^3[x]$:

а) в базисе x^2, $x - 1$, 1

Решение: Сначала необходимо проверить образуют ли многочлены x^2, х-1 и 1 базис. Векторы образуют базис, если определитель, составленный из координат этих векторов, отличен от нуля, в противном случае вектора не являются базисными и вектор X нельзя разложить по данному базису. Вычислим определитель матрицы:

In [4]:
```
C = np.array([[1, 0, 0], [0, 1, -1], [0, 0, 1]])
c = int(np.linalg.det(C))
print(f'Определитель матрицы A = {c}')
```

```
Определитель матрицы А = 1
```

Так как определитель отличен от нуля, то векторы образуют базис, следовательно, многочлен X можно разложить по данному базису. Т.е. существуют такие числа α_1, α_2, α_3, что имеет место равенство: X = $\alpha_1 \cdot b_1$ + $\alpha_2 \cdot b_2$ + $\alpha_3 \cdot b_3$

Запишем данное равенство в координатной форме: (3; -2; 2) = α_1·(1;0;0) + α_2·(0;1;-1) + α_3·(0;0;1)

Используя свойства векторов, получим следующее равенство:

(3; -2; 2) = ($1 \cdot \alpha_1$; $0 \cdot \alpha_1$; $0 \cdot \alpha_1$) + ($0 \cdot \alpha_2$; $1 \cdot \alpha_2$; $-1 \cdot \alpha_2$) + ($0 \cdot \alpha_3$; $0 \cdot \alpha_3$; $1 \cdot \alpha_3$)

(3; -2; 2) = ($1 \cdot \alpha_1$ + $0 \cdot \alpha_2$ + $0 \cdot \alpha_3$; $0 \cdot \alpha_1$ + $1 \cdot \alpha_2$ + $0 \cdot \alpha_3$; $0 \cdot \alpha_1$ - $1 \cdot \alpha_2$ + $1 \cdot \alpha_3$)

По свойству равенства векторов имеем:

$1 \cdot \alpha_1$ + $0 \cdot \alpha_2$ + $0 \cdot \alpha_3$ = 3

$0 \cdot \alpha_1$ + $1 \cdot \alpha_2$ + $0 \cdot \alpha_3$ = -2

$0 \cdot \alpha_1$ - $1 \cdot \alpha_2$ + $1 \cdot \alpha_3$ = 2

из системы получаем, что $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = -2$, $\alpha_3 = 0$, т.е. X = $3 \cdot b_1$ - $2 \cdot b_2$ + $0 \cdot b_3$

1.5. Установить, является ли линейным подпространством:

а) совокупность всех векторов трехмерного пространства, у которых по крайней мере одна из первых двух координат равна нулю

Решение: Проведем проверку условий для подпространства

$$(0,a,b)+(c,0,d)=(c,a,b+d),$$
$$\alpha\cdot(0,a,b)=(0,\alpha\cdot a,\alpha\cdot b)$$
$$\alpha\cdot(c,0,d)=(\alpha\cdot c,0,\alpha\cdot d).$$

Из полученных векторов первый не принадлежат указанному в задании множеству всех векторов вида $(0,a,b)$ или $(c,0,d)$ или $(0,0,e)$, то есть данное множество не является подпространством линейного пространства $\mathbb{R}^3$.

При этом можно заметить, что если бы в формулировке задачи было бы записано, что ОБЕ первые координаты равны 0, то эта совокупность была бы линейным подпространством

1.5. Установить, является ли линейным подпространством:

б) все векторы, являющиеся линейными комбинациями данных векторов $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$.

Решение: Проведем проверку условий для подпространств

$$(a_1u_1+a_2u_2+\ldots+a_nu_n)+(b_1u_1+b_2u_2+\ldots+b_nu_n)=((a_1+b_1)u_1,(a_2+b_2)u_2,\ldots,(a_n+$$

$$\alpha\cdot(a_1u_1+a_2u_2+\ldots+a_nu_n)=(\alpha a_1u_1,\alpha a_2u_2,\ldots,\alpha a_nu_n).$$

Вектора $((a_1+b_1)\cdot u_1,(a_2+b_2)\cdot u_2,\ldots,(a_n+b_n)\cdot u_n)$, и $(\alpha\cdot a_1u_1,\alpha\cdot a_2u_2,\ldots,\alpha\cdot a_nu_n)$ являются элементами подмножества линейных комбинаций векторов $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$.

Следовательно, множество всех векторов, являющихся линейными комбинациями векторов $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, является его линейным подпространством.

In [5]:
```
from numpy.linalg import norm
```

2.1. Найти скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}$:

а) $x = (0, -3, 6), y = (-4, 7, 9)$

(x, y) = 0 *(-4)* + *(-3)* 7 + 6 * 9 = 33

In [6]:
```
# проверка
a = np.array([0,-3, 6])
b = np.array([-4, 7, 9])
print(f'Скалярное произведение a и b: {a @ b}')
```

```
Скалярное произведение a и b: 33
```

2.1. Найти скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}$:

б) $x = (7, -4, 0, 1), y = (-3, 1, 11, 2)$

(x, y) = 7 *(-3)* + *(-4)* 1 + 0 *11* + *1* 2 = -23

In [7]:
```
# проверка
a = np.array([7,-4, 0, 1])
b = np.array([-3, 1, 11, 2])
print(f'Скалярное произведение a и b: {np.dot(a,b)}')
```

```
Скалярное произведение a и b: -23
```

2.2 Найти нормы векторов $(4, 2, 4)$ и $(12, 3, 4)$ и угол между ними.

In [8]:
```
# Зададим вектора:
a = np.array([4, 2, 4])
b = np.array([12, 3, 4])
```

Определим манхэттенскую норму вектора a:

$$\|x\|_1 = |4| + |2| + |4| = 10$$

In [9]:
```
print(f'l1 Манхетовская норма вектора a: {norm(a, ord=1)}')
```

```
l1 Манхетовская норма вектора a: 10.0
```

Определим евклидову норму вектора a:

$$\|x\|_2 = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = 6$$

In [10]:
```
print(f'l2 Евклидова норма вектора a: {norm(a, ord=2)}')
```

```
l2 Евклидова норма вектора a: 6.0
```

Определим манхэттенскую норму вектора b:

$$\|x\|_1 = |12| + |3| + |4| = 19$$

In [11]:
```
print(f'l1 Манхетовская норма вектора b: {norm(b, ord=1)}')
```

```
l1 Манхетовская норма вектора b: 19.0
```

Определим евклидову норму вектора b:

$$\|x\|_2 = \sqrt{12^2 + 3^2 + 4^2} = 13$$

In [12]:
```
print(f'l2 Евклидова норма вектора b: {norm(b, ord=2)}')
```

```
l2 Евклидова норма вектора b: 13.0
```

In [13]:
```
# найдем угол между векторами:
cos_phi = np.dot(a, b) / norm(a) / norm(b)
print(f'Косинус угла между a и b: {cos_phi:.2f}')
print(f'Угол между a и b в радианах: {np.arccos(cos_phi):.2f}')
print(f'Угол между a и b в градусах: {np.arccos(cos_phi) * 180 / np.pi:.2f}')
```

```
Косинус угла между a и b: 0.90
Угол между a и b в радианах: 0.46
Угол между a и b в градусах: 26.18
```

2.3. Будет ли линейное пространство евклидовым, если за скалярное произведение принять:

а) произведение длин векторов;

Решение: Пространство всех свободных векторов с определенным скалярным произведением $(x,\ y) = |x| \cdot |y| \cdot cos\alpha.$ является евклидовым пространством.

В нашей задаче отсутвует угол между векторами, что означает, что в данном случае пространство НЕ будет евклидовым

б) утроенное обычное скалярное произведение векторов?

Решение:

На множестве всех векторов на плоскости введем следующую операцию:

если векторы x и y этой плоскости имеют в некотором базисе координаты (x1, x2) и (y1, y2) соответственно, то их скалярное произведение равно:

$(x \cdot y) = 3 \cdot x_1 \cdot y_1 + 3 \cdot x_2 \cdot y_2.$

Посмотрим выполняются ли для данного утверждения следующие четыре аксиомы:

1) $(x, y) = (y, x)$;

2) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;

3) $(x1 + x2, y) = (x1, y) + (x2, y)$;

4) $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Проверка:

1) $3 \cdot x_1 \cdot y_1 + 3 \cdot x_2 \cdot y_2 = 3 \cdot y_1 \cdot x_1 + 3 \cdot y_2 \cdot x_2$ (по переместительным законам умножения), т.е. $(x, y) = (y, x)$

2) $3 \cdot (\lambda \cdot x_1) \cdot y_1 + 3 \cdot (\lambda \cdot x_2) \cdot y_2 = \lambda \cdot (3 \cdot x_1 \cdot y_1 + 3 \cdot x_2 \cdot y_2)$ (по переместительным законам умножения), т.е. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$

3)
$3 \cdot (x1_1 + x2_1) \cdot y_1 + 3 \cdot (x1_2 + x2_2) \cdot y_2 = (3 \cdot x1_1 \cdot y_1 + 3 \cdot x1_2 \cdot y_2) + (3 \cdot x2_1 \cdot y_1 + 3 \cdot x2_2 \cdot$
(из свойств умножения b сложения векторов), т.е. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$

4) $(x, x) = 3 \cdot x_1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \cdot x_2 = 3 \cdot x_1^2 + 3 \cdot x_2^2$, $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, т.е. выполняется 4я аксиома

Следовательно, линейное пространство будет евклидовым, если за скалярное произведение принять утроенное обычное скалярное произведение векторов.

2.4. Какие из нижеперечисленных векторов образуют ортонормированный базис в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$:

а) $(1, 0, 0), (0, 0, 1)$

Решение: Вектора НЕ образуют базис в 3хмерном пространстве (должно быть 3 вектора).

б) $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0, 0, 1)$

Решение: В конечномерном евклидовом пространстве базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ называется ортонормированным, если

$(e_i, e_j) = 0 \, \forall \, i \neq j$ и $(e_i, e_i) = 1 \, \forall \, i \in [1, n]$.

In [14]:
```
import numpy as np
a = np.array([1/2**(1/2), -1/2**(1/2), 0])
b = np.array([1/2**(1/2), 1/2**(1/2), 0])
c = np.array([0, 0, 1])
```

In [15]:
```
# найдем попарные скалярные произведения (они должны быть равны 0)
print(f"Скалярное произведение векторов a и b: {a @ b}")
print(f"Скалярное произведение векторов a и c: {a @ c}")
print(f"Скалярное произведение векторов b и c: {b @ c}")
```

```
Скалярное произведение векторов a и b: 0.0
Скалярное произведение векторов a и c: 0.0
Скалярное произведение векторов b и c: 0.0
```

In [16]:
```
# найдем скалярные произведения вектров на самих себя(они должны быть равны 1)
print(f"Скалярное произведение векторов a и b: {a @ a}")
print(f"Скалярное произведение векторов a и c: {b @ b}")
print(f"Скалярное произведение векторов b и c: {c @ c}")
```

```
Скалярное произведение векторов a и b: 0.9999999999999998
Скалярное произведение векторов a и c: 0.9999999999999998
Скалярное произведение векторов b и c: 1
```

Вектора удовлетворяют условию ортонормированности. Т.Е. вектора $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0, 0, 1)$ образуют ортонормированный базис.

в) $(1/2, -1/2, 0), (0, 1/2, 1/2), (0, 0, 1)$

Решение: В конечномерном евклидовом пространстве базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ называется ортонормированным, если

$(e_i, e_j) = 0 \; \forall \; i \neq j$ и $(e_i, e_i) = 1 \; \forall \; i \in [1, n]$.

In [17]:
```
import numpy as np
a = np.array([1/2, -1/2, 0])
b = np.array([0, 1/2, 1/2])
c = np.array([0, 0, 1])
```

In [18]:
```
# найдем попарные скалярные произведения (они должны быть равны 0)
print(f"Скалярное произведение векторов a и b: {a @ b}")
print(f"Скалярное произведение векторов a и c: {a @ c}")
print(f"Скалярное произведение векторов b и c: {b @ c}")
```

```
Скалярное произведение векторов a и b: -0.25
Скалярное произведение векторов a и c: 0.0
Скалярное произведение векторов b и c: 0.5
```

Вектора Не удовлетворяют условию ортонормированности, т.е. вектора $(1/2, -1/2, 0), (0, 1/2, 1/2), (0, 0, 1)$ НЕ образуют ортонормированный базис.

г) $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$

Решение: В конечномерном евклидовом пространстве базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ называется ортонормированным, если

$(e_i, e_j) = 0 \; \forall \; i \neq j$ и $(e_i, e_i) = 1 \; \forall \; i \in [1, n]$.

In [19]:
```
import numpy as np
a = np.array([1, 0, 0])
b = np.array([0, 1, 0])
c = np.array([0, 0, 1])
```

In [20]:
```
# найдем попарные скалярные произведения (они должны быть равны 0)
print(f"Скалярное произведение векторов a и b: {a @ b}")
print(f"Скалярное произведение векторов a и c: {a @ c}")
print(f"Скалярное произведение векторов b и c: {b @ c}")
```

```
Скалярное произведение векторов a и b: 0
Скалярное произведение векторов a и c: 0
Скалярное произведение векторов b и c: 0
```

In [21]:
```
# найдем скалярные произведения вектров на самих себя(они должны быть равны 1)
print(f"Скалярное произведение векторов a и b: {a @ a}")
print(f"Скалярное произведение векторов a и c: {b @ b}")
print(f"Скалярное произведение векторов b и c: {c @ c}")
```

```
Скалярное произведение векторов a и b: 1
Скалярное произведение векторов a и c: 1
Скалярное произведение векторов b и c: 1
```

Вектора удовлетворяют условию ортонормированности. Т.Е. вектора $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ образуют ортонормированный базис.

In [ ]: