Lessou 3

① а) $\left.\begin{matrix}AB\\BA\end{matrix}\right\}$ не определены, т.к. число столбцов $A \neq$ числу строк B
строк $A \neq$ числу столбцов B

б) AB – определено 2×3
~~BA~~ – не определено (т.к. число столбцов $B \neq$ числу строк A)

в) $\left.\begin{matrix}AB\\BA\end{matrix}\right\}$ определены $\begin{matrix}8\times8\\3\times3\end{matrix}$

г) $\left.\begin{matrix}AB\\BA\end{matrix}\right\}$ определены, т.к. обе матрицы квадратные размера 4×4

②
$$A+B=\begin{pmatrix}1 & -2\\3 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & -1\\0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+4 & -2-1\\3+0 & 0+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -3\\3 & 5\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1\cdot4+(-2)\cdot0 & 1\cdot(-1)+(-2)\cdot5\\3\cdot4+0\cdot0 & 3(-1)+0\cdot5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -11\\12 & -3\end{pmatrix};\quad BA=\begin{pmatrix}4\cdot1-3\cdot1 & 4\cdot(-2)\cdot1\cdot0\\0\cdot1+5\cdot3 & 0\cdot(-2)\cdot50\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -8\\15 & 0\end{pmatrix}$$

③
$$3A-2B+4C=3\cdot\begin{pmatrix}1 & 7\\3 & -6\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}0 & 5\\2 & -1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}2 & -4\\1 & 1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}3 & 21\\9 & -18\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -10\\-4 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8 & -16\\4 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & -5\\9 & -12\end{pmatrix}$$

④
$$A=\begin{pmatrix}4 & 1\\5 & -2\\2 & 3\end{pmatrix}$$

$$A^T=\begin{pmatrix}4 & 5 & 2\\1 & -2 & 3\end{pmatrix}$$

$$A\cdot A^T=\begin{pmatrix}4 & 1\\5 & -2\\2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 5 & 2\\1 & -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot4+1\cdot1 & 4\cdot5+1(-2) & 4\cdot2+1\cdot3\\5\cdot4-2\cdot1 & 5\cdot5-2(-2) & 5\cdot2-2\cdot3\\2\cdot4+3\cdot1 & 2\cdot5+3\cdot(-2) & 2\cdot2+3\cdot3\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}17 & 18 & 11\\18 & 29 & 4\\11 & 4 & 13\end{pmatrix}$$

$$A^T\cdot A=\begin{pmatrix}4 & 5 & 2\\1 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1\\5 & -2\\2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot4+5\cdot5+2\cdot2 & 4\cdot1+5(-2)+2\cdot3\\1\cdot4-2\cdot5+3\cdot2 & 1\cdot1-2\cdot(-2)+3\cdot3\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}45 & 0\\0 & 14\end{pmatrix}$$

Lesson 4

① а) $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin x \cdot \sin x - (-\cos x)\cdot \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

б) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 4\cdot5\cdot9 + 2\cdot1\cdot0 + 0\cdot0\cdot3 - 3\cdot5\cdot0 - 4\cdot0\cdot1 - 2\cdot0\cdot9 = 180$

в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot9 + 2\cdot6\cdot7 + 4\cdot8\cdot3 - 3\cdot5\cdot7 - 8\cdot6\cdot1 - 2\cdot4\cdot9 =$
$= 45 + 84 - 96 - 105 - 48 - 72 = 0$

② $|A| = 4$

а) $\det(A^2) = \det(A\cdot A) = \Big|$ по 9 св-ву определителя $\Big| = \det A \cdot \det A = 16$

б) $\det(A^T) = \Big|$ по 1 св-ву определителя $\Big| = 4$

в) $\det(2A) = \det(A + A) = \Big|$ следствие из св-ва $\Big| = 2^n \cdot \det(A)$, где n – кол-во строк (столбцов)

③ $\begin{pmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 4 & -14 & 6 \\ -3 & 7 & 13 \end{pmatrix}$. Матрица вырожденная, если $\det = 0$

$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 4 & -14 & 6 \\ -3 & 7 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times 2,\ +} \begin{pmatrix} -2 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & 13 \end{pmatrix}$; $\det A = 0$ (5 св-во опред.)

$\Rightarrow$ матрица вырожденная.

④ а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-,\ \times(-2)\,+} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-} $

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ ранг равен 2

б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-,\ \times(-2)\,+} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{+} $

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ ранг равен 3