1. Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} (-1-\lambda)(6-\lambda)+12=0 \\ -6-6\lambda+\lambda+\lambda^2+12=0 \\ \lambda^2-5\lambda+6=0 \left(\begin{array}{c}\text{по т. Виета} \\ \Sigma 5, \ * 6\end{array}\right) \Rightarrow \lambda_1=2, \lambda_2=3 \end{array}$$

т.о. собственное значения $\lambda_1=2$; $\lambda_2=3$

Найдем собственное вектора

$\lambda_1=2$ $\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} -x_1-6x_2=2x_1 \\ 2x_1+6x_2=2x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1=-6x_2 \\ 2x_1=-4x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2x_2 \\ x_1=-2x_2 \end{cases}$$

Пусть $x_1=2 \Rightarrow x_2=-1$ $\quad x=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2=3$ $\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} -x_1-6x_2=3x_1 \\ 2x_1+6x_2=3x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1=-6x_2 \\ 2x_1=-3x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1=-3x_2 \\ 2x_1=-3x_2 \end{cases}$$

Пусть $x_1=3 \Rightarrow x_2=(-2)$ $\quad x\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

т.о. собственное вектора $x_1=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $x_2=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

1сп. Пусть вектор $x(x,y)$ – собственный, тогда $\exists \lambda$:

$$A\cdot x=\lambda x \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$= \begin{cases} -x+0\cdot y=\lambda x \\ 0\cdot x-1y=\lambda y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x=\lambda x \\ -y=\lambda y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=-1 \\ \lambda=-1, \end{cases}$$

т.о. $\forall$ вектор является для него собственным

2сп. Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (-1-\lambda)^2=0 \Rightarrow (1+\lambda)^2=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=-1$$

Найдем собственные вектора

$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ $\quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -x_1 + 0 \cdot x_2 = -x_1 \\ 0 \cdot x_1 - x_2 = -x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_2 \end{cases}$ - этой системе

удовлетворяют координаты любого вектора.

т.о. $\forall$ ненулевой вектор этого преобразования - собственный

3 $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Пусть вектор $(1, 1)$ - собственный, тогда $\exists \lambda$: $Ax = \lambda \cdot x \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 1 + 1 = \lambda \\ -1 + 3 = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = \lambda \\ 2 = \lambda \end{cases} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 2,$

т.о. <u>вектор $(1, 1)$ - собственный</u>

4 $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Пусть вектор $(3, -3, -4)$ - собственный, тогда $\exists \lambda$: $Ax = \lambda x \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -9 = 3\lambda \\ 9 = -3\lambda \\ -12 = -4\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -3 \\ \lambda = -3 \\ \lambda = 3 \end{cases}$. Это означает, что

вектор $(3, -3, -4)$ <u>не</u> является собственным