1

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\times(-2)} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -4 \end{array}\right) -$$

система имеет бесконечное мн-во решений.
Найдем общее решение:

Пусть $x_4 = 2C$ $\Rightarrow$

$$2x_3 - 3x_4 = -4$$
$$2x_3 = 6C - 4$$
$$x_3 = 3C - 2$$

$$-x_2 + x_3 + 5x_4 = -2$$
$$-x_2 + 3C - 2 + 10C = -2$$
$$x_2 = 13C$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0$$
$$x_1 + 13C - 3C + 2 - 4C = 0$$
$$x_1 = -6C - 2$$

Т.о. общее решение $\begin{pmatrix} -6C-2 \\ 13C \\ 3C-2 \\ 2C \end{pmatrix}, C \in R$

2 a)

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Найдем определитель матрицы коэффициентов

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 15 + 3 + 2 + 5 + 9 - 2 \neq 0,$$ значит, матрица невырожденная.

Т.к. число уравнений равно числу неизвестных и матрица коэффициентов невырожденная, то система совместная и имеет единственное решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & -3 & -17 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\times(-3),\ \times(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 4 \\ 0 & -7 & -1 & -17 \end{array}\right) :(-4) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & -1 & -17 \end{array}\right) \xrightarrow{\times 7} $$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & -24 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

б) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 5 \end{cases}$

Найдем определитель матрицы коэффициентов

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 9 \end{vmatrix} = -36-36-36+36+36+36 = 0 \Rightarrow$$ система несовместна или имеет бесконечное множество решений

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 9 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\times 2,\ \times 3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{array}\right)$$

Получаем $n=3$, $\operatorname{rank} A = 1$, $\operatorname{rank} \tilde{A} = 2$ $\Rightarrow$ система несовместна (можно было посчитать $\forall\ \Delta_j = \frac{\det A_j}{\det A}$, они были бы $\neq 0$)

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = -2 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & -8 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\times -3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & -23 & -14 \end{array}\right)$$

$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \tilde{A} < n = 3$ – система совместна и имеет бесконечное кол-во решений

3) $$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{:5,\ :3,\ :2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right)$$

$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \tilde{A} = n = 4$, то система определена и имеет единственное решение

$$\begin{cases} x_1 = -3x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 3 \\ x_2 = 2/5 - 1/5\, x_4 \\ x_3 = 4/3 \\ x_4 = 1/2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 83/30 \\ x_2 = 3/10 \\ x_3 = 4/3 \\ x_4 = 1/2 \end{cases}$$

4) $$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right) \xrightarrow{\times -4,\ \times -7} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & -4a+b \\ 0 & -6 & -12 & -7a+c \end{array}\right) \xrightarrow{\times 2} $$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & -4a+b \\ 0 & 0 & 0 & -8a+2b+7a-c \end{array}\right)$$ Система несовместна при условии $-8a+2b+7a-c = -a+2b-c \neq 0$

т.о. условие несовместности

$a - 2b + c \neq 0$

Урок 7

1) а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 = 7 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 6 = 2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 14 = 10 \quad ; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 3 = 4$$

$$x = (5, 2)$$

б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 6 + 20 - 10 + 24 + 1 = 43$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 10 + 3 - 40 - 5 + 120 - 2 = 86$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 60 + 5 + 20 + 6 - 10 = -43$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 4 + 40 - 20 + 16 + 1 = 43$$

$$x = (2, -1, 1)$$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 12 \\ 3 & 26 & 30 \end{pmatrix}$ $\times 2$ $\times 3$ $-$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 20 & 18 \end{pmatrix} \times 4 \; -$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Проверка: $A = L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot1+0\cdot0+0\cdot0 & 1\cdot2+5\cdot0+0\cdot0 & 1\cdot4+0\cdot4+0\cdot2 \\ 2\cdot1+1\cdot0+0\cdot0 & 2\cdot2+1\cdot5+0\cdot0 & 2\cdot4+1\cdot4+0\cdot2 \\ 3\cdot1+4\cdot0+1\cdot0 & 3\cdot2+4\cdot5+1\cdot0 & 3\cdot4+4\cdot4+1\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 12 \\ 3 & 26 & 30 \end{pmatrix}$$

б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 18 & 23 & 18 \\ 4 & 22 & 53 & 33 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times 2 & \times 3 & \times 4 \\ - & - & - \end{matrix}$

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & l_{32} & 1 & 0 \\ 4 & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 15 & 23 & 6 \\ 0 & 18 & 45 & 17 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times 5 = l_{32} & \times 6 = l_{43} \\ - & - \end{matrix}$

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & l_{43} & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 21 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times 7 = l_{43} \\ - \end{matrix}$

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

* Проверку писать не стала :)

3) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 11x_1 + 7x_2 + 5x_3 = -6 \\ 9x_1 + 8x_2 + 4x_3 = -5 \end{cases}$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 11 & 7 & 5 \\ 9 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times \frac{11}{2} = l_{21} & \times \frac{9}{2} = l_{31} \\ - & - \end{matrix}$

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 11/2 & 1 & 0 \\ 9/2 & l_{32} & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3/2 & -23/2 \\ 0 & 7/2 & -19/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times \frac{7}{3} = l_{32} \\ - \end{matrix}$

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 11/2 & 1 & 0 \\ 9/2 & 7/3 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3/2 & -23/2 \\ 0 & 0 & 52/3 \end{pmatrix}$

Решим систему: $Ly = в$

$\begin{cases} y_1 = 1 \\ 11/2\, y_1 + y_2 = -6 \\ 9/2\, y_1 + 7/3\, y_2 + y_3 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -11/2 - 6 = -23/2 \\ y_3 = -\frac{9}{2} + \frac{7}{3} \cdot \frac{23}{2} - 5 = \frac{-27 + 161 - 30}{6} = \frac{104}{6} = \frac{52}{3} \end{cases}$

Решим систему: $Ux = y$

$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3/2\, x_2 - 23/2\, x_3 = -23/2 \\ 52/3\, x_3 = 52/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = 1 - x_2 - 3x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

4

$$\begin{cases} 81x_1 - 45x_2 + 45x_3 = 531 \\ -45x_1 + 50x_2 - 15x_3 = -460 \\ 45x_1 - 15x_2 + 38x_3 = 193 \end{cases}$$

Произведем разложение LL^T:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{81} = 9$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{-45}{9} = -5$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{45}{9} = 5$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{50-25} = 5$$

$$l_{32} = \frac{1}{l_{22}}(a_{32} - l_{21}l_{31}) = \frac{1}{5}(-15 + 5\cdot5) = 2$$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{38-25-4} = \sqrt{9} = 3$$

Получим матрицу:

$$L = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad L^T = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Решим систему: $Ly = b$

$$\begin{cases} 9y_1 = 531 \\ -5y_1 + 5y_2 = -460 \\ 5y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 193 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 59 \\ y_2 = -92 + y_1 = -33 \\ 3y_3 = 193 - 5y_1 - 2y_2 = 193 - 295 + 66 = -36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 59 \\ y_2 = -33 \\ y_3 = -12 \end{cases}$$

Решим систему $L^T x = y$

$$\begin{cases} 9x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 59 \\ 5x_2 + 2x_3 = -33 \\ 3x_3 = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x_1 = 5x_2 - 5x_3 + 59 = -25 + 20 + 59 = 54 \\ 5x_2 = -33 - 2x_3 = -25 \\ x_3 = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = -4 \end{cases}$$