a) Calcular los coeficientes A, B y C de One-sided = D+2 y diga por qué es de orden $O(h^2)$

$$U_i' = AU_{i+2} + BU_{i+1} + CU_i + O(h^2)$$

Calculamos las expansiones de Taylor al rededor de x_0, evaluando en $x_0 + h = x_{i+1}$ y $x_0 + 2h = x_{i+2}$

Para U_{i+2} y U_{i+1} obtenemos:

$$U_{i+2} = U_i + 2hU_i' + \frac{(2h)^2}{2}U_i'' + \frac{(2h)^3}{3!}U''' + O(h^3)$$

$$U_{i+1} = U_i + hU_i' + \frac{h^2}{2}U_i'' + \frac{h^3}{3!}U_i''' + O(h^3)$$

Sustitución de U_{i+1} y U_{i+2} en la ecuación original:

$$A\left(U_i + 2hU_i' + \frac{(2h)^2}{2}U_i'' + \ldots\right) + B\left(U_i + hU_i' + \frac{h^2}{2}U_i''\right) + CU_i = U_i'$$

Juntamos términos comunes:

$$(A+B+C)U_i + (2A+B)hU_i' + \left(2A + \frac{B}{2}\right)h^2U_i'' + O(h^2) = U_i'$$

Ahora sacamos nuestras 3 ecuaciones para tener un sistema

$$A + B + C = 0$$

$$2A + B = \frac{1}{h}$$

$$\left(2A + \frac{B}{2} = 0\right)2 \Rightarrow 4A + B = 0$$ (Se realizó la multiplicación para eliminar la fracción).

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1/h \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-R_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1/h \\ 2 & 0 & 0 & -1/h \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{R_3}{2}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1/h \\ 1 & 0 & 0 & -1/2h \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2-2R_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/h \\ 1 & 0 & 0 & -1/2h \end{array}\right] \xrightarrow{R_3+R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/h \\ 2 & 1 & 1 & -1/2h \end{array}\right] \xrightarrow{R_3-R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/2h \\ 0 & 1 & 0 & 2/h \\ 2 & 1 & 1 & -1/2h \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3-2R_1]{} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -1/2h \\ 0 & 1 & 0 & 2/h \\ 0 & 1 & 1 & -1/2h \end{array}\right] \xrightarrow[R_3-R_2]{} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -1/2h \\ 0 & 1 & 0 & 2/h \\ 0 & 0 & 1 & -3/2h \end{array}\right] \quad \therefore \quad A = \frac{-1}{2h}, \quad B = \frac{2}{h}, \quad C = \frac{-3}{2h}$$

Comprobación:

$A+B+C=0 \; ; \; -\frac{1}{2h}+\frac{2}{h}-\frac{3}{2h}=0 \; , \; \frac{-4}{2h}+\frac{2}{h}=0 \; ; \; -\frac{2}{h}+\frac{2}{h}=0$

$\rightarrow 0=0!$

$2A+B=\frac{1}{h} \; ; \; 2\left(-\frac{1}{2h}\right)+\frac{2}{h}=\frac{1}{h} \; , \; -\frac{2}{2h}+\frac{2}{h}=\frac{1}{h} \; ; \; -\frac{1}{h}+\frac{2}{h}=\frac{1}{h} \; ; \; \frac{1}{h}=\frac{1}{h}$ //

$4A+B=0 \; ; \; 4\left(-\frac{1}{2h}\right)+\frac{2}{h}=0 \; ; \; -\frac{4}{2h}+\frac{2}{h}=0 \; ; \; -\frac{2}{h}+\frac{2}{h}=0 \; ; \; 0=0$ //

$\therefore$ One-sided-D_{+2} es: $-\frac{1}{2h}U_{i+2}+\frac{2}{h}U_{i+1}-\frac{3}{2h}U_i + O(h^2)$

Como tenemos una aproximación de orde 2, el error también será de este orden ya que considerará todos lo terminos de igual o mayor grado de la serie de expansiones.

b) Calcule los coeficientes A, B, C y D de One-sided-D-3 y diga por qué es de orden $\mathcal{O}(h^3)$

$$U_i' = AU_{i+2} + BU_{i+1} + CU_i + DU_{i-1}$$

Calculamos las expansiones de Taylor alrededor de x_0, evaluando en $x_0 + 2h = x_{i+2}$, $x_0 + h = x_{i+1}$, $x_0 = x_i$, $x_0 - h = x_i - h$

Para U_{i+2}, U_{i+1}, U_{i-1} obtenemos:

$$U_{i+2} = U_i + 2hU_i' + \frac{(2h)^2}{2!}U_i'' + \frac{(2h)^3}{3!}U_i''' + \dots \mathcal{O}(h^3)$$

$$U_{i+1} = U_i + hU_i' + \frac{h^2}{2!}U_i'' + \frac{h^3}{3!}U_i''' + \dots \mathcal{O}(h^3)$$

$$U_{i-1} = U_i - hU_i' + \frac{(-h)^2}{2!}U_i'' + \frac{(-h^3)}{3!}U_i''' + \dots \mathcal{O}(h^3)$$

Sustituyendo los valores en la ecuación original obtenemos:

$$A(U_i + 2hU_i' + 2hU_i'' + \frac{4}{3}hU_i''') + B(U_i + hU_i' + \frac{h^2}{2}U_i'' + \frac{h^3}{6}U_i''') + CU_i$$
$$+ D(U_i - hU_i' + \frac{h^2}{2}U_i'' - \frac{h^3}{6}U_i''') + \mathcal{O}(h^3) = U_i'$$

Agrupando términos tenemos:

$$(A+B+C+D)U_ih + (2A+B-D)hU_i' + (2A + \frac{B}{2} + \frac{D}{2})U_i''h^2 + (\frac{4}{3}A + \frac{B}{6} - \frac{D}{6})h^3U_i''' = U_i'$$

Igualando términos tenemos las siguientes ecuaciones:

$$A+B+C+D = 0$$
$$2A+B-D = 1/h$$
$$2A + \frac{B}{2} + \frac{D}{2} = 0$$
$$\frac{4}{3}A + \frac{B}{6} - \frac{D}{6} = 0$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1/h \\ 2 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 4/3 & 1/6 & 0 & -1/6 & 0 \end{array}\right]$$

Resolviendo la matriz para determinar los coeficientes tenemos:

Natalia Denise Fuentes Rubio

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1/h \\ 2 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 4/3 & 1/6 & 0 & -1/6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{2R_3 \\ 6R_4}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1/h \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 4R_1]{R_4 - 4R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & -4/h \\ 0 & -3 & -4 & -3 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 - 8R_1]{-\frac{R_2}{3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4/3h \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -8 & -9 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_3 - 3R_2 \\ 7R_2 + R_4}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4/3h \\ 0 & 0 & 4 & 6 & -4/h \\ 0 & 0 & -8 & -16 & 28/3h \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\frac{R_4}{-8}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4/3h \\ 0 & 0 & 4 & 6 & -4/h \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -7/6h \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - 3R_4]{} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4/3h \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2h \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -7/6h \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 - R_3]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4/3h \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2h \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2/3h \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\frac{R_4}{2}]{R_1 - R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & -4/3h \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4/3h \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2h \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3h \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + R_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & -4/3h \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/h \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2h \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3h \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - 2R_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2/3h \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/h \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2h \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3h \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 - R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/6h \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/h \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2h \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3h \end{array}\right]$$

$\therefore$ $A = -1/6h$; $B = 1/h$; $C = -1/2h$; $D = -1/3h$

Comprobación

$A + B + D + C = 0$; $-\frac{1}{6h} + \frac{1}{h} - \frac{1}{2h} - \frac{1}{3h} = 0$; $\underline{0 = 0}$

$2A + B - D = 1/h$; $2\left(-\frac{1}{6h}\right) + \frac{1}{h} + \frac{1}{3h} = \frac{1}{h}$; $-\cancel{\frac{1}{3h}} + \frac{1}{h} + \cancel{\frac{1}{3h}} = \frac{1}{h}$; $\underline{\frac{1}{h} = \frac{1}{h}}$

$2A + \frac{B}{2} + \frac{D}{2} = 0$; $2\left(\frac{-1}{6h}\right) + \frac{\frac{1}{h}}{2} + \frac{\frac{-1}{3h}}{2} = 0$, $\frac{-1}{3h} + \frac{1}{2h} - \frac{1}{6h} = 0$; $\underline{0 = 0}$

$\frac{4}{3}A + \frac{B}{6} - \frac{D}{6} = 0$; $\frac{4}{3}\left(\frac{-1}{6h}\right) + \frac{\frac{1}{h}}{6} - \frac{\frac{-1}{3h}}{6} = 0$; $-\frac{2}{9h} + \frac{1}{6h} + \frac{1}{18h} = 0$, $\underline{0 = 0}$

$\therefore$

One-Sided-D-3 $\rightarrow$ $-\frac{1}{6h} U_{i+2} + \frac{1}{h} U_{i+1} - \frac{1}{2h} U_i - \frac{1}{3h} U_{i-1} + O(h^3)$

Como el caso anterior, el error considerará todos los término de igual orden o mayor a los que se desarrollaron en la expansión de Taylor.

c) Explique cómo se obtiene la fórmula Centered- D_0^2

Se hace una expansión de Taylor alrededor del punto x_0.

$$U(x) = U(x_0) + U'(x_0)(x-x_0) + U''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + U'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{3!} + \frac{(x-x_0)^4}{4!}U_i^{IV} + \dots$$

Ahora se hace la evaluación en $x = x_0 + h$ y en $x = x_0 - h$; con esto obtendremos las aproximaciones Backward y Forward para posteriormente, calcular la aproximación Centered de segundo orden.

$$U(x_0+h) = U(x_0) + hU'(x_0) + \frac{h^2}{2!}U''(x_0) + \frac{h^3}{3!}U'''(x_0) + \frac{h^4}{4!}U^{IV}(x_0) + \dots$$

$$U(x_0-h) = U(x_0) - hU'(x_0) + \frac{(-h)^2}{2!}U''(x_0) + \frac{(-h)^3}{3!}U'''(x_0) + \frac{(-h)^4}{4!}U^{IV}(x_0) + \dots$$

Reescribiendo las ecuaciones obtenemos:

$$U(x_0+h) = U(x_0) + hU'(x_0) + \frac{h^2}{2!}U''(x_0) + \frac{h^3}{6}U'''(x_0) + \frac{h^4}{24}U^{IV}(x_0) + \dots$$

$$U(x_0-h) = U(x_0) - hU'(x_0) + \frac{h^2}{2!}U''(x_0) - \frac{h^3}{6}U'''(x_0) + \frac{h^4}{24}U^{IV}(x_0) + \dots$$

Ahora sumamos $U(x_0+h)$ y $U(x_0-h)$:

$$\begin{aligned} U(x_0+h) + U(x_0-h) = {} & U(x_0) + \cancel{hU'(x_0)} + \frac{h^2}{2}U''(x_0) + \cancel{\frac{h^3}{6}U'''(x_0)} + \frac{h^4}{24}U^{IV}(x_0) \\ & + U(x_0) - \cancel{hU'(x_0)} + \frac{h^2}{2}U''(x_0) - \cancel{\frac{h^3}{6}U'''(x_0)} + \frac{h^4}{24}U^{IV}(x_0) \end{aligned}$$

$$U(x_0+h) + U(x_0-h) = 2U(x_0) + \frac{2h^2}{\cancel{2}}U''(x_0) + \frac{2h^4}{24}U^{IV}(x_0)$$

$$U(x_0+h) + U(x_0-h) = 2U(x_0) + h^2U''(x_0) + \frac{2h^4}{24}U^{IV}(x_0)$$

Despejando la segunda derivada y considerando $\frac{2h^4}{2}U^{IV}(x_0) = O(h^2)$

$$U''(x_0) = \frac{U(x+h) - 2U(x_0) + U(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

Natalia Denise Fuentes Rubio