Der **Logarithmus** ist die Umkehrfunktion der Potenzfunktion. Er gibt an, mit welcher Potenz eine Basis b potenziert werden muss, um eine gegebene Zahl x zu erhalten.

$$\log_b(x) = y \Leftrightarrow b^y = x$$

Das bedeutet:

- b ist die **Basis** des Logarithmus (z. B. 10 oder e).
- x ist die Zahl, deren Logarithmus berechnet wird.
- y ist der Exponent, mit dem b potenziert werden muss, um x zu erhalten.

Wichtige Logarithmen:

1. **Dekadischer Logarithmus (Basis 10):**

$$\log_{10}(1000) = 3$$

(da $10^3 = 1000$)

2. **Natürlicher Logarithmus (Basis e):**

$$\ln(7.389) \approx 2$$

(da $e^2 \approx 7.389$)

3. **Binärer Logarithmus (Basis 2):**

$$\log_2(8) = 3$$

(da $2^3 = 8$)

Eigenschaften des Logarithmus:

1. **Produktregel:**

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$$

Beispiel:

$$\log_2(8 \cdot 4) = \log_2(8) + \log_2(4) = 3 + 2 = 5$$

2. **Quotientenregel:**

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$$

Beispiel:

$$\log_{10}\left(\frac{100}{10}\right) = \log_{10}(100) - \log_{10}(10) = 2 - 1 = 1$$

3. **Potenzregel:**

$$\log_b(x^n) = n \cdot \log_b(x)$$

Beispiel:

$$\log_2(8^2) = 2 \cdot \log_2(8) = 2 \cdot 3 = 6$$

4. **Logarithmus der Basis:**

$$\log_b(b) = 1 \quad (\text{da } b^1 = b)$$

5. **Logarithmus von 1:**

$$\log_b(1) = 0 \quad (\text{da } b^0 = 1)$$

Basisänderungsformel:

Wenn ein Logarithmus mit einer anderen Basis benötigt wird, kann man ihn umrechnen mit:

$$\log_b(x) = \frac{\log_c(x)}{\log_c(b)}$$

Beispiel (Umrechnung in Basis 10):

$$\log_2(8) = \frac{\log_{10}(8)}{\log_{10}(2)} \approx \frac{0.903}{0.301} \approx 3$$

Beispiel mit $x < 1$

Berechnung:

$$\log_{10}(0.01) = -2$$

Erklärung:
Da $10^{-2} = 0.01$, ist der Logarithmus $\log_{10}(0.01)$ gleich **-2**.
Negative Logarithmen treten auf, wenn die Zahl x kleiner als 1 ist.